

Universidad Nacional de Mar del Plata
Facultad de Ingeniería

Mejora de la Función de Peso de Oore para el Estudio de Fisuras Elípticas

Proyecto final desarrollado por:

Roberto Alfredo Chaparro

Para aspirar al grado de:

Ingeniero en Materiales

Director:

Dr. Hugo López Montenegro

Co-Director:

Dr. Adrián Pablo Cisilino

Mar del Plata, Julio de 2013



RINFI se desarrolla en forma conjunta entre el INTEMA y la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-
NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Resumen

La metodología de las funciones de peso es ampliamente utilizada en laboratorios académicos o industriales para caracterizar la severidad de defectos (fisuras) existentes en piezas o componentes de equipos industriales, a fin de evitar o retrasar la posibilidad de fallas catastróficas. Esta técnica es especialmente útil en el caso de geometrías arbitrarias de fisura y configuraciones complejas de carga en múltiples situaciones de interés tecnológico; tales como las que aparecen asociadas a procesos de soldadura o de tratamiento por granallado, en las que fisuras de forma irregular se hallan bajo cargas de tracción-compresión. Cabe destacar que este tipo de configuración de carga suele causar el cierre parcial de la fisura y, en estos casos, el análisis basado en simulaciones numéricas con software de uso estándar (Método de Elementos Finitos o el Método de Elementos de Contorno, entre otros) no resulta sencillo ni de bajo costo computacional. En cambio, el empleo de la función de peso de definición geométrica de Oore y Burns conocida como la integral O, aporta una herramienta numérica versátil y de bajo costo computacional. Sin embargo, como es sabido a partir de la literatura especializada, la integral O aporta soluciones exactas para unas pocas geometrías regulares, como por ejemplo la función de peso de una fisura circular, pero muestra un error creciente en el caso de fisuras elípticas a medida que el factor de aspecto disminuye.

Este trabajo presenta un estudio sobre la aplicación de la integral O al caso de fisuras elípticas, analizando la calidad de las soluciones en distintos puntos de aplicación de cargas puntuales interiores a elipses con distinto factor de aspecto. Los resultados de la integral O son comparados con los obtenidos empleando el método de elementos finitos, a fin de obtener una función correctora de la función de peso. El algoritmo desarrollado mejora a la integral O y posibilita su extensión al análisis fractomecánico de fisuras planas arbitrarias en base a procedimientos ya probados que asocian una geometría irregular con una elipse circundante.

En la primera parte del desarrollo del trabajo, se propone un modelo de elementos finitos para fisuras elípticas inmersas en un volumen que simula el infinito, empleando el programa ABAQUS. Distintas técnicas de mallado 3-D fueron empleadas a fin de seleccionar las más adecuadas al propósito del trabajo, y los resultados por elementos finitos fueron comparados con soluciones analíticas existentes. En la segunda

parte, los resultados de elementos finitos para cargas puntuales en elipses de factor de aspecto igual o superior a 0,4 son comparados con las soluciones provenientes de aplicar la integral O, encontrándose que la función correctora presenta un patrón geométrico tipo, que varía en forma continua según el punto de aplicación de la carga y el factor de aspecto de la elipse estudiada. Por último, se desarrolla un algoritmo que implementa la función correctora de la integral O para elipses de factor de aspecto entre 0,4 y 1. Los resultados para algunas funciones de peso obtenidas a partir de los elementos finitos y de la integral O con y sin corrección, se comparan con una solución exacta existente en la literatura, en forma satisfactoria.

Índice

Capítulo 1	Introducción y objetivo	1
1.1	Introducción	1
1.2	Objetivo	4
Capítulo 2	Fundamentos teóricos	5
2.1	Factor de intensidad de tensiones	5
2.2	Integral J.....	13
2.3	La función de peso y la integral de Oore	17
2.4	Cálculo de la integral J con el Método de Elementos finitos	19
2.5	Sinopsis.....	25
Capítulo 3	Modelado de fisuras elípticas planas	27
3.1	Descripción del modelo.....	27
3.2	Diseño del mallado.....	30
3.3.1	Carga puntual aplicada en el centro de una fisura circular	35
3.3.2	Carga puntual aplicada excéntricamente en una fisura circular.....	36
3.3.3	Tensión remota uniforme aplicada a una fisura circular	37
3.3.4	Tensión remota uniforme aplicada a una fisura elíptica.....	37
3.3.5	Carga puntual aplicada en el centro de una fisura elíptica.....	39
3.4	Sinopsis	40
Capítulo 4	Corrección a la función de peso de Oore	41
4.1	Uso de factores de corrección.....	41
4.2	Obtención de factores de corrección.....	42
4.3	Aproximación para las curvas de f_c vs. φ	43
4.4	Predicción de los puntos característicos de la curva de f_c en condiciones de carga puntual y factores de aspecto arbitrarios.....	49
4.5	Limitación para el empleo del algoritmo	55
4.6	Verificación del método propuesto.....	56
4.7	Comentarios sobre los resultados	62

4.8 Rutinas utilizadas	66
4.9 Sinopsis	67
Capítulo 5 Conclusión y trabajos a futuro	69
5.1 Conclusión	69
5.2 Trabajos a futuro	70
Referencias	73
Anexo (DVD)	Contratapa
Carpeta con modelos.	
Carpeta con rutinas de MatLab.	
Carpeta con resultados.	

Lista de figuras

Capítulo 1

Figura 1-1	Nomenclatura de una fisura superficial.....	3
Figura 1-2	Interacción de fisuras superficiales según API 579	3

Capítulo 2

Figura 2-1	Geometría y variables utilizadas por Irwin y Williams en sus cálculos	5
Figura 2-2	Configuraciones básicas de cargas que implican movimientos relativos entre las caras de una fisura	6
Figura 2-3	Gráfico σ_{yy} vs. r en el frente del defecto	10
Figura 2-4	Contorno arbitrario alrededor de la punta de una fisura y variables para el cálculo de J	14
Figura 2-5	Flujo de energía hacia un pequeño contorno abierto en la punta de una fisura que se propaga.....	15
Figura 2-6	Detalle de las variables geométricas involucradas en el cálculo de $W_{QQ'}$	19
Figura 2-7	Contorno cerrado Γ^* alrededor de la punta de una fisura bidimensional	21
Figura 2-8	Dominio de integración equivalente para la integral J	22
Figura 2-9	Superficie cerrada S^* que envuelve al borde de la fisura plana tridimensional	23

Capítulo 3

Figura 3-1	La superficie sombreada contiene a la fisura y corresponde al plano de simetría del volumen cilíndrico empleado en el modelo	27
Figura 3-2	Particiones típicas en los modelos	29
Figura 3-3	Elemento isoparamétrico de 20 nodos usado en 3-D	30
Figura 3-4	Transformación de un elemento <i>prismático rectangular</i> a uno <i>prismático triangular</i>	31
Figura 3-5	Mallado con forma de telaraña utilizado en problemas de fisuras	32
Figura 3-6	Mapeo de los tipos de elementos usados según las diferentes regiones.....	33

Figura 3-7	Mallado de una elipse $r = 0,4$	34
Figura 3-8	Diferencia entre ángulo polar θ y paramétrico φ que definen la posición del punto Q' en el frente de la fisura.....	38

Capítulo 4

Figura 4-1	Detalle de la grilla sobre la que se posicionan las cargas	43
Figura 4-2	Curva típica f_c vs. φ , $r = 0,4$ con la carga puntual aplicada en $x = 0$ e $y = 0$	44
Figura 4-3	Curva típica f_c vs. φ , $r = 0,4$ con la carga puntual aplicada en $x = 0$ e $y = 0,2$	45
Figura 4-4	Curva típica f_c vs. φ , $r = 0,4$ con la carga puntual aplicada en $x = 0,4$ e $y = 0,2$	45
Figura 4-5	Curva típica f_c vs. φ , $r = 0,5$ con la carga puntual aplicada en $x = -0,3$ e $y = -0,1$	46
Figura 4-6	Curva típica f_c vs. φ , $r = 0,6$ con la carga puntual aplicada en $x = 0$ e $y = 0,1$	46
Figura 4-7	Puntos característicos de la gráfica para f_c vs. φ	47
Figura 4-8	Superficie generada en el espacio (X_q, Y_q, f_{c1})	50
Figura 4-9	Superficie generada en el espacio (X_q, Y_q, φ_2)	51
Figura 4-10	Superficie generada en el espacio (X_q, Y_q, f_{c4})	51
Figura 4-11	Discriminación entre zonas de interpolación/ extrapolación para el factor de aspecto $r = 0,4$	52
Figura 4-12	Discriminación entre zonas de interpolación/ extrapolación para el factor de aspecto $r = 0,6$	53
Figura 4-13	Discriminación entre zonas de interpolación/ extrapolación para el factor de aspecto $r = 0,8$	53
Figura 4-14	Variación típica de uno de los parámetros en función del factor de aspecto	54
Figura 4-15	Diagrama de flujo para el algoritmo corrector	55
Figura 4-16	El punto (s, t) esta adentro de la elipse de $r = 0,8$	56
Figura 4-17	Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{Atroshchenko}$ todas en función del ángulo paramétrico para $r = 0,4$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0; 0)$	61
Figura 4-18	Gráficos del % de error de $W_{QQ'}^{O\&B}$ y $W_{QQ'}^{corregida}$ contra $W_{QQ'}^{EF}$. Para $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; -0,4)$	62
Figura 4-19	Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$ todas en función del ángulo paramétrico para $r = 0,5$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; 0,1)$	63

Figura 4-20	Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$, todas en función del <i>ángulo paramétrico</i> para $r = 0,5$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (-0,3; -0,1)$64
Figura 4-21	Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$, todas en función del <i>ángulo paramétrico</i> para $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; -0,4)$64
Figura 4-22	Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$, todas en función del <i>ángulo paramétrico</i> para $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,34; -0,23)$65
Figura 4-23	Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$, todas en función del <i>ángulo paramétrico</i> para $r = 0,8$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,8; 0,1)$65

Capítulo 5

Figura 5-1	Diferencia entre la función despejada de EF y la integral predicha por Oore & Burns71
------------	---

Lista de tablas

Capítulo 2

Tabla 2-A	Campo de tensiones y deformaciones para el modo I de apertura.....	7
Tabla 2-B	Campo de tensiones y deformaciones para el modo II de apertura	8
Tabla 2-C	Campo de tensiones y deformaciones para el modo III de apertura.....	8

Capítulo 3

Tabla 3-A	Comparación entre las W_{QQ} , calculadas analíticamente y por medio de EF.....	35
Tabla 3-B	Resultados para fisura circular con carga puntual excéntrica.....	36
Tabla 3-C	Resultados para fisura circular solicitada por una tensión remota uniforme	37
Tabla 3-D	Resultados para fisura elíptica solicitada por una tensión remota uniforme	38
Tabla 3-E	Resultados para fisura elíptica solicitada por una carga puntual en su centro	39

Capítulo 4

Tabla 4-A	Promedio de errores encontrados	49
Tabla 4-B	$r = 0,5$ y carga puntual unitaria en $(x_q; y_q) = (0,2; 0,1)$	57
Tabla 4-C	$r = 0,5$ y carga puntual unitaria en $(x_q; y_q) = (-0,3; -0,1)$	58
Tabla 4-D	$r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q; y_q) = (0,2; -0,4)$	58
Tabla 4-E	$r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q; y_q) = (0,34; -0,23)$	59
Tabla 4-F	$r = 0,8$ y carga puntual unitaria en $(x_q; y_q) = (0,8; 0,1)$	60
Tabla 4-G	Valores máximo, mínimo y promedio para el % de error entre las distintas W_{QQ}	61
Tabla 4-H	Rutinas utilizadas	66

1 Introducción y objetivo

1.1 Introducción

A mediados del siglo XX se hizo incuestionable la necesidad de reformular el paradigma del diseño ingenieril. Evidencia de ello fueron una serie de accidentes en estructuras civiles que ocurrieron durante la primera mitad de ese siglo y que, pasada la Segunda Guerra Mundial, comenzaron a observarse en otras ramas de la ingeniería (construcción naval y aeronáutica) [1]. Los motivos que llevaron al aumento de estas fallas catastróficas de las estructuras fueron la necesidad de fabricar mecanismos cada vez más complejos, equipos más grandes y el desarrollo de nuevos métodos de unión entre piezas metálicas; éste último probablemente el factor más influyente.

Alrededor de 1920 Griffith, intrigado por la discrepancia existente entre los valores teóricos y observados para la resistencia de materiales, descubre la existencia de *fisuras microscópicas*; defectos que se hallan *siempre* presentes en los materiales. Propuso entonces, que estos defectos *intrínsecos* generan en el material una concentración de tensiones muy localizada a medida que el espécimen es solicitado. Como resultado la tensión en el borde de estas discontinuidades del material, llamadas fisuras, se eleva. Las fisuras crecen rápidamente, y causan la falla catastrófica del componente mucho antes de que la resistencia teórica sea alcanzada. De estas observaciones Griffith formuló, para materiales elásticos frágiles, que una fisura puede propagar cuando su crecimiento garantiza que la energía consumida en la creación de nuevas superficies de fractura es menor que la energía potencial elástica almacenada en el material. La energía potencial elástica es la debida a la carga externa aplicada y al campo de deformaciones interno presente en la muestra.

Si bien el trabajo de Griffith fue significativo, no incluía en su estudio a materiales dúctiles. Irwin y Orowan por separado, en los años 50s, investigaron como modificar la teoría a fin de obtener resultados más generales para situaciones ingenieriles. Orowan utilizó términos que tenía en cuenta los *sumideros* de energía en el proceso de fractura (trabajo de creación de superficie y trabajo de deformación plástica); mientras que Irwin optó por utilizar un término que tenía en cuenta la *fuentes* de la energía para el crecimiento de la fisura (esto es, energía elástica por unidad de incremento de área de fisura).

La Mecánica de Fractura Lineal Elástica nace de estas investigaciones previas y del trabajo publicado por Irwin en 1957 [2].

Al trabajar con defectos de radios de curvatura muy pequeños, como es el caso de las puntas de una fisura, surge la necesidad de introducir el *factor de intensidad de tensiones*, K . Este último término no debe ser confundido con el *factor de concentración de tensiones*, que es con lo que trabajo Griffith originalmente. El factor de concentración de tensiones muestra cuánto se amplifica la tensión en la punta de la fisura; el factor de intensidad de tensiones se usa para describir la distribución tensional alrededor de un defecto particular. Este último es utilizado para investigar, en particular, el modo de apertura (o modo I) de fractura que es el más común. El factor de intensidad de tensiones depende de un número de variables: tensión aplicada, forma y orientación de las fisuras, geometría del espécimen y factores medioambientales.

A Principios de los años 70s, Bueckner propone que el factor de intensidad de tensiones, puede vincularse con la carga aplicada a través de una *función de peso* [3]. En 1980, Oore y Burns sugieren que en la expresión de esta función de peso, puede usarse un factor integral, conocido comúnmente como Integral de Oore [4]. La integral comprende las configuraciones geométricas tanto de la carga como de la fisura misma (ver Capítulo 2). Este algoritmo mostró ser exacto en el caso de fisuras circulares, paralelas infinitas y ligamento circular en un volumen infinito [4]. Sin embargo, para el caso de elipses, resultó poco preciso para factores de aspecto bajos [4,5]. En el trabajo de Desjardins [5], por ejemplo, se reporta para el caso de tensión uniforme un error máximo cercano al 18% para una elipse de factor de aspecto $r = 0,2$, en la región de mayor curvatura (extremo del semieje mayor).

La utilidad de contar con la integral de Oore radica en que la misma es aplicable a fisuras de geometría plana arbitraria y, como toda función de peso a configuraciones de cargas cualesquiera. Por otra parte, las geometrías regulares como las elipses resultan apropiadas para estudiar correcciones a la función de peso, ya que estas geometrías vienen siendo empleadas con frecuencia en normas existentes, para caracterizar fisuras de manera global [6, 7]. Es esta situación la que motiva el presente trabajo.

Junto con el desarrollo de estas teorías de la fractura, también fue creciendo la experiencia en la fabricación y evaluación de maquinarias y estructuras. Todo ese conocimiento dio lugar a la aparición de reglas basadas en análisis teóricos y procedimientos

del buen arte. Con el tiempo, estas reglas se agruparon en normas que son las usadas actualmente por diseñadores a fin de maximizar la vida útil de los componentes frente a la rotura. Las de mayor uso son norteamericanas (ASME, PD 6493, EPRI, ASME PVPC, API, NEMA, CEPA, etc.) y europeas (DIN, ISO, entre otras.). Estos códigos están contruidos sobre herramientas experimentales y numéricas; tales como el estudio de fallas sobre la estructura misma, ensayos de laboratorio de probetas, o análisis numéricos. Respecto a estos últimos, el empleo de elipses para modelar los defectos ha sido de gran ayuda. Un ejemplo es la práctica API 579 [7], la cual caracteriza fisuras cuya geometría y orientación es relevada por ultrasonido, y sobre la base de sus dimensiones máximas de ancho y profundidad, las modela como elipses. Incluso en los casos en que se presentan fisuras múltiples, las mismas pueden ser modeladas como una única fisura elíptica, bajo ciertas condiciones. Las figuras 1-1 y 1-2 muestran, respectivamente, estos casos.

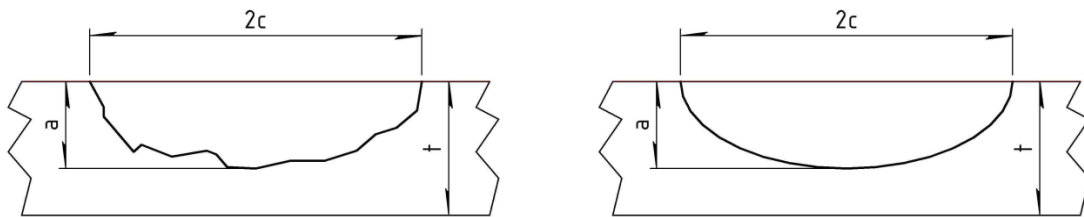


Figura 1-1. Nomenclatura de una fisura superficial. Fisura real (izquierda) y fisura idealizada (derecha) según API 579.

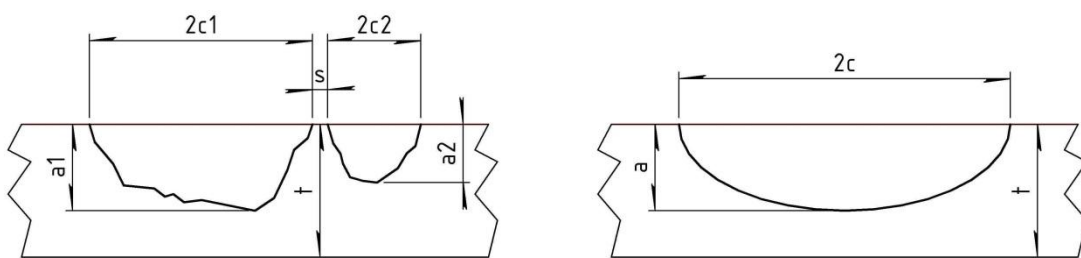


Figura 1-2. Interacción de fisuras superficiales coplanares según API 579. Fisuras reales (izquierda) y fisura idealizada (derecha) siendo $2c = 2c_1 + 2c_2 + s$ y $a = \max[a_1, a_2]$. Este razonamiento es válido siempre que se cumpla $c_1 + c_2 \geq s$.

Ha de tenerse en cuenta que la caracterización correcta de la criticidad de un frente elíptico que idealiza una fisura de frente irregular, posibilita estimar de forma más confiable el comportamiento del frente real mediante algoritmos de base geométrica como la integral de Oore y Burns, detallada más adelante en este trabajo.

1.2 Objetivo

Este proyecto final corrige las desviaciones observadas para la función de peso de Oore en los casos de fisuras idealizadas como elipses. Se reduce así sustancialmente la incerteza producida por la utilización de esta ecuación para estimar el factor de intensidad de tensiones en modo de apertura (K_I) en el perímetro de este tipo de fisuras.

Se obtiene un algoritmo fácilmente programable y de bajo costo computacional, que permite calcular las funciones de peso en el perímetro de una fisura elíptica en forma confiable con su potencial aplicación a geometrías de frente arbitrario. Como ya fue mencionado, la importancia de resolver adecuadamente geometrías elípticas es que permite estudiar los defectos reales encontrados en la práctica, y estimar la propagación de fisuras en componentes estructurales haciendo uso de simulaciones por computadora.

2 Fundamentos teóricos

Esta sección expone los elementos de la teoría de fractura en un nivel introductorio, y sirve como guía para contextualizar el desarrollo del trabajo. Se explican a continuación el Factor de Intensidad de Tensiones y su utilidad, los conceptos que involucra la integral J , el uso de funciones de peso y en qué consiste la integral de Oore. Todos estos conceptos aportan herramientas numéricas que permitirán el desenvolvimiento de este trabajo. También se expone la manera en que el cálculo de la integral J se lleva a cabo por el método de elementos finitos (EF). La literatura especializada en Mecánica de Fractura es diversa y abundante. En el presente trabajo se referencia una pequeña parte de la misma, relacionada con el objeto de estudio.

2.1 Factor de intensidad de tensiones (*FIT*)

Mediante el uso de métodos analíticos, Irwin [8] y Williams [9] calcularon soluciones para los campos tensionales y de desplazamientos en puntas de fisuras. Estos resultados se presentan en las tablas 2-A a 2-C. La figura 2-1 da cuenta de la disposición de los ejes cartesianos utilizados para el cálculo. La configuración de carga se presenta en 3 modos principales, los cuales involucran diferentes movimientos relativos entre las caras de una fisura. La figura 2-2 muestra estas configuraciones.

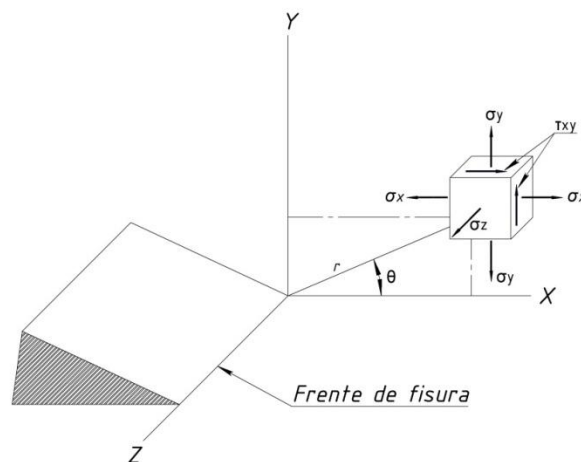


Figura 2-1. Geometría y variables utilizadas por Irwin y Williams en sus cálculos.

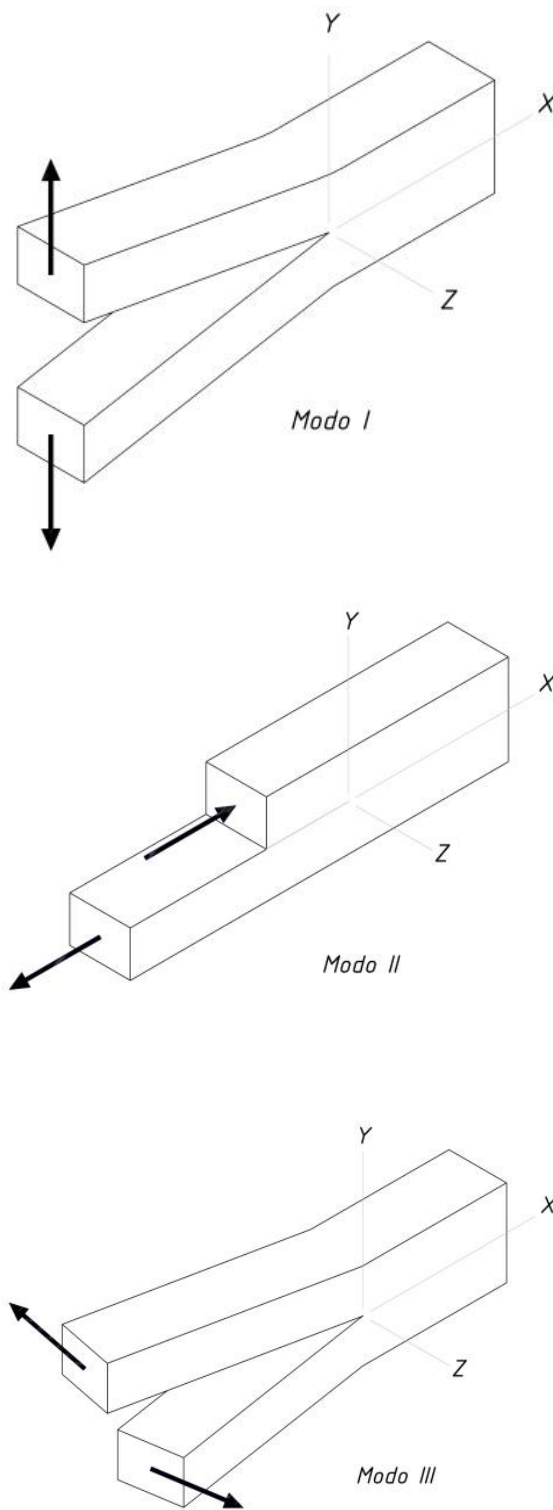


Figura 2-2. Configuraciones básicas de cargas que implican movimientos relativos entre las caras de una fisura.

Modo I: *modo de apertura*, consiste en la separación de las caras de la fisura en dirección normal a las superficies que la definen.

Modo II: *modo de deslizamiento o de corte en el plano*, cuando las caras de la fisura se deslizan una por sobre la otra en dirección perpendicular a la línea que define el frente de la fisura.

Modo III: *modo de desgarrado o de corte fuera del plano*, cuando las caras de la fisura se deslizan una por sobre la otra en dirección paralela a la línea que define el frente de la fisura.

$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + \sigma_{xx0} + O(\sqrt{r})$
$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + O(\sqrt{r})$
$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + O(\sqrt{r})$
$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (\text{tensión plana})$ $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{deformación plana})$
$u_x = \left[\frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \right] \left[(2\kappa - 1) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(r)$
$u_y = \left[\frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \right] \left[(2\kappa + 1) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(r)$
$u_z = -\frac{\nu}{E} \int (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) dz \quad (\text{tensión plana})$ $u_z = 0 \quad (\text{deformación plana})$

Tabla 2-A. Campos de tensiones y deformaciones para el modo I o de apertura.

$\sigma_{xx} = \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(\sqrt{r})$
$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + O(\sqrt{r})$
$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(\sqrt{r})$
$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (\text{tensión plana})$ $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{deformación plana})$
$u_x = \left[\frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \right] \left[(2\kappa + 3) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(r)$
$u_y = \left[\frac{-K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \right] \left[(2\kappa - 3) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(r)$
$u_z = -\frac{\nu}{E} \int (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) dz \quad (\text{tensión plana})$ $u_z = 0 \quad (\text{deformación plana})$

Tabla 2-B. Campos de tensiones y deformaciones para el modo II.

$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + O(\sqrt{r})$
$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + O(\sqrt{r})$
$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0$
$u_x = u_y = 0$
$u_z = \left[\frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \right] \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + O(r)$

Tabla 2-C. Campos de tensiones y deformaciones para el modo III.

En las tablas 2-A a 2-C valen las siguientes relaciones:

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{para tensión plana}$$

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad \text{para deformación plana}$$

Un detalle inmediato que surge de las ecuaciones, es que todos los modos de carga aplicables a la fisura dan como resultado una singularidad en el campo de tensiones, que es proporcional a $1/\sqrt{r}$ ¹. La expresión (2-1) resume las ecuaciones de tensiones para la vecindad de la fractura.

$$\sigma_{ij}^M = \frac{K_M}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^M(\theta) \quad (2-1)$$

con:

i, j := índices de dirección y sentido.

$f_{ij}^M(\theta)$:= función del ángulo θ , específica del modo (M), dirección y sentido.

$M = I, II, III$:= modo de carga sobre la fisura.

Las configuraciones de la carga y la geometría, así como el tamaño del defecto, entran en juego en las ecuaciones a través de K_M . La Ec. (2-1) presenta a K_M como un factor de escala que define la magnitud del campo tensional enfrente de la fisura.

El *modo I* se encuentra en la mayoría de las situaciones ingenieriles que involucran componentes fisurados. Aún en ciertos casos en que se presenta un modo mixto, puede demostrarse que es el *modo I* el que domina el comportamiento del campo tensional [10, 11]. Es por esto que se ha puesto más énfasis en desarrollar métodos analíticos y experimentales para cuantificar la funcionalidad $K = f(\sigma, \text{tamaño de defecto})$ en este modo de falla más que en cualquiera de los otros.

La ecuación (2-1) evidencia que para valores de $r \rightarrow 0$, las tensiones alcanzan valores elevados muy rápidamente. Esto es cierto, pero sólo hasta que el material alcance la fluencia.

¹ Esto se debe a que en el desarrollo en serie de potencias, el primer término es el dominante y el que contiene la singularidad mencionada.

No hay que olvidar que la Ec. (2-1) es una idealización matemática. Sin embargo de cumplirse que la zona plastificada este confinada a un pequeño entorno en la punta de la fisura, en comparación con el tamaño del defecto y otras dimensiones características de la pieza, puede entonces garantizarse [12] que el campo tensional todavía es adecuadamente descrito por la expresión (2-1). Vale la pena aclarar que el término σ_{xx0} que aparece en la ecuación de σ_{xx} (tabla 2-A), influye en el tamaño y forma de la zona plastificada en el vértice de la fisura. Este término constante tiene las particularidades de ser paralelo al plano de la fisura y ser dependiente de la geometría. También se lo ha dado en llamar T . Si bien se lo ignora en condiciones de fluencia en baja escala, Larsson y Carlsson han determinado su valor para ciertas geometrías [13].

En la figura 2-3 se grafica σ_{yy} vs. r en el frente de la fisura, tomando $\theta = 0$ y una tensión remota (σ^∞) actuando en *modo I*. La zona plastificada se encuentra rodeada por el entorno en que el término singular controla el valor de σ_{yy} y, consecuentemente, la propagación del defecto. El fenómeno de fluencia interrumpe toda dependencia funcional de σ_{yy} con r para distancias menores al tamaño del *radio plástico* (r_y). La creciente diferencia entre σ^∞ (real) y la curva analítica para valores de r grandes, se debe a que la idealización matemática *no* está teniendo en cuenta el término $O(\sqrt{r})$ presente en el resto de la serie de potencias.

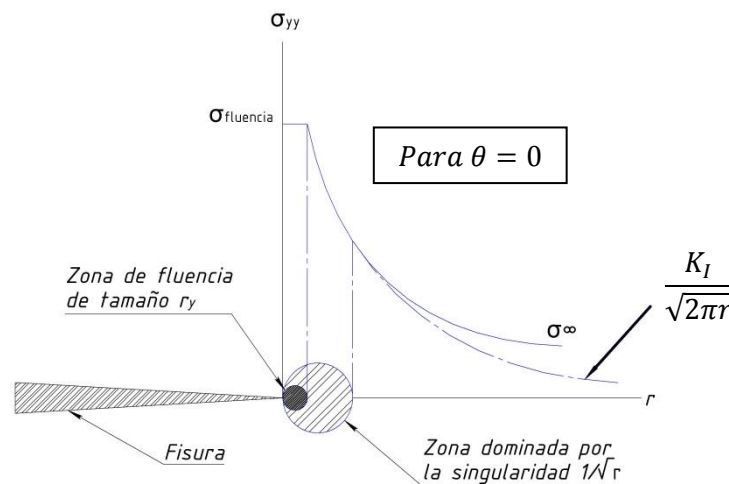


Figura 2-3. Gráfico σ_{yy} vs. r en el frente del defecto.

Se puede argumentar entonces que en condiciones de fluencia en pequeña escala, tratándose de un material lineal elástico y cumpliendo ciertas condiciones geométricas, K

caracteriza completamente los campos de tensión, deformación y desplazamiento en el frente de la fisura. En estos casos K , dependerá solamente de la geometría del componente que presente el defecto y de la configuración con que sea aplicada la carga.

Otro concepto asociado al *FIT* es el de *tenacidad de fractura*, K_C . Este es un *valor crítico* que toma K asociado a cada material en particular cuando una determinada combinación de tensiones hace que el material falle localmente y fomenta el crecimiento del defecto. K_C puede ser obtenido en el laboratorio a partir de probetas del material y ser utilizado luego en la práctica para tenerlo en cuenta en el cálculo de estructuras.

La unidad del factor de intensidad de tensiones es *tensión* $\times \sqrt{\text{longitud}}$. Las ecuaciones (2-2, 2-3 y 2-4) son las definiciones formales de cada K_M .

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \sigma_{yy}(r, \theta = 0)] \quad (2-2)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \tau_{yx}(r, \theta = 0)] \quad (2-3)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \tau_{yz}(r, \theta = 0)] \quad (2-4)$$

En la práctica se frecuenta el uso de la definición (2-5), que resulta más conveniente de utilizar. El *factor geométrico* Y depende del tamaño del defecto y las dimensiones del cuerpo fisurado.

$$K = \sigma \cdot Y \cdot \sqrt{\pi a} \quad (2-5)$$

con:

σ := tensión remota.

Y := factor geométrico, adimensional, función de la geometría y tamaño de defecto.

a := tamaño de fractura.

K resulta útil para caracterizar defectos en un material lineal elástico. Pero el software comercial que se utiliza para el desarrollo de este trabajo, no calcula el *FIT* de manera directa, sino que lo hacen a través de métodos energéticos. Entonces es necesario vincular a K con una variable energética que el programa de elementos finitos sea capaz de calcular. Para el

caso de materiales lineales elásticos, existe una relación unívoca entre el *FIT* y la tasa de liberación de energía potencial del cuerpo por unidad de incremento de área del defecto, G . Este último concepto es aquel mencionado en la introducción y que fue propuesto por Irwin para el estudio de propagación de fisuras, expresado en la Ec. (2-6).

$$G = - \frac{d\Pi}{dA} \quad (2-6)$$

con:

Π := energía potencial del cuerpo elástico (la almacenada en el campo de deformaciones internas del cuerpo y la generada por fuerzas externas actuantes sobre el mismo).

A := área de la fisura.

Como G es obtenida de la derivada de una energía potencial se la puede interpretar como la *fuerza motriz* para el crecimiento del defecto. G cuantifica el cambio neto de energía potencial que posee el medio continuo y que acompaña al incremento de área del defecto; K caracteriza a los desplazamientos, deformaciones y tensiones en un entorno de la línea del frente de fisura. En este sentido, G es un parámetro global y K uno local. Buscando una relación entre estos dos parámetros, Irwin [2] llevo a cabo un análisis en donde aplicó un campo de tensión compresivo sobre ambas caras de una fisura. Para el caso particular de apertura (*modo I*), demostró que la relación buscada es la mostrada en la expresión (2-7).

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2-7)$$

con:

K_I := *FIT* en modo I.

E' := E (Módulo de elasticidad) para el caso de *tensión plana*.

E' := $\frac{E}{1-\nu^2}$ para el caso de *deformación plana* (ν := coeficiente de Poisson).

De esta forma el factor de intensidad de tensiones queda relacionado a la variable energética que representa la variación de energía potencial del cuerpo fisurado en estudio.

2.2 Integral J

Para el desarrollo de este trabajo es necesario hallar valores del factor de intensidad de tensiones, K . Sin embargo, como ya se dijo en la sección anterior, el método de elementos finitos no computa en forma directa a los valores del FIT , sino que lo hace a través de un tratamiento algebraico basado en un análisis de la energía potencial elástica, la integral J . Este parámetro es de suma utilidad en el estudio de defectos en problemas que involucran materiales que exhiben tanto comportamiento elástico como también dependencia del tiempo.

La integral J es un concepto presentado por Rice [12,18], quien pudo estudiar problemas de fractura en dos dimensiones con materiales de comportamiento elástico no lineal. Rice propuso la definición dada en la ecuación (2-8) para el caso bidimensional, considerando el caso de un material elástico no lineal. La geometría involucrada en esta definición se presenta en la figura 2-4.

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dx_2 - \vec{t} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} ds \right) \quad (2-8)$$

con:

x_1, x_2 := coordenadas rectangulares perpendiculares entre sí, definidas en el frente de la fisura.

Γ := curva arbitraria recorrida, con sentido contrario al de las agujas del reloj.

ds := incremento infinitesimal a lo largo del contorno Γ .

$W = \int \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}$:= densidad de energía de deformación, exhibe las propiedades de un potencial elástico. σ_{ij} y ϵ_{ij} son, respectivamente, los tensores de tensión y deformación.

\vec{u} := vector desplazamiento.

\vec{t} (siendo $t_i = \sigma_{ij}n_j$) := vector de tensiones actuando en el contorno Γ .

\vec{n} := vector normal unitario a Γ en cada punto.

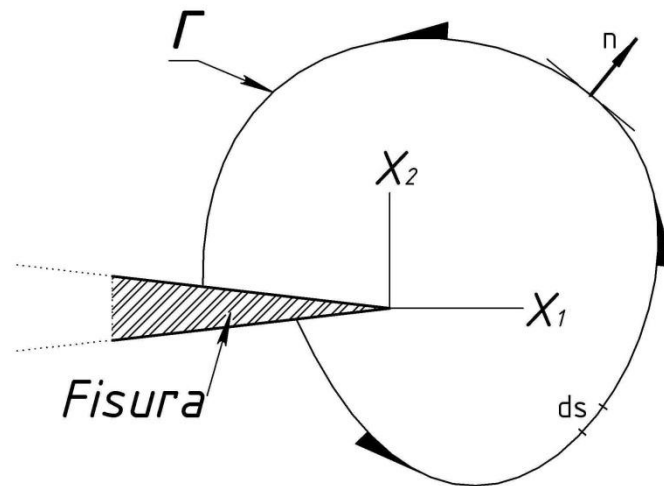


Figura 2-4. Contorno arbitrario alrededor de la punta de una fisura y variables para el cálculo de J .

Tal como mostraron en forma independiente Hutchinson [14] y Rice y Rosengren [15], la integral J caracteriza las condiciones en la punta de la fisura en un material elástico no lineal. La iniciación de la fractura ocurre cuando esta integral, denominada *integral J*, alcanza un valor crítico J_C propio del material.

El uso de la definición (2-8) supone que el material, aparte de ser elástico, se carga de manera cuasiestática, en ausencia de fuerzas de volumen y sin tener en cuenta deformaciones debidas a *stress* térmico. Rice expuso dos aspectos importantes de la integral J estando bajo estas suposiciones [18]. Primero, demostró que esta integral de línea es independiente del camino de integración. Esto quiere decir que el valor de la integral calculada a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo. Por otra parte, también expuso que esta integral es igual a la *tasa de liberación de energía potencial del cuerpo por incremento de área de fisura* [18]. Resulta entonces que J es una generalización de G que además tiene en cuenta a los materiales elásticos no lineales².

Para estudios en dos dimensiones la integral J puede ser evaluada numéricamente a lo largo de contornos continuos que rodean a la línea de fractura. La principal ventaja de este método es que, en materiales elásticos, la independencia respecto de los caminos de integración permite evaluar J en regiones alejadas del frente de fisura donde la precisión del cálculo numérico es mayor. Para problemas que presentan deformación plástica o por estrés

² sección 2.1, Ec. (2-6)

térmico³, se puede calcular J en contornos alejados haciendo uso de un término de corrección [16,17].

Sin embargo, para problemas tridimensionales la integral de contorno se vuelve una integral de superficie, que es difícil de evaluar numéricamente. La sección 2.4 explica cómo es que el Método de Elementos Finitos calcula los valores locales de J en la línea que define al frente de un defecto.

El concepto de integral J entendido como una *tasa de liberación de energía potencial del cuerpo por unidad de incremento de área de defecto* puede ser trabajado para dar forma a una expresión más general que comprenda efectos dinámicos y materiales con comportamiento dependiente del tiempo⁴. Un planteamiento más preciso para entender a J es considerar el trabajo hecho sobre la punta del defecto para su crecimiento. Si se considera a una curva abierta Γ , de longitud tendiente a desaparecer, que rodee al extremo de la fisura. Ver figura 2-5. Tomando al parámetro Φ como el flujo de energía potencial que atraviesa a la superficie imaginaria Γ y a V como la velocidad de crecimiento del defecto, entonces se puede plantear que en un incremento infinitesimal de tiempo (dt) el defecto incrementa su área como $dA = V \cdot dt$ y que la energía gastada para ese crecimiento es $dE = \Phi \cdot dt$. Por tanto es posible entender a J como lo expresa la (2-9).

$$J = \frac{\Phi}{V} \quad (2-9)$$

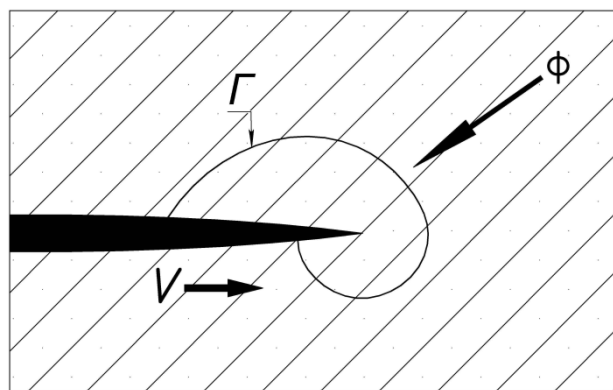


Figura 2-5. Flujo de energía hacia un pequeño contorno abierto en la punta de una fisura que se propaga.

³ Problemas no elásticos.

⁴ El software de elementos finitos usado para este trabajo utiliza en su código a esta expresión más general. A medida que se cargan los parámetros en el modelo del problema en estudio, el software va descartando los términos de J generalizada que no se utilizan.

Para seguir un razonamiento que genere una expresión para el flujo Φ , el lector puede consultar la bibliografía [18]. Bastará saber, para lo que sigue del trabajo, que la expresión de Φ mostrada en (2-10) se obtiene partiendo de la ecuación de movimiento Euleriana e integrándola en un volumen arbitrario. T es el término de densidad de energía cinética y w resulta ser la densidad de energía potencial. El resto de las variables se definieron en la página 13.

$$\Phi(\Gamma) = \int_{\Gamma} [(w + T)V\delta_{1j} + \sigma_{ji}\dot{u}_i]n_j d\Gamma \quad (2-10)$$

En el límite en que la longitud de Γ se hace cero, el flujo se vuelve independiente de la forma de esta curva. Ergo, el flujo Φ quedará expresado en la forma (2-11).

$$\Phi = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} [(w + T)V\delta_{1j} + \sigma_{ji}\dot{u}_i]n_j d\Gamma \quad (2-11)$$

Volviendo la definición (2-9) luego de desarrollar a la derivada material de los desplazamientos \dot{u}_i en función de la velocidad de crecimiento de fisura⁵ V , se llega finalmente a la expresión general de J (2-12).

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[(w + T)\delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] n_i d\Gamma \quad (2-12)$$

Esta expresión para la integral J es aplicable a cualquier clase de comportamiento mostrado por un material ya que se obtiene a través de un balance de energía.

Finalmente vemos que J y K se relacionan de forma sencilla. Ya se mencionó que en condiciones elásticas lineales J es el equivalente del parámetro G definido en la sección 2.1. Es decir que J es la fuerza impulsora del defecto. Esta noción da lugar a la relación (2-13).

$$J = \frac{K^2}{E'} \quad (2-13)$$

Donde al igual que antes,

$$E' = E \text{ (estado plano de tensiones)}$$

⁵ Una simplificación adicional requerida por este razonamiento, es considerar que el proceso de crecimiento del defecto se lleva a cabo en condición de estado estacionario [18].

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \text{ (estado plano de deformaciones)}$$

Por tanto, J es un análogo de K para el caso de campos tensionales elásticos lineales.

2.3 La función de peso y la integral de Oore

Muchas veces es necesario calcular K para un mismo cuerpo e igual geometría de defecto, pero bajo diferentes configuraciones de carga. Una forma de lograr esto, sin necesidad de elevar el costo de cálculo o de experimentación, es utilizar el concepto de función de peso⁶. Este fue introducido por Bueckner [3] haciendo uso de campos elásticos representados por funciones analíticas en materiales isótropos. Así, si se conoce la función de peso para un defecto presente en un componente, K puede ser obtenido multiplicando esta función por la distribución de tensiones e integrando este producto a lo largo de la línea del defecto. En su expresión para el caso 2-D, el factor de intensidad de tensiones K_I podrá entonces ser calculado para un punto Q' del borde como lo muestra la integral (2-14) (ver también figura 2-6).

$$K_{IQ'} = \int_A \sigma_Q \cdot W_{QQ'} \cdot dA \quad (2-14)$$

Donde:

σ_Q := tensión aplicada en un punto Q genérico del interior de la fisura de área A .

$W_{QQ'}$:= función de peso, que cuantifica la contribución de una carga puntual en Q a K_I en Q' .

La expresión (2-14) puede ser extendida a los otros modos de carga, no abordados en este trabajo.

Rice [20], por su parte, demostró que la función de peso existe y es única para cada situación de cuerpo y fisura bajo consideración, independientemente de cómo sea solicitado el cuerpo.

De acuerdo entonces al concepto de función de peso [21], la misma queda definida como en la expresión (2-15)⁷. En esta enunciación se supone que un par de fuerzas puntuales,

⁶ También conocida como función de Green.

⁷ Expresión utilizada por *Labbens et al.*

ubicadas en el punto Q y de magnitud P_Q , están actuando en forma simétrica respecto de la superficie de fractura produciendo un factor de intensidad de tensiones $K_{QQ'}$ en el punto Q' ubicado en la frontera que define a la línea de fisura. Ver parte superior de la figura 2-6.

$$W_{QQ'} = \frac{K_{QQ'}}{P_Q} \quad (2-15)$$

Esta expresión es útil para este trabajo en particular ya que se pretende encontrar $W_{QQ'}$ a partir de valores del FIT obtenidos por la conjunción del método de Elementos Finitos y la integral J .

Oore y Burns tomaron soluciones de K_I calculadas analíticamente para geometrías y configuraciones de cargas sencillas y, usando la Ec. (2-15), hallaron para esos casos las expresiones de $W_{QQ'}$. Observaron que entre todas las expresiones existían determinados patrones. Finalmente elaboraron la expresión (2-16), la cual incluye entre sus factores a la denominada *Integral O* (o Integral de Oore). *Esta integral es la clave para hallar K_I en cualquier punto del borde irregular de una fisura plana interior a un sólido infinito, sujeta a un estado de carga arbitrario y en dirección normal al plano de la fisura.*

$$W_{QQ'}^{Oore\&Burns} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{l_{QQ'}^2} \left[\int_s \frac{ds}{\rho_Q^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-16)$$

La figura 2-6 muestra las variables que se utilizan en la definición (2-16). Para un desarrollo detallado de la expresión (2-16), referirse a la bibliografía citada [4].

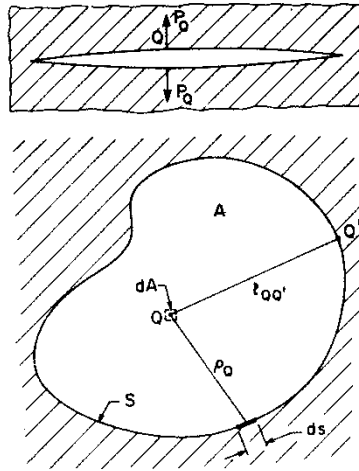


Figura 2-6. Detalle de las variables geométricas involucradas en el cálculo de $W_{QQ'}$.

Luego, el problema de encontrar la función de peso para una dada configuración de carga, consiste en computar adecuadamente la expresión integral en (2-16). Esta premisa demostró ser cierta para cierto tipo de geometrías regulares, a excepción de las elipses, parábolas e hipérbolas [4]. En el caso de elipses, por ejemplo, se observa que el error aumenta (más de un 18%) a medida que el factor de aspecto disminuye. En un principio, este apartamiento de la respuesta esperada⁸, podría atribuirse a errores de integración numérica. Como se muestra en el trabajo de Desjardins [5], esto último no es cierto. En concreto, concluye que el error proviene de la propia Integral O. Resulta en consecuencia necesario reformular la expresión para la integral de línea en la Ec. (2-16) o proponer una corrección general para dicha expresión.

2.4 Cálculo de la integral J con el Método de Elementos Finitos

El software de elementos finitos usado para este trabajo⁹ guarda en su código a la expresión más general de J . Por lo tanto es necesario explicar cómo es que el método de EF evalúa a esta integral. Primero se da una explicación básica para el caso de 2 dimensiones y

⁸ Recuérdese que siempre se está comparando con soluciones exactas, o casi exactas (1% de error), encontradas en la teoría.

⁹ Abaqus v6.10-1

luego se expande para abarcar a los casos tridimensionales como los ensayados en el resto de este trabajo. En la bibliografía [18] se puede encontrar mayores detalles respecto de los pasos algebraicos efectuados.

La sección 2.2 presenta una expresión general para la integral J que incluye a los efectos de inercia así como también comportamientos de materiales distintos a la respuesta elástica. En el caso bidimensional, la definición generalizada de J requiere que el contorno¹⁰ Γ que se encuentra rodeando a la punta de la fisura sea infinitamente pequeño, entonces:

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[(w + T) \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] n_i d\Gamma \quad (2-17)$$

Las diferentes variables que participan en la (2-17) ya fueron definidas en la sección 2.2. En todos los casos estudiados en este trabajo se cumple que el material es elástico lineal y la carga es aplicada en condición cuasiestática. Por lo tanto, el término de densidad de energía cinética es nulo ($T = 0$) y w resulta ser la densidad de energía potencial debida únicamente al campo de deformaciones elásticas. Bajo estas suposiciones la (2-17) pasa a tener la forma mostrada en (2-18).

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[w \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] n_i d\Gamma \quad (2-18)$$

La forma de la ecuación (2-18) no es conveniente para calcularla por métodos numéricos ya que no es posible obtener resultados precisos para las tensiones y deformaciones en un contorno cercano a la punta de una fisura y que además tiende a desaparecer. Sin embargo, la integral J puede ser transformada a una integral de área equivalente [18] que es posible de ser evaluada por el método de elementos finitos. Para esto es necesario definir primero un contorno cerrado $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_+ + \Gamma_- - \Gamma$ como muestra la figura 2-7.

¹⁰ Será un contorno en 2D y en el caso tridimensional una superficie.

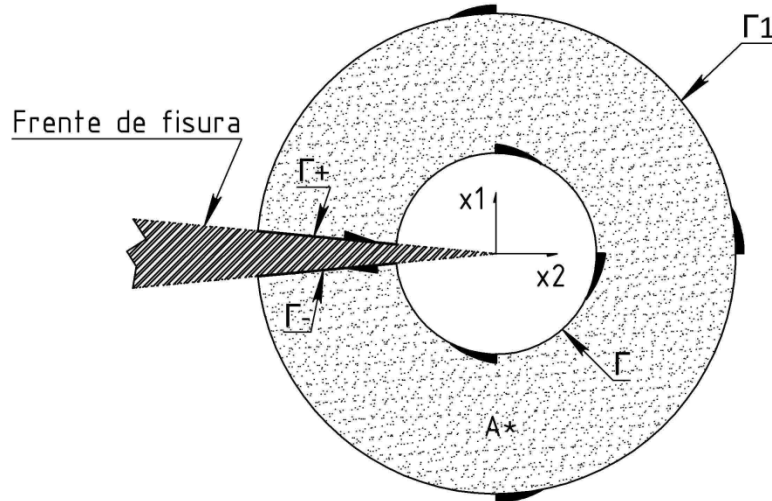


Figura 2-7. Contorno cerrado Γ^* alrededor de la punta de una fisura bidimensional.

El contorno exterior Γ_1 es finito y el contorno interior Γ se lo considera de longitud tendiente a cero. Entonces esta nueva definición del contorno de integración permite expresar a la (2-18), en términos de la curva cerrada Γ^* , como lo muestra la (2-19).

$$J = \int_{\Gamma^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] q m_i d\Gamma^* - \int_{\Gamma_+ + \Gamma_-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q d\Gamma_{\pm} \quad (2-19)$$

Siendo m_i la normal exterior a Γ^* y q una función de peso definida sobre el dominio de integración. El segundo término de la derecha tiene en cuenta la presencia de tracciones en ambas caras del defecto.

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término de la derecha de la ecuación (2-19) se obtiene la integral de área equivalente para la (2-18). Esto da como resultado a la expresión (2-20).

$$J = \int_{A^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA^* - \int_{\Gamma_+ + \Gamma_-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q d\Gamma_{\pm} \quad (2-20)$$

En donde A^* es el área encerrada por Γ^* . El dominio de integración puede ser definido de dos maneras. Puede ser una región anular que rodea a la punta del defecto, como lo muestra la figura 2-7; o el contorno interno Γ puede ser contraído totalmente hasta el extremo de la fisura, como se ve en la figura 2-8. Esta última configuración, donde sólo los elementos del extremo de la fisura son utilizados para efectuar la integración, es particularmente

conveniente de implementar en el método de EF [18]. Siguiendo este criterio, el programa ABAQUS requiere que el dominio de integración sea diferenciado del resto del modelo mallando una región en forma de anillos concéntricos con la línea de fisura para efectuar el cálculo de la integral. Ver sección 3.2 para detalles del mallado.

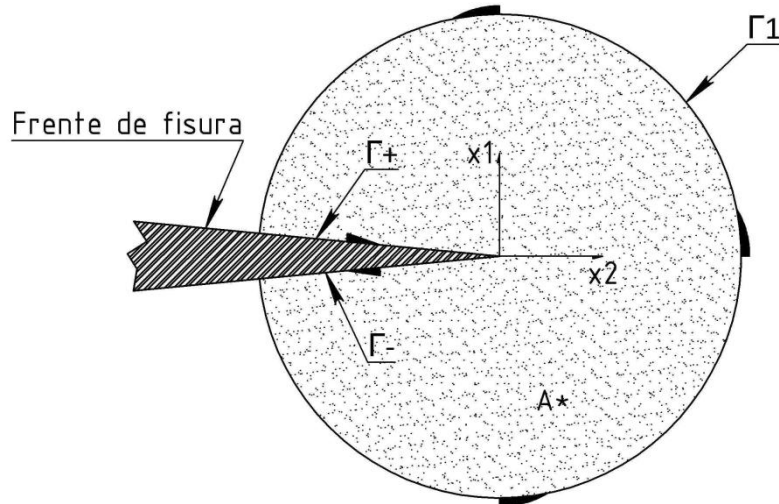


Figura 2-8. Dominio de integración equivalente para la integral J .

q es una función arbitraria, pero suave y normalizada de manera que toma un valor igual a 1 en Γ y un valor de cero en Γ_1 . Esta función q es en realidad un artilugio matemático para poder desarrollar la integral (2-20); sin embargo, por comparación con otro método caído en desuso¹¹, es posible darle una interpretación física entendiéndola como un *campo de desplazamientos virtual* debido a un *crecimiento virtual del defecto* [18]. En el caso de EF la función q es definida asignando previamente valores nodales que son luego interpolados dentro de los elementos que conforman al dominio de integración. Esta interpolación se lleva a cabo haciendo uso de las funciones de forma estándar (N_i), como queda expresado en la (2-21) y la (2-22).

$$q = \sum_i N_i q_i \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x_j} q_i \quad (2-22)$$

¹¹ Método del Crecimiento Virtual de la Fisura (VCE por sus siglas en inglés), en su versión de aproximación por el continuo [18].

Generalmente se asume una variación lineal para q comprendida entre los dos contornos. Entonces, siguiendo con lo expuesto anteriormente q valdrá 1 en Γ (que ahora se reduce al extremo de la fisura) y 0 en Γ_1 .

Para el caso tridimensional, se necesita convertir a la ecuación (2-18)¹² en una integral de volumen. De manera análoga a los pasos efectuados para el caso bidimensional, se procede a definir una superficie cerrada $S^* = S_1 + S_+ + S_- + A + A_1 - S$ que envuelve al borde de la fisura plana, ver figura 2-9.

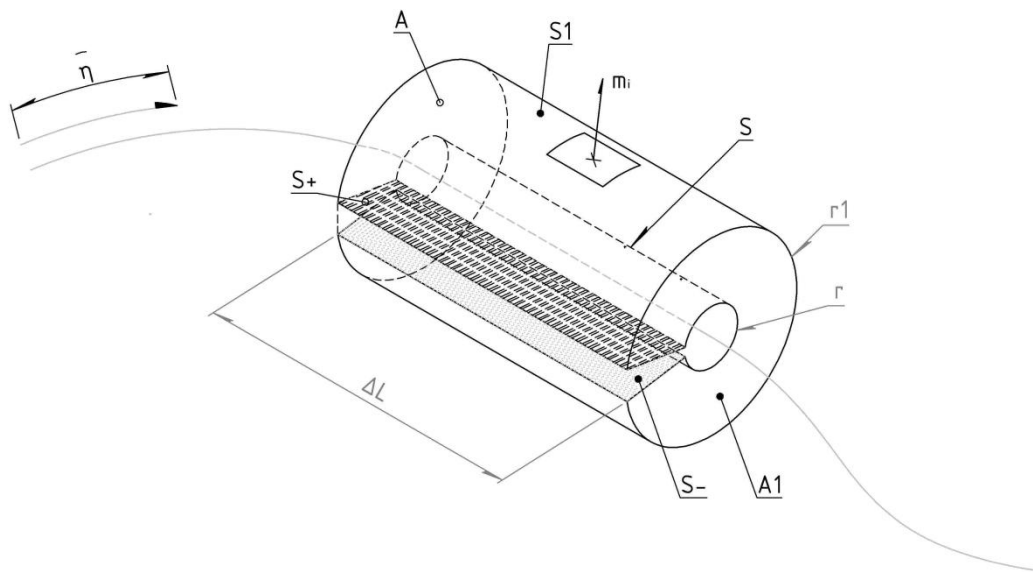


Figura 2-9. Superficie cerrada S^* que envuelve al borde de la fisura plana tridimensional.

En esta figura la coordenada η representa la posición sobre la línea de fisura. En cada posición η se define una terna coordenada (x_1, x_2, x_3) con x_1 normal al frente de fisura, x_2 normal al plano de fisura y x_3 tangente al frente de fisura.

La evaluación de la integral J en alguna posición η sigue estando definida por la (2-18) donde ahora Γ se encuentra comprendida en el plano definido por las coordenadas locales $x_1 - x_2$. De nuevo se supone que se cuenta con un material lineal elástico y carga aplicada cuasiestáticamente. Considerando al cilindro de longitud ΔL y radio r que rodea al borde de la fisura (fig. 2-9), entonces se puede definir un valor de J promedio ponderada sobre el segmento ΔL como lo expresa la (2-23).

¹² Ahora Γ no es un contorno abierto alrededor de la punta del defecto, sino que pasa a ser una superficie S abierta que rodea al borde del defecto.

$$\bar{J} \Delta L = \int_{\Delta L} J(\eta) \Theta d\eta = \lim_{r \rightarrow 0} \int_S \left[w \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] \Theta n_i dS \quad (2-23)$$

Donde $J(\eta)$ es un valor puntual que toma J en la posición η y Θ es una función arbitraria normalizada. Θ se anula para las superficies A , A_1 y S_1 pero toma el valor de 1 en S . Θ tiene las mismas características que q en el caso bidimensional, sólo que ahora se extrapolan al caso 3D. También es posible darle a Θ la misma interpretación física que a q para el caso 2D.

Razonando en forma similar a lo hecho para el caso bidimensional, es posible redefinir la expresión (2-23) para $\bar{J} \Delta L$ como lo expresa la ecuación (2-24), en función de la superficie cerrada S^* .

$$\bar{J} \Delta L = \int_{S^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] \Theta m_i dS^* - \int_{S_+ + S_-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \Theta dS_{\pm} \quad (2-24)$$

A partir de este punto los pasos para la obtención de la expresión para la integral de dominio utilizada en EF son idénticos al caso 2D, sólo que en definitiva se obtiene una integral de volumen, mostrada en (2-25).

$$\bar{J} \Delta L = \int_{V^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right] \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} dV^* - \int_{S_+ + S_-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \Theta dS_{\pm} \quad (2-25)$$

Si los valores puntuales de J no varían de manera significativa sobre la longitud ΔL , y el cambio en los valores de Θ es más rápido que el de los valores de $J(\eta)$ en toda la línea del defecto, entonces se está en condiciones de definir a $J(\eta)$ con buena aproximación como en la Ec. (2-26).

$$J(\eta) = \frac{\bar{J} \Delta L}{\int_{\Delta L} \Theta(\eta, r) d\eta} \quad (2-26)$$

Para desarrollar la expresión (2-20) en el caso 2D se trabajó todo el tiempo con coordenadas fijas sobre la punta del defecto. En el caso 3D esto no es así ya que se trabaja con ternas locales definidas para cada punto del frente de la fisura. Sin embargo, la formulación de la integral de dominio puede ser expresada en términos de un sistema fijo si se reemplaza a Θ

con una función vectorial, Θ_i , y evaluando las derivadas parciales respecto a las nuevas coordenadas del sistema fijo X_i en vez de a x_1 . Respecto a esto, el software comercial Abaqus v6.10-1 requiere que los Θ_i sean definidos respecto a un origen fijo. Este origen se encuentra situado en el centro geométrico del plano del defecto. Además, por tratarse de una fisura plana y de geometría regular, el programa permite simplificar el proceso de definición de los Θ_i . Para ello basta con definir a la línea que representa al frente del defecto y una normal al plano que contiene al defecto [19].

2.5 Sinopsis

Toda configuración de carga respecto del frente de un defecto puede descomponerse en 3 modos principales (Fig. 2-2). Para cada uno de estos modos es posible definir el parámetro K que caracteriza al campo de tensiones y deformaciones en el frente del defecto (ver tablas 2-A a 2-C). El FIT aparece como un factor de escala en las ecuaciones del tipo de la (2-1) y contiene información referente a las cargas y a la geometría del defecto. La utilidad de K se destaca al estudiar defectos en materiales lineales elásticos.

El software comercial utilizado para desarrollar este trabajo, no calcula directamente los valores de K . En cambio, mediante el método de elementos finitos, lo que se obtiene es el parámetro J , entendido como la *tasa de liberación de energía potencial del cuerpo por unidad de incremento de área del defecto*. En este sentido, J es un concepto más general que el FIT . Para casos de elasticidad lineal como los estudiados en este trabajo, J y K se relacionan a través de una ecuación sencilla.

La función de peso propuesta por Oore & Burns busca predecir valores para el factor de intensidad de tensiones en el modo I de carga. Para lograr esto se enfoca en el cálculo de la integral que aparece en la expresión (2-16). Esta integral es la clave para hallar K_I en cualquier punto del borde irregular de una fisura plana interior a un sólido infinito, sujeta a un estado de carga arbitrario y en dirección normal al plano de la fisura.

3 Modelado de fisuras elípticas planas

Para el desarrollo del método, se estudian cinco casos de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE) que involucran circunferencias y elipses, cuyas soluciones analíticas son conocidas [24, 25]. La finalidad es interiorizarse con el formalismo del programa de elementos finitos ABAQUS y obtener estrategias que más adelante serán de utilidad para el modelado y mallado de elipses de distintos factores de aspecto. Por lo tanto, la forma de proceder será resolver con ABAQUS la configuración de geometría y carga seleccionadas, para después evaluar la calidad de la respuesta obtenida con la que se conoce a partir de métodos analíticos.

3.1 Descripción del modelo

El problema a resolver necesita del estudio de fisuras elípticas solicitadas por dos cargas puntuales y simétricas, perpendiculares a las caras del defecto. Estas fisuras se suponen situadas en el interior de un medio continuo e infinito. Para modelar la fisura en un medio infinito, se emplea el procedimiento usual de ubicar el defecto en el centro de un cilindro suficientemente grande respecto del tamaño de la fisura. Para maximizar los recursos de la computadora utilizada, se aprovecha la condición de simetría de las cargas y la geometría, modelando sólo la mitad del problema original (ver figura 3-1).

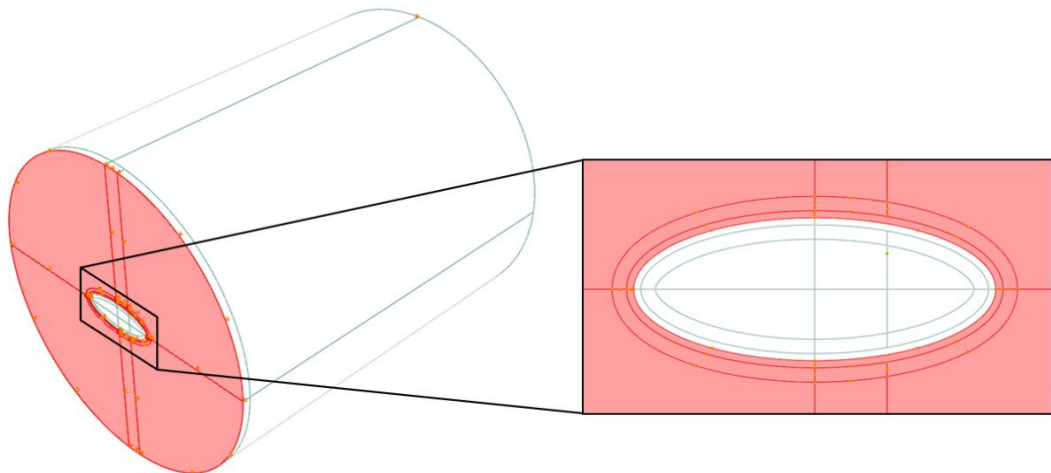


Figura 3-1. La superficie sombreada contiene a la fisura y corresponde al plano de simetría del volumen cilíndrico empleado en el modelo.

Ha de tenerse en cuenta que la utilización de un cuerpo finito introduce efectos de borde que resultan en el apartamiento de los resultados de EF respecto a los obtenidos por métodos analíticos, por lo cual las dimensiones del cilindro han de asegurar que los efectos de borde no sean significativos, cuidando simultáneamente que el costo computacional sea lo más bajo posible. Para definir las características de la geometría de los modelos a utilizar se efectuaron varias pruebas. Inicialmente se compararon los resultados de sucesivos modelos de EF con las soluciones analíticas conocidas y se determinaron así reglas para la construcción de los modelos. También se consultaron los ejemplos de modelos para fisuras existentes en la documentación del programa [19]. Más adelante en este capítulo, se presentan las comparaciones entre las soluciones analíticas y los resultados obtenidos con estos modelos que sirven de evidencia para validar las reglas adoptadas. De esta manera se encontró viable la representación del cilindro tomando como diámetro del mismo 8 veces el tamaño del semieje mayor de la elipse, y una altura igual a 1,25 veces el diámetro del cilindro.

Al momento de pensar en la geometría para modelar el problema surgen dos opciones. Se puede optar por definir la geometría usando múltiples cuerpos o por hacer un modelo monolítico que tenga definidas todas las particiones necesarias propias del problema. Un modelo compuesto por múltiples cuerpos supone definir las vinculaciones entre ellos además de las externas. Por simplicidad entonces, se opta por usar un solo cuerpo en cada uno de los modelos a desarrollar.

El modelo consiste en un cilindro con particiones que facilitan el diseño del mallado y el posicionamiento de la carga. La figura 3-2 muestra las particiones que se llevaron a cabo.

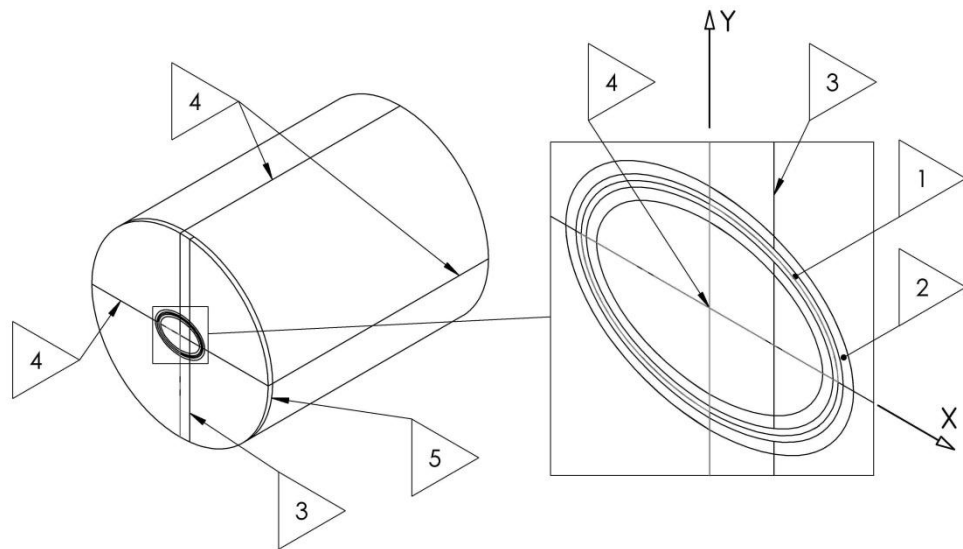


Figura 3-2. Particiones típicas en los modelos. La explicación para cada bandera numerada se encuentra en el texto a continuación.

En la figura 3-2, se muestran todas las particiones necesarias para el desarrollo del trabajo. La sección siguiente explica con más detalle el diseño del mallado. Las llamadas con números dentro de los banderines de la figura 3-2 se referencian a continuación:

1. Partición necesaria para definir el frente del defecto y posicionar los elementos con forma de *cuña* que ofician de primer contorno de integración para el cálculo de J .
2. Partición necesaria para definir la zona en que la integral de contorno será evaluada y densificar el mallado en esta región respecto a otras del modelo.
3. Partición necesaria para garantizar el correcto posicionamiento de la carga.
4. Particiones necesarias para lograr que el mallado sea más uniforme en tamaño y calidad de elementos.
5. Esta partición permite generar un mallado más denso, en las cercanías del defecto, respecto del resto de la geometría.

En lo que respecta al modelado por software, en ningún momento se definen/asignan unidades de medida. Por tanto hay que tener cuidado de ingresar en forma coherente los datos numéricos en el modelo. Por ejemplo, si las cargas se definen en *Newtons* y las dimensiones de la geometría están en *mm*, las tensiones se obtendrán en *MPa*.

Con referencia a las solicitaciones, se usan cargas puntuales unitarias y normales¹ a las caras del defecto elíptico estudiado. Al tratarse de cargas puntuales, estas se aplican sobre los nodos. En el diseño de los modelos, se manipulan particiones en la geometría a fin de asegurar la existencia de un nodo en la posición donde debe ser aplicada la fuerza puntual. Si bien la teoría lineal elástica predice que cargas puntuales producen desplazamientos y tensiones infinitas, un modelo de elementos finitos bajo estas condiciones de carga no muestra tensiones y desplazamientos infinitos en la región donde se encuentra el nodo cargado dado que el MEF aproxima la solución con funciones continuas.

Para el modelado de las fisuras se puede tomar un módulo elástico arbitrario ya que los resultados del *FIT* no dependen del mismo. Se usa un material de módulo elástico 210000 MPa y un coeficiente de Poisson igual a $0,3$. La carga puntual normal, como ya se mencionó, tiene un valor de 1 N .

3.2 Diseño del mallado

Si bien el software comercial genera mallados en forma automática, hay que tener cierta precaución al momento de decidir cómo se utilizan estas herramientas con que cuenta el programa. Una vez planteada la geometría, el algoritmo mallador lleva a cabo la parte tediosa de la tarea que es posicionar los nodos, numerarlos y referenciar los elementos. Como es habitual, queda a criterio del usuario discriminar entre las distintas zonas del modelo, decidir aquellas que realmente representan un foco de interés, realizar las particiones necesarias y asignar la densidad/calidad de elementos a utilizar.

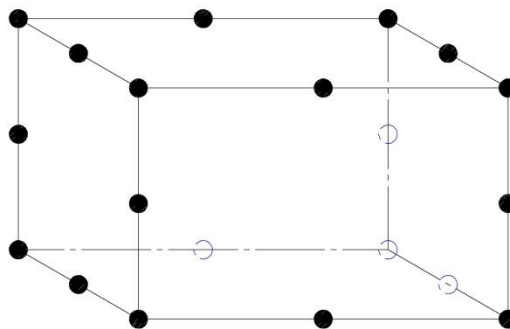


Figura 3-3. Elemento isoparamétrico de 20 nodos usado en 3-D.

¹ La condición de carga puntual normal viene impuesta por el propio algoritmo de Oore & Burns ya que son el tipo de cargas que generaran el modo I de apertura de la fisura, que es el tema de estudio.

Para la mayor parte del modelo, los mallados empleados utilizan elementos con forma de *prismas rectangulares* de 20 nodos cada uno (elementos hexaédricos cuadráticos). La figura 3-3 muestra uno de tales elementos. Con estos elementos se discretizan las diferentes regiones del modelo, a excepción de la región 1 mostrada en la figura 3-2.

Para representar al frente de la fisura se utilizan elementos tipo cuña (ver figura 3-4). Estos elementos se conciben a partir de los de tipo hexaédrico haciendo colapsar dos de las aristas del elemento y moviendo un cuarto más cerca (hacia el lado colapsado) los nodos que estaban en la mitad de las aristas más próximas. Esto último reproduce el campo singular de deformaciones en el entorno de la fisura que es proporcional a $1/\sqrt{r}$. Moviendo los nodos de esta forma se garantiza que el elemento adquiera el comportamiento buscado [19].

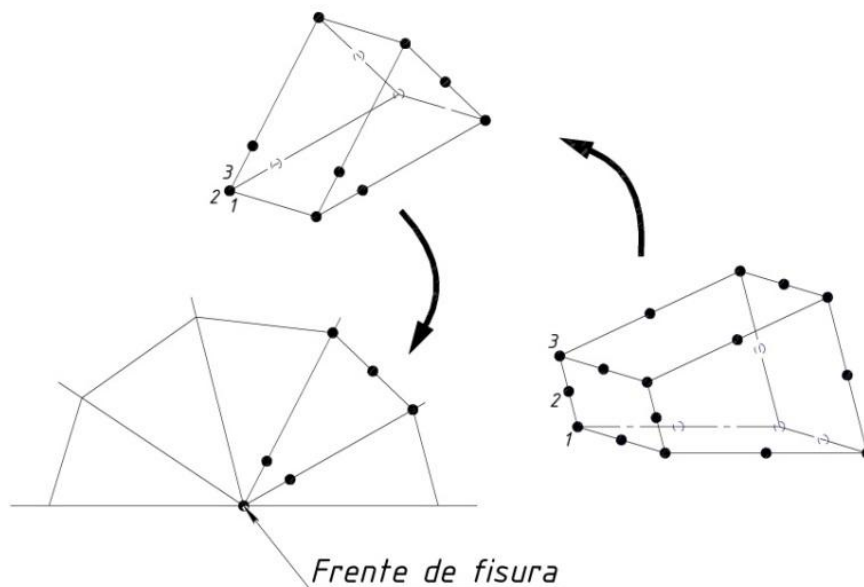


Figura 3-4. Transformación de un elemento *prismático rectangular* a uno *prismático triangular (cuña)*.

Respecto a la *forma* general del mallado, para los problemas resueltos en este trabajo, el mallado con forma de *telaraña* es el más efectivo (ver figura 3-5). Esta práctica minimiza la distorsión producida por la transición entre los elementos con forma de cuña, que definen el borde de la fisura, y los elementos hexaédricos utilizados para modelar el resto del medio continuo [19]. Para un tratamiento numérico adecuado, en el caso de elipses con factor de aspecto menor a 0,6, resultó necesario aumentar la densidad del mallado debido a que el

rápido cambio que sufre la curvatura de la línea del defecto sobre los extremos del eje mayor, dificulta generar un modelo suficientemente representativo de la elipse en esa zona. Por tanto, si se pretende utilizar un mallado grueso para estas elipses de factor de aspecto bajo, los resultados así obtenidos no describirían a la geometría que se pretende estudiar con la calidad necesitada para el desarrollo de este trabajo.

La figura 3-6 muestra el mapa para los tipos de elementos usados. Al definir los mallados por medio de las herramientas del software, se utilizan dos recursos distintos que el mismo ofrece. En algunas zonas es conveniente asignar una cantidad fija de elementos, en otras definir un tamaño global aproximado de elemento resulta más práctico. El programa cuenta con librerías de elementos que son fácilmente asignables a los distintos volúmenes definidos por las particiones presentadas en la sección 3.1.

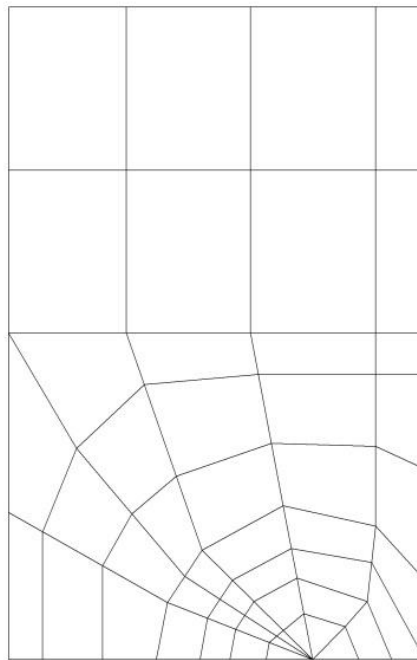


Figura 3-5. Mallado con forma de *telaraña* utilizado en problemas de fisuras.

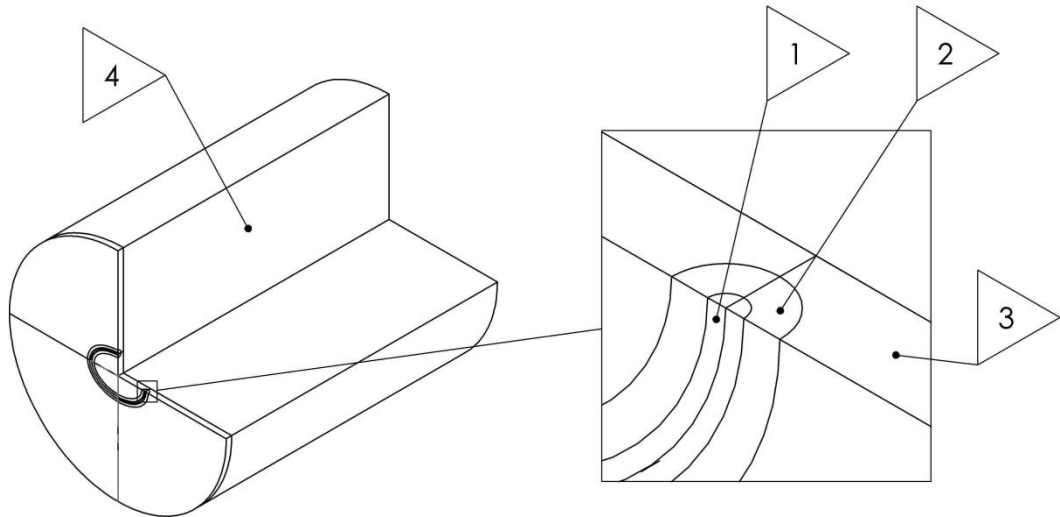


Figura 3-6. Mapeo de los tipos de elementos usados según las diferentes regiones. La descripción correspondiente a cada llamada se encuentra en el texto a continuación.

Respecto a las llamadas en la figura 3-6, las notas correspondientes son las que siguen:

1. Elementos con forma de cuña que representan a la línea del defecto. La práctica mostró que en estos sectores es más conveniente asignar la cantidad de elementos, 20 elementos por cuarto de frente de fisura alcanzan para posteriormente obtener una buena cantidad de datos a partir de los cuales continuar con el trabajo. El elemento de librería usado es el C3D15 (notación de Abaqus), correspondiente a un prisma triangular cuadrático de 15 nodos.
2. Elementos que serán utilizados para evaluar la integral de dominio. En este volumen, al mallado conviene definirlo de manera mixta. En las aristas perpendiculares a la línea del defecto se posicionan de 4 a 6 elementos². En el resto de las aristas se toma un tamaño global aproximado de elemento igual a 0,1 veces el tamaño del semieje mayor de la elipse. La clase de elemento usado es C3D20R (notación de Abaqus), correspondiente a un prisma rectangular cuadrático de 20 nodos con integración reducida.

² Depende del factor de aspecto en estudio.

3. Esta región contiene a los nodos sobre los que se posicionan las cargas en los diversos casos. El tamaño global aproximado de los elementos es 0,1 veces el tamaño del semieje mayor de la elipse. La clase de elemento usado es C3D20R, prisma rectangular cuadrático de 20 nodos con integración reducida.
4. Este volumen simula al resto del medio continuo. En esta parte de la geometría no se justifica configurar un mallado denso; su utilidad es representar la resistencia aportada por el resto del medio infinito. Tamaño global aproximado de elementos 0,4 veces el tamaño del semieje mayor de la elipse. La clase de elemento usado es C3D20R, prisma rectangular cuadrático de 20 nodos con integración reducida.

La figura 3-7 muestra el modelo mallado para una de las elipses estudiadas³.

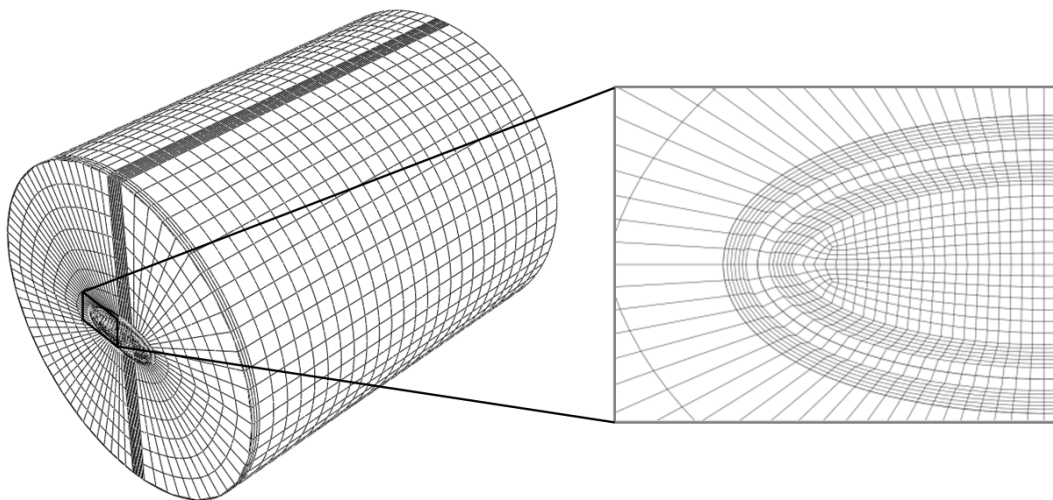


Figura 3-7. Mallado de una elipse $r = 0,4$. El detalle de la derecha muestra como el retículo se distorsiona para acomodar la geometría del defecto y las particiones circundantes.

³ Los modelos, los archivos de las simulaciones y rutinas utilizadas se presentan en un DVD adjunto al trabajo.

3.3 Resultados

3.3.1 Carga puntual aplicada en el centro de una fisura circular

El primero de los casos que se estudia, es el de una fisura circular encerrada en un medio infinito, solicitada por una carga puntual centrada en el defecto y simétrica respecto al plano de la fisura [24]. El valor de la carga es de 1 *Newton*. La tabla 3-A muestra extractos de resultados de los valores de W_{QQ} .

Ángulo, θ [rad grd]		Solución Analítica	Respuesta EF	% error
		[(N/mm ²) * (mm ^{1/2})]		
0,13	7,50°	0,1796	0,1796	0,0000
0,52	30,00°	0,1796	0,1799	0,1670
0,79	45,00°	0,1796	0,1799	0,1670
1,05	60,00°	0,1796	0,1799	0,1670
1,57	90,00°	0,1796	0,1798	0,1114
2,02	115,71°	0,1796	0,1797	0,0557
2,36	135,00°	0,1796	0,1797	0,0557
2,58	147,86°	0,1796	0,1797	0,0557
3,14	180,00°	0,1796	0,1798	0,1114
3,93	225,00°	0,1796	0,1799	0,1670
4,71	270,00°	0,1796	0,1798	0,1114
5,50	315,00°	0,1796	0,1797	0,0557

Tabla 3-A. Comparación entre las W_{QQ} , calculadas analíticamente y por medio del análisis de elementos finitos (EF). Resultados para fisura circular con carga puntual en el centro.

El error porcentual máximo encontrado en estos valores es 0,17%.

3.3.2 Carga puntual aplicada excéntricamente en una fisura circular

Este caso, con la misma geometría que el anterior, presenta ahora la carga aplicada en forma excéntrica [24]. La *carga unitaria* tiene ahora por coordenadas al punto definido por $x = -0,5$ e $y = 0$ (según los ejes considerados en la figura 3-2). Los resultados se presentan en la tabla 3-B.

Ángulo, θ [rad grd]		Solución Analítica	Respuesta EF	% error
		[(N/mm ²) * (mm ^{1/2})]		
0,11	6,43°	0,0693	0,0694	0,1154
0,45	25,71°	0,0723	0,0721	0,3042
0,79	45,00°	0,0795	0,0796	0,1133
1,01	57,86°	0,0873	0,0874	0,1260
1,57	90,00°	0,1244	0,1232	0,9646
2,09	120,00°	0,2074	0,2042	1,5429
2,36	135,00°	0,2865	0,2824	1,4311
2,62	150,00°	0,4050	0,3981	1,7037
3,14	180,00°	0,6221	0,6230	0,1447
3,93	225,00°	0,2865	0,2824	1,4311
4,71	270,00°	0,1244	0,1232	0,9646

Tabla 3-B. Resultados para fisura circular con carga puntual excéntrica.

El error porcentual máximo encontrado es de alrededor de 1,71%.

3.3.3 Tensión remota uniforme aplicada a una fisura circular

Nuevamente se trata de una fisura circular. La carga ahora se presenta como un campo tensional constante ubicada en el infinito [24]. El valor de la tensión remota es de 1 MPa. La tabla 3-C tiene plasmados los valores de W_{QQ} .

Ángulo, θ [rad grd]		Solución Analítica	Respuesta EF	% error
		[(N/mm ²) * (mm ^{1/2})]		
0,11	6,43°	1,1280	1,1290	0,0887
0,56	32,14°	1,1280	1,1290	0,0887
0,79	45,00°	1,1280	1,1290	0,0887
1,01	57,86°	1,1280	1,1290	0,0887
1,57	90,00°	1,1280	1,1250	0,2660
2,09	120,00°	1,1280	1,1260	0,1773
2,36	135,00°	1,1280	1,1270	0,0887
2,62	150,00°	1,1280	1,1260	0,1773
3,14	180,00°	1,1280	1,1260	0,1773
3,93	225,00°	1,1280	1,1270	0,0887
4,71	270,00°	1,1280	1,1250	0,2660
5,50	315,00°	1,1280	1,1290	0,0887

Tabla 3-C. Resultados para fisura circular solicitada por una tensión remota uniforme.

El error porcentual máximo encontrado es aproximadamente 0,27%.

3.3.4 Tensión remota uniforme aplicada a una fisura elíptica

Ahora la geometría en estudio cambia y da lugar a una fisura elíptica. El factor de aspecto de la fisura a utilizar es $r = b/a = 0,4$. Se carga al defecto con un campo tensional remoto constante e igual a 1 MPa [24]. El ángulo paramétrico φ utilizado se haya definido en la figura 3-8 y es el mismo que será utilizado de ahora en más en los siguientes casos. La misma figura muestra también al ángulo polar⁴, θ , para que quede en claro la diferencia que existe entre los dos. Los resultados se pueden observar en la tabla 3-D.

⁴ Hasta ahora, en los casos de defectos con forma de circunferencia, el ángulo polar θ y el paramétrico φ coincidían. En las elipses no sucede lo mismo.

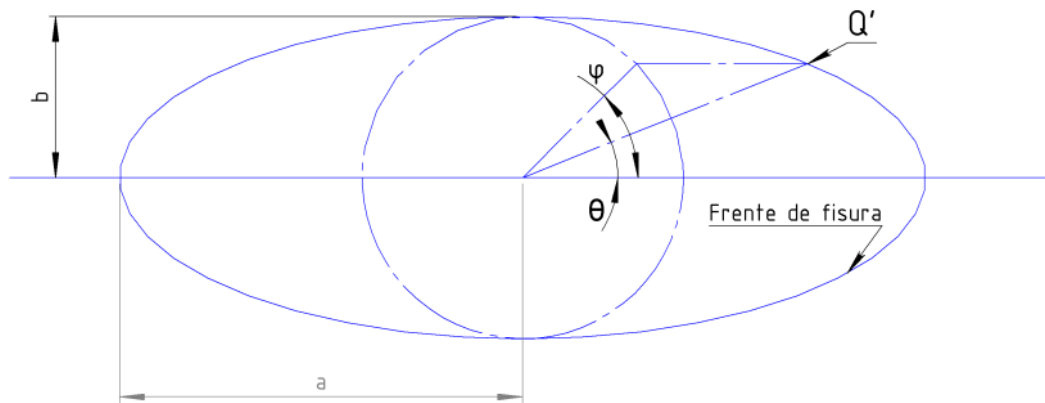


Figura 3-8. Diferencia entre ángulo polar θ y paramétrico φ que definen la posición del punto Q' en el frente de la fisura.

Ángulo paramétrico, φ [rad grd]		Solución Analítica	Respuesta EF	% error
		[(N/mm ²) * (mm ^{1/2})]		
0,06	3,39°	0,6193	0,6321	2,0668
0,54	31,21°	0,7681	0,7767	1,1196
0,79	45,12°	0,8513	0,8588	0,8810
1,05	60,02°	0,9191	0,9255	0,6963
1,08	61,57°	0,9246	0,9301	0,5949
1,57	90,00°	0,9748	0,9810	0,6360
2,11	120,60°	0,9168	0,9200	0,3490
2,36	135,46°	0,8482	0,8503	0,2476
2,64	151,48°	0,7506	0,7567	0,8127
3,14	180,00°	0,6165	0,6165	0,0000
3,94	225,90°	0,8555	0,8583	0,3273
4,71	270,00°	0,9748	0,9811	0,6463
5,50	314,88°	0,8513	0,8588	0,8810

Tabla 3-D. Resultados para fisura elíptica solicitada por una tensión remota uniforme.

El error porcentual máximo encontrado es de aproximadamente 2,07%.

3.3.5 Carga puntual aplicada en el centro de una fisura elíptica

Este último caso es de mayor interés, dado que existe solución analítica en la literatura especializada y permite comparar resultados. Se trata de un defecto elíptico en el cual la sollicitación es accionada por una *carga puntual unitaria* ubicada en el centro de la fisura. La solución analítica fue obtenida por Atroshchenko *et al.* [25] haciendo uso del método de ecuaciones integrales duales simultaneas. Nuevamente el factor de aspecto seleccionado es $r = 0,4$. Resultados en tabla 3-E.

Ángulo paramétrico, φ [rad grd]		Solución Analítica	Respuesta EF	% error
		[(N/mm ²) * (mm ^{1/2})]		
0,22	12,46°	0,0758	0,0780	2,9144
0,30	17,05°	0,0867	0,0847	2,3191
0,49	28,22°	0,1104	0,1103	0,0906
0,61	34,86°	0,1350	0,1336	1,0370
0,70	39,99°	0,1596	0,1570	1,6291
0,80	45,77°	0,1888	0,1919	1,6419
0,91	52,02°	0,2442	0,2433	0,3686
1,01	57,86°	0,3025	0,3081	1,8512
1,21	69,48°	0,4979	0,5043	1,2854
1,29	74,01°	0,6250	0,6083	2,6720
1,40	80,41°	0,7546	0,7603	0,7554
1,50	86,18°	0,8629	0,8617	0,1391
1,55	89,05°	0,8875	0,8810	0,7324

Tabla 3-E. Resultados para fisura elíptica sollicitada por una carga puntual en su centro.

El error porcentual máximo encontrado es de 2,91%. Sin embargo, hay que hacer mención, en este caso no se cuenta con una expresión analítica de simple resolución, por lo que se obtuvieron datos escalados directamente de un gráfico presente en [25]. Es de esperar que haya imprecisión en el proceso de toma de datos a partir del gráfico.

3.4 Sinopsis

Es más sencillo modelar el problema en forma monolítica que elaborar un modelo que sea el resultado de la unión de varios cuerpos por separado. Los modelos se plantean idealizando el medio infinito en forma de un cilindro siguiendo ciertas reglas prácticas para su construcción. Se aprovecha la simetría del problema para simplificar aún más el modelo y se representa sólo a la mitad de la geometría del problema original, efectuando las vinculaciones necesarias para esto.

Respecto al mallado, es necesario guardar cierto orden en el posicionamiento de nodos a fin de generar una franja aledaña a la línea del defecto en donde se efectúan los cálculos para K . La morfología del mallado está compuesta por zonas concéntricas con la línea del frente de fisura. Estas regiones anulares son necesarias para el cálculo de las integrales de línea.

Los modelos emplean un módulo elástico de 210000 MPa , un coeficiente de Poisson igual a $0,3$ y la carga puntual normal tiene un valor de 1 N .

Se probaron las metodologías aquí expuestas en comparación con 5 casos cuya solución analítica se conoce. Estos casos son:

1. Carga puntual aplicada en el centro de una fisura circular.
2. Carga puntual aplicada excéntricamente a una fisura circular.
3. Tensión remota uniforme aplicada a una fisura circular.
4. Tensión remota uniforme aplicada a una fisura elíptica.
5. Carga puntual aplicada en el centro de una fisura elíptica.

De entre todos los casos comparados de las soluciones de EF con las respectivas soluciones analíticas, el mayor error porcentual encontrado es de alrededor del 3%. Este error pertenece a la comparación realizada para el caso de carga puntual aplicada en el centro de una fisura elíptica, y ocurren en los puntos del frente que se encuentran muy próximos al eje mayor del defecto, que es donde la curvatura de la línea de fisura es máxima.

4 Corrección a la función de peso de Oore

Este capítulo comienza por presentar el concepto utilizado en la corrección de la función de peso. Luego se desarrolla una explicación detallada de los pasos efectuados para lograr la obtención de resultados que serán de utilidad en la predicción de $W_{QQ'}$, para otros casos distintos a los modelados. Finalmente se verifica la solución aquí propuesta prediciendo los valores de la función de peso para otras cinco situaciones de carga diferentes a las utilizadas durante el desarrollo de este método.

En la última sección del capítulo, se hace una breve presentación de las rutinas y comandos involucrados en todo el procesamiento de los datos, pero sólo con la intención de dejar en claro la utilidad de cada una. Los scripts, los modelos y los archivos de datos se adjuntan a este trabajo en un Anexo en DVD. En las líneas de cada uno de los códigos hay notas que explican en mayor grado de exposición el uso de los mismos y las variables involucradas.

En todo el proceso de desarrollo de utilizo el manual de ayuda al usuario que viene incorporado con el programa MatLab [26].

4.1 Uso de factores de corrección

En una primera aproximación para resolver el problema se buscó modificar la integral de línea de la ecuación (4-1) presente en la Ec. (2-16).

$$\int_s \frac{ds}{\rho_Q^2} \quad (4-1)$$

Puede suponerse que, respetando las unidades¹ de la ecuación que define a $W_{QQ'}^{O\&B}$, existe una variante del integrando de la ecuación (4-1) que permite corregir acertadamente a la función de peso. Sin embargo, no fue posible obtener resultados satisfactorios por esta vía²,

¹ Para tal fin hay que tener en cuenta que en la ecuación (2-16) la integral aparece elevada a un exponente negativo.

² En el capítulo 5 se explica la dificultad encontrada.

y se optó finalmente por un procedimiento más sencillo para la resolución del problema planteado.

En busca de una solución más *simple* para mejorar la propuesta por Oore (4-1), se propone el *factor de corrección*, f_c , ver ecuación (4-2).

$$W_{QQ'} = W_{QQ'}^{O\&B} \cdot f_c \quad (4-2)$$

La idea de plantear un factor de corrección ya fue empleada por López Montenegro en su tesis doctoral [28]. En ese trabajo la definición del factor de corrección se basó en el factor de aspecto como parámetro global, y de la magnitud de la curvatura del frente de fisura como parámetro local, para la corrección del *factor de intensidad de tensiones* K_Q . En el presente estudio del tema, los factores de corrección se aplican directamente sobre las *funciones de peso*, por lo cual el método aquí desarrollado sigue una mecánica distinta a la citada [28].

Con la metodología más adelante expuesta, se puede predecir el valor que toma f_c en cada punto del frente de un defecto en el que se conoce la posición de la carga y el factor de aspecto de la elipse.

4.2 Obtención de factores de corrección

Usando lo expuesto en el capítulo 3 y el software Abaqus, se procede a obtener resultados de $W_{QQ'}^{EF}$ para distintas elipses. Se trabaja con los factores de aspecto $r = 0,4$, $r = 0,6$ y $r = 0,8$. En cada uno de los casos correspondientes, las cargas serán evaluadas posicionándolas sobre una grilla con una configuración como la mostrada por la figura 4-1. En todos los casos las cargas puntuales son de valor unitario; esto permite que los valores reportados para K_I por el programa de EF puedan ser directamente tomados como los valores de $W_{QQ'}^{EF}$, sin ningún requerimiento de cálculo adicional. Se elabora y evalúa un factor de aspecto, con una única carga aplicada por vez.

Los datos extraídos del software Abaqus deben ser procesados antes que puedan ser utilizados ya que la información se encuentra repartida en 2 archivos. Estos archivos llevan el nombre del trabajo dado en el árbol de definición del modelo en la interfaz de usuario del programa, poseen extensiones “*.inp” y “*.dat”. En el archivo “*.dat” se encuentra la tabla con las *etiquetas* con que Abaqus nombra a los nodos del frente de la línea del defecto y los

valores correspondientes de K_I . En el otro archivo, el de extensión “*.inp”, se encuentran guardadas las coordenadas espaciales de los nodos etiquetados en el archivo “*.dat”. Se utiliza la rutina *procesador.m* en MatLab para llevar a cabo el ordenamiento de los datos y armar las tablas con los valores de $W_{QQ'}^{EF}$ y sus correspondientes valores del ángulo paramétrico, junto con los cálculos de los valores de $W_{QQ'}^{O\&B}$ para cada uno de esos ángulos. Esta misma rutina es la encargada de calcular los valores para los *factores de corrección* por medio de operar algebraicamente sobre la base de la expresión (4-2).

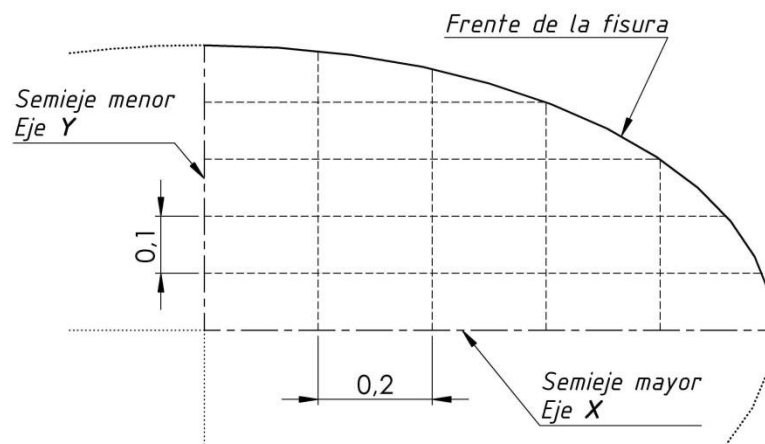


Figura 4-1. Detalle de la grilla sobre la que se posicionan las cargas. El espaciamiento sobre el eje X es 0,2 y sobre el eje Y es 0,1 en todos los casos.

Una vez obtenidos los valores de los f_c para cada ángulo paramétrico, es decir para cada punto sobre la línea de la fisura, se está en condiciones de buscar una ley de asignación o aproximación válida que permita obtener valores de este parámetro en cualquier otra posición angular.

4.3 Aproximación para las curvas de f_c vs. φ

Las curvas f_c obtenidas para distintas geometrías elípticas, tienen la forma mostrada por las figuras 4-2 a 4-6. La diferencia entre los distintos gráficos conseguidos radica en la posición y la escala relativa entre los picos. La existencia de los picos es consecuencia, en cierta forma, de la ecuación de Oore y Burns, y está ligada a la evolución de la longitud del vector tomado desde el centro de aplicación de la carga y con extremo en el perímetro del

defecto. La totalidad de los gráficos, que excede los mostrados como ejemplo en las figuras 4-2 a 4-6, se encuentran dentro de los archivos de datos en el DVD adjunto.

El patrón geométrico que se repite en la mayoría de los casos, consiste en curvas de evolución suave con dos picos y un valle entre ellos. Existen ciertas situaciones de carga que dan lugar a un único pico. En definitiva, esta situación posibilita su modelado como una función de f_c vs. φ .

Es importante dejar claro que estas curvas sólo son válidas para los casos de carga que fueron ensayados con el software de elementos finitos.

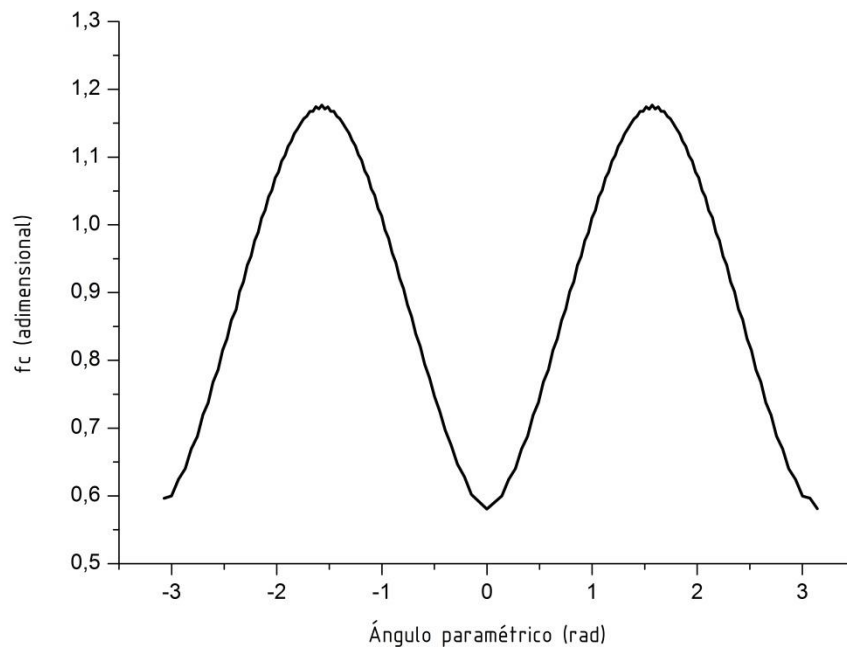


Figura 4-2. Curva típica de f_c vs. φ . En este caso $r = 0,4$ con la carga puntual aplicada en $x = 0$ e $y = 0$.

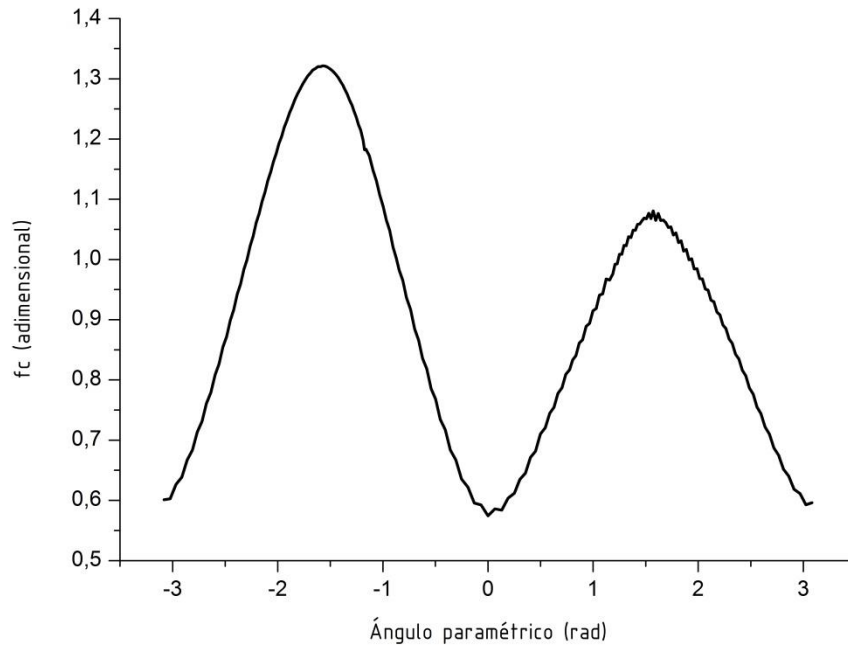


Figura 4-3. Curva típica de f_c vs. φ . En este caso $r = 0,4$ con la carga puntual aplicada en $x = 0$ e $y = 0,2$.

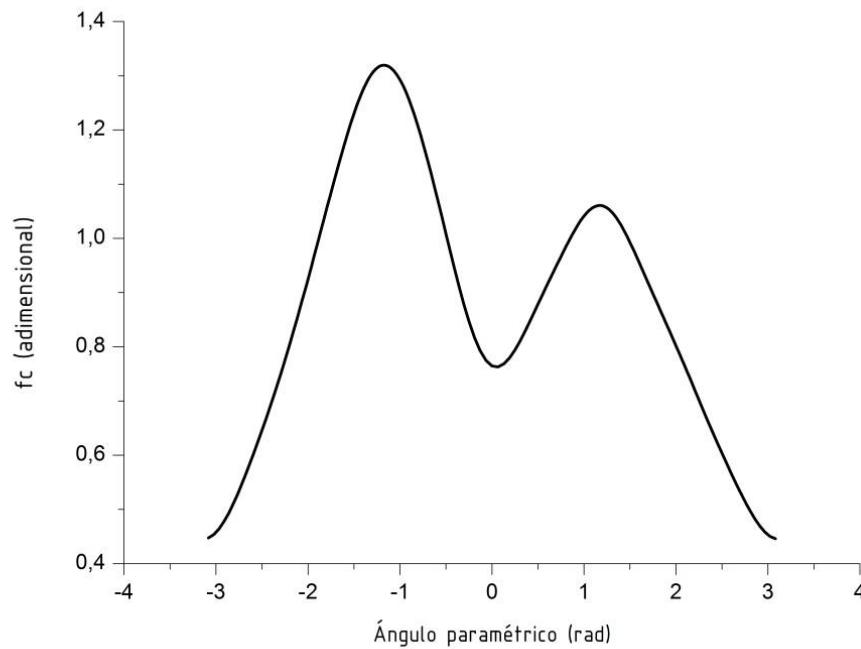


Figura 4-4. Curva típica de f_c vs. φ . En este caso $r = 0,4$ con la carga puntual aplicada en $x = 0,4$ e $y = 0,2$.

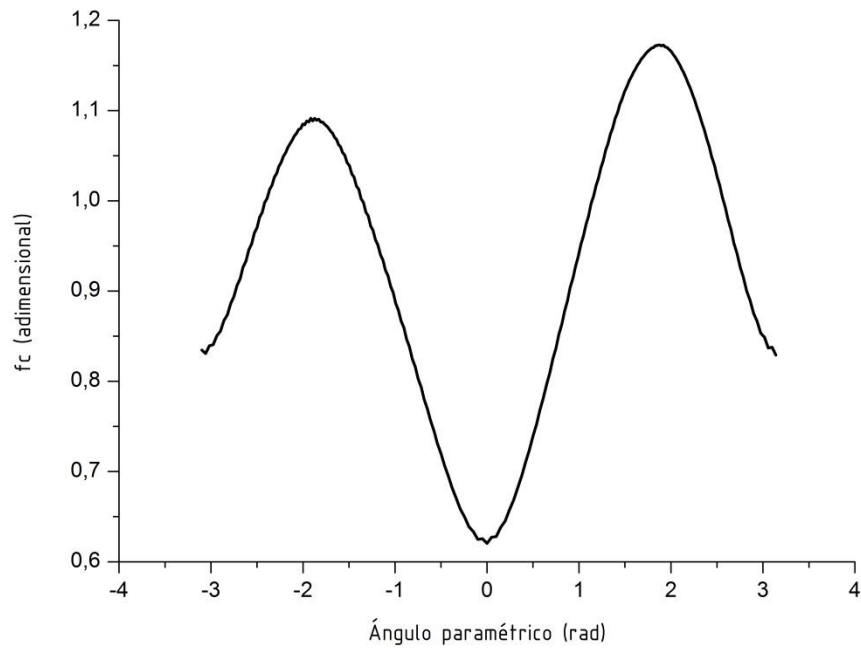


Figura 4-5. Curva típica de f_c vs. φ . En este caso $r = 0,5$ con la carga puntual aplicada en $x = -0,3$ e $y = -0,1$.

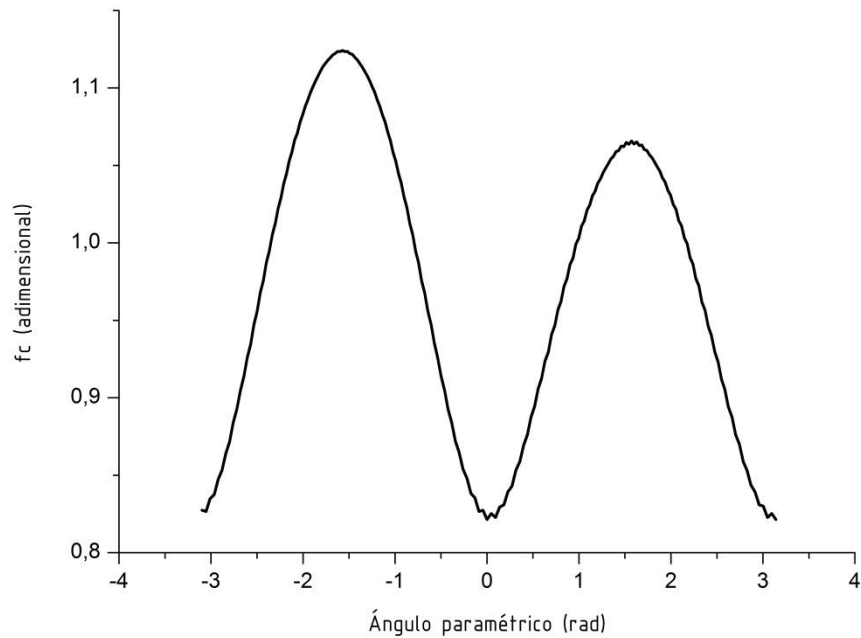


Figura 4-6. Curva típica de f_c vs. φ . En este caso $r = 0,6$ con la carga puntual aplicada en $x = 0$ e $y = 0,1$.

Se estudia a continuación la forma de aproximar estas curvas. La primera propuesta que surge en base a la naturaleza de las curvas de f_c , es proponer una aproximación usando series de Fourier. Pero la incomodidad con el uso de este método de aproximación es que para obtener un ajuste de 4 dígitos después de la coma³, es necesario un número alto de coeficientes; 18 parámetros en total. Se puede desarrollar el procedimiento empleado en este trabajo con 18 parámetros por curva, pero existe otra opción viable, que es más económica en términos de tiempo y cálculo.

Comencemos por observar que en todos los gráficos se encuentran cinco puntos que son característicos de cada uno. Son los que se muestran en la figura 4-7. En particular cabe remarcar que, dada la periodicidad⁴ de la gráfica, los puntos 1 y 5 corresponden al mismo punto de la elipse, por lo cual tienen la misma ordenada f_c .

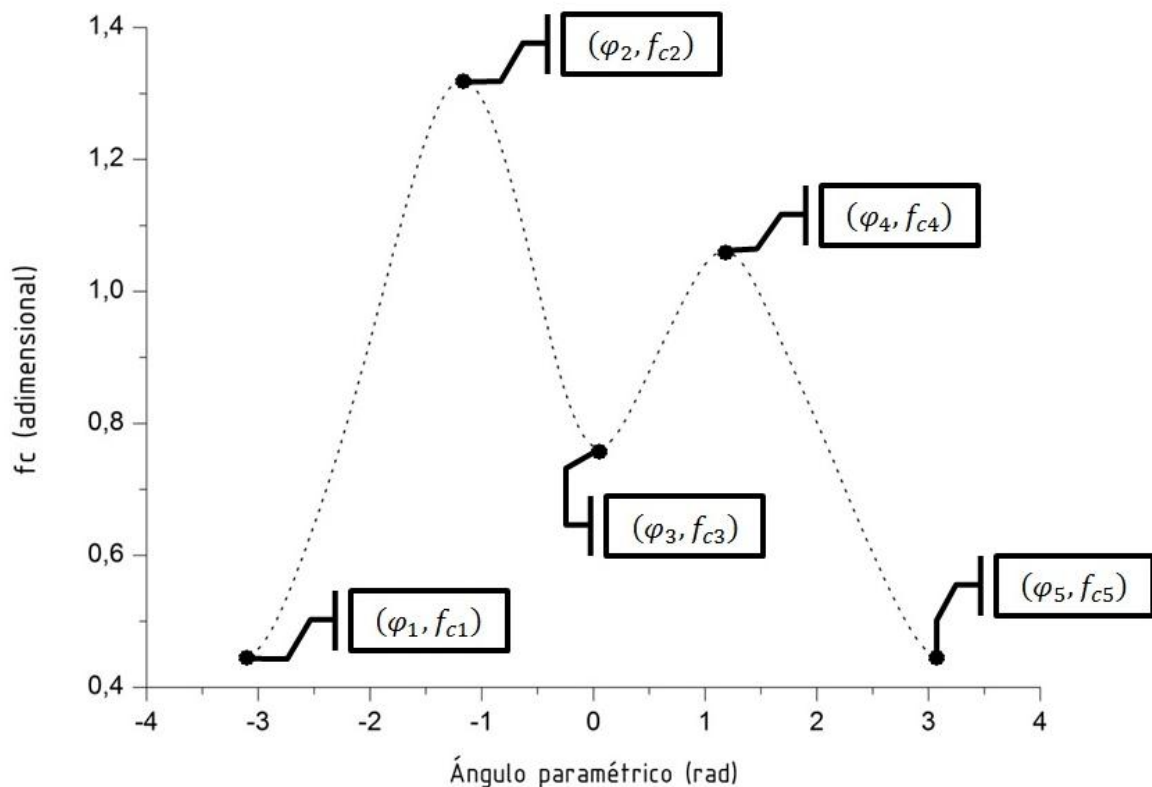


Figura 4-7. Puntos característicos de la gráfica para f_c vs. φ .

³ La precisión con que el software de EF reporta valores para el cálculo de K_I es de 4 dígitos después de la coma.

⁴ Recuérdese que se está trabajando con un frente de fisura que es una curva cerrada.

Por otro lado, observando *por separado* los 4 tramos delimitados por estos puntos sobre la curva original, se puede proponer una *aproximación por tramos*⁵. Para esto se utilizan funciones senos en los tramos de numeración impar, y cosenos en los tramos de numeración par. Los tramos están numerados de izquierda a derecha considerando el gráfico 4-7. Las funciones planteadas tienen la forma de las ecuaciones (4-3 a 4-6) y son ágiles de programar. Con este planteamiento, logramos reducir a 8 el número de parámetros necesarios para representar las curvas de f_c , que son las coordenadas de los 5 puntos ya mencionados⁶.

$$f_c^{tramo I} = A + B \cdot \text{sen}(C \cdot \varphi + D) \quad (4-3)$$

$$f_c^{tramo II} = E + F \cdot \text{cos}(G \cdot \varphi + H) \quad (4-4)$$

$$f_c^{tramo III} = I + L \cdot \text{sen}(M \cdot \varphi + N) \quad (4-5)$$

$$f_c^{tramo IV} = O + P \cdot \text{cos}(R \cdot \varphi + S) \quad (4-6)$$

Las dieciséis constantes que aparecen en las ecuaciones (4-3 a 4-6) dependen de las coordenadas de los puntos característicos. Esta dependencia es fácil de calcular y queda evidenciada en las ecuaciones (4-7 a 4-22).

$$A = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (4-7)$$

$$B = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \quad (4-8)$$

$$C = \frac{\pi}{f_{c2} - f_{c1}} \quad (4-9)$$

$$D = \pi \cdot \left(0,5 - \frac{f_{c2}}{f_{c2} - f_{c1}} \right) \quad (4-10)$$

$$E = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} \quad (4-11)$$

$$F = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} \quad (4-12)$$

$$G = -\frac{\pi}{f_{c2} - f_{c3}} \quad (4-13)$$

$$H = \frac{\pi \cdot f_{c2}}{f_{c2} - f_{c3}} \quad (4-14)$$

⁵ Al igual que la serie de Fourier, esta aproximación es única.

⁶ Si bien son 10 coordenadas, recuérdese lo que se dijo acerca del 5^{to} punto de las curvas.

$$I = \frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \quad (4-15)$$

$$L = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} \quad (4-16)$$

$$M = \frac{\pi}{f_{c4} - f_{c3}} \quad (4-17)$$

$$N = \pi \cdot \left(0,5 - \frac{f_{c4}}{f_{c4} - f_{c3}} \right) \quad (4-18)$$

$$O = \frac{\varphi_4 + \varphi_5}{2} \quad (4-19)$$

$$P = \frac{\varphi_4 - \varphi_5}{2} \quad (4-20)$$

$$R = -\frac{\pi}{f_{c4} - f_{c5}} \quad (4-21)$$

$$S = \frac{\pi \cdot f_{c4}}{f_{c4} - f_{c5}} \quad (4-22)$$

En los casos modelados se observó que la aproximación de las curvas por este método genera los errores mostrados en la tabla 4-A⁷.

Factor de aspecto ($r = a/b$)	Promedio de entre los valores máximos encontrados del %error	Media de los promedios encontrados del %error
0,40	7,11	2,40
0,60	4,49	1,40
0,80	3,12	1,26

Tabla 4-A. Promedio de errores encontrados.

4.4 Predicción de los puntos característicos de la curva de f_c en condiciones de carga puntual y factores de aspecto arbitrarios

Conociendo los puntos característicos de la curva de f_c , se está ahora en condiciones de aproximar dicha gráfica para cualquier otro valor del ángulo paramétrico. Teniendo en cuenta lo expuesto en la sección anterior, lo que resta por resolver ahora es el método para

⁷ Estos son sólo promedios para tener una idea de todos los casos de carga estudiados para cada factor de aspecto. Se pueden observar con mayor detalle abriendo los archivos de datos correspondientes en el DVD anexo a este trabajo.

predecir los valores de los pares (φ_i, f_{ci}) para cualquier otra ubicación de la carga puntual y un valor de factor de aspecto dado.

A esta altura se cuenta con los valores de f_c para la carga puntual unitaria aplicada en cada uno de los puntos de la grilla mostrada en la figura 4-1, para cada factor de aspecto estudiado. Con la información provista por todos los modelos se puede proceder a graficar las superficies correspondientes a cada una de las coordenadas f_{ci} y φ_i como función de la posición de la carga unitaria sobre el plano de la fisura. Las figura 4-8, 4-9 y 4-10 muestra algunas de tales superficies para los factores de aspecto 0,4, 0,6 y 0,8, donde quedan plasmadas las coordenadas f_{c1} , φ_2 y f_{c4} , respectivamente.

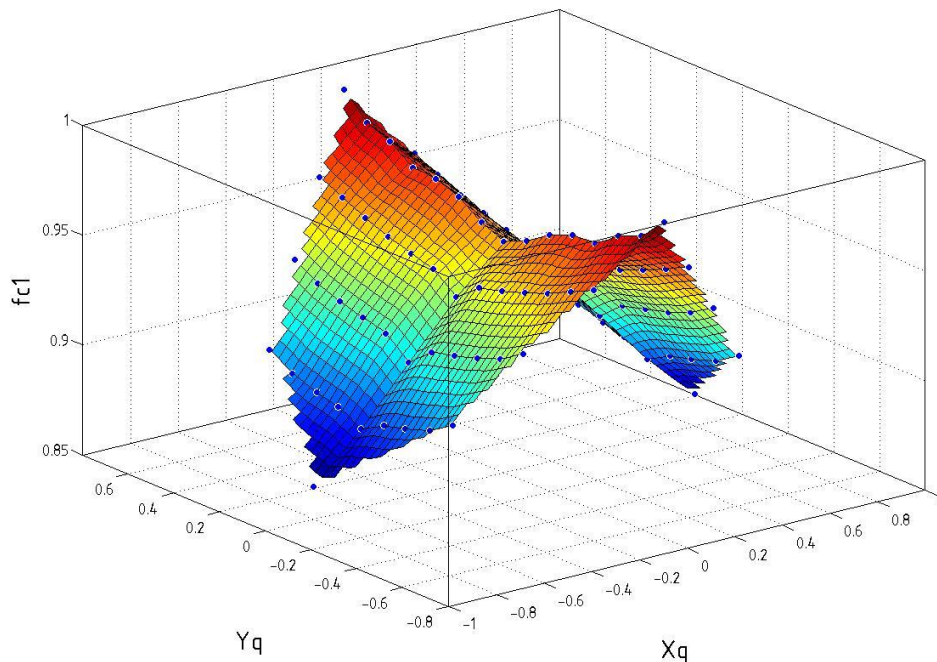


Figura 4-8. Superficie generada en el espacio (X_q, Y_q, f_{c1}) . X_q e Y_q corresponden a las coordenadas de aplicación de la carga puntual unitaria. f_{c1} es una de las coordenadas del punto característico 1 de la figura 4-7.

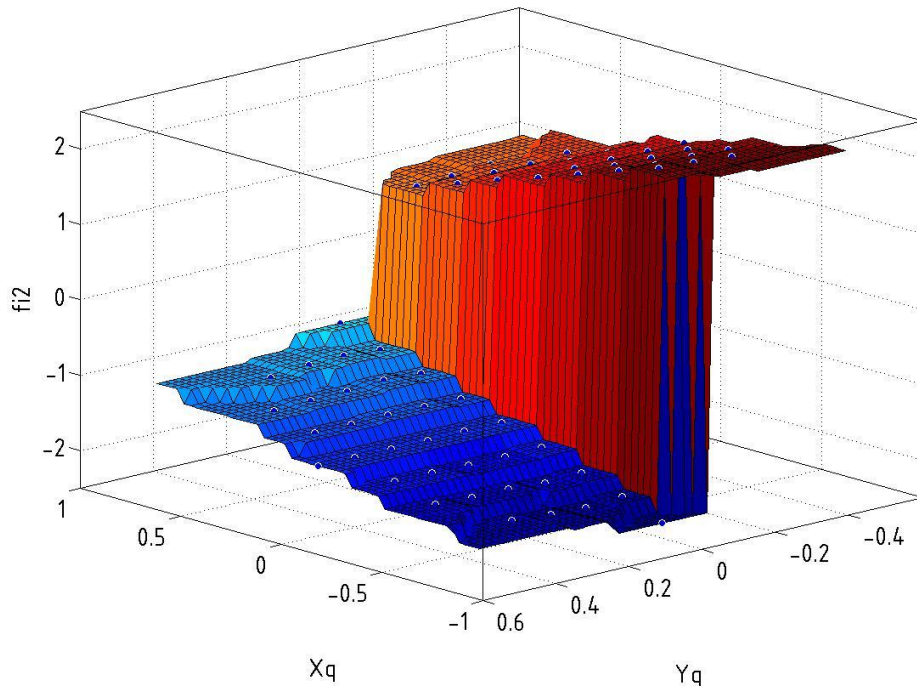


Figura 4-9. Superficie generada en el espacio (X_q, Y_q, φ_2) . X_q e Y_q corresponden a las coordenadas de aplicación de la carga puntual unitaria. φ_2 es una de las coordenadas del punto característico 2 de la figura 4-7.

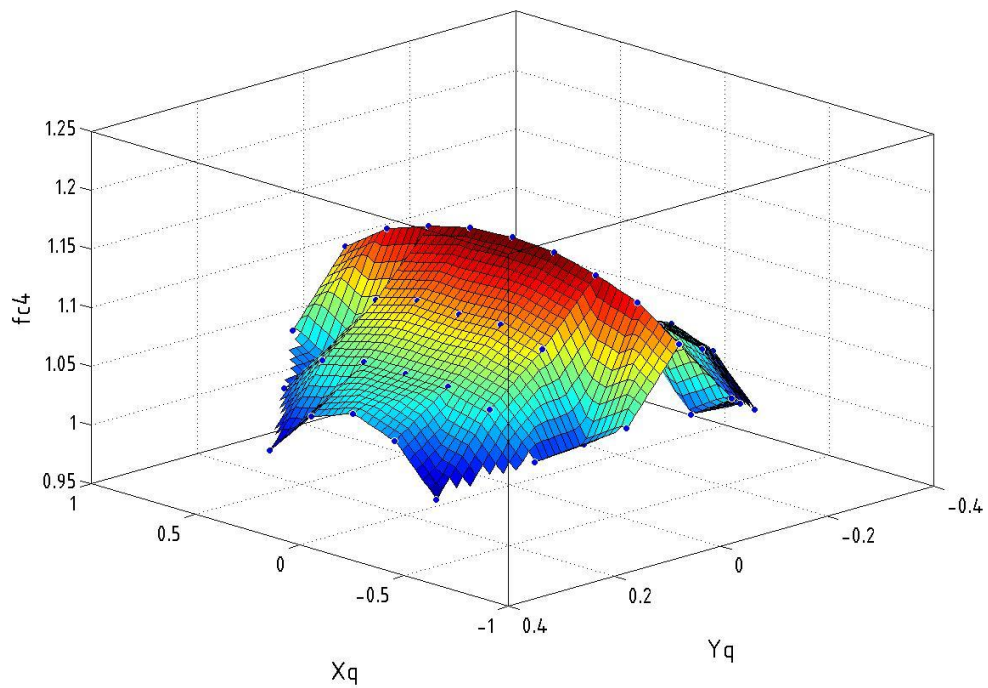


Figura 4-10. Superficie generada en el espacio (X_q, Y_q, f_{c4}) . X_q e Y_q corresponden a las coordenadas de aplicación de la carga puntual unitaria. f_{c4} es una de las coordenadas del punto característico 4 de la figura 4-7.

En total se construyen 24 superficies de este tipo. Esto es, una por cada parámetro (8 en total), por cada factor de aspecto utilizado en este trabajo (los 3 mencionados en 4.2). En este punto es importante hacer algunas aclaraciones acerca de la forma de operar con las superficies como la 4-8. En este sentido, para poder obtener valores de f_{ci} y φ_i fuera de los puntos ensayados, hay sectores en el plano de la fisura en que el algoritmo correspondiente debiera interpolar o extrapolar según sea el caso⁸. El motivo de esta dualidad en la forma para calcular los f_{ci} se entiende mejor si se observan las figuras 4-11 a 4-13. Se puede observar que con los datos obtenidos de EF, hay espacios entre el frente del defecto elíptico y el mallado de cargas modelado que no pueden ser interpolados. Por ello, se necesita extrapolar en esas zonas. En esta situación se utiliza la función *Extrapol*⁹, que hace correspondientemente lo que su nombre indica, con los resultados del procesamiento de los datos obtenidos de EF para la grilla 4-1 y con los puntos que caen fuera de la región de interpolación.

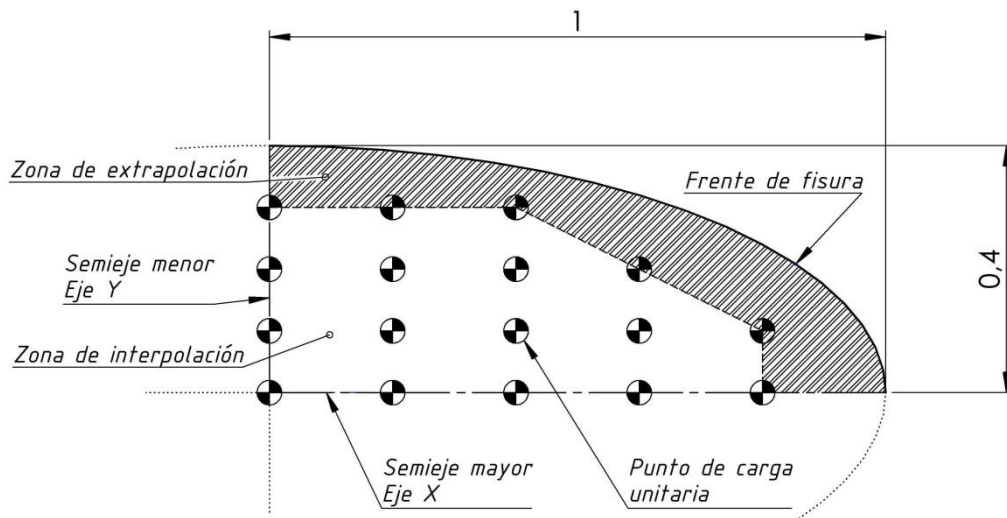


Figura 4-11. Discriminación entre zonas de interpolación/extrapolación para factor de aspecto $r = 0,4$. Los símbolos de espiga corresponden a los puntos como los de la grilla 4-1 donde se posicionaron cargas unitarias.

⁸ El programa MatLab cuenta con una librería interna de funciones que permiten interpolar funciones 2D y 3D.

⁹ Al final de este capítulo se muestra la tabla 4-H que presenta las funciones utilizadas en este proyecto final.

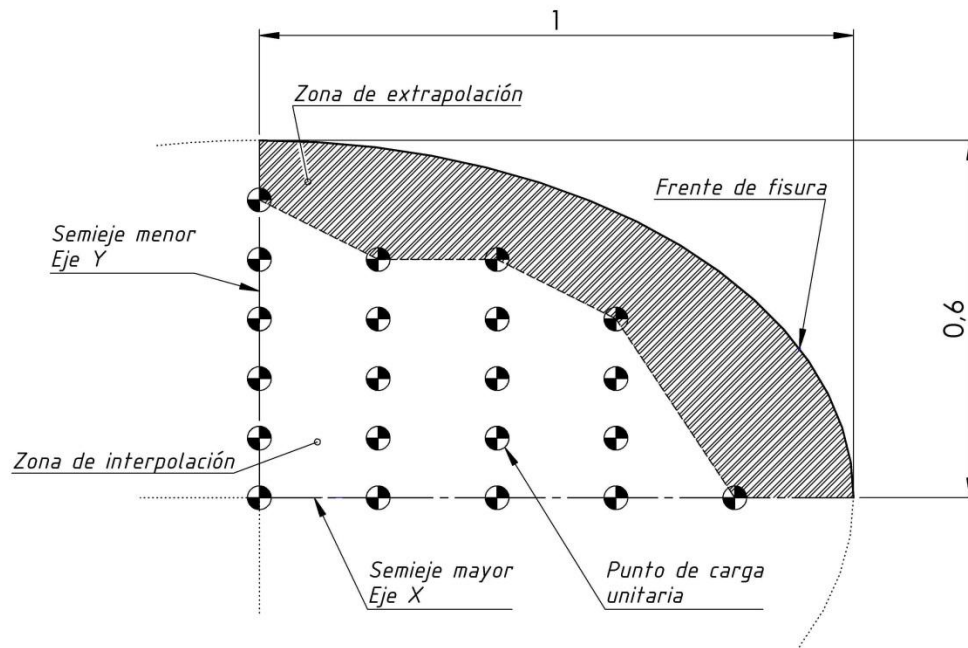


Figura 4-12. Discriminación entre zonas de interpolación/extrapolación para factor de aspecto $r = 0,6$. Los símbolos de espiga corresponden a los puntos como los de la grilla 4-1 donde se posicionaron cargas unitarias.

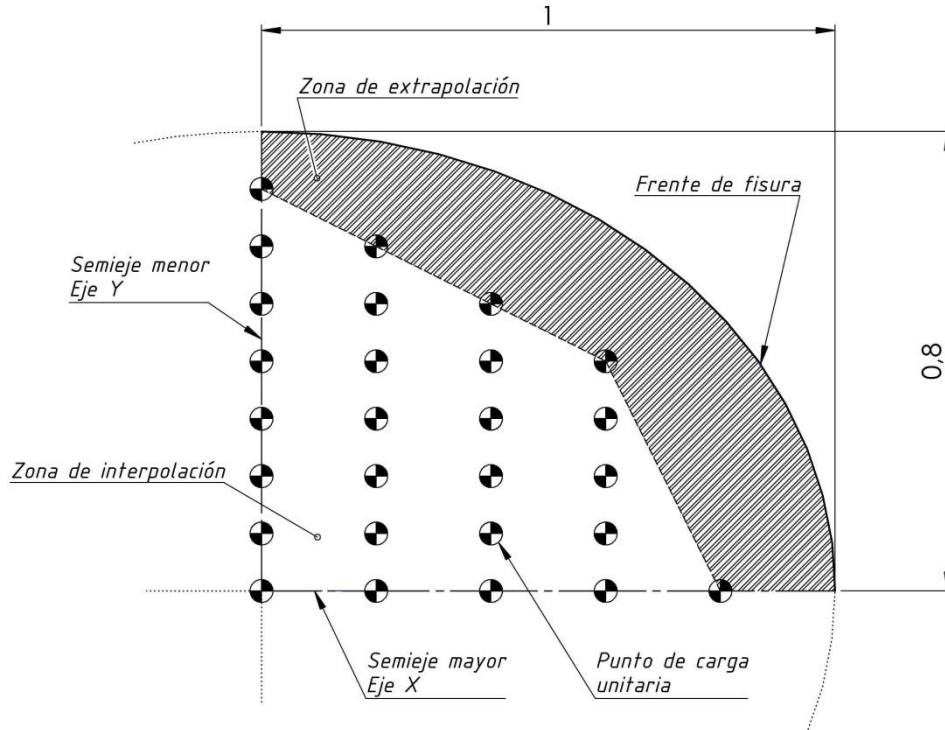


Figura 4-13. Discriminación entre zonas de interpolación/extrapolación para factor de aspecto $r = 0,8$. Los símbolos de espiga corresponden a los puntos como los de la grilla 4-1 donde se posicionaron cargas unitarias.

Resumiendo lo que se logró hasta el momento, dados los puntos de aplicación de una carga puntual y unitaria (x_q, y_q) , se pueden averiguar los 5 pares de coordenadas (φ_i, f_{ci}) que caracterizan completamente a las curvas de f_c en cada uno de los 3 factores de aspecto estudiados: $r = 0,4$, $r = 0,6$ y $r = 0,8$. La tarea de aproximar estos valores se automatiza en el algoritmo gracias a la función **gridfit.m** extraída de la librería de funciones en el sitio web de MatLab [30]¹⁰. De esto se desprende que lo que resta por hacer es encontrar¹¹ el valor de cada parámetro f_{ci} o φ_i , para el factor de aspecto deseado.

La figura 4-14 muestra una dispersión típica de valores para uno de los parámetros en función del factor de aspecto. Efectuando la aproximación adecuada, se puede predecir el valor que toma dicho parámetro para cualquier otro valor de factor de aspecto inferior a 1.

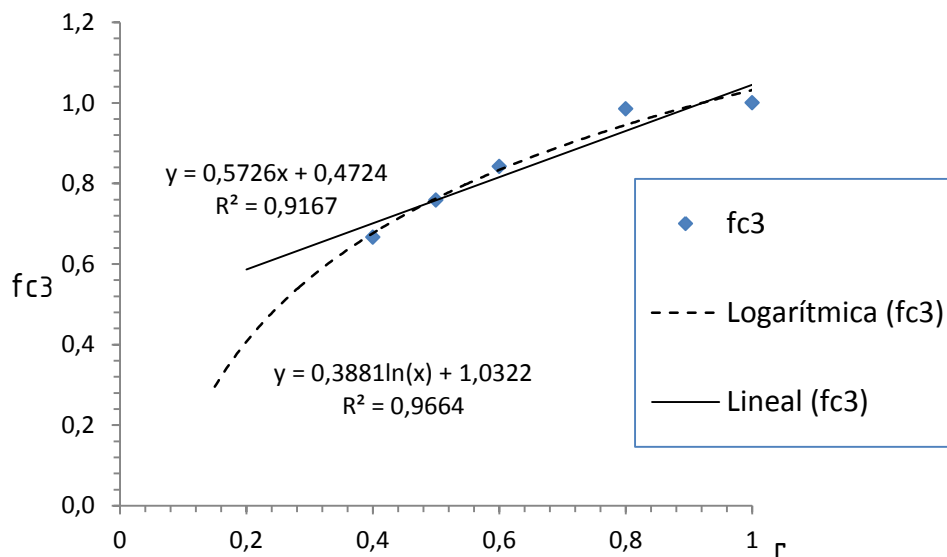


Figura 4-14. Variación típica de uno de los parámetros en función del factor de aspecto. En este caso f_{c3} vs. r .

El diagrama de flujo 4-15 muestra en forma gráfica el proceder del algoritmo corrector.

¹⁰ En este sitio se encuentra la explicación detallada de la forma de procesar valores dispersos que son los datos de entrada de la función **gridfit.m**.

¹¹ Entiéndase interpolar o extrapolar según corresponda.

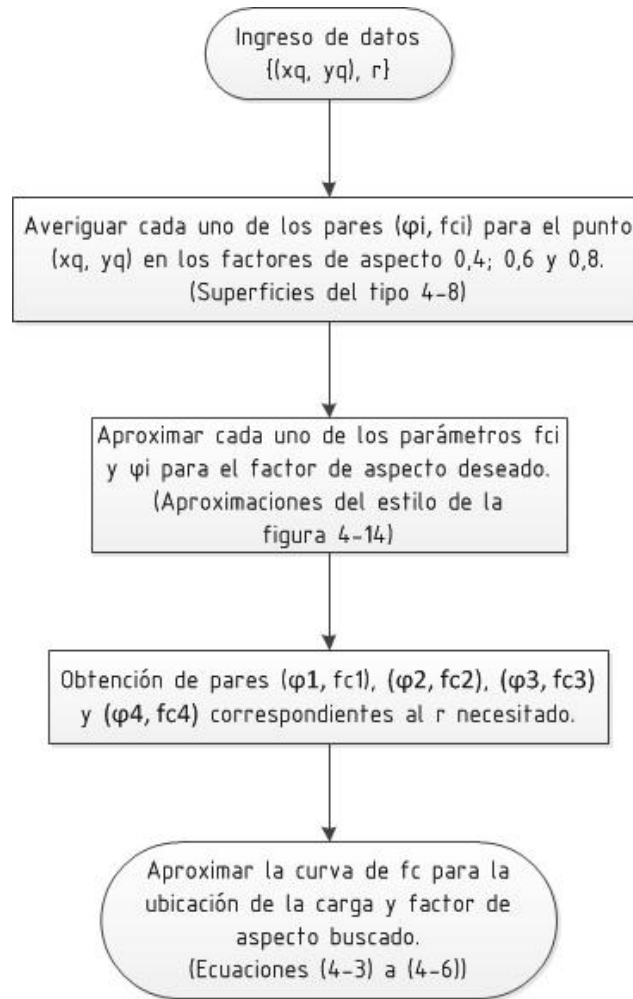


Figura 4-15. Diagrama de flujo para el algoritmo corrector.

4.5 Limitación para el empleo del algoritmo

El algoritmo es limitado en su aplicación. Si bien es cierto que el mayor factor de aspecto es el de la circunferencia con un valor de 1, a todos los fines prácticos de este trabajo, el mayor factor de aspecto modelado es el de $0,8^{12}$. Esto quiere decir que para cualquier otro r comprendido entre 0,8 y 1, el método anterior funciona, sin consideraciones adicionales, siempre y cuando la carga este ubicada en el interior de la elipse de $r = 0,8$. El motivo, estando en esta condición aún puede desarrollarse un razonamiento como el mostrado por el gráfico 4-14 y efectuarse una aproximación lineal. Ver figura 4-16, punto (s, t) . Si por otro lado, por poner un ejemplo: nos encontramos con una elipse cuyo $r = 0,9$ y la carga puntual

¹² La circunferencia produce factores de corrección iguales a 1. Recuérdese que la ecuación de Oore y Burns coincide con la solución analítica para la circunferencia.

se encuentra en $(x_q, y_q) = (u, v)$ (figura 4-16), ya no estamos en condiciones de poder plantear un gráfico como el 4-14.

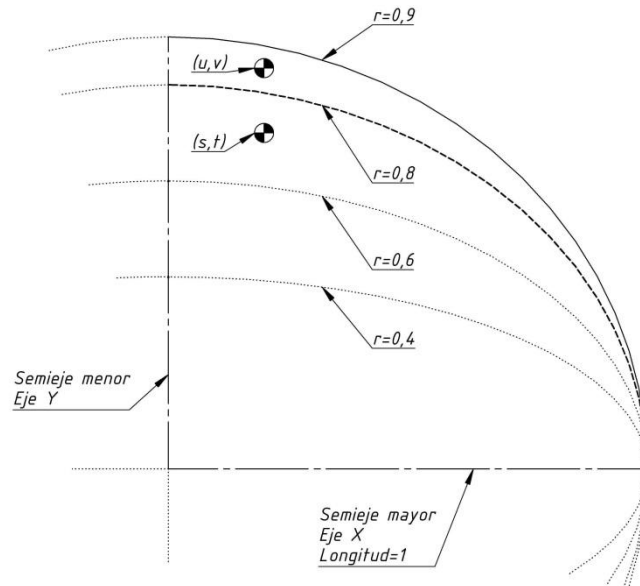


Figura 4-16. El punto (s, t) está adentro de la elipse de $r = 0,8$. El punto (u, v) está adentro de la elipse de $r = 0,9$ pero afuera de la de $r = 0,8$.

Sin embargo, en un trabajo posterior, la limitación de la rutina de Matlab podrá ser salvada. Estando en la situación del punto (u, v) , el problema puede resolverse haciendo que el algoritmo genere los (φ_i, f_{ci}) para todos los puntos correspondientes a la misma grilla que posee el factor de aspecto 0,8 (figura 4-13). Luego, por cada f_{ci} y φ_i , genera las superficies correspondientes como en las figuras 4-8 a 4-10. Por último, aproxima cada uno de los parámetros característicos para el punto en cuestión haciendo uso de la función **Extrapola**. Este proceso puede llevar más tiempo que el convencional ya que requiere calcular todos los puntos de la grilla de $r = 0,8$.

4.6 Verificación del método propuesto

A continuación, se verifican los resultados para la corrección al cálculo de $W_{QQ}^{O\&B}$. Como ya se mencionó con anterioridad, para el desarrollo de la metodología aquí expuesta se utilizan diferentes configuraciones de carga aplicadas en 3 factores de aspecto que sirven de base, estos son $r = 0,4$, $r = 0,6$ y $r = 0,8$. Para proceder con la verificación del algoritmo

mostrado en la figura 4-15, se evalúan 6 casos de *geometría-carga puntual* teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

1. El algoritmo debe predecir la función de corrección para factores de aspecto que no hayan sido considerados en el desarrollo de la metodología.
2. El algoritmo debe predecir la función de corrección para casos de carga en algunas de las regiones de extrapolación mostradas en las figuras 4-11 a 4-13.
3. El algoritmo debe ser coherente en la predicción de funciones de corrección respecto de los factores de aspecto usados para su desarrollo.

Para las 3 condiciones anteriores se comparan las soluciones obtenidas para la función de peso corregida contra la respuesta dada por EF para cada caso.

Respecto al punto 1, se estudiaron los factores de aspecto $r = 0,5$ y $r = 0,7$ con dos configuraciones de carga distintas en cada uno. En el caso de $r = 0,5$ se estudiaron las cargas puntuales aplicadas en $(x_q, y_q) = (0,2; 0,1)$ y $(x_q, y_q) = (-0,3; -0,1)$. Para $r = 0,7$ se estudiaron las cargas puntuales aplicadas en $(x_q, y_q) = (0,2; -0,4)$ y $(x_q, y_q) = (0,34; -0,23)$. Los valores obtenidos se presentan en las tablas 4-B a 4-E. Lo que se observa más abajo es un fragmento de los datos generados.

Ángulo paramétrico, ϕ [rad grd]		$W_{QQ'}^{EF}$	$W_{QQ'}^{O\&B}$	$W_{QQ'}^{corregida}$	% de error entre $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{O\&B}$	% de error $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{corregida}$
		$\left[\frac{\sqrt{mm}}{mm^2} \right]$				
0,00	0,00°	0,1621	0,2038	0,1547	25,7454	4,5862
0,77	44,30°	0,3965	0,4039	0,3744	1,8553	5,5646
1,05	60,23°	0,7019	0,6641	0,6698	5,3890	4,5776
1,57	90,00°	0,7128	0,6625	0,6840	7,0626	4,0334
2,36	135,27°	0,1270	0,1485	0,1160	16,9152	8,6267
2,57	147,03°	0,0936	0,1195	0,0847	27,6674	9,5105
3,14	180,00°	0,0598	0,0914	0,0565	52,7142	5,5264
3,92	224,73°	0,1148	0,1282	0,1040	11,7084	9,3959
4,71	269,99°	0,3840	0,3312	0,3663	13,7577	4,6216
5,51	315,70°	0,2959	0,2833	0,2781	4,2692	6,0296

Tabla 4-B. $r = 0,5$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; 0,1)$. Comparación entre las $W_{QQ'}$ obtenidas por EF, Oore y por la corrección a la solución de Oore propuesta en este trabajo.

Ángulo paramétrico, ϕ [rad grd]		$W_{QQ'}^{EF}$	$W_{QQ'}^{O\&B}$	$W_{QQ'}^{corregida}$	% de error entre $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{O\&B}$	% de error $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{corregida}$
		$\frac{\sqrt{mm}}{mm^2}$				
0,00	0,00°	0,0474	0,0765	0,0448	61,1884	5,6101
0,54	30,87°	0,0666	0,0885	0,0597	32,9088	10,3151
0,78	44,73°	0,0904	0,1061	0,0818	17,3983	9,5114
1,05	60,09°	0,1355	0,1410	0,1259	4,0375	7,1204
1,57	90,00°	0,3288	0,2889	0,3132	12,1305	4,7461
2,00	114,83°	0,4720	0,4050	0,4502	14,2050	4,6111
2,36	135,40°	0,3758	0,3483	0,3581	7,3130	4,7159
2,53	144,94°	0,3158	0,3104	0,2993	1,7007	5,2382
2,82	161,75°	0,2398	0,2665	0,2218	11,1142	7,4973
3,95	226,10°	0,5944	0,5843	0,5653	1,6980	4,8906
4,71	269,99°	0,5482	0,5203	0,5268	5,0955	3,8962
5,50	315,26°	0,0979	0,1199	0,0891	22,5270	8,9058

Tabla 4-C. $r = 0,5$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (-0,3; -0,1)$. Comparación entre las $W_{QQ'}$ obtenidas por EF, Oore y por la corrección a la solución de Oore propuesta en este trabajo.

Ángulo paramétrico, ϕ [rad grd]		$W_{QQ'}^{EF}$	$W_{QQ'}^{O\&B}$	$W_{QQ'}^{corregida}$	% de error entre $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{O\&B}$	% de error $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{corregida}$
		$\frac{\sqrt{mm}}{mm^2}$				
0,00	0,00°	0,1429	0,1562	0,1491	9,3392	4,3166
0,53	30,24°	0,1259	0,1241	0,1303	1,4189	3,4836
0,78	44,56°	0,1270	0,1183	0,1311	6,8711	3,2507
1,06	60,94°	0,1277	0,1131	0,1319	11,4614	3,2900
1,57	90,00°	0,1153	0,1000	0,1202	13,2721	4,2616
2,00	114,65°	0,0944	0,0859	0,0972	8,9954	2,9364
2,36	135,01°	0,0780	0,0770	0,0789	1,2628	1,2304
2,54	145,25°	0,0718	0,0743	0,0722	3,5593	0,6704
3,14	180,00°	0,0666	0,0781	0,0691	17,3862	3,8476
3,93	224,99°	0,1355	0,1502	0,1420	10,8669	4,8290
4,71	270,00°	0,9681	0,9615	0,9932	0,6804	2,5882
5,50	315,24°	0,4435	0,4650	0,4578	4,8464	3,2310

Tabla 4-D. $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; -0,4)$. Comparación entre las $W_{QQ'}$ obtenidas por EF, Oore y por la corrección a la solución de Oore propuesta en este trabajo.

Ángulo paramétrico, ϕ [rad grd]		$W_{QQ'}^{EF}$	$W_{QQ'}^{O\&B}$	$W_{QQ'}^{corregida}$	% de error entre $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{O\&B}$	% de error $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{corregida}$
		$\left[\frac{\sqrt{mm}}{mm^2} \right]$				
0,00	0,00°	0,2779	0,2895	0,2781	4,1872	0,0668
0,54	30,77°	0,2386	0,2298	0,2369	3,6890	0,7165
0,78	44,43°	0,2329	0,2148	0,2308	7,7624	0,9214
1,05	60,19°	0,2193	0,1948	0,2170	11,1519	1,0303
1,57	90,00°	0,1627	0,1443	0,1613	11,3391	0,8619
2,01	114,92°	0,1134	0,1065	0,1107	6,0535	2,4213
2,38	136,15°	0,0847	0,0864	0,0815	1,9593	3,8114
2,52	144,55°	0,0769	0,0814	0,0739	5,7921	3,9148
3,14	180,00°	0,0646	0,0765	0,0641	18,4373	0,8410
3,94	225,89°	0,1142	0,1232	0,1123	7,9144	1,6373
4,71	270,00°	0,4321	0,4203	0,4317	2,7257	0,0839
5,50	315,33°	0,6943	0,6850	0,6909	1,3390	0,4854

Tabla 4-E. $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,34; -0,23)$. Comparación entre las $W_{QQ'}$ obtenidas por EF, Oore y por la corrección a la solución de Oore propuesta en este trabajo.

Otro caso estudiado, referido a la condición 2 de la página 57, es la predicción de las funciones de corrección para $r = 0,8$ con una carga puntual aplicada en $(x_q, y_q) = (0,8; 0,1)$. Los valores reportados por el algoritmo corrector se comparan con los obtenidos por EF y por Oore en la tabla 4-F.

Ángulo paramétrico, ϕ [rad grd]		$W_{QQ'}^{EF}$	$W_{QQ'}^{O\&B}$	$W_{QQ'}^{corregida}$	% de error entre $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{O\&B}$	% de error $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{corregida}$
		$\frac{\sqrt{mm}}{mm^2}$				
0,00	0,00°	2,0410	2,0527	2,0956	0,5736	2,6758
0,54	30,68°	1,0660	1,0413	1,0754	2,3125	0,8787
0,80	45,89°	0,4582	0,4352	0,4547	5,0235	0,7716
1,06	60,52°	0,2392	0,2279	0,2402	4,7440	0,4357
1,57	90,00°	0,0911	0,0908	0,0957	0,3152	5,0809
2,00	114,64°	0,0524	0,0548	0,0564	4,4177	7,5127
2,38	136,33°	0,0370	0,0406	0,0404	9,7282	9,0828
2,54	145,51°	0,0331	0,0371	0,0363	12,1067	9,5048
3,14	180,00°	0,0270	0,0316	0,0288	17,1326	6,8365
3,94	225,90°	0,0356	0,0381	0,0384	7,0734	7,7317
4,71	270,00°	0,0729	0,0708	0,0752	2,8626	3,2168
5,51	315,73°	0,2445	0,2330	0,2444	4,7167	0,0467

Tabla 4-F. $r = 0,8$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,8; 0,1)$. Comparación entre las $W_{QQ'}$, obtenidas por EF, Oore y por la corrección a la solución de Oore propuesta en este trabajo.

En la sección 3.6 se presentó la tabla de resultados de EF en comparación con resultados extraídos de la publicación de Atroshchenko et al. [25] para $r = 0,4$ con una carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0; 0)$. La figura 4-17 muestra esos valores, junto con los resultados calculados para $W_{QQ'}^{O\&B}$ y los correspondientes para $W_{QQ'}^{corregida}$.

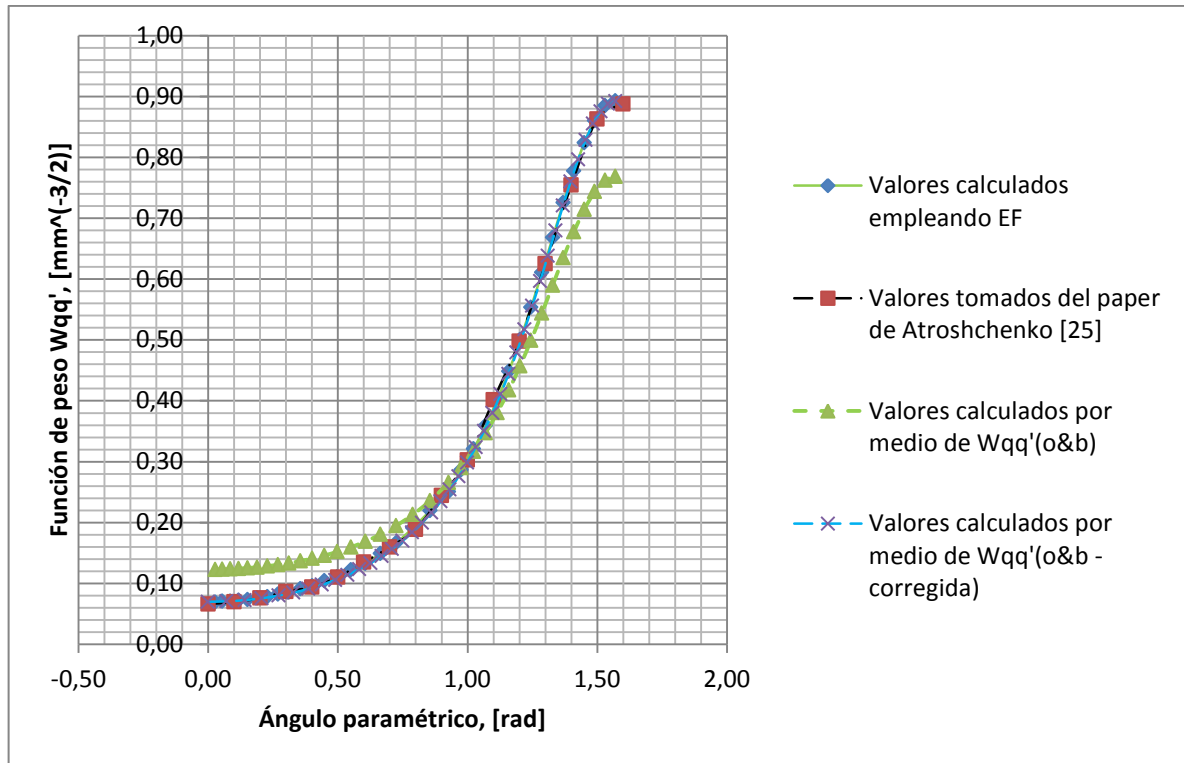


Figura 4-17. Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$ y $W_{QQ'}^{Atroshchenko}$ todas en función del ángulo paramétrico para $r = 0,4$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0; 0)$.

La tabla 4-G muestra en números la comparación en % de error entre las distintas $W_{QQ'}$, presentadas en el gráfico 4-17, que pretenden aproximar a la función de peso obtenida mediante el método analítico desarrollado por Atroshchenko.

Función de peso ($W_{QQ'}$)	%error máximo encontrado	%error mínimo encontrado	%error promedio encontrado
$W_{QQ'}^{EF}$	1,5435	0,0091	0,8281
$W_{QQ'}^{O\&B}$	18,8725	0,5021	9,4016
$W_{QQ'}^{corregida}$	2,7967	0,1520	1,5526

Tabla 4-G. Valores máximo, mínimo y promedio para el % de error entre las distintas $W_{QQ'}$ y la solución analítica aportada por Atroshchenko, $W_{QQ'}^{Atroshchenko}$ para $r = 0,4$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0; 0)$.

De esta forma se pretende evidenciar que el algoritmo corregido cumple con la condición 3 de la página 57, al ser las cotas y el promedio del % de error de la $W_{QQ'}^{corregida}$ más próximos a los correspondientes generados por la función de peso calculada a partir de EF.

4.7 Comentarios sobre los resultados

La sección 4.6 resume en tablas los valores calculados para el % de error de diferentes respuestas para $W_{QQ'}^{O\&B}$ y $W_{QQ'}^{corregida}$ con respecto a la solución de elementos finitos. Al observar las tablas, en cada una de las columnas para el % de error, queda en evidencia que el algoritmo de Oore genera respuestas para la función de peso dando valores con una banda de incertezas más amplia, respecto de cómo lo hace la metodología presentada en este trabajo. La figura 4-18 muestra esta tendencia para el caso de $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; -0,4)$. En este caso, por ejemplo, la formulación original de Oore genera respuestas con hasta un 18% de error mientras que la corrección no supera el 6%.

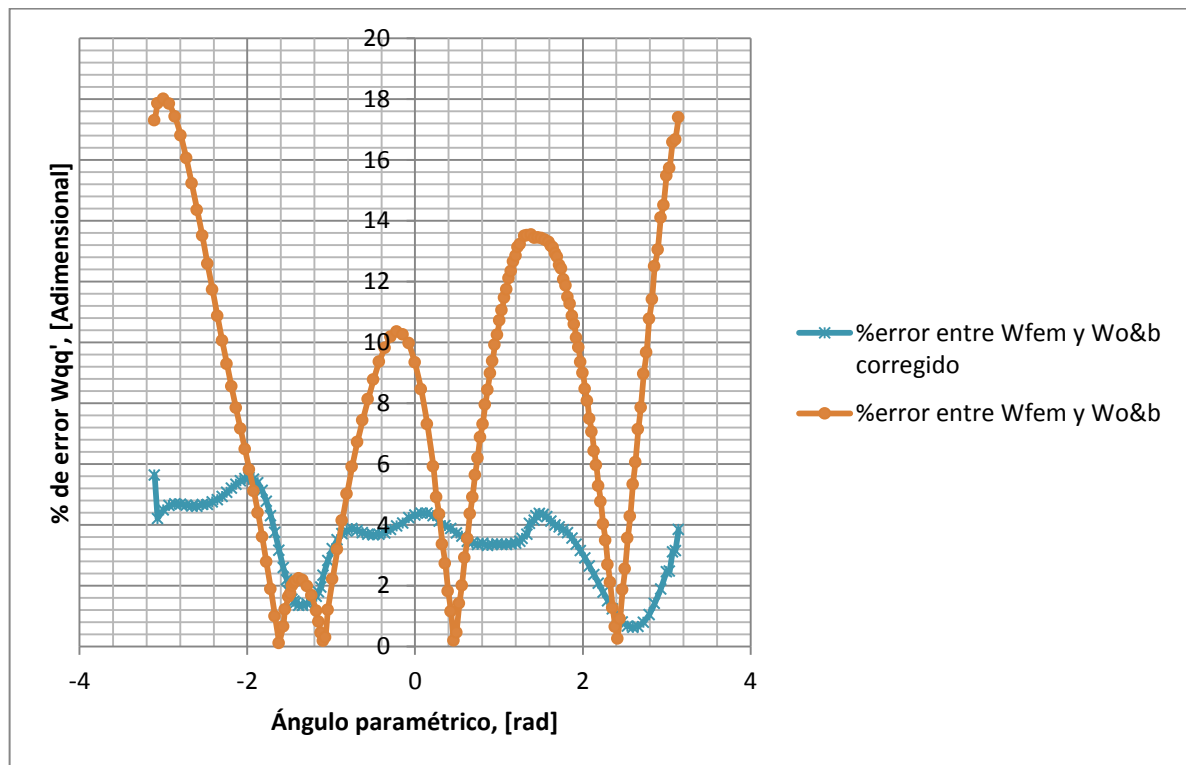


Figura 4-18. Gráficos del % de error de $W_{QQ'}^{O\&B}$ y $W_{QQ'}^{corregida}$ contra $W_{QQ'}^{EF}$. Para $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; -0,4)$.

Respecto a los *valores máximos de los errores* en el resto de los archivos de datos, se puede observar que con la corrección propuesta estos alcanzan un valor que ronda el 10%. Si bien se puede ver una tendencia del % de error a incrementar con la curvatura del frente del defecto, es evidente su fuerte dependencia con la distancia que separa al punto de aplicación de la carga con el punto del frente de fisura que se esté observando. Las figuras 4-19 a 4-23

muestran máximos locales que reflejan esta naturaleza. Si el error en la solución propuesta sólo dependiera de la curvatura, entonces los máximos de las funciones de f_c vs. φ deberían aparecer siempre para los valores 0 y π del ángulo paramétrico que es donde la curvatura de los frentes es mayor. Además, para casos como el de la figura 4-23 se observa un único máximo.

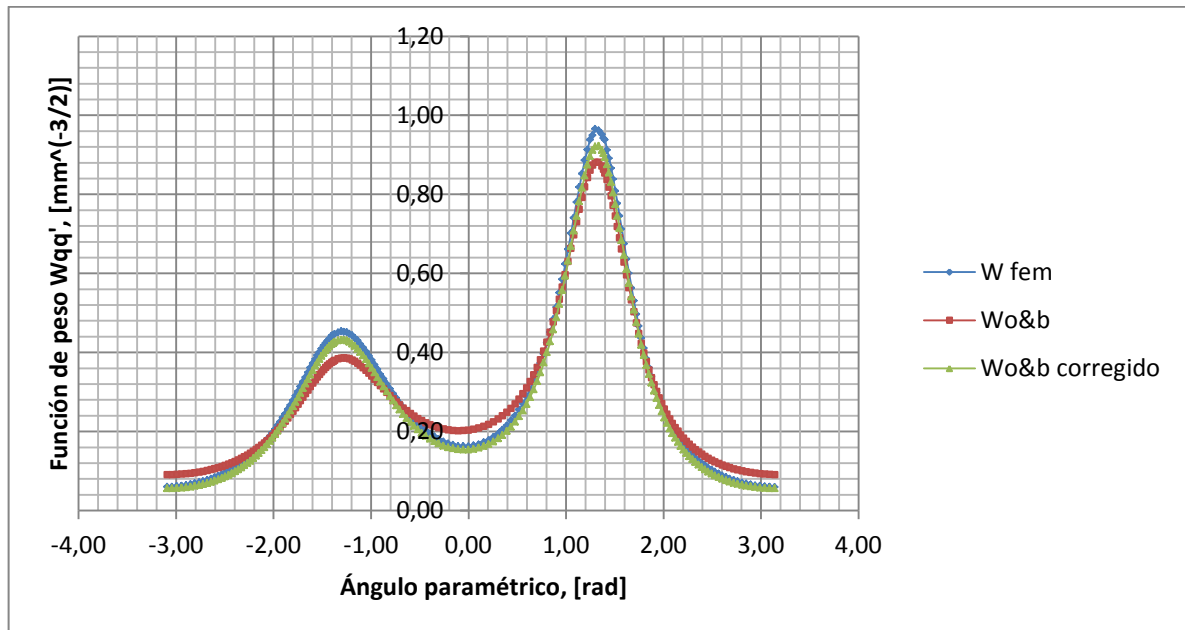


Figura 4-19. Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$ todas en función del ángulo paramétrico para $r = 0,5$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; 0,1)$.

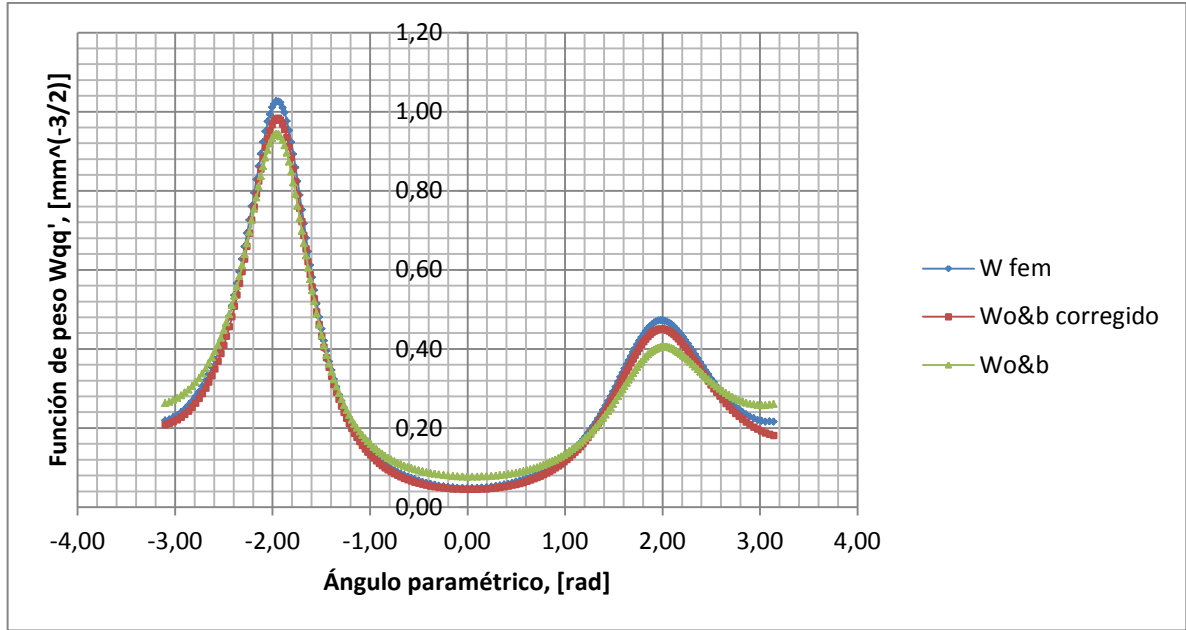


Figura 4-20. Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$ todas en función del ángulo paramétrico para $r = 0,5$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (-0,3; -0,1)$.

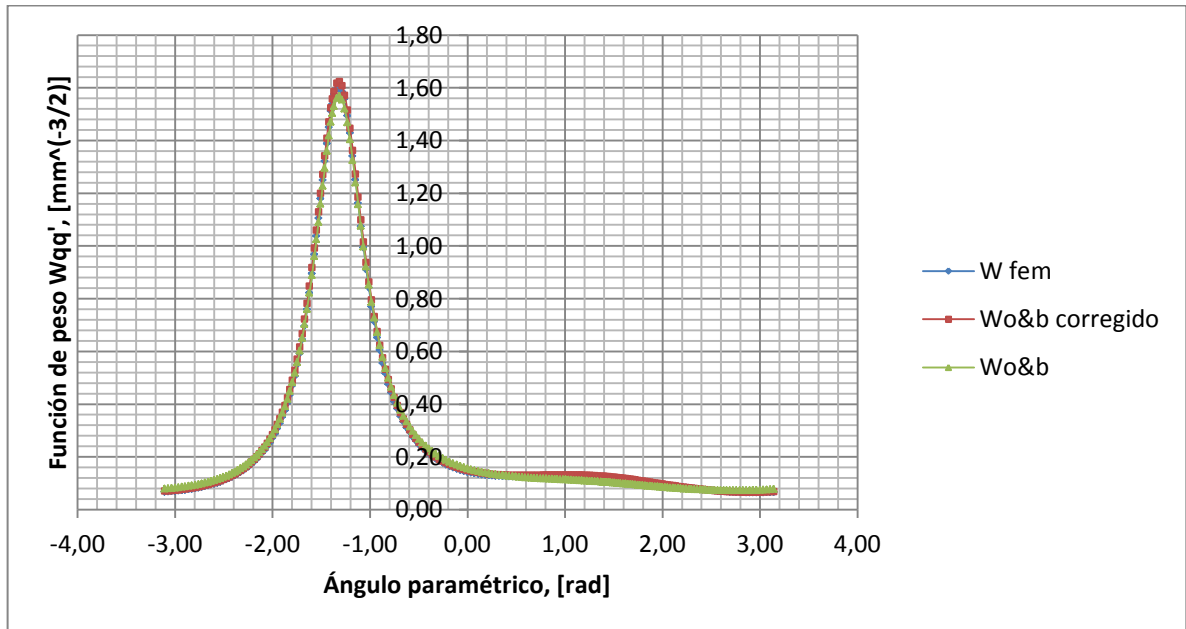


Figura 4-21. Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$ todas en función del ángulo paramétrico para $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,2; -0,4)$.

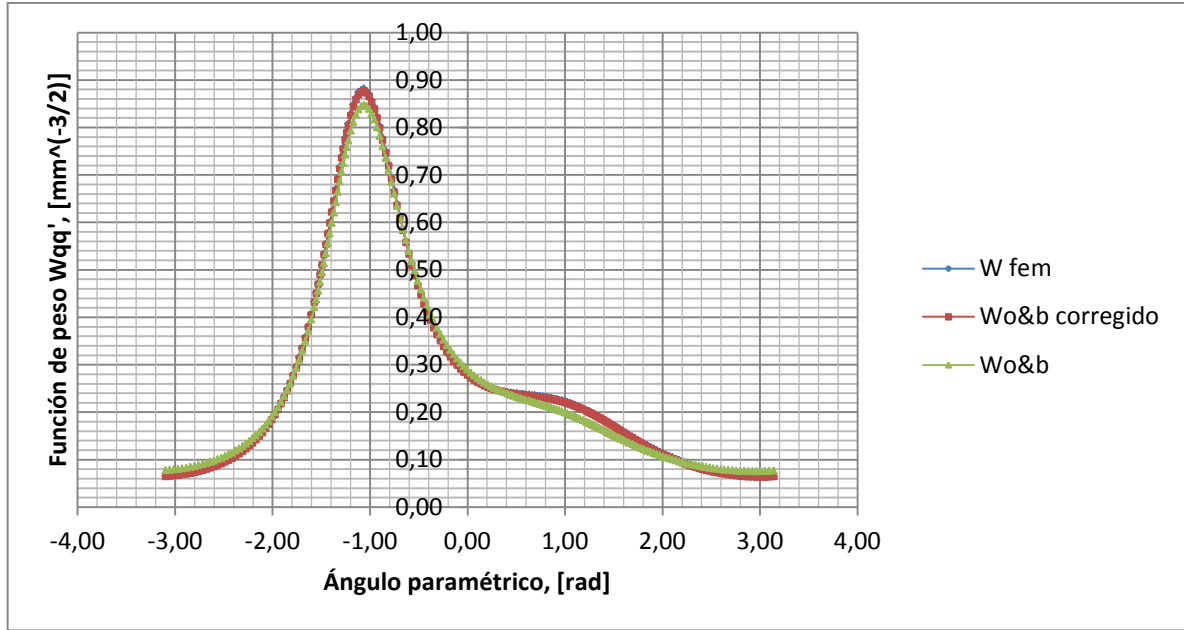


Figura 4-22. Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$ todas en función del ángulo paramétrico para $r = 0,7$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,34; -0,23)$.

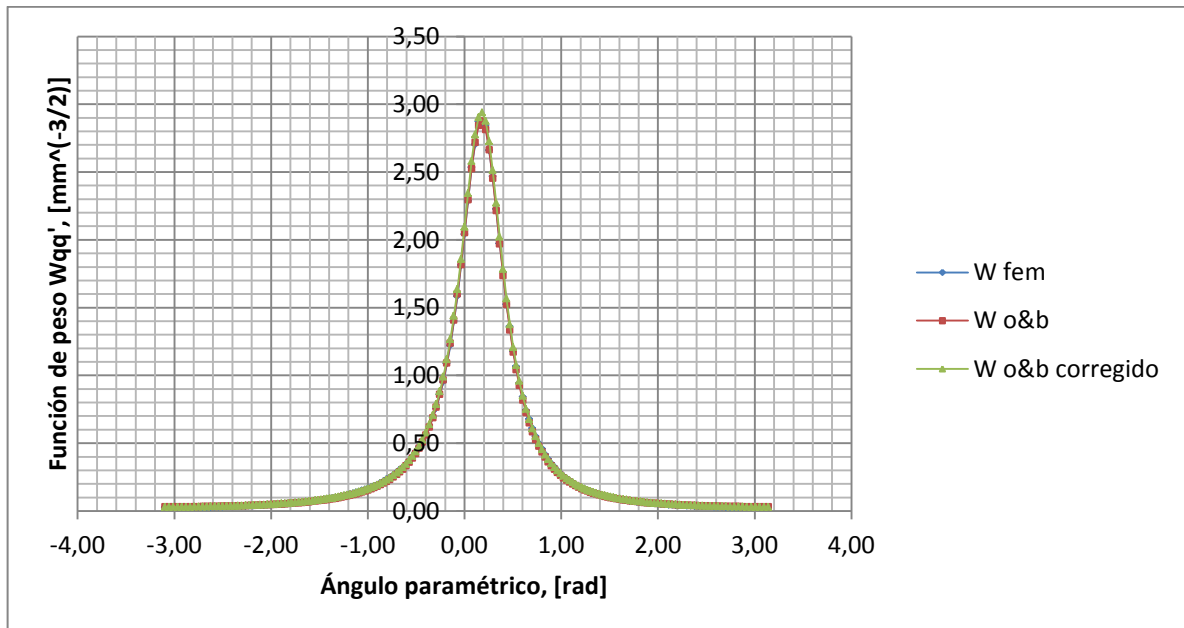


Figura 4-23. Gráfico de $W_{QQ'}^{O\&B}$, $W_{QQ'}^{corregida}$, $W_{QQ'}^{EF}$ todas en función del ángulo paramétrico para $r = 0,8$ y carga puntual unitaria en $(x_q, y_q) = (0,8; 0,1)$.

El lector interesado podrá revisar con mayor minuciosidad los archivos de datos. *En uno de los mismos*¹³ va encontrar *dos puntos del frente de fisura* en donde el error alcanza

¹³ Esta desviación se da en la elipse de $r = 0,5$, para el caso de carga puntual en $(x_q, y_q) = (-0,3; -0,1)$

16% y 14%. En este caso la desviación puede justificarse como debida a defectos en el mallado del modelo. Los puntos en cuestión se localizan en donde la curvatura del frente de la elipse es mayor, por lo que es una zona en la cual se encuentra una densidad considerable de elementos distorsionados como consecuencia de la dificultad de representar esta región con elementos hexaédricos.

4.8 Rutinas utilizadas

La tabla siguiente identifica a las rutinas de MatLab utilizadas durante el desarrollo de este proyecto final. Describe brevemente la utilidad de cada una.

Nombre de la rutina	Tipo. Utilidad
procesador.m	Script. Toma los datos que salen del programa de elementos finitos y los ordena.
cftool	Comando. Usado para graficar y aproximar datos.
postproceso.m	Script. Usado para verificar la aproximación de los tramos 1, 2, 3 y 4.
Representaparametros.m	Script. Replica información a los otros $\frac{3}{4}$ de la elipse.
cograf.m	Script. Dado el conjunto $\{r, (x_q, y_q)\}$ reporta los (φ_i, f_{ci}) de la curva de f_c (figura 4-2).
Interpola.m	Función. Interpola datos.
Extrapola.m	Función. Extrapola datos.
DIoE.m	Función. Discrimina entre las zonas donde se debe interpolar o extrapolar.
InterR.m	Función. Interpola y/o extrapola datos.
wob_corregida.m	Script. Lo mismo que <i>procesador.m</i> . Además calcula los factores de corrección y la función de peso corregida.

Tabla 4-H. Rutinas utilizadas. Resumen de funciones y scripts utilizados en este trabajo. Los mismos pueden encontrarse en el DVD anexo en la carpeta *Rutinas*.

4.9 Sinopsis

La modificación al algoritmo original de Oore & Burns consiste en multiplicar a $W_{QQ'}^{O\&B}$ por un factor de corrección f_c , calculado en base a soluciones obtenidas empleando el programa de EF Abaqus.

Los factores de aspecto que se modelan para ser utilizados en el desarrollo de la metodología son $r = 0,4$, $r = 0,6$ y $r = 0,8$. En cada uno de los modelos de elipse se utiliza una grilla de nodos sobre los que se posicionan las cargas puntuales para generar las correspondientes funciones de peso, $W_{QQ'}^{EF}$, empleando Abaqus. Seguidamente se calculan los factores de corrección para cada caso.

Cada una de las curvas de $f_c(\varphi)$ posee cinco puntos característicos de coordenadas (φ_i, f_{ci}) . Las curvas se aproximan con las ecuaciones (4-3) a (4-6) ya que simplifican la cantidad de parámetros a calcular por sobre otros métodos. Estas ecuaciones utilizan parámetros que dependen de los cinco puntos (φ_i, f_{ci}) resaltados. Para el % de error generado en esta forma de aproximar las curvas de $f_c(\varphi)$, las mayores desviaciones se observan para la elipse con mayor curvatura, $r = 0,4$, con un error porcentual promedio de entre los valores máximos encontrados de 7,11% y una media de los promedios del % error de alrededor de 2%. Se adopta este método de aproximación para las curvas de f_c .

La forma de predecir entonces una curva de f_c vs. φ en condiciones de carga puntual y factores de aspecto arbitrarios, consiste en averiguar cuáles son los cinco pares ordenados (φ_i, f_{ci}) que dan forma a la aproximación de la curva en cuestión. El siguiente paso es generar una rutina con el programa MatLab que permita interpolar y extrapolar valores de f_{ci} y φ_i en cada una de estas superficies.

Para proceder con la verificación del algoritmo mostrado en la figura 4-15, se evalúan casos de *geometría-carga puntual* esperando que se cumplan las siguientes condiciones:

1. El algoritmo debe predecir la función de corrección para factores de aspecto que no hayan sido considerados en el desarrollo de la metodología.
2. El algoritmo debe predecir la función de corrección para casos de carga en algunas de las regiones de extrapolación mostradas en las figuras 4-11 a 4-13.
3. El algoritmo debe ser coherente en la predicción de funciones de corrección respecto de los factores de aspecto usados para su desarrollo.

La metodología presentada en este trabajo permite corregir las soluciones para la función de peso del algoritmo de Oore en elipses para un rango amplio de factores de aspecto; aunque debe tenerse en cuenta que para r tal que $0,8 < r < 1$ la ubicación de la carga debe hallarse en la región interior a la elipse con $r = 0,8$. En un trabajo futuro puede sortearse esta limitación de la función correctora, que no resulta tan necesaria como en el caso de elipses con factor de aspecto bajo, ya que para $r > 0,8$ el algoritmo de Oore aproxima en forma satisfactoria a la función de peso.

Con referencia al error máximo encontrado para W_{QQ} , entre los archivos de datos obtenidos en este trabajo, se puede observar que alcanza un valor cercano al 10%. Esta situación se da principalmente para el factor de aspecto más bajo estudiado en los casos donde las cargas se posicionan respecto del frente de fisura a una distancia menor o igual a 0,1 veces el valor del semieje mayor. En estos casos, las desviaciones se reportan para los puntos del frente de fisura que se encuentran más alejados del nodo donde se aplica la carga. El error corresponde a la pérdida de desempeño del método empleado para aproximar a las funciones de f_c vs. φ en estos casos. No puede ser atribuido al error propio del método de EF, ya que de acuerdo a los resultados de la sección 3.3 en comparación con el manual de Benchmark de Abaqus, el error máximo es cercano al 3% [19].

Es de esperar que un análisis semejante al desarrollado en este trabajo que haga uso de la serie de Fourier para la aproximación de las curvas de f_c vs. φ genere resultados con cotas de error inferiores a las reportadas en el presente texto.

5 Conclusión y trabajos a futuro

5.1 Conclusión

En este trabajo se obtuvo una corrección para la función de peso propuesta por Oore y Burns. La misma se basó en el estudio de fisuras de geometría elíptica con distintos factores de aspecto bajo la acción de dos cargas puntuales simétricas, actuando en modo I, aplicadas sobre cada cara del defecto y en distintos puntos interiores de la elipse. Luego, $W_{QQ'}^{O\&B}$ junto con la corrección propuesta, pueden ser usadas para determinar los FIT en cualquier fisura elíptica plana. Debe tenerse en cuenta que el software que efectúa la modificación para los valores de $W_{QQ'}^{O\&B}$ trabaja sobre una elipse de semieje mayor igual a 1. El empleo del algoritmo en elipses con un semieje mayor distinto de 1, hace necesario efectuar la normalización correspondiente ya que en los programas entra en juego la posición de las cargas.

Se mostró un número de casos en el que se compara la solución obtenida por elementos finitos con aquella producida con el algoritmo de Oore y su corrección. La diferencia porcentual está comprendida en el rango del 1% al 10%. Como ya se mencionó en el capítulo 4, los mayores apartamientos observados son consecuencia de la pérdida de desempeño del método para aproximar las curvas de $f_c(\varphi)$. Esto puede mejorarse. Los resultados obtenidos son comparables con los de trabajos similares en los que también se busca desarrollar una corrección para la función de peso de Oore y Burns, como por ejemplo en el trabajo de Lambert y Glinka [27], en el cual el error encontrado está en el rango del 5% al 10%. Por tanto la mejora aportada por este trabajo es la reducción de la cota inferior en el rango del % de error para los valores de la función de peso.

5.2 Trabajos a futuro

La metodología presentada puede ser empleada como complemento en programas de aplicación más generales para determinar los valores del K_I en elipses y su consecuente aplicación a geometrías arbitrarias y configuraciones complejas de carga, como se describe en el trabajo de López Montenegro [28].

La corrección propuesta para la función de peso de Oore y Burns es susceptible de mejoras sustanciales en trabajos futuros ya que, habiéndose demostrado que el procedimiento adoptado para aproximar los parámetros que describen la curva de f_c resulta eficaz, se podría optar por trabajar con series de Fourier¹ y los 18 parámetros que se desprenden de su uso, como ya fue mencionado en el capítulo 4. Para desarrollar entonces una metodología similar a la estudiada aquí, deberían armarse 54 superficies² del tipo de la figura 4-8. El resto es el desarrollo numérico correspondiente.

Otra mejora posible es la utilización de *elementos infinitos* en el mallado del modelo. Estos elementos permiten simular el medio semi-infinito en la geometría que representa al problema, generando un ahorro de recursos de máquina que pueden ser empleados para mejorar la calidad del mallado y aumentar su densidad. Para esto es necesario también desarrollar nuevas estrategias para particionar el entorno de la línea que define al defecto, ya que la degeneración impartida sobre los elementos de los extremos de la elipse es consecuencia de la elevada curvatura del contorno que se presenta en esas zonas, por lo que no es suficiente sólo aumentar el número de elementos.

Como se menciona en el capítulo 4, no es viable modificar el integrando de la Ec. (4-1). Esto se concluye de operar algebraicamente sobre los resultados de EF. Una vez que se despeja el valor que debe tomar la supuesta integral, se ve que el mismo no es constante³, como sucede en el caso de las circunferencias por ejemplo. Esto quiere decir que en el lugar de la integral de línea debe ir una función *adecuada*. En la figura 5-1 se muestra la diferencia entre la función obtenida en base a EF, y la integral de Oore y Burns para el caso de una elipse de factor de aspecto $r = 0,4$, con una carga puntual ubicada en $(x_q; y_q) = (0,4; 0,2)$.

¹ Que es única para una colección de datos.

² 18 parámetros por cada factor de aspecto utilizado en el estudio (3 en total).

³ Una vez resuelta y evaluada la integral de línea, toma un valor constante.

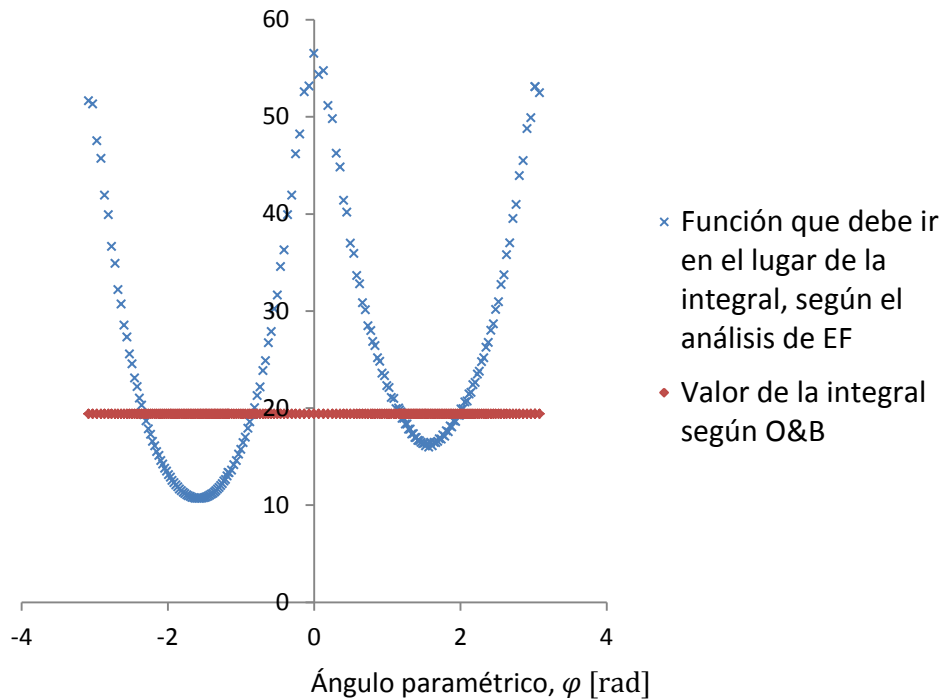


Figura 5-1. Diferencia entre la función despejada de EF y la integral predicha por Oore & Burns para el caso de una elipse con factor de aspecto $r = 0,4$.

En base a lo observado durante el desarrollo del trabajo, y como propuesta a futuro, resulta interesante tratar de aproximar el valor de la gráfica despejada a partir de los datos de EF y representarlos como una función potencial de ρ , la misma variable que aparece en (4-1). Otra idea cuya factibilidad puede estudiarse, es la de aproximar el valor de la función desconocida usando potenciales de Lamé. Esto último involucra el uso de funciones elípticas de Jacobi [29].

REFERENCIAS

- [1] *Scientific American* 120, p. 99, Feb 1 1919.
- [2] G .R. Irwin, “*Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*”, *Journal of Applied Mechanics*, 24, p. 361, 1957.
- [3] H. F. Bueckner, *A novel principle for the computation of stress intensity factors*, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)*, 50, p.529, 1970.
- [4] Oore M., Burns D. J., “*Estimation of Stress Intensity Factors for Embedded Irregular Cracks Subjected to Arbitrary Normal Stress Fields*”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 102, 1980, pp. 202-211.
- [5] Desjardins J. L., Burns D. J., Thompson J. C., “*A Weight Function Technique For Estimating Stress Intensity Factors for Cracks in Pressure Vessels*”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 113, 1991, pp. 55-64.
- [6] López Montenegro H., Cisilino A. P., Otegui J. L., “*A Weight Function Methodology for the Assessment of Embedded and Surface Irregular Plane Cracks*”, Elsevier Ltd., 2006.
- [7] API recommended Practice 579, *Fitness for Service*, First Ed. American Petroleum Institute, August 2000.
- [8] G .R. Irwin, *Handbuch der Physics*, Vol. 6, Ed. Springer, p. 551, 1958.
- [9] M. L. Williams, “*On the stress distribution at the base of a stationary crack*”, *Journal of Applied Mechanics*, 24, p. 109, 1957.
- [10] Hertzberg R. W., “*Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*”, 4th Ed., John Wiley & Sons.
- [11] P. C. Paris, G. C. M. Sih, *ASTM STP*, 381, p. 30, 1965.
- [12] J. R. Rice, *Treatise on Fracture*, Vol. 2, Ed. Liebowitz, Academic Press, New York, 1968, p. 191.
- [13] S. G. Larsson, A. J. Carlsson, “*Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tip inelastic-plastic materials*”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21, p. 263, 1973.
- [14] J. W. Hutchinson, “*Singular Behavior at the End of a Tensile Crack Tip in a Hardening Material*”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16, p. 13, 1968.
- [15] J. R. Rice and G. F. Rosengren, “*Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material*”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16, p. 1, 1968.
- [16] J. R. Rice, B. Budiansky. “*Conservation laws and energy release rates*”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30, pp. 201-203, 1973.

- [17] W. C. Carpenter, D. T. Read, R. H. Dodds Jr., "Comparison of several path independent integrals including plasticity effects", *International Journal of Fracture*, Vol. 31, pp. 303-323, 1986.
- [18] T.L. Anderson. "*Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*", CRC Press, Inc., 1995.
- [19] Abaqus. Version 6.10-1 Documentation. Dassault Systemes.
- [20] J. R. Rice, *Some remarks on elastic crack-tip stress fields*, *International Journal of Solids and Structures*, 8, p.751, 1972.
- [21] Labbens R. C., Eliot J., Pellissier-Tanon A., "*Weight Functions for Three-Dimensional Symmetrical Crack Problems*", *Cracks and Fracture*, ASTM STP 601, 1976, pp. 448-470.
- [22] Nicholas M. Baran. *Finite Element Analysis on Microcomputers*, McGraw-Hill, 1988.
- [23] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *El Método de los elementos Finitos*, Vol 1 & 2, McGraw-Hill, 4 ed., 1994.
- [24] Tada, P. C. Paris, G.R. Irwin, *The stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation, 1973 (1st Ed.), St. Louis, Missouri, 1985 (2nd Ed.).
- [25] Atroshchenko E, Potapenko S, Glinka G. *Weight Function for an elliptical planar crack embedded in a homogeneous elastic medium*. *Int J Fract* (2010) 165:39-45
- [26] MatLab. Version 7.11.0.584 (R2010b) User Manual. MathWorks.
- [27] X. W. S. B. Lambert, Glinka G. *Approximate Weight Function for embedded elliptical cracks*. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 59, No 3, pp 381-392, 1998.
- [28] H. López Montenegro. *Modelado por funciones de peso de fisuras bajo estados complejos de carga*, Tesis Doctoral (2002)
- [29] Avinash Khare, Uday Sukhatme. *Analytically Solvable PT-Invariant Periodic Potentials*, 2004. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2004.03.006>
- [30] John R. D'Errico. *Understanding Gridfit*, 2010.
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8998-surface-fitting-using-gridfit>