



UNIVERSIDAD NACIONAL
de MAR DEL PLATA



FACULTAD de INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA



Caracterización y filtrado de señales

inmersas en ruido caótico y estocástico

Ing. Juana Graciela Fernández

Tesis presentada para optar al Grado Académico de
DOCTORA EN INGENIERIA: Orientación ELECTRONICA

Directora: Dra. Hilda Angela Larrondo
Co-Director: Dr. Roberto M. Hidalgo

Diciembre de 2005



RINFI es desarrollado por la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la
Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar
documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y
Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto
de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo
con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad
entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons
Atribución- NoComercial-CompartirIgual 4.0
Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



UNIVERSIDAD NACIONAL
de MAR DEL PLATA



FACULTAD de INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA



Caracterización y filtrado de señales

inmersas en ruido caótico y estocástico

Ing. Juana Graciela Fernández

Tesis presentada para optar al Grado Académico de
DOCTORA EN INGENIERIA: Orientación ELECTRONICA

Directora: Dra. Hilda Angela Larrondo
Co-Director: Dr. Roberto M. Hidalgo

Diciembre de 2005

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO 1- Sistemas dinámicos e información enmascarada.

- 1.0 Introducción
- 1.1 Sistemas dinámicos continuos
- 1.1 Sistemas dinámicos discretos.
- 1.2 Caos y sistemas caóticos e hipercaóticos.
- 1.3 Sincronización de sistemas caóticos
- 1.4 El esquema de enmascaramiento APD.
- 1.5 Mapas unidimensionales y bidimensionales típicos.

CAPITULO 2 - Análisis y caracterización de Señales.

- 2.0 Introducción
- 2.1 Técnicas Clásicas de Análisis y procesamiento de Series Temporales
 - 2.1.1 Transformadas de Fourier.
 - 2.1.2 Convolución y sistemas lineales e invariantes (LTI).
 - 2.1.3 Correlación.
 - 2.1.4 La Transformada Z (TZ) y los LTI discretos.
 - 2.1.5 Transformadas Wavelet y Gabor continuas.
 - 2.1.6 Transformada Wavelet Discreta (TWD).
 - 2.1.7 Análisis multirresolución (MRA).
 - 2.1.8 Funciones ventana y el Principio de Incerteza
- 2.2 Técnicas de análisis provenientes de la Teoría Cualitativa.
 - 2.2.1 Reconstrucción de atractores por el método de los retardos.
 - 2.2.2 Exponentes de Lyapunov
 - 2.2.3 Geometría del atractor caótico y los fractales
 - 2.2.4 Realización de los métodos para series de tiempo no-lineales- Paquete TISEAN
 - 2.2.5 Bifurcaciones.
- 2.3 Métodos Estadísticos en el Procesamiento y Análisis de Series Temporales.
 - 2.3.1 Entropía
 - 2.3.2 Complejidad Estadística
 - 2.3.3 Complejidad de Zipping.

CAPITULO 3 - Procesamiento de señales inmersas en AWGN y en caos

- 3.0 Introducción
- 3.1 Estimación de amplitud y frecuencia de señales periódicas inmersas en ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN)
 - 3.1.1 Algoritmo para obtener una ventana ajustable en el cálculo de la FFT.
 - 3.1.2 Banco de Medición.
 - 3.1.3 Combinación de autocorrelación y ventana ajustable para estimación de parámetros de señales periódicas inmersas en AWGN.

- 3.1.4 Banco de Medición para estimación de señales inmersas en ruido por el método propuesto en 3.1.4
- 3.2 Estimación de parámetros de amplitud y frecuencia de señales periódicas inmersas en ruido caótico aditivo
- 3.3 Recuperación mediante sincronización de sistemas caóticos, de señales inmersas en caos y AWGN combinados.
- 3.4 Métodos para eliminar máscaras caóticas basados en reconstrucción de atractores.
- 3.5 Análisis Wavelet Multirresolución (MRA) de señales enmascaradas en caos
 - 3.5.1 Señales enmascaradas en esquema APD
 - 3.5.2 Señales enmascaradas en ACHN (ruido caótico aditivo)
 - 3.5.3 Señales enmascaradas con AWGN
- 3.6 Conclusiones

CAPITULO 4 –Investigaciones en curso y Conclusiones

- 4.0 Introducción
- 4.1 El Mapa de Lorenz o Mapa de Retorno de un sistema caótico continuo
- 4.2 Entropías y complejidades a partir del mapa de retorno.
- 4.3 Conclusiones y problemas abiertos.

Agradecimientos

Apéndice

Referencias

Introducción

El Procesamiento Digital de Señales (*DSP*) es una de las áreas de investigación que más ha crecido en los últimos años, dado el gran avance en herramientas de hardware y software que se ha producido. Prácticamente todos los sistemas electrónicos que se emplean en la actualidad utilizan procesamiento digital. El procesamiento digital de imágenes, la telefonía celular, Internet, la televisión, los sistemas de medición computarizados, son algunos de sus logros y han alcanzado todas las ramas de la ciencia.

En forma coincidente se produjo en la física una revolución en el campo de las ideas: la comprensión del caos determinista y su aplicación en las más diversas áreas también estuvo fuertemente ligada al desarrollo de las técnicas digitales. Basta mencionar que luego del trabajo fundamental de Lorenz [*Lorenz, 1963*] transcurrieron varios años hasta que Feigenbaum [*Feigenbaum, 1980*] demostrara la universalidad de su “mapa logístico”, pero a partir de allí, impulsado por el gran avance en hardware y software, se produjo una avalancha en la investigación de los sistemas dinámicos discretos y continuos, que ha continuado hasta nuestros días, incorporando las técnicas de la teoría cualitativa, la teoría de bifurcación y la geometría fractal a aplicaciones en las áreas más variadas.

En la actualidad la combinación del Procesamiento Digital de Señales, la teoría de sistemas estocásticos y la teoría del caos está siendo utilizada para comprender distintos fenómenos y para procesar señales con mayor eficiencia. Nace así un número importante de nuevas herramientas para la caracterización tanto cualitativa como cuantitativa de las señales y para su procesamiento.

La sincronización de sistemas caóticos y su uso para comunicaciones encriptadas tanto analógicas como digitales, se origina en el trabajo de Pecora y Carroll [*Pecora y Carroll, 1990*] e impulsa la investigación de las redes neuronales hacia las Celular Neural Networks [*Chua et al., 1995*]. La posibilidad de “controlar el caos” [*Ott et al., 1990*] es otro aporte fundamental por su aplicación en distintas estrategias de enmascaramiento empleando caos determinista.

Dentro de este marco esta tesis investiga la aplicación de las técnicas de DSP ya existentes y su combinación con la teoría de sistemas dinámicos para la caracterización de señales de información inmersas en caos determinista, en ruido blanco gaussiano y en una combinación de ambos. Este tipo de señales aparece en los sistemas de comunicaciones que emplean enmascaramiento por caos y que fueron motivo de investigaciones previas en el grupo de trabajo [*Hidalgo, 2003; Larrondo et al., 1997*].

Se analizan distintas estrategias para “desenmascarar” una señal encriptada y se evalúan la capacidad y limitaciones de cada una de ellas. En el caso de las señales inmersas en caos se investiga no sólo la adición de caos a una señal de información sino también una técnica de encriptamiento basada en la Descomposición Activa Pasiva (APD) desarrollada por Kocarev y colaboradores [*Kocarev y Parlitz, 1995*] en el campo de las comunicaciones. La tesis presenta nuevos algoritmos de procesamiento, evaluados tanto por simulación como por mediciones reales.

En su último capítulo la tesis presenta investigaciones en curso sobre la aplicación de las medidas de “complejidad de Zipping” [*Lempel y Ziv, 1976*] y “Complejidad Estadística” [*Martin et al., 2003*] para la caracterización de los sistemas dinámicos continuos. Se

desarrolla una metodología que aplica estas medidas de complejidad al “Mapa de Lorenz” del sistema y que permite detectar la presencia o ausencia de mensajes inmersos en la señal caótica. La utilización del Mapa de Lorenz puede pensarse como una técnica de muestreo de paso pseudoaleatorio, donde el espaciado entre muestras queda determinado por la dinámica del sistema caótico. El muestreo de paso variable y aleatorio es un área de investigación en el DSP [*Milocco, 2005*].

La tesis está organizada en cuatro capítulos. Los dos primeros introducen conceptos matemáticos y técnicas de procesamiento que son utilizados en los dos últimos. Estos dos últimos capítulos contienen los principales aportes originales. Se sintetiza a continuación el contenido de cada capítulo.

Capítulo 1: Este capítulo es una introducción a la teoría de sistemas dinámicos. Dado el amplio desarrollo de los últimos veinte años existe una extensa bibliografía sobre el tema, por lo cual el contenido del capítulo se ha restringido a los sistemas caóticos que se emplean para enmascarar la información en esta tesis. Comienza con una breve introducción a los sistemas caóticos e hipercaóticos continuos y discretos y las ecuaciones que los gobiernan. Se estudia a continuación el problema de la sincronización entre dos sistemas caóticos y se presenta la forma en que pueden utilizarse para transmitir información. Posteriormente se muestra el esquema *APD* que permite generar descomposiciones sincronizables a partir de un sistema caótico. Finalmente se presenta la forma de construir mapas unidimensionales a partir del sistema continuo original y en particular el Mapa de Lorenz que se empleará en el capítulo 4.

Capítulo 2: Contiene una descripción de técnicas de análisis y caracterización de series temporales de diferentes orígenes. Se las presenta clasificadas en tres grupos. El primer grupo, denominado técnicas clásicas incluye diversas herramientas tales como la Transformada de Fourier, la Transformada Wavelet, la Transformada *z*. La designación de clásicas obedece al hecho que se emplean usualmente para caracterizar sistemas lineales e invariantes. La segunda sección introduce el segundo grupo de técnicas, que nacen a partir de la Teoría Cualitativa. Se muestran asimismo los resultados obtenidos al aplicar algunos de los algoritmos del paquete TISEAN [www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/] a secuencias temporales obtenidas de las señales provenientes de un oscilador caótico de Rössler. En la tercera sección, finalmente, se analiza la aplicación de métodos estadísticos a las secuencias provenientes de sistemas caóticos. Se introduce en especial el concepto de complejidad estadística [*Ebeling y Jimenez-Montano, 1980; Boyayian y Lutz, 1992; Martin et al., 2003; Fernández et al., 2005a; Larrondo et al., 2003; Larrondo et al., 2004; Larrondo et al., 2005*] de reciente aplicación en problemas de naturaleza estocástica.

Capítulo 3: Este capítulo contiene los principales resultados originales de la tesis, que versan sobre técnicas de rescate de información inmersa en ruido y en señales caóticas. En particular se presenta un algoritmo que permite modificar la ventana de adquisición de datos (ventana autoajutable) cuando se emplea la técnica de cálculo de la Transformada Rápida de Fourier (*FFT*) en el análisis de señales periódicas. Este algoritmo reduce significativamente los errores de la *FFT* cuando la cantidad de períodos de la señal no es una cantidad entera dentro de la ventana de adquisición. Se compara su comportamiento con el de las diversas ventanas (Hanning, Hamming, Flattop, etc.) empleadas generalmente en

los sistemas de medición digitales y se muestran sus ventajas. El método de la ventana autoajustable se combina luego con la tradicional técnica de autocorrelación para estimar con gran exactitud la amplitud y frecuencia de señales periódicas inmersas en ruido blanco gaussiano aditivo (*AWGN*) con relaciones S/N muy pobres. Para probar su potencialidad se desarrolló un banco de medición, controlado por una computadora personal (*PC*), para adquirir las muestras de la señal contaminada por el ruido y aplicar el algoritmo. Se demuestra que la autocorrelación de la señal, contaminada por ruido, junto con una *FFT* con ventana autoajustable produce estimaciones de amplitud y frecuencia en tiempo real con errores próximos a los de la cota teórica de Cramer Rao. Se aplica luego la misma metodología para señales enmascaradas por una portadora caótica y se comprueba que la técnica mencionada puede emplearse con éxito en sistemas como el mapa de Henon que posee una función autocorrelación similar a la del *AWGN*.

Se analiza luego el denominado receptor gemelo en los sistemas de comunicaciones caóticas, desde el punto de vista de su capacidad de filtrado del ruido caótico. Se comprueba que el receptor gemelo es un filtro ideal que recupera siempre cualquier tipo de información ya sea que ésta se sume a la portadora caótica o bien que se incluya en la dinámica del oscilador (*APD*) aún en presencia de *AWGN*.

Se analizan luego técnicas basadas en el Teorema de Takens que emplean una reconstrucción parcial de la dinámica del sistema empleando mapas de retorno. En este caso el sistema presenta limitaciones. Se emplea la Transformada Wavelet para recuperar mensajes enmascarados por caos y por *AWGN* y se compara su comportamiento con el de los filtros digitales con ancho de banda y frecuencia central adecuada. Se comprueba que el filtrado por análisis wavelet multiresolución propuesto por Huang [*Huang et al., 2001*] es aplicable sólo en casos en que el espectro de la señal y el del ruido caótico no están totalmente superpuestos.

Los resultados teóricos y experimentales de este capítulo dieron origen a varias publicaciones en revistas nacionales e internacionales y presentaciones en diferentes congresos: [*Fernández et al., 2002; Fernández et al., 2003; Fernández et al., 2004; Fernández et al., 2005; Hidalgo et al., 1994; Hidalgo et al., 1997; Hidalgo et al., 1997b; Hidalgo et al., 2001; Hidalgo et al., 2001b; Hidalgo et al., 2002; Hidalgo et al., 2002b*].

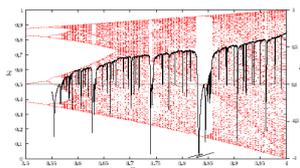
Capítulo 4: En este capítulo se estudian nuevas herramientas para la caracterización de señales enmascaradas en caos que combinan mapas de retorno y medidas de complejidad. Se construye el mapa de Lorenz de las señales inmersas en caos y de las señales caóticas puras comprobándose la sensibilidad para detectar la presencia de información. El estudio incluye al ruido como señal de prueba y se verifica que en caso que este se sume a la portadora caótica el mapa de Lorenz se destruye cualquiera sea el nivel de la potencia de ruido, no ocurriendo lo mismo en el caso de emplear un esquema *APD* (menor sensibilidad a *AWGN*).

Se calculan la entropía y complejidad para diferentes particiones del mapa de retorno y diferentes longitudes de palabra y se analizan las condiciones en las que es posible detectar la presencia de la información. Se obtiene la complejidad, calculada a partir de diferentes definiciones de distancia en el mapa de bifurcaciones (distintos valores de un

parámetro), y se verifica que la longitud de palabra elegida, para una partición binaria del espacio de fase, es determinante de la profundidad de las ventanas periódicas. Se analiza, además, como la Transformada de Fourier aplicada a la secuencia que representa el comportamiento en las ventanas periódicas del diagrama de bifurcaciones permite determinar el orden de la periodicidad.

Se construye el gráfico de la complejidad de *zipping* del mapa de las bifurcaciones, comprobándose su similitud con la complejidad Martin-Plastino-Rosso (*MPR*) [*Martin et al., 2003*] calculada con la distancia de Wooters. Se analiza la complejidad de *zipping* para el caso $r = 4$ y diferentes particiones del espacio de fase en función de la longitud de la palabra empleada con y sin señal de información. Los resultados, aún preliminares, de este trabajo se presentaron en un congreso de Física Estadística en la ciudad de La Plata [*Fernández et al., 2005a*].

La tesis finaliza con las conclusiones y una síntesis de los problemas abiertos en los cuales se continúa trabajando.



Capítulo 1

Sistemas Dinámicos e información enmascarada

1.2 *Introducción*

Los sistemas dinámicos no lineales se han constituido en los últimos años en uno de los tópicos de gran interés en la ingeniería, a partir de la riqueza que presentan en su comportamiento. Dado que la recuperación de información inmersa en ruido es uno de los objetivos de esta tesis se emplearán en particular los denominados sistemas caóticos que permiten simular fuentes de ruido deterministas.

La ventaja de los sistemas caóticos frente a las señales estocásticas es la posibilidad de controlar su dinámica, sus propiedades espectrales y sus propiedades estadísticas. Es interesante que no se requieran sistemas de dimensión elevada para poder lograr efectos comprobables a los de las señales estocásticas. Recientemente se ha logrado incluso construir generadores de números pseudoaleatorios con propiedades que los hacen competitivos en aplicaciones como criptografía, sistemas de comunicaciones de espectro esparcido, etc. La teoría cualitativa es la base matemática del estudio de los sistemas no lineales. Los métodos del análisis diferencial no son en general aplicables dada la pérdida de una propiedad esencial de los sistemas lineales: el principio de superposición.

El grado de desarrollo que ha adquirido la teoría de sistemas no lineales hace imposible incluir todos los aspectos de interés y sólo se introducirán los elementos básicos necesarios para que esta tesis resulte autocontenida. Los conceptos de puntos fijos, órbitas periódicas, ciclos límite, entre otros se considera suficientemente desarrollados en una amplia literatura por lo que se remite al lector a las referencias bibliográficas disponibles entre las cuales se puede mencionar [*Strogatz, 1994; Ogorzalek, 1997; Blaquiere, 1966; Hale y Kocak, 1991; Hirsch y Smale, 1974; Lefschetz, 1957; Parker y Chua, 1989; Minorsky, 1962; Roxin y Spinadel, 1976; Moiola y Chen, 1996*].

1.1 Sistemas dinámicos continuos

Se define un sistema dinámico de orden n -ésimo por su representación matemática a través de la siguiente ecuación de estado

$$\dot{x} = f_{\alpha}(x, t) \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

donde $\dot{x} = dx/dt$, $x(t) \in R^n$ es el *estado* correspondiente al instante t (un vector a pesar de la notación empleada por simplicidad), $f: R^n \rightarrow R^n$ se denomina el campo vectorial para ese mismo instante t y el vector $\alpha \in R^k$ es denominado el vector de parámetros del sistema.

La distinción entre parámetros y estados del sistema está relacionada con la usual diferenciación que se realiza en todos los sistemas físicos entre variables dinámicas, que resultan ser soluciones de las ecuaciones diferenciales, y variables que representan a los elementos constructivos del sistema. En la teoría cualitativa el estudio del vector de estados se denomina estudio de la dinámica del sistema, en tanto que el estudio del comportamiento del sistema frente a variaciones en los parámetros se conoce como teoría de bifurcación.

Cuando el campo vectorial no depende explícitamente del tiempo se dice que el sistema dinámico es autónomo y en ese caso el tiempo inicial siempre puede ser considerado $t_0 = 0$. Para mostrar explícitamente la dependencia de la condición inicial, la solución de la Ec. (1.1) se suele escribir como $\Phi_t(x_0)$ y se lo puede interpretar como un mapa que convierte el estado x_0 en el estado $x(t)$.

La familia de mapas $\Phi_t: R^n \rightarrow R^n$ que satisface las dos relaciones: $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$ y $\Phi_0(x) = x$, se denomina el flujo. El conjunto de puntos $\{\Phi_t(x_0): -\infty < t < \infty\}$ se denomina trayectoria con condición inicial x_0 . Si el campo vectorial es función explícita del tiempo el sistema dinámico continuo se denomina no-autónomo de orden n .

Para sistemas no-autónomos, el campo vectorial depende del tiempo y a diferencia del caso autónomo, en general, el tiempo inicial no puede elegirse como 0. La solución a la Ec. (1.1) correspondiente a un estado x_0 para el instante t_0 se denota como $\Phi_t(x_0, t_0)$. El sistema dinámico es lineal si el campo vectorial f lo es. Si existe un $T > 0$ tal que $f_{\alpha}(x, t) = f_{\alpha}(x, t + T)$ para todo x y t , se dice que el sistema es periódico en t . El menor valor posible de T se denomina período mínimo o simplemente período.

Un sistema de orden n , no autónomo y periódico con período T , se puede convertir siempre en un sistema autónomo de orden $n+1$, agregando una variable de estado auxiliar. El sistema autónomo queda entonces dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = f_{\alpha}(x, \theta t / 2\pi), & x(t_0) = x_0 ; \\ \dot{\theta} = 2\pi / T, & \theta(t_0) = 2\pi t_0 / T. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dado que f es periódica en t con período T , el sistema (1.2) resulta periódico en θ con período 2π . De este modo los planos $\theta=0$ y $\theta=2\pi$ quedan identificados entre sí, y el espacio de estados euclideo original R^{n+1} se puede transformar en un espacio cilíndrico $R^n \times S^1$, donde $S^1 = [0, 2\pi]$ representa el círculo.

La solución de (1.2) en este espacio de estados cilíndrico es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_t(x_0, t_0) \\ 2\pi t/T \pmod{2\pi} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

donde la función módulo restringe la variable θ al intervalo $[0, 2\pi]$. Usando esta transformación, la teoría de sistemas autónomos se puede aplicar a sistemas no-autónomos periódicos en t .

1.2 *Sistemas dinámicos discretos*

Un sistema dinámico discreto o mapa $P_\alpha : R^n \rightarrow R^n$ queda definido por la ecuación de estado

$$x_{k+1} = P_\alpha(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

donde $x_k \in R^n$ es el estado y P_α convierte el estado x_k en el próximo estado x_{k+1} . Partiendo de una condición inicial x_0 , y aplicando P_α repetidamente, se genera una secuencia de puntos $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ que se conoce como órbita. En la bibliografía, el término órbita se suele utilizar como sinónimo de trayectoria. Las consideraciones respecto del vector de parámetros α son idénticas que para los sistemas continuos.

1.3 *Caos y sistemas caóticos e hipercaóticos*

No existe una definición ampliamente aceptada del caos: desde un punto de vista práctico, se lo puede definir por la negativa: caos es un comportamiento estacionario de un sistema dinámico, que no es un punto de equilibrio, no es periódico y tampoco es cuasiperiódico. Se dan a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 1: el oscilador de Duffing

Está representado por el siguiente sistema de ecuaciones [Duffing, 1918]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - \varepsilon x_2 + \gamma \cos(\omega t). \end{cases} \quad (1.5)$$

El vector de parámetros es $\alpha = (\varepsilon, \gamma, \omega)$. Si $\varepsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ y $\omega = 1$, el sistema se comporta en forma caótica, y se obtienen los resultados mostrados en la Figura 1.1.

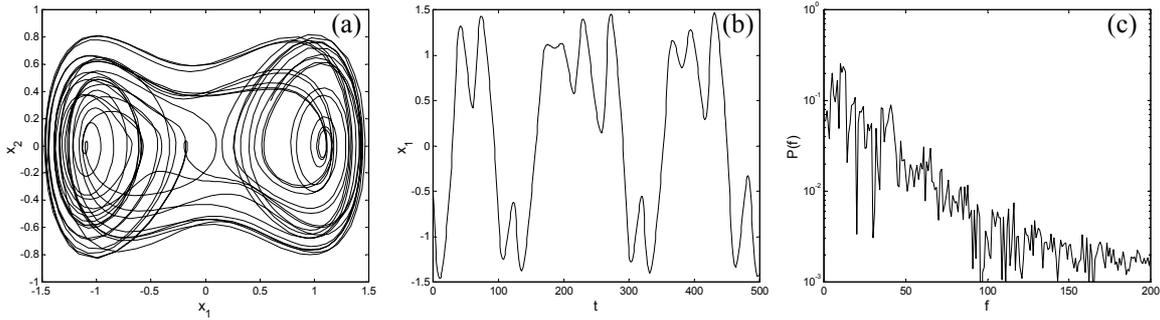


Fig. 1.1: Trayectoria caótica de la ecuación de Duffing para $\varepsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ y $\omega = 1$. (a) una trayectoria, (b) forma de onda temporal de la componente x_1 y (c) espectro de la componente.

Ejemplo 2: el oscilador de Chua

Un comportamiento similar puede obtenerse en el circuito de Chua, conocido también como double scroll [Matsumoto et al., 1984], que constituye el modelo de un circuito electrónico simple descrito por el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(y - h(x_1)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2, \end{cases} \quad (1.6)$$

donde h es una función lineal por tramos definida por

$$h(x) = \begin{cases} m_1 x_1 + (m_0 - m_1), & x_1 \geq 1 \\ m_0 x_1, & |x_1| \leq 1 \\ m_1 x_1 - (m_0 - m_1), & x_1 \leq -1. \end{cases} \quad (1.7)$$

El comportamiento de este sistema para $\alpha = 9$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ y $m_1 = 2/7$ puede verse en la Figura 1.2.

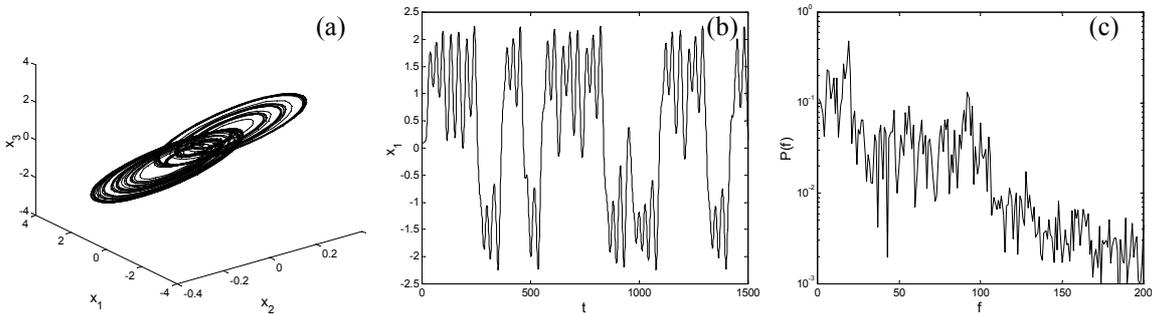


Fig. 1.2: Trayectoria caótica de la ecuación de doble cinta con $\alpha = 9$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ y $m_1 = 2/7$. (a) una trayectoria, (b) forma de onda temporal de la componente x_1 y (c) espectro de la componente.

En las Figuras 1.1 y 1.2 se evidencian dos de las características esenciales de las trayectorias de los sistemas caóticos: no son periódicas pero están acotadas. Es difícil asegurar a partir de su observación que no son cuasi-periódicas, pero cuando la evolución de las trayectorias se observa en una computadora, exhiben una característica común a muchos sistemas caóticos: la trayectoria evoluciona como una mezcla aleatoria de dos tipos de comportamiento. En la Figura 1.1a, la trayectoria gira durante un tiempo en la región $x_1 > 0$ y después pasa a la región $x_1 < 0$ en donde gira durante otro intervalo de tiempo antes de retornar a la primer región. Ni el número ni el tamaño de los giros entre transiciones siguen un patrón fijo; aparentan ser aleatorios. En el double scroll se da el mismo tipo de comportamiento, con transiciones aleatorias entre dos regiones casi planas, en forma de discos, para x_3 positivos y negativos respectivamente (Fig. 1.2a).

También puede observarse que un espectro caótico es bastante diferente a uno periódico o a uno cuasi-periódico ya que tiene una naturaleza continua de banda ancha. Este espectro, cualitativamente similar al del ruido, es característico de todos los sistemas caóticos. Es bastante común además, que los espectros caóticos contengan impulsos que indican la presencia de frecuencias predominantes en la solución.

Por otro lado se ha demostrado que el objeto geométrico al cual son atraídas las trayectorias caóticas en el espacio de estados no es simple (como un círculo o un toro) y ni siquiera es una variedad de dimensión entera. A este nuevo tipo de objeto se lo conoce como atractor extraño y geoméricamente es muy complicado. Sus características geométricas y topológicas están relacionadas a las de los conjuntos de Cantor y son de naturaleza fractal [Mandelbrot, 1982]. En particular poseen dimensión fraccionaria [González et al., 1988]. Existen razones teóricas por las que los matemáticos realizan una distinción entre conjuntos límite caóticos atractores, y atractores extraños, que escapan al alcance de esta presentación, por lo que en adelante se ignorará esta diferencia.

Otra característica fundamental de los sistemas caóticos es que exhiben una sensible dependencia a las condiciones iniciales. Es decir, dadas dos condiciones iniciales distintas, arbitrariamente próximas entre sí, las trayectorias que parten de ellas divergen, con una velocidad característica del sistema, hasta que quedan descorrelacionadas a todos los fines prácticos. Este efecto se evidencia en la Figura 1.3 donde se muestran dos trayectorias para el circuito de Chua con condiciones iniciales levemente diferentes: $[x_1^0, x_2^0, x_3^0] = [1.1, 0.1, 0]$ y $[x_1^1, x_2^1, x_3^1] = [1.10011, 0.10001, 0.00001]$ (una variación de 0.01%).

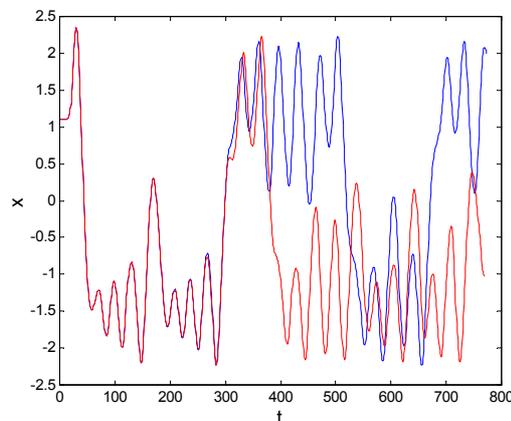


Fig. 1.3: Sensibilidad del circuito de Chua (ec. 1.6) a las condiciones iniciales: evolución temporal de la componente x , para dos condiciones iniciales que difieren sólo en un 0.01%.

La sensibilidad a las condiciones iniciales tiene una implicancia importante. En la práctica, existe siempre un error al medir o especificar el estado de un sistema. Además, siempre existe ruido presente, sea térmico (en un sistema físico) o ruido computacional en una simulación. Estos errores, sin importar lo pequeños que sean, terminarán alterando el comportamiento macroscópico de un sistema caótico, tornándolo impredecible.

Ejemplo 3: el oscilador de Rössler

De la variedad de sistemas no-lineales que presentan un comportamiento caótico, resulta especialmente atractivo el sistema de Rössler [Rössler, 1976] que está modelado por las siguientes ecuaciones que poseen un único término no lineal:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha + x_1(x_2 - \beta) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + \gamma x_3 \end{cases} \quad (1.8)$$

El valor de los parámetros α , β y γ determina el tipo de funcionamiento del sistema. Tres casos típicos se muestran en la Figura 1.4.

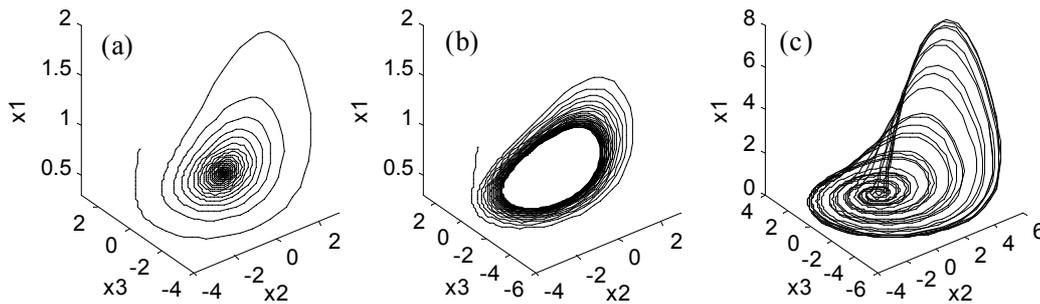


Fig. 1.4: Sistema de Rössler para distintos valores de los parámetros. (a) $[\alpha \beta \gamma] = [2.2571 \ 4 \ 0.1]$; (b) $[\alpha \beta \gamma] = [2.2571 \ 5 \ 0.1]$; (c) $[\alpha \beta \gamma] = [2 \ 4 \ 0.45]$.

Ejemplo 4: el oscilador de Lorenz

Otro sistema ampliamente utilizado es el de Lorenz [Lorenz, 1963],

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3 \end{cases} \quad (1.9)$$

Para $\sigma = 16$, $r = 45.6$ y $b = 4$ el sistema presenta comportamiento caótico como lo muestra la Figura 1.5.

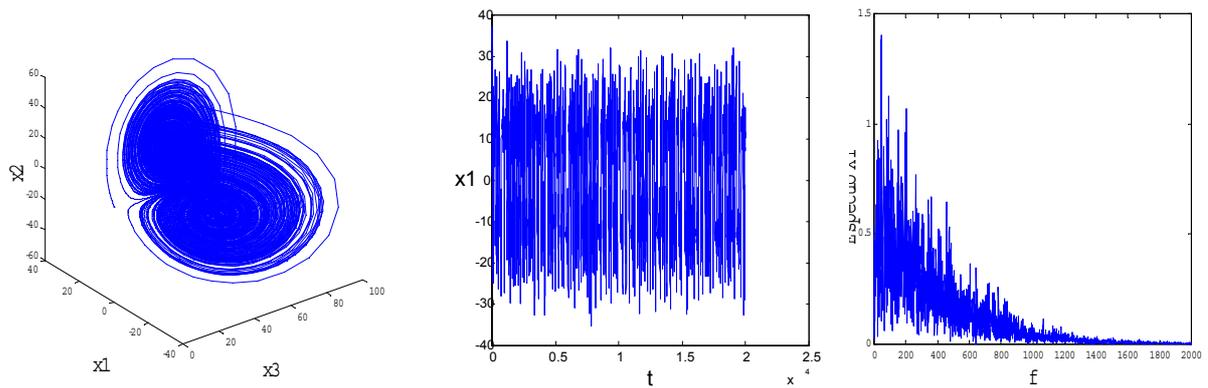


Fig. 1.5: Trayectoria caótica del sistema de Lorenz con $\sigma = 16$, $r = 45.6$, y $b = 40$; (a) una trayectoria; (b) forma de onda temporal de la componente x_1 y (c) espectro de la componente x_1 .

Como se expondrá en el capítulo 2 una forma de cuantificar el caos consiste en el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Empleando este cuantificador se define un sistema caótico como aquel que tiene al menos un exponente de Lyapunov positivo. Cuando hay varios exponentes de Lyapunov positivos el sistema se denomina hipercaótico.

Ejemplo 4: oscilador hipercaótico de Rössler [Rössler, 1979].

Fue creado para modelar la dinámica de una hipotética reacción química y es el primer ejemplo de sistema hipercaótico con dos exponentes de Lyapunov positivos. Las ecuaciones diferenciales no lineales que lo describen son:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + x_4, \\
 \dot{x}_3 &= 3 + x_1 x_3, \\
 \dot{x}_4 &= -\gamma x_3 + \beta x_4,
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Se demuestra que para $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$ y $\gamma = 0.05$, el sistema tiene comportamiento hipercaótico con dos exponentes de Lyapunov positivos.

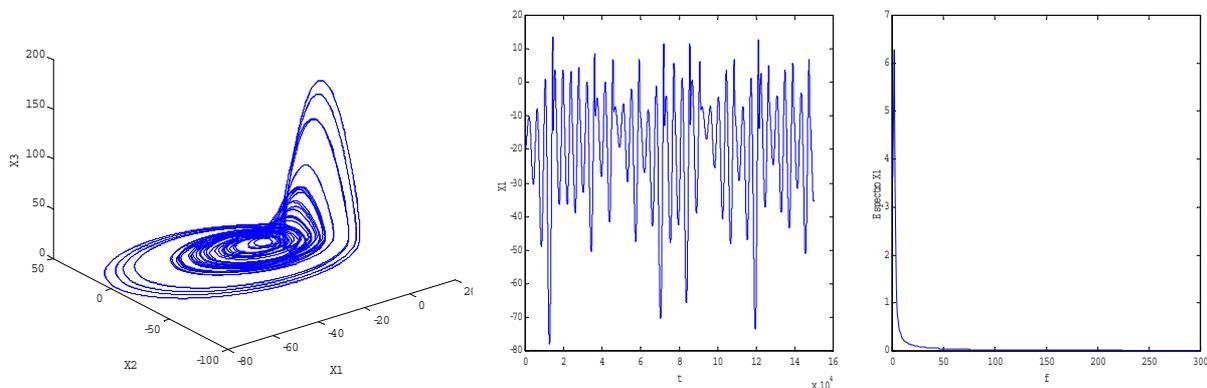


Fig. 1.6: Trayectoria caótica del sistema hipercaótico de Rössler con $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$, y $\gamma = 0.05$; (a) una trayectoria; (b) forma de onda temporal de la componente x_1 y (c) espectro de la componente x_1 .

1.4 Sincronización de sistemas caóticos

La sincronización de señales periódicas es un fenómeno bien conocido en física, ingeniería y muchas otras disciplinas científicas. En su acepción tradicional, se dice que dos señales periódicas están sincronizadas cuando sus períodos son conmensurables. Una de las formas de lograr sincronización es mediante el empleo de fuerzas externas, como sucede en el caso de las comunicaciones electrónicas, donde se utiliza un oscilador patrón, de frecuencia muy estable (oscilador a cristal), pero de baja potencia como sincronismo de varios osciladores de inferior calidad y mayor potencia [Cartwright, 1948].

La sincronización de osciladores aislados resulta más simple que alterar el sincronismo natural que se establece cuando osciladores casi idénticos se acoplan entre sí, constituyendo un sistema más robusto [Carroll et al., 1994]. Pero aún el problema más sencillo de varios osciladores independientes entre sí, sincronizados por una única señal periódica externa, presenta una estructura de resonancias múltiples muy compleja [González y Piro, 1983; Arizmendi et al., 1984; Larrondo et al., 1996; Campbell et al., 1989].

La posibilidad que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es intuitivamente obvia debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo Pecora y Carroll [1990] y Rulkov et al. [1995] entre otros, demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones se sincronicen. Esta sincronización puede ser idéntica (las señales correspondientes en ambos sistemas coinciden exactamente) o bien generalizada (existe una relación funcional fija entre las variables de uno y otro sistema). En ambos casos, la sincronización es un proceso asintótico. También es posible lograr una sincronización de fase [Roseblum et al., 1996], que es una noción más débil y de alguna forma equivalente a la sincronización usual en señales periódicas.

La sincronización idéntica de sistemas caóticos, el control del caos y el filtrado de señales inmersas en caos son temas estrechamente vinculados. A partir de técnicas de sincronización se han podido inferir nuevos métodos para controlar sistemas caóticos [Lourenco y Babloyantz, 1994] y se han obtenido logros importantes en el control de arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos [Hunt y Johnson, 1993; Newell et al., 1994; Babloyantz et al., 1995].

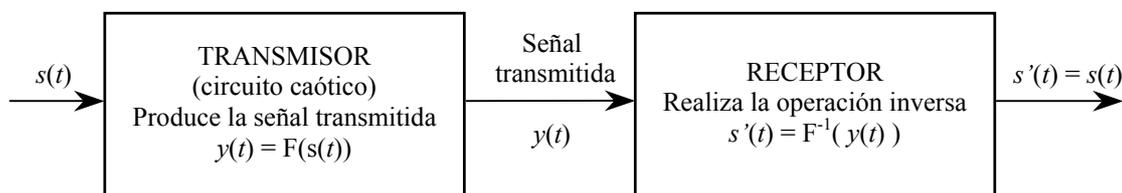


Fig. 1.7: Esquema del concepto de sistema inverso.

La sincronización idéntica, donde dos o más sistemas dinámicos tienen el mismo comportamiento, implica que la dinámica se halla restringida a un hiperplano en el espacio de fase. Pensado desde el punto de vista del filtrado el sistema de comunicaciones representado en el diagrama en bloques de la Figura 1.7 puede interpretarse como un sistema que enmascara el mensaje (transmisor) y otro que realiza la operación de desenmascarar (receptor).

El hecho que los sistemas caóticos presenten un comportamiento impredecible, sumado a su capacidad de sincronización, los hacen especialmente interesantes para ser aplicados en sistemas de comunicaciones. Los primeros intentos para utilizar señales aleatorias en comunicaciones seguras se debieron a Vernam en 1926. Desde entonces, su uso ha adquirido un considerable significado en campos como la criptografía. Las investigaciones realizadas [Cuomo y Oppenheim, 1993; Cuomo et al., 1993 y Cuomo, 1993; 1994] presentaron algunas aplicaciones importantes en las áreas de “enmascaramiento caótico y modulación” y “conmutación caótica”. Específicamente, mostraron cómo puede enmascarse una señal de voz, sumándola a una señal caótica, y luego recuperarla en un receptor sincronizado.

Posteriormente, Kocarev y Parlitz [1995], generalizaron las ideas de Pecora y Carroll, y de Cuomo y Oppenheim, proponiendo la realización de un esquema conocido como *descomposición activo-pasiva* (*Active Passive Decomposition* ó *APD*). Con este método, pueden proponerse diversas variantes de descomposición del sistema original, muchas de las cuales producen subsistemas sincronizables.

También se han desarrollado métodos de encriptado digital en los que el mensaje a transmitir es una señal binaria que actúa sobre un parámetro del circuito caótico transmisor, forzándolo a uno de dos valores posibles [Parlitz et al., 1992; Cuomo y Oppenheim, 1993]. En el receptor el parámetro correspondiente se deja fijo en uno de los dos valores. Como resultado, ambos sistemas se sincronizan (igual valor de parámetros) o desincronizan (distinto valor) dependiendo de estado en que se encuentre la señal de información. Las condiciones de sincronismo positivo (*lock*) y negativo (*unlock*) pueden detectarse fácilmente, logrando la demodulación del mensaje enviado.

Una portadora caótica, que sirve como portadora de información, representa una generalización respecto de la portadora senoidal tradicional y tiene la potencialidad de mejorar la privacidad en las comunicaciones. En el caso de la comunicación de radio ordinaria, una portadora de una frecuencia específica se modula con el mensaje que se va a transmitir. El receptor debe estar sintonizado a la frecuencia de la portadora para recuperar el mensaje. De la misma forma se puede considerar que en el caso de emplear una portadora caótica, el receptor debe estar sincronizado (sintonizado) con la dinámica caótica del transmisor.

Uno de los esquemas básicos es el propuesto por Pecora y Carroll [1990], Kocarev et al., [1990] y Cuomo y Oppenheim, [1993]. En este esquema el mensaje, de amplitud mucho menor a la de la portadora caótica, se suma directamente a ésta como se muestra en la Figura 1.8.

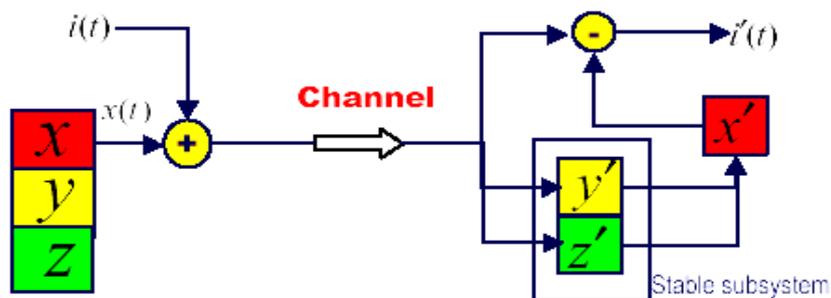


Fig. 1.8. Esquema I de Sistema de Comunicación que emplea Emascaramiento Caótico

Kocarev y Parlitz [1995]; Parlitz et al., [1996]; L. Kocarev et al., [1996] proponen el esquema de la Figura 1.9.

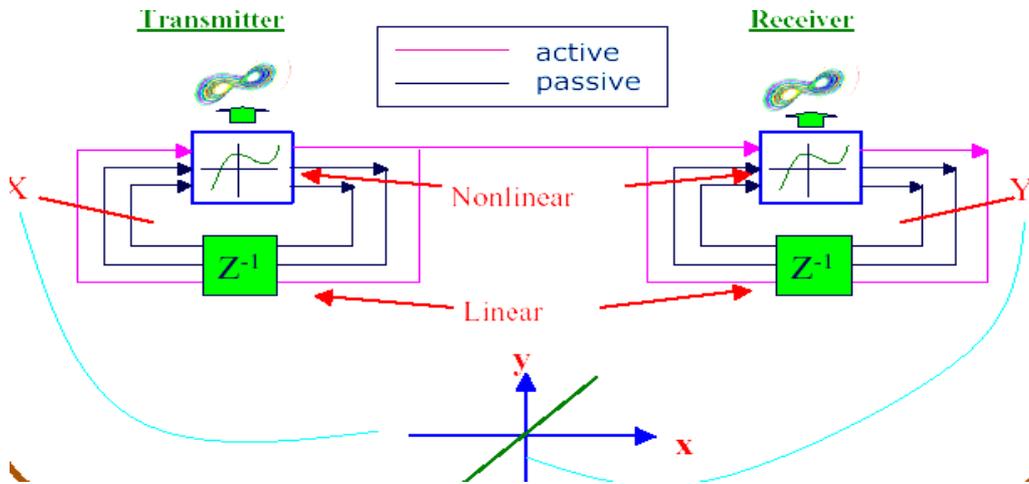


Fig. 1.9 Sistema de comunicación que emplea Modulación de la Portadora Caótica

En la conmutación caótica [Cuomo y Oppenheim, 1993; Parlitz et al., 1992; H. Dedieu et al., 1993], un mensaje se transmite variando el conjunto de parámetros del sistema. Como muestra la Figura 1.10

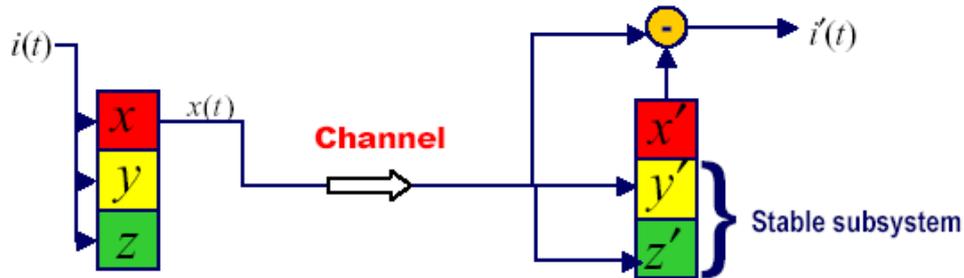


Fig. 1.10 Esquema II de comunicación que emplea el mensaje para variar los parámetros del sistema

En principio se espera que la comunicación sea segura sobre la base de dos consideraciones:

- Es difícil capturar el mensaje mediante métodos espectrales debido a la característica de banda ancha de la portadora.
- Se necesita conocer exactamente el conjunto de parámetros del sistema para recuperar el mensaje. De esta forma, el conjunto de parámetros, que no está accesible a receptores no autorizados, sirve como llave de encriptado.

En el caso de los esquemas de comunicaciones I (Figura 1.9) y II (Figura 1.10), se ha comprobado, que el mensaje oculto puede desenmascarse empleando métodos de predicción no lineal [Short 1994; 1996]. Se suponía que la debilidad en la seguridad se debía a la baja dimensión del sistema y a que la portadora caótica tenía un único exponente de Lyapunov positivo. Debido a esto se sugirió que, para mejorar la seguridad, se debían emplear sistemas hipercaóticos, tales como arreglos hipercaóticos acoplados [Kocarev et al.,

1996; Peng et al., 1996] o sistemas con retardos temporales [Mensour y Longtin, 1998; Goedgebuer et al., 1998]. Esto tampoco produjo mejoras significativas, como lo demostró un reporte que documentó la extracción de un mensaje oculto en un sistema hipercaótico de seis dimensiones reconstruyendo sólo tres de las dimensiones [Short y Parker, 1998]. Los mensajes ocultos en sistemas de muy alta dimensión y varios exponentes de Lyapunov positivos, como lo son los sistemas con retardos temporales, también pueden ser objeto de intrusión [Changsong Zhou y C. H. Lai, 1999]. Otro trabajo [G. Perez y H. Cerdeira, 1995] ha demostrado que los mensajes pueden extraerse de la portadora por reconstrucción de la dinámica, método que aplicaron.

1.5 El esquema de enmascaramiento APD

Sea un sistema caótico autónomo n -dimensional de la forma

$$dz / dt = F(z) . \quad (1.11)$$

Se elige un subconjunto s de variables de estado x y se reescribe la Ec. (1.11) como sistema no-autónomo

$$dx / dt = f(x, s) , \quad (1.12)$$

donde x , representa al nuevo vector de estado, denominado también la porción pasiva que actuará como transmisor, en tanto que s es la porción activa dada por:

$$s = h(x) \quad (1.13)$$

o bien por:

$$ds / dt = h(x, s) . \quad (1.14)$$

El par de campos vectoriales f y h constituye una descomposición del campo vectorial original F . Eligiendo en forma adecuada la función h , cualquier copia de la componente pasiva,

$$dy / dt = f(y, s) \quad (1.15)$$

se sincronizará en forma idéntica con el transmisor. Es decir, $\| X - Y \| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

La condición necesaria y suficiente para que el transmisor se sincronice con el/los receptor/es es que el sistema dinámico formado por la diferencia entre los estados del transmisor y cada uno de los receptores

$$de / dt = f(y, s) - f(x, s) = f(x + e, s) - f(x, s) \quad (1.16)$$

posea un punto fijo estable (al menos localmente) en el origen, es decir $e = 0$. En algunos casos esta condición puede verificarse analizando la estabilidad del sistema linealizado:

$$de / dt = Df(x, s) \cdot e , \quad e \rightarrow 0 , \quad (1.17)$$

donde Df es el Jacobiano del campo vectorial f , o bien usando las funciones de Lyapunov.

Tabla 1.1. Tres descomposiciones posibles del sistema de Rössler que resultan en subsistemas con exponentes condicionales de Lyapunov negativos, lo que permite que se establezca la sincronización.

Subsistema Transmisor	Información $s(t)$	CLE's
$dx_1/dt = 2 + x_1(x_2 - 4)$ $dx_2/dt = -2x_1 - 2x_3 + s$ $dx_3/dt = x_2 + 0.45x_3$	$s = x_1 + x_3$	$\lambda_1 = -0.43$ $\lambda_2 = -0.52$ $\lambda_3 = -3.15$
$dx_1/dt = 2 - 4x_1 + 3(x_2 + x_3) + s$ $dx_2/dt = -x_1 - x_3$ $dx_3/dt = x_2 + 0.45x_3$	$s = x_1x_2 - 3(x_2 + x_3)$	$\lambda_1 = -0.08$ $\lambda_2 = -0.08$ $\lambda_3 = -3.39$
$dx_1/dt = 2 + x_1(x_2 - 4)$ $dx_2/dt = -x_1 - x_3$ $dx_3/dt = x_2 + 0.45s$	$s = x_3$	$\lambda_1 = -0.12$ $\lambda_2 = -0.22$ $\lambda_3 = -3.2$

El método *APD* posibilita obtener muchas descomposiciones distintas sincronizables, a partir de un mismo sistema original. En la Tabla 1.1 se presentan tres variantes posibles para el sistema de Rössler.

En lugar de partir de un sistema caótico conocido y descomponerlo, puede plantearse una técnica alternativa que consiste en considerar un sistema lineal estable

$$dx/dt = A \cdot x \tag{1.18}$$

(caracterizado por alguna matriz A) y adicionarle una función no lineal $s = h(x)$ de tal forma que el sistema completo

$$dx/dt = A \cdot x + s \tag{1.19}$$

sea caótico. En este caso la dinámica del error está dada por el sistema lineal estable, por lo que la sincronización se producirá para todas las condiciones iniciales y para cualquier señal s .

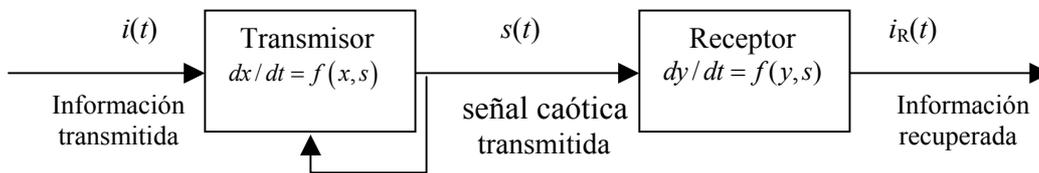


Fig. 1.11: Esquema general del sistema de comunicaciones *APD*

El esquema general de un sistema de comunicaciones *APD* se muestra en la Figura 1.11. Su funcionamiento básico es el siguiente: una señal de información (mensaje) ingresa al transmisor, cuyas variables de estado se encuentran sobre un atractor caótico. Una de las variables se emplea como señal de salida y contiene, enmascarada, la información. En el otro extremo se cuenta con un módulo caótico gemelo, que se sincroniza con el transmisor

mediante la señal caótica enviada por el canal, elimina la máscara caótica y recupera el mensaje.

En el caso de un oscilador de Rössler Ec.(1.8) por ejemplo, la dinámica asintótica del sistema está gobernada por la combinación de los tres parámetros α , β , y γ . De acuerdo al valor de los mismos, puede existir un punto fijo atractor, órbitas periódicas estables de distintos períodos, o atractores caóticos. Para este estudio se adopta la combinación $[\alpha, \beta, \gamma] = [2, 4, 0.45]$. Con estos parámetros el sistema presenta un comportamiento caótico y es estructuralmente estable en el espacio de los parámetros. El sistema resulta entonces

$$\begin{cases} dx_1 / dt = 2 + x_1(x_2 - 4) \\ dx_2 / dt = -x_1 - x_3 \\ dx_3 / dt = x_2 + 0.45 x_3 \end{cases}, \quad (1.20)$$

para el cual se adopta la siguiente descomposición APD

$$\text{Transmisor: } \begin{cases} dx_1 / dt = 2 + x_1(x_2 - 4) \\ dx_2 / dt = -x_1 - x_3 \\ dx_3 / dt = x_2 + 0.45 x_3 \end{cases}. \quad (1.21)$$

Señal transmitida sin información:

$$s = h(x_1, x_2, x_3) = 1.45 x_3, \quad (1.22)$$

$$\text{Receptor: } \begin{cases} dy_1 / dt = 2 + y_1(y_2 - 4) \\ dy_2 / dt = -y_1 - y_3 \\ dy_3 / dt = y_2 - y_3 + s \end{cases}. \quad (1.23)$$

Para transmitir información, la señal $i(t)$ se incluye como argumento de la función h , con lo cual la señal escalar transmitida s (componente activa) pasa a ser

$$s = 1.45 x_3 + i(t). \quad (1.24)$$

Si h es invertible con respecto a i , esto es

$$i(t) = h^{-1}(x_3, s), \quad (1.25)$$

entonces la información recuperada en el receptor,

$$i_R(t) = h^{-1}(y_3, s), \quad (1.26)$$

converge a la señal de información original $i(t)$, una vez que el transmisor (sistema X) y el receptor (sistema Y) se sincronizan.

La Figura 1.12 muestra un diagrama en bloques del sistema realizado con el software *MatLab*[®] y el paquete *Simulink*[®]. Este software permite simular el sistema y “medir” las señales presentes en distintas partes del mismo utilizando los instrumentos virtuales [Rivera et al., 2001] incluidos en el diagrama.

En la Figura 1.13 se muestra la señal $s(t)$ y su espectro, para el caso en que se transmite como información una onda senoidal cuya frecuencia se encuentra dentro del rango espectral de la señal caótica. En la Figura 1.13b se observa que el espectro de la señal transmitida enmascara totalmente al espectro de la senoidal.

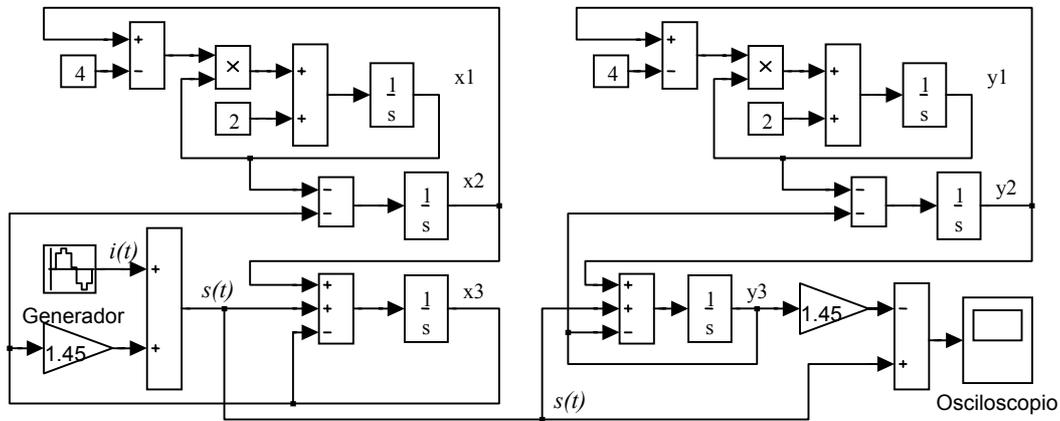


Fig. 1.12: Diagrama en bloques del sistema realizado en Simulink®.

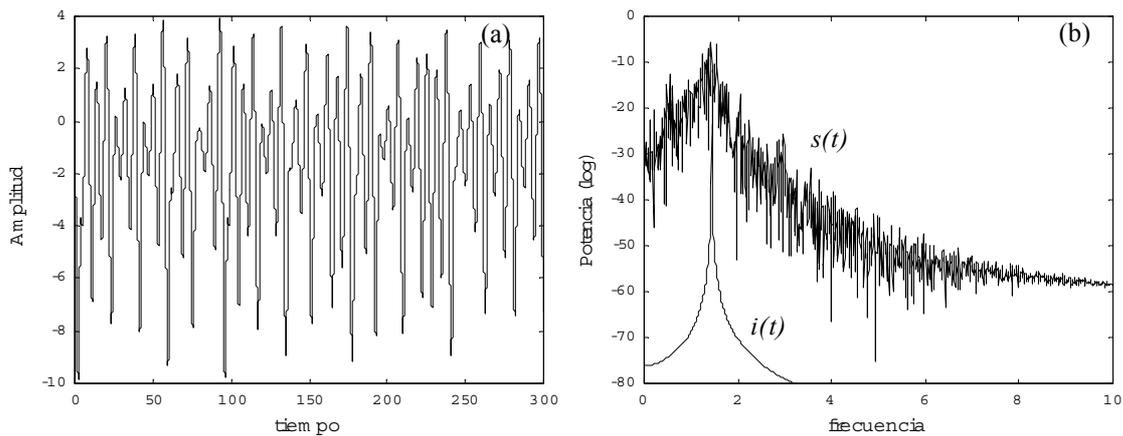


Fig. 1.13: Señal transmitida $s(t)$ con $i(t) = 0.15 \text{ sen}\omega(t)$. (a) en el tiempo, (b) espectro de potencia, donde se ha superpuesto el espectro de la información, mostrando que la misma queda enmascarada por la señal caótica.

Para verificar la sincronización se grafica en la Figura 1.14 la señal de información recuperada en el receptor en función de la información transmitida. En el caso ideal, ambas señales deberían ser iguales, debiéndose obtener una línea recta a 45° . Para el caso simulado se nota que, luego de un transitorio (debido a la diferencia entre los estados iniciales del transmisor $[0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ y receptor $[0 \ 0 \ 0]^T$), ambas señales se sincronizan.

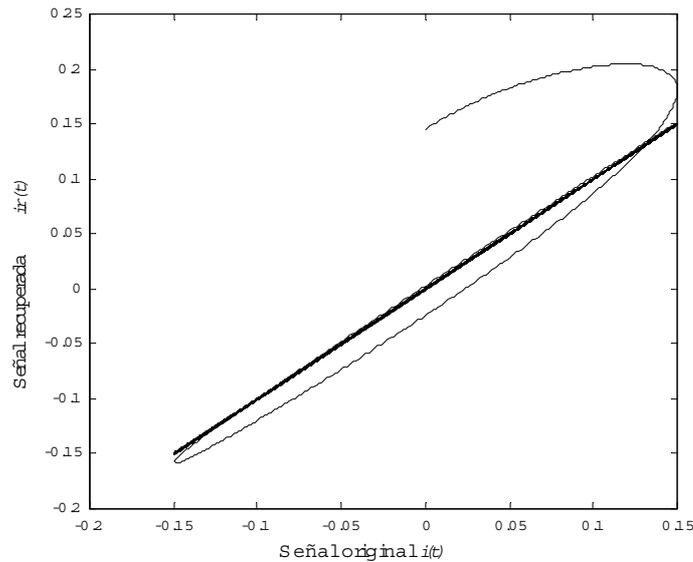


Fig. 1.14: Información recuperada $i_r(t)$ en función de la información transmitida $i(t)$.

1.6 Mapas unidimensionales y bidimensionales típicos

La importancia de los mapas unidimensionales a los fines de esta tesis radica en que una de las metodologías que se desarrolla en el Capítulo 4 para desenmascarar señales inmersas en caos es precisamente la de construir un mapa unidimensional equivalente al sistema continuo original.

El mapa logístico es quizás uno de los mapas de una dimensión más estudiados en el caso de dinámica no-lineal y es representativo de una amplia gama de mapas unidimensionales y en particular de los mapas que se utilizarán en esta tesis. Está definido por la siguiente ecuación de recurrencia

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n \cdot (1 - x_n) , \quad r \in [0, 4] . \quad (1.27)$$

En función del valor de r , el mapa puede mostrar un comportamiento estable, oscilaciones, duplicación del periodo y para $r \approx 3.569946$ se inicia el comportamiento caótico. La Fig. 1.15 muestra el comportamiento del mapa logístico para $r = 3.3$, $r = 3.5$ y $r = 3.7$. Los dos primeros casos se corresponden con comportamientos periódicos en tanto que el tercero es un caso de comportamiento caótico.

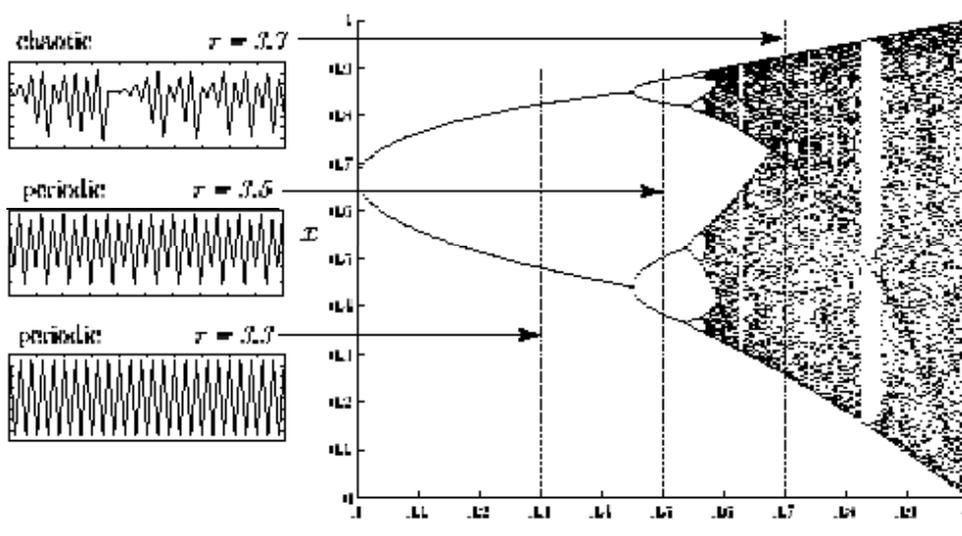


Fig. 1.15 Comportamiento del Mapa Logístico en función del valor del parámetro r

Como el mapa logístico es unidimensional, tiene un único exponente de Lyapunov cuyo valor depende también del valor del parámetro r . En la Figura 1.16 se muestra superpuesto al diagrama de bifurcaciones. En este caso tanto el sistema como el espacio de los parámetros son unidimensionales y puede representarse en el plano.

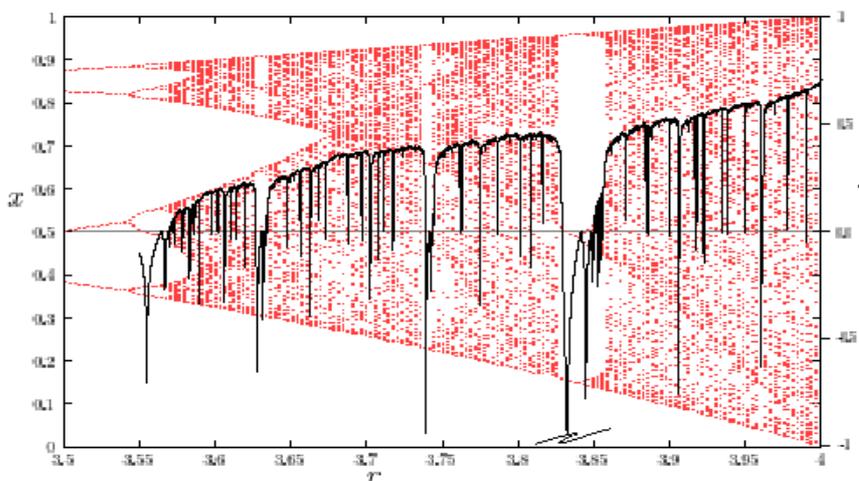


Fig. 1.16 . Exponente de Lyapunov en función del parámetro r

Mientras que el mapa logístico mapea el intervalo unidimensional $[0,1]$ sobre sí mismo, el *Mapa de Hénon* se define sobre un plano real de dos dimensiones y tiene dos parámetros de control: a y b . Las ecuaciones que lo definen son

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - a \cdot x_n^2 \\ y_{n+1} = b \cdot x_n \end{cases} \quad (1.28)$$

Para los valores $a = 1.4$ y $b = 0.3$, el sistema presenta una estructura fractal del tipo boomerang conocida como el atractor de Hénon (Figura 1.17)

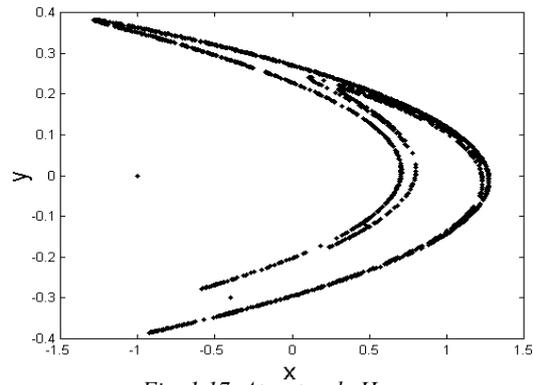
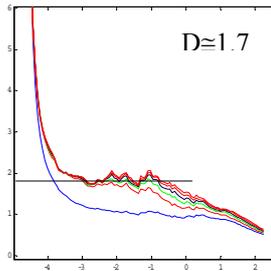


Fig. 1.17. Atractor de Henon

Como se mostrará en el capítulo 3, este mapa tiene una autocorrelación similar a la del ruido blanco gaussiano por lo que algunas técnicas de estimación desarrolladas para *AWGN* son aplicables al caso de enmascaramiento con el *mapa de Henon*.



Capítulo 2

Análisis y caracterización de señales

2.0 Introducción

En este capítulo se presentan técnicas empleadas para analizar y caracterizar series temporales provenientes de señales continuas. Sobre la base del origen de las mismas han sido clasificadas en tres grupos:

- Técnicas Clásicas: que incluyen las técnicas que usualmente se emplean para el análisis de sistemas lineales e invariantes.
- Técnicas provenientes de la Teoría Cualitativa: en especial técnicas derivadas del teorema de *Takens* que permite la reconstrucción de una dinámica aproximada a partir de las mediciones de una única variable del sistema.
- Técnicas estadísticas; en particular se describen conceptos derivados de la Teoría de la Información como la entropía y la complejidad estadística. Se introduce asimismo una medida de complejidad basada en la factibilidad de comprimir un archivo con un programa compresor (complejidad de *zipping*).

Dado que para la mayoría de las técnicas existe amplia bibliografía específica, el capítulo es una recopilación somera de las que se emplean en esta tesis.

Algunos libros fundamentales de consulta son [Oppenheim y Schaffer, 1976; Mitra, 1998; Teolis, 1988; Kantz y Schreiber, 1997; Shannon, 1949; Nicolis y Prigogine, 1989; Politi y Vulpiani, 1988].

2.1 Técnicas clásicas de Análisis y Procesamiento de Series Temporales

El nombre de clásicas con que designamos estas técnicas se debe a que se han empleado para caracterizar y analizar el comportamiento de sistemas lineales e invariantes (LTI). Por definición, un sistema lineal es aquel que satisface el principio de superposición (la respuesta del sistema a una suma ponderada de señales es igual a la correspondiente suma ponderada de las salidas a cada una de las señales de entrada). La propiedad de invarianza implica que su comportamiento y sus características son independientes del tiempo.

2.1.1 Transformadas de Fourier (FT)

La FT ha sido el punto de partida de la descomposición de funciones en el espacio tiempo-frecuencia. A continuación sus principales variantes:

a) *Transformada de Fourier de tiempo continuo (CTFT):*

Es un mapeo $F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ($L^2(\mathbb{R})$ es el espacio de señales complejas de energía finita definida sobre la línea \mathbb{R}) que se define de manera diferenciada para funciones tipo L^1 ($L^1(\mathbb{R})$ es el espacio de señales complejas absolutamente integrables) y para aquellas que no lo son. Las dos definiciones aplicables son

$$F.f(\gamma) = \hat{f}(\gamma) = \int f(t).e^{-j2\pi\gamma t} dt \quad \text{para } f \in L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$$

y

$$F.f(\gamma) = \hat{f}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(t).e^{-j2\pi\gamma t} dt \quad \text{para } f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R}),$$

donde $\gamma \in \hat{\mathbb{R}} (\hat{=} \mathbb{R})$.

En el segundo caso las integrales convergen a $F.f = \hat{f}$ en el sentido de L^2 .

La transformada de Fourier puede representarse formalmente como

$$\hat{f}(\gamma) = \langle f, e_{\gamma} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (2.2)$$

en tanto que la transformada de Fourier inversa puede representarse formalmente como:

$$(\hat{f})^{\vee}(t) = \langle \hat{f}, e_{-t} \rangle_{L^2(\hat{\mathbb{R}})}. \quad (2.3)$$

Existen dos relaciones fundamentales demostradas respectivamente por *Plancherel* y *Parseval*, que garantizan que la transformada de Fourier sea unitaria. Su expresión se da a continuación.

Sea $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int |f(t)|^2 dt = \int |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \quad (\text{Relación de Plancherel}), \quad (2.4)$$

$$\int f(t).\bar{g}(t).dt = \int \hat{f}(\gamma).\bar{\hat{g}}(\gamma).d\gamma \quad (\text{Relación de Parseval}) \quad (2.5)$$

b) *Transformada de Fourier de Tiempo Continuo y Periódico (CPTFT)*

Una función periódica satisface $f(t) = f(t+T)$ para todo t . Este tipo de funciones, definidas sobre el eje real R , pueden recuperarse de un conjunto numerable de muestras de su transformada de Fourier. Esta relación está expresada por la denominada Fórmula de la Sumatoria de Poisson (PSF), que determina que la replicación periódica en el dominio del tiempo (frecuencia) es equivalente al muestreo en el dominio de la frecuencia (tiempo).

Mediante la PSF puede definirse una transformada de Fourier que relaciona las funciones de período T de tiempo continuo, con las secuencias discretas de energía finita. Este mapeo $F: P_T \subseteq L^2(-T/2, T/2) \rightarrow l^2(Z)$ se denomina la transformada de *Fourier* periódica de tiempo continuo y se define

$$(Ff)_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi n t / T} dt \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \langle f, e_{n/T} \rangle_{L^2(-T/2, T/2)} \quad (2.7)$$

c) *Transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT)*: es un mapeo $F: l^2(Z) \rightarrow L^2(-1/2, 1/2)$ definido como:

$$Fc = \hat{c} \triangleq \sum_n c_n e_{-n} \quad (2.8)$$

donde $c = \{c_n\} \in l^2(Z)$

La *DTFT* es una función periódica dado que es una combinación lineal de funciones periódicas (e_{-n} representa a las exponenciales complejas armónicas).

d) *Transformada Discreta de Fourier (DFT)*: Una de las razones por la que las técnicas de *Fourier* son relevantes en *DSP* es la existencia de algoritmos eficientes (*Transformada Rápida de Fourier – FFT*) para el cálculo de la DFT.

Formalmente una DFT es un mapeo

$$F: l^2(\{0, 1, \dots, N-1\}) \rightarrow l^2(\{0, 1, \dots, N-1\})$$

definido como

$$(Fx)_k = \hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{j2\pi n k / N} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.9)$$

donde $x, \hat{x} \in l^2(\{0, 1, \dots, N-1\})$.

e) *Espacios duales de Fourier (H, \hat{H})*: Las relaciones de Parseval y Plancherel pueden generalizarse a otros espacios diferentes de $L^2(R)$. Se pueden identificar pares de espacios aplicando la transformada de Fourier en los que las relaciones

mencionadas se cumplen. Estos espacios se denominan espacios duales de Fourier y son isomorfos entre sí (Tabla 2.1).

R : números reales. $L^2(R)$: espacio de señales de energía finita
 Z : números enteros $TF(R)$: espacio de señales complejas de energía finita
 T : período de la señal PW_Ω : espacio de banda limitada

Tabla 2.1 Espacios duales de Fourier.

z	\hat{H}	$F : H \rightarrow \hat{H}$
$L^2(R)$ $\Gamma F(R)$ PW_Ω	$L^2(R)$ $\Gamma F(R)$ $L^2(-\Omega, \Omega)$	$CTFT$
$L^2(-T, T)$ $L^2(-1/2, 1/2)$	$l^2(Z/2T)$ $l^2(Z)$	$CTPFT$
$l^2(Z/2\Omega)$ $l^2(Z)$	$L^2(-\Omega, \Omega)$ $L^2(-1/2, 1/2)$	$DTFT$
$l^2(\{0, 1, \dots, N-1\})$	$l^2(\{0, 1, \dots, N-1\})$	DFT

2.1.2 Convolución y sistemas lineales e invariantes (LTI)

La *convolución* $f * g$ de dos funciones $f, g \in L^2(R)$ se define como

$$(f * g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(\tau - x)dx . \quad (2.10)$$

Los LTI están caracterizados por sus respuestas al impulso, es decir, sus salidas a una respuesta impulsiva. Dada la respuesta al impulso $g \in L^2(R)$ de un LTI, la salida $y \in L^2(R)$ correspondiente a una señal de entrada arbitraria f es la convolución $y = f * g$. Una propiedad importante, asociada con los LTI, es que la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la frecuencia,

$$(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g} . \quad (2.11)$$

2.1.3 Correlación

La correlación (*correlación cruzada*) de dos funciones $f, g \in L^2(R)$ se define

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(\tau + x)dx . \quad (2.12)$$

Si $f = g$, entonces se obtiene la función autocorrelación. Las similitudes entre el cálculo de la correlación cruzada y la convolución de dos funciones son evidentes de las Ec. (2.11) y (2.12). Las funciones autocorrelación y correlación cruzada tienen varias propiedades importantes. Entre ellas se puede mencionar:

- a) La autocorrelación alcanza su valor máximo para el retardo $\tau = 0$. Este resultado es consistente con el hecho de que una señal tiene un “índice de similitud” máximo cuando se compara con ella misma (sin desplazar). La autocorrelación para $\tau = 0$ da información de la energía total de la secuencia.
- b) La función correlación de funciones periódicas es también periódica. En algunas aplicaciones, la función correlación se emplea para observar periodicidades en señales físicas corruptas por la presencia de ruido. En este caso la función “ruidosa” tiene propiedades aleatorias y puede caracterizarse en forma estadística.

2.1.4 La Transformada Z (ZT) y los LTI discretos

La convolución $x*h$ de dos elementos $x, h \in l^2(Z)$ se define como

$$(x*h)_k = \sum_n x_n h_{k-n} \quad . \quad (2.13)$$

Los LTI discretos se caracterizan, al igual que los LTI continuos, por sus respuestas al impulso (*Delta de Dirac*). Dada la respuesta al impulso $h \in l^2(Z)$ de un LTI discreto, la salida $y \in l^2(Z)$ a una señal de entrada arbitraria f es la convolución $y_n = (f*h)_n$.

La ZT y los LTI discretos son fundamentales en el análisis y el procesamiento de señales digitales. La ZT (Zh) de una secuencia $h = \{h_n\} \in l^2(Z)$ es

$$(Zh)(z) \triangleq H(z) \triangleq \sum h_n z^{-n} \quad , \quad (2.14)$$

donde z cubre totalmente el plano complejo C .

Una propiedad importante asociada con los LTI discretos es que la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio z ,

$$Z(x*h) = ZxZh \quad . \quad (2.15)$$

La DTFT (Fc) de una secuencia $c = \{c_n\}$ es su ZT evaluada en el círculo unitario,

$$(Fc)(\gamma) = (Zc)(e^{j2\pi\gamma}) \quad (2.16)$$

La ZT es una serie infinita de potencias por lo cual se debe determinar su región de convergencia (*ROC*). La ROC es el conjunto R de valores de z para los cuales la ZT converge. La condición de convergencia implica que la serie $\{x_n |z|^{-n}\}$ sea absolutamente sumable.

En general, la ROC R de una ZT de una secuencia $x = \{x_n\}$ es una región anular en el plano complejo,

$$R_{g-} < |z| < R_{g+} \quad , \quad (2.17)$$

donde $0 \leq R_{g-} < R_{g+} \leq \infty$. La ZT definida por la ecuación (2.14) es una forma de la serie de *Laurent* y es una función analítica en cualquier punto de la ROC. Esto implica que la ZT y todas sus derivadas son funciones continuas de la variable z en la ROC.

El procedimiento inverso para obtener $x = \{x_n\}$ a partir de Zx , se denomina Transformada z Inversa (*IZT*),

$$x_n \cdot \overset{z}{\longleftrightarrow} Zx \quad (2.18)$$

Las ZT que caracterizan a LTI discretos, descritos mediante ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes, son funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios en z^{-1} .

La ZT es una operación lineal y algunas de sus propiedades importantes son las mostradas en la Tabla 2.2.

Si $x_n \cdot \overset{z}{\longleftrightarrow} Zx$ con $RC = R = r_1 < |z| < r_2$, entonces:

Tabla 2.2 Propiedades de la ZT

Desplazamiento en el tiempo	$x_{n-k} \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k} Zx$	$RC = R \quad \forall z \neq 0 \wedge z \neq \infty, \text{ si } k < 0.$
Escalado en el Dominio z	$a^n x_n \overset{z}{\longleftrightarrow} a^{-1} Zx$	$RC = a r_1 < z < a r_2 \quad \forall a \in C$
Inversión temporal	$x_{-n} \overset{z}{\longleftrightarrow} Zx$	$RC = \frac{1}{r_2} < z < \frac{1}{r_1}$
Diferenciación en el Dominio z	$n.x_n \overset{z}{\longleftrightarrow} -z \frac{dZx}{dz}$	$RC = R = r_1 < z < r_2$

Dadas

$$x_{1n} \cdot \overset{z}{\longleftrightarrow} Zx_1 \quad \text{con} \quad RC = R_1,$$

$$x_{2n} \cdot \overset{z}{\longleftrightarrow} Zx_2 \quad \text{con} \quad RC = R_2,$$

Se tiene la Tabla 2.3.

Tabla 2.3 Otras Propiedades de la ZT

Convolución	$x_n = x_{1n} * x_{2n} \overset{z}{\longleftrightarrow} Zx = Zx_1 Zx_2$	$RC = R_1 \cap R_2$
Correlación	$r_{x_1 x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{1n} x_{2n-l} \overset{z}{\longleftrightarrow} Zr_{x_1 x_2} = Zx_1 Z^{-1}x_2$	$RC = R_1 \cap R_3 \quad \text{donde } R_3 = RC \text{ para } Zx_1(z^{-1})$

2.1.5 Transformadas Wavelet y Gabor continuas

Las Transformada Wavelet Continua (*CWT*) y de Gabor Continua (*CGT*) convierten una señal unidimensional en una función de dos dimensiones: tiempo y frecuencia. En ambas, la señal se representa como una combinación lineal de una familia específica de

funciones de base. Estas funciones se generan a partir de una determinada función madre. En el caso de CWT las señales se descomponen en términos de familias de funciones (átomos) que son versiones dilatadas y trasladadas de la función madre.

En el caso de CGT las funciones se descomponen en términos de familias de funciones que son versiones trasladadas y moduladas de la función madre. El elemento común entre ambas transformadas es la traslación y el distintivo es la dilatación vs la modulación. La diferencia clave entre ambas es que las funciones de Gabor tienen anchos de banda fijos mientras que, en el caso de las wavelets, estas tienen anchos de banda variables (arbitrariamente pequeños a arbitrariamente grandes).

En ambas transformadas los “átomos” de descomposición se generan a partir de la aplicación de un operador sobre la función madre. El operador depende en forma continua del tiempo t y de la frecuencia γ (o escala s).

Transformada Wavelet

Una wavelet es una función que satisface las siguientes condiciones:

- 1.- Es un burst de energía finita concentrado en el dominio del tiempo.
- 2.- Exhibe algunas oscilaciones temporales.

Una función madre genera una familia de wavelets a partir de dilataciones y translaciones continuas de sí misma. Si g es una función wavelet madre, entonces el conjunto $\{\tau_t D_s g\}$ es la familia generada por g para todas las dilataciones s y todos los desplazamientos t .

La Fig. 2.1 ilustra varias funciones de una familia de wavelets. El gráfico de la izquierda muestra las funciones en el dominio del tiempo y el de la derecha la amplitud de sus transformadas de Fourier.

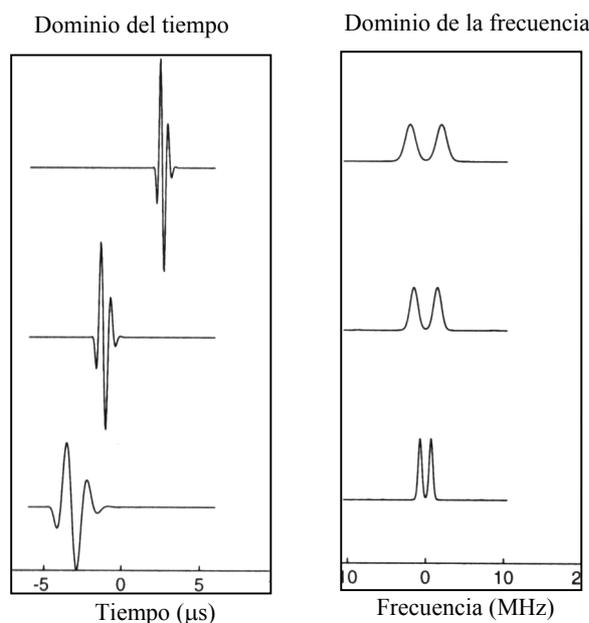


Fig.2.1 Miembros de una familia de wavelets en los dominios del tiempo y de la frecuencia

Las “contracciones” temporales, (valores de la escala (s) mayores que uno) se corresponden con “estiramientos” en el dominio de la frecuencia.

El principal interés en las wavelets reside en la posibilidad de representar y caracterizar otras funciones. La transformada wavelet continua de una función f se define como el producto interno de f con respecto a la familia wavelet generada por g Ec. (2.19). Para cada punto (t,s) en el plano tiempo-escala, la amplitud de la transformada wavelet de una señal f describe cuánto se “parece” ésta a la versión escaleada y trasladada de g ,

$$\langle f, \tau_t D_s g \rangle . \tag{2.19}$$

Las señales pueden recuperarse conociendo sus transformadas, es decir, CWT es invertible. Una condición que se le impone a la función $g \in L^1(R)$, para que sea invertible, es que tenga un valor medio igual a cero. La Tabla 2.4 muestra algunas wavelets continuas y la forma en que están definidas en los dominios del tiempo y la frecuencia

Tabla 2.4 Funciones Wavelets continuas en el dominio del tiempo y la frecuencia

Tipo de Wavelet	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Haar	$g(t) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq t < 0 \\ -1 & 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$	$\hat{g}(\gamma) = 2j \frac{\text{sen}^2(\frac{\pi\gamma}{2})}{\pi\gamma}$
Shannon	$g(t) = \gamma_b^{-1/2} e^{j2\pi\gamma_c t} \frac{\text{sen}(\pi\gamma_b t)}{\pi t}$	$\hat{g}(\gamma) = 1 \quad \gamma_c - \gamma_b/2 \leq \gamma \leq \gamma_c + \gamma_b/2$
Morlet	$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_b}} e^{j2\pi\gamma_c t - (t^2/\gamma_b)}$	$\hat{g}(\gamma) = e^{-\pi^2\gamma_b(\gamma-\gamma_c)^2}$
B-spline	$g(t) = \left(\frac{\text{sen} \pi t}{\pi t} \right)^m \quad m=1,2,3,\dots$	$\theta(\gamma) = 1 \quad -1/2 \leq \gamma \leq 1/2$ $\hat{g}(\gamma) = \theta * \theta \dots * \theta \quad (m \text{ veces})$

γ_c = frecuencia central γ_b = varianza de la frecuencia (ancho de banda)

En la Fig. 2.2 se grafica la CWT de una señal chirp si se emplea la familia generada por la wavelet Morlet. En la parte superior del gráfico se muestra la señal y la CWT se presenta como una imagen en el plano tiempo–frecuencia. En este caso el eje vertical está calibrado en función de las respuestas en frecuencia relevantes asociadas con las versiones dilatadas de la wavelet *madre*.

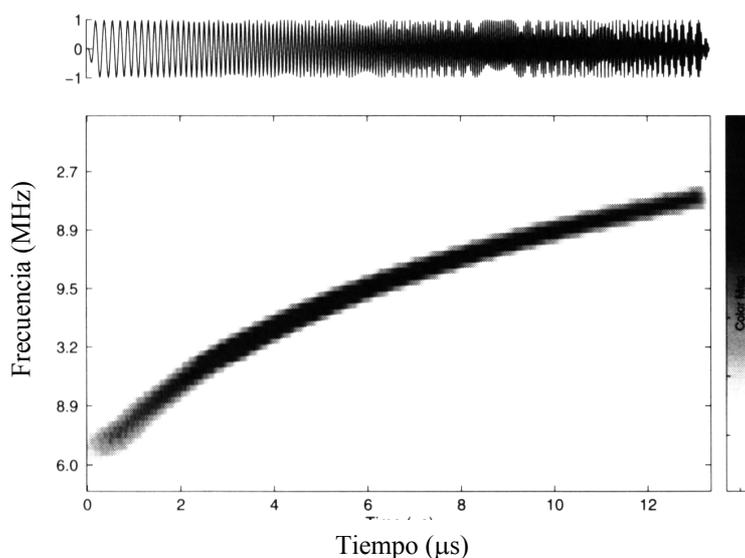


Fig.2.2 . Amplitud de la CWT de una señal chirp

Transformada de Gabor

Dada una función $g \in L^2(\mathbb{R})$, la CGT ($G_g f$) representa una señal en función de todas las traslaciones y modulaciones de la función g . A diferencia de las wavelets, no existen restricciones en la elección de la función auxiliar g excepto que esta sea de energía finita. Se define

$$(G_g f)(t, \gamma) \triangleq \int f(x) e^{-2\pi i \gamma x} \bar{g}(x-t) dx \quad (2.20)$$

La CGT puede interpretarse como una FT que varía con el tiempo, donde la función g actúa como una ventana deslizante. En la formulación original, la ventana g fue la función Gaussiana aunque el nombre Gabor se refiere a la expresión general presentada en la Ec. 2.20. Se la conoce también como transformada de Fourier de Tiempo Reducido (*STFT*). Para un instante particular t la transformada de Gabor de una función f es la transformada de Fourier de f modulada por la versión trasladada en t de g , es decir

$$(G_g f)(t, \gamma) = (f \tau_t \bar{g})^\wedge \quad (2.21)$$

2.1.6 Transformada Wavelet Discreta (DWT)

En general una DWT se obtiene a partir del muestreo (en el plano tiempo-frecuencia) de una CWT. La DWT se especifica mediante la elección de

- 1.- Un conjunto contable de puntos del plano tiempo-escala.
- 2.- Una wavelet madre.

Si la transformada debe ser invertible las elecciones no pueden hacerse en forma arbitraria. Aunque el conjunto posible de DWT es infinito, se reserva el nombre para indicar las asociadas con una elección particular del muestreo y de funciones madre. En DWT el muestreo tiempo-escala está restringido a la grilla diádica estándar (Figura 2.3). El tipo de wavelet debe generar bases ortonormales o biortogonales. Además la wavelet madre debe ser de soporte compacto (característica que hereda el resto de la familia).

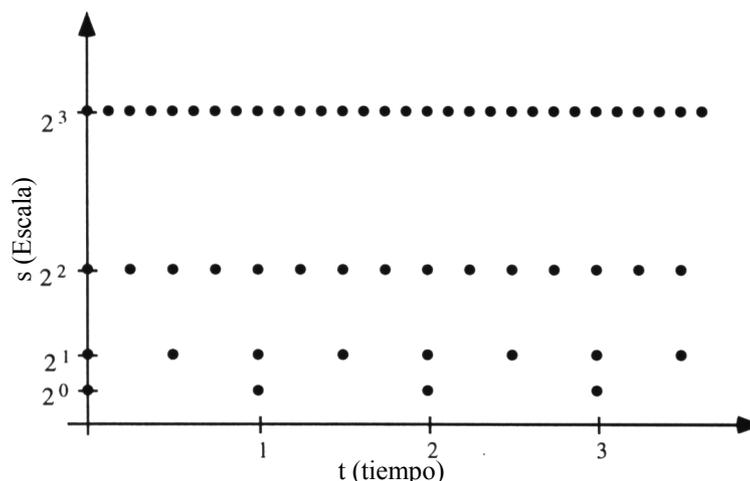


Fig. 2.3 El conjunto contable diádico en el plano tiempo-frecuencia

Si se cumplen las condiciones enunciadas existe un algoritmo, conocido como algoritmo de Mallat, para calcularla que sólo requiere un proceso de filtrado con filtros de respuesta finita al impulso (*FIR*). Este algoritmo es el que se conoce como Transformada Wavelet Rápida (*FWT*).

2.1-7 Análisis multiresolución (MRA)

Un factor que contribuyó al uso de wavelets para DSP fue el descubrimiento y la construcción de las bases wavelet ortonormales (*ONB*) [Mallat, 1989] y, especialmente las de soporte compacto [Daubechies, 1988; 1992]. El encuadre matemático y los mecanismos de generación de las ONBs se basan en MRA. Varios son los elementos clave en MRA en un espacio de Hilbert (*H*).

1. La existencia de una secuencia de espacios anidados

$$\{0\} \dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \subset H \quad , \quad (2.21)$$

que forma la estructura básica de resolución. A medida que el índice $k \rightarrow \infty$ el espacio V_k tiende a H . En tanto que para $k \rightarrow -\infty$, $V_k \rightarrow \{0\}$. Es decir, el conjunto de subespacios $\{V_k\}$ es completo.

2. Se define una función $\phi \in H$ llamada función de escala cuyas traslaciones enteras $\{\tau_n \phi\}$ forman una ONB para uno de los subespacios V_k de H . Sin perder generalidad, se elige como referencia, el subespacio V_0 . Debido a que las funciones de la ONB pueden estar compuestas sólo de traslaciones enteras de ϕ , V_0 resulta una versión en baja resolución de H .
3. El subespacio V_k contiene la aproximación a f de nivel k de una función arbitraria $f \in H$. Dado que los V_k se eligen como espacios crecientes de H , cuanto mayor sea el valor de k , mejor el nivel de resolución del espacio correspondiente.

Lo deseable es que el incremento en la resolución sea uniforme, es decir que pasar del espacio V_k al espacio V_{k+1} produzca el mismo incremento de resolución para cualquier k . Para asegurar la uniformidad la ONB del subespacio V_k se obtiene a partir de la ONB de V_0 mediante una dilatación en potencia de 2,

$$f \in V_k \Rightarrow D_2 f \in V_{k+1} . \quad (2.22)$$

Luego si una función $f_k \in V_k$, entonces la función $f_{k+1}(t) \equiv f_k(2t) \in V_{k+1}$. Así,

$$V_0 = \text{span}\{\tau_n \phi\} \quad (2.23)$$

y, en general $V_k = \text{span}\{D_{2^k} \tau_n \phi\}$, donde D_{2^k} es el operador de dilatación de ϕ y τ_n es su operador de traslación.

Una vez realizadas estas aclaraciones previas podemos definir MRA.

Sea $\{V_k : V_k \subset H\}$ una secuencia de subespacios que se incrementan y $\phi \in V_0$. Se dice que el par $(\{V_k\}, \phi)$ constituye un MRA de H si:

- 1- Existe una función $\phi \in V_0$ tal que $\{\tau_n \phi\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una ONB para V_0 .
- 2- Si $f \in V_k$ entonces $D_2 f \in V_{k+1}$.
- 3- $\overline{\cup V_j} = H$. y $\cap V_j = \{0\}$.

Un MRA establece una estructura matemática bien fundada que conecta las funciones de tiempo discreto a las funciones de tiempo continuo. A partir del MRA se puede generar una gran variedad de familias de wavelets ortonormales para el espacio H . Un conjunto de funciones de norma unitaria que están relacionadas por traslaciones y dilataciones de una función generante (la función de escala) forman bases ortonormales para los subespacios de resolución V_k .

Para obtener ortogonalidad entre diferentes resoluciones en MRA, se define una secuencia $\{W_k\}$ de subespacios de H , denominados espacios wavelet. El subespacio wavelet W_k se define como el complemento ortogonal del subespacio V_k en el siguiente espacio V_{k+1} , es decir,

$$V_{k+1} = V_k \oplus W_k \quad \text{y} \quad V_k \perp W_k .$$

El subespacio wavelet W_k describe exactamente aquellas funciones wavelet que es necesario sumar a las del subespacio V_k para que la combinación resultante cubra V_{k+1} .

Sin pérdida de generalidad, a continuación se considera el subespacio W_0 . El objetivo es construir una función $\psi \in W_0 \subset V_1$ con la propiedad que $\{\tau_n \psi\}$ forma una base ortonormal para W_0 . Si se pudiera hallar tal función ψ , entonces $\{D_{2^m} \tau_n \psi\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ forman una base ortonormal para el espacio H . Esto ocurre porque:

- 1- Cada subespacio W_k es el subespacio wavelet de resolución k -ésima.
- 2- Los espacios wavelets son ortogonales entre si de manera que para cualquier entero $J \leq k$ se cumple

$$V_{k+1} = V_k \oplus W_k = V_{k-1} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \dots = V_J \oplus \bigoplus_{j=J}^k W_j .$$

Debido a que $\{V_k\}$ es completo, H puede escribirse como la suma de todos los subespacios *wavelets*

$$H = \dots W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \dots = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j .$$

2.1.8 Algoritmo de Mallat

El algoritmo de Mallat puede describirse de la siguiente manera:

1. La señal en el nivel n , $x(n)$, de longitud 2^n se analiza primero con un filtro pasa-altos (H en el diagrama de la Figura 2.4). La salida de este filtro da los coeficientes de las wavelets de la escala más alta $n - 1$. Después del filtrado pasa-altos se realiza también un proceso de decimación, es decir el tamaño de la señal se reduce a la mitad, y el vector de coeficientes wavelet ($W(n-1)$) tiene una longitud igual a 2^{n-1} .
2. La señal original $x(n)$ atraviesa el filtro pasabajos (L en la Figura 2.4) para producir el vector $x(n-1)$ de tamaño 2^{n-1} .
3. Ir al punto 1 y repetir el proceso para $n = n - 1$.
4. Fin

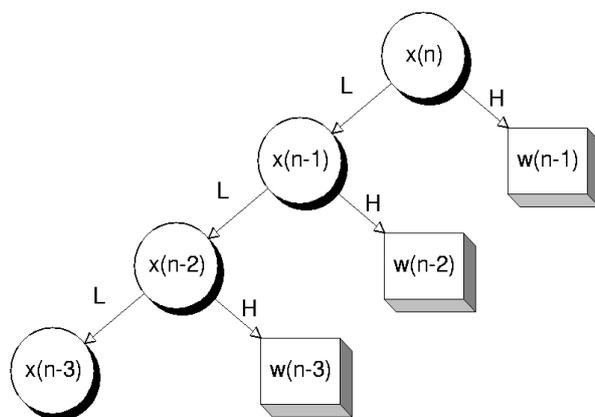


Fig. 2.4. Algoritmo de Mallat

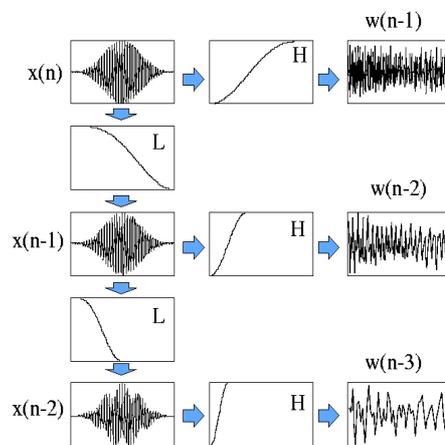


Fig. 2.5. Algoritmo de Mallat en el Dominio de la Frecuencia

2.1.9 Funciones Ventana

Las ventanas empleadas en *FFT* están caracterizadas por varias propiedades. Las más importantes son el ancho de banda de 3 dB y la amplitud de sus lóbulos laterales. La Tabla 2.5 presenta las funciones ventana más conocidas y sus principales características.

Ventana	Ancho de banda de 3 dB	Atenuación del lóbulo lateral
Rectangular	0.85 β	-13 dB
Triangular	1.25 β	-26 dB
Hanning	1.4 β	-32 dB
Hamming	1.3 β	-42 dB
Kaiser (K = 10)	1.75 β	-74 dB

β = Inversa de la duración temporal de la ventana

Tabla 2.5 . Principales características de las Funciones Ventana

El *Principio de Incerteza* determina que existe un compromiso entre la localización temporal y espectral de una señal. La localización en un dominio se hace a costa de la localización en el otro. Una medida de la cantidad de localización que posee una señal debe dar idea de la forma en que se distribuye la energía en su dominio. Los dominios que interesan son el tiempo y la frecuencia. Las funciones ventana pueden considerarse filtros temporales que determinan la localización espectral de las señales. Las especificaciones de una función ventana deben establecer con precisión los términos “centro” y “ancho” de la misma.

Sea $h(t)$ una función (ventana) no trivial, con un decaimiento suficientemente rápido, de manera que las integrales que se presentan a continuación sean finitas. El “centro” de la función $h(t)$ (valor medio en la *Teoría de Probabilidad*) se define como

$$t^* := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt} \quad , \quad (2.24)$$

y el “radio” (dispersión) de $h(t)$ esta dado por

$$\Delta_h = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t^*)^2 |h(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt} \right\}^{1/2} \quad . \quad (2.25)$$

Suponiendo que Δ_h es finito, el ancho de la función ventana se ajusta a $2 \cdot \Delta_h$ ($2 \cdot \Delta_h$ es la duración “eficaz” de la ventana). En forma similar, si la FT $\hat{h}(w)$ de $h(t)$ tiene un decaimiento rápido, el centro y ancho están determinados por

$$w^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w |\hat{h}(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(w)|^2 dw} \quad (2.26)$$

y

$$\Delta_{\hat{h}} = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (w - w^*)^2 |h(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(w)|^2 dw} \right\}^{1/2} \quad (2.27)$$

El valor $2 \Delta_{\hat{h}}$ se denomina valor eficaz del ancho de banda de la función ventana. Si Δ_k (Δ_h) es finita $\hat{h}(w)$ ($h(t)$) es una ventana en el dominio de la frecuencia (tiempo), si ambos (Δ_h y $\Delta_{\hat{h}}$) son finitos, entonces $h(t)$ proporciona una ventana de tiempo-frecuencia.

Un filtro pasabajos ideal no puede considerarse una ventana de tiempo-frecuencia porque tiene una buena localización espectral (función *rec*) pero una mala localización temporal (función *sinc*). El Principio de Incerteza establece que cualquier ventana de tiempo frecuencia $h(t)$ debe satisfacer la desigualdad

$$\Delta_h \Delta_{\hat{h}} \geq \frac{1}{2} \quad (2.28)$$

La igualdad en la Ec. (2.28) es válida solamente cuando $h(t)$ es la función

$$h(t) = ce^{jat} e^{-(t-b)^2/4\alpha} \quad (2.29)$$

Para algunas constantes a , b , c y α , con $\alpha > 0$. Este resultado implica que una ventana tiempo-frecuencia no puede tener un área menor que 2 y que la función gaussiana es la única que proporciona una ventana tiempo-frecuencia óptima.

En FFT el espacio tiempo-frecuencia se divide en segmentos de igual ancho de banda. En el caso de la DWT el dominio de la frecuencia se divide en octavas. Es conveniente que la forma de estos filtros de octavas sea simétrica para minimizar la dispersión entre ellos y para reducir la distorsión de fase. La forma estándar de lograr esta simetría es utilizar los denominados Filtros Espejo Cuadratura (*QMF*), la Figura 2.6 muestra el caso de las wavelet “*Daubechies 15*” que tienen los filtros de descomposición y reconstrucción idénticos.

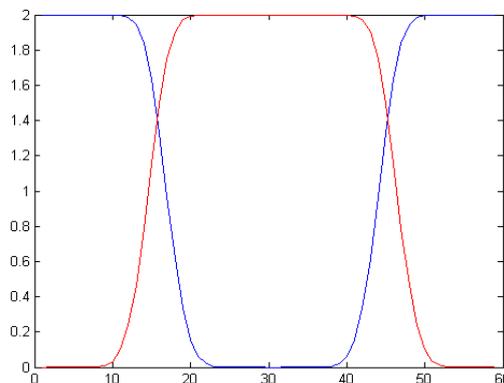


Fig. 2.6 Filtros espejo cuadratura correspondientes a las funciones Daubechies 15

La Figura 2.7 muestra los filtros de reconstrucción y descomposición para el caso de las funciones wavelet “Bior6.8”. Estas wavelets constituyen una base biortogonal y el conjunto de filtros de descomposición y reconstrucción difieren entre sí. Se trata de pares adaptados de filtros pasa-altos y pasa-bajos cuyas características de corte son similares, de forma tal que cuando se aplican simultáneamente, la banda pasante del filtro resultante tiene simetría alrededor de la frecuencia central.

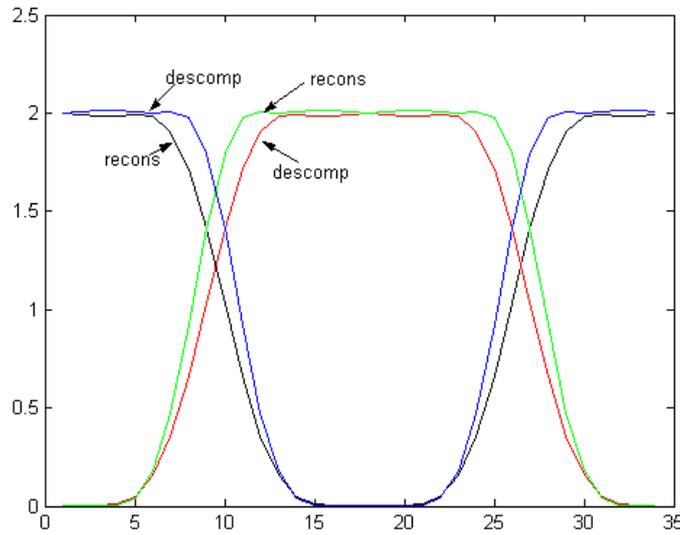


Fig. 2.7 Filtros espejo cuadratura correspondientes a las funciones “Bior6.8”

2.0 Técnicas de análisis provenientes de la Teoría Cualitativa

2.2-1 Reconstrucción de atractores por el método de los tiempos de retardo.

El conjunto de observaciones (en general magnitudes escalares) obtenidas de un experimento deben volcarse en el espacio de fase; para ello se las debe convertir en vectores de estado. En el caso general que el modelo no es conocido, el espacio de estados debe reconstruirse a partir de los valores medidos. La técnica más importante de reconstrucción del espacio de fase es el método de los retardos. Los vectores en el nuevo espacio, el espacio de “embedding”, se generan a partir de valores retardados de las mediciones escalares.

El espacio de embedding puede adquirir una dimensión arbitraria. Sin embargo la reconstrucción puede resultar inadecuada si se elige una dimensión mucho mayor que la del sistema. Por esa razón se va incrementando la dimensión del espacio de embedding hasta que se alcanza una dimensión suficiente para obtener un atractor reconstruido equivalente al original. Parámetros tales como la dimensión de correlación saturan si se los expresa como función de la dimensión de embedding indicando que debe detenerse el proceso de incremento de dimensión. Para garantizar que las cantidades calculadas para el atractor reconstruido sean idénticas a las del espacio de fase original, se requiere que la estructura del espacio de fase, sea preservada por el proceso de reconstrucción.

Sea \mathbf{x}_n es el vector de estado para el tiempo n , s la función de medición y \mathbf{F} el mapa que representa la dinámica $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$. Según Takens el vector en el espacio de embedding se obtiene a partir de mediciones realizadas sobre el espacio del sistema dinámico, es decir se obtiene a partir de $[s(\mathbf{x}_n), s(\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)), s(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_n))), \dots]$. Por lo tanto, conocer $s(\mathbf{x}_{n_i})$ para sucesivos tiempos n_i es equivalente a conocer un conjunto de coordenadas diferentes para un instante (si el mapa \mathbf{F} acopla los diferentes grados de libertad de manera que las componentes de los vectores retardados mutuamente independientes). Una reconstrucción por retardos de una única variable es un mapeo muy particular de $A \rightarrow R^m$. Dado que mezcla la dinámica y la geometría del sistema, las palabras “casi cualquier mapa C ” empleadas en la versión generalizada del Teorema de Whitney nos indican que no todo mapa de retardos es un embedding. En particular, la proyección debida al proceso de medición puede destruir esta propiedad. Un ejemplo negativo, reportado por Sauer [Sauer et al., 1991] es el de la dinámica sobre un ciclo límite con un período igual a uno o dos veces el intervalo de muestreo Δt . La dinámica de éste sistema no puede reconstruirse mediante el embedding por retardos dado que las órbitas colapsan a una curva.

Takens pudo probar [Takens, 1981] que un mapa de retardos de dimensión $m = 2D+1$ es un embedding para una variedad compacta de dimensión D si la función de medición $s: A \rightarrow R$ es C^2 y si la dinámica de la función de medición es genérica en el sentido que acopla todos los grados de libertad. En la versión original de Takens, D es la dimensión (entera) de una variedad “suave”, el espacio de fase que contiene el atractor. De esta forma, D puede ser mucho mayor que la dimensión del atractor. Sauer et al. [1991] generalizaron el teorema que ellos denominaron *Fractal Delay Embedding Prevalence Theorem*:

Para cualquier función de medición “suave” s con un período de muestreo $\Delta t > 0$, el mapa de retardo en R^m con $m > 2D_F$, es un embedding, si no existen órbitas periódicas del sistema con período Δt o $2\Delta t$ y sólo existe un número finito de órbitas periódicas con período $p\Delta t$, con $p > 2$. (D_F es la dimensión fractal (Sección 2.2-3).

Nótese que en los sistemas disipativos D_F puede ser mucho menor que D . En los casos favorables, se puede reconstruir un atractor en espacios cuya dimensión se encuentre comprendida entre D_F y $2D_F$.

En aplicaciones reales es importante la elección apropiada del retardo de tiempo τ . Si se lo elige demasiado pequeño, no existe casi diferencia entre los elementos de los vectores de embedding, de manera que casi todos los puntos se acumulan a lo largo de la bisectriz del espacio de embedding. Esto se denomina redundancia en Casdagli *et al.* [1991a] y en Gibson *et al.* [1992]. Si además los datos medidos son ruidosos, los vectores así formados tienen sentido si la variación de la señal durante el tiempo cubierto por $m\tau$ es mayor que el nivel de ruido. Si τ es demasiado grande, las diferentes coordenadas pueden estar prácticamente descorrelacionadas. En este caso, el atractor reconstruido puede hacerse muy complicado, aún cuando el atractor verdadero sea muy simple. Rosenstein *et al.* [1994] proponen un método, con resultados satisfactorios, que combina redundancia e ignorancia. En términos prácticos esto implica que hay que determinar simultáneamente τ y $D_e^{(\min)}$ [Blanco *et al.*, 1997].

Otro aspecto importante, en la práctica, es la frecuencia de muestreo con que se toman los datos. Un flujo de datos que se muestrea con una frecuencia de muestreo muy elevada es altamente redundante, debido a que los datos están muy correlacionados. En particular, cuando se investigan las propiedades caóticas que se hallan representadas sólo por la dinámica en la dirección ortogonal a la tangente del flujo, las frecuencias de muestreo elevadas exageran la cantidad de datos que cubre un intervalo de tiempo comparativamente pequeño. Se puede reducir la cantidad de datos incrementando los intervalos de muestreo mediante un proceso de diezmado y al mismo tiempo reducir el nivel de ruido explotando las redundancias.

Otro tipo de análisis alternativo es el conocido como *Análisis de Componentes Principales (MCA)* o *Transformación de Karhunen-Loève* [Broomhead y King, 1986]. El algoritmo calcula la matriz de covarianza $m \times m$,

$$C_{ij} = \langle (s)_i, (s)_j \rangle = \frac{1}{N-m+1} \sum_{n=1}^{N-m+1} s_{n-m+i} \cdot s_{n-m+j} \quad (2.30)$$

Dado que C_{ij} es una matriz real y simétrica, sus autovalores son reales y sus autovectores ortogonales. Los autovalores son los cuadrados de los semiejes de la hiper-elipsoide que ajusta mejor la nube de puntos en R^m y los correspondientes autovectores dan las direcciones de los ejes. Las direcciones más relevantes en el espacio están dadas por los vectores correspondientes a los autovalores más grandes. Las direcciones que corresponden a los autovalores más chicos pueden despreciarse. En el análisis MCA, los datos están representados por vectores m -dimensionales. Conociendo los autovalores, se pueden transformar los vectores sobre una nueva base, es decir las componentes de los nuevos vectores son las proyecciones de los vectores originales sobre los autovalores. Los nuevos vectores se truncan después de la componente m_0 si los m_0 autovalores más relevantes son suficientes para describir la señal. De esta forma se tiene un embedding de los datos de m_0 dimensiones. Dado que cada uno de estos vectores cubre un intervalo de m veces el intervalo de muestreo, el retardo de tiempo efectivo en esta representación, es m/m_0 . Se puede demostrar que en el límite, cuando $m \rightarrow N$, esta transformación se convierte en la

Transformada de Fourier [Broomhead y King, 1986]. Para valores pequeños de m el MCA selecciona las estructuras relevantes en el espacio, en lugar de las frecuencias relevantes.

2.2 -2 Exponentes de Lyapunov.

La característica fundamental del caos es la impredecibilidad de los estados futuros, sin importar que la evolución del sistema sea determinística. La impredecibilidad es una consecuencia de la inestabilidad inherente de las soluciones, reflejada por lo que se conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales. Cualquier desviación pequeña entre las condiciones iniciales de dos trayectorias se amplifica a medida que transcurre el tiempo, y cualquier detalle imperceptible en el inicio de la dinámica es importante para determinar en forma precisa la trayectoria en el espacio de estado. Uno de los aspectos asociados a la impredecibilidad es la pérdida de información, cuantificada por la entropía de Kolmogorov-Sinai. El otro aspecto es de naturaleza geométrica, las trayectorias cercanas se separan exponencialmente.

En el caso que la divergencia sea exponencial, el sistema se comporta en forma caótica. El denominado exponente de Lyapunov mide esta divergencia y cuantifica la intensidad del caos. Para un sistema dinámico se pueden definir tantos Exponentes de Lyapunov como la dimensión del espacio de fase. El exponente de Lyapunov máximo λ es el más importante dado que da la máxima divergencia del sistema.

Sean \mathbf{x}_{n1} y \mathbf{x}_{n2} dos puntos en el espacio de estado con distancia $\|\mathbf{x}_{n1} - \mathbf{x}_{n2}\| = \delta_0 \ll 1$ y $\delta_{\Delta n}$ la distancia entre dos puntos de los que emergen dos trayectorias en el tiempo n

$$\delta_{\Delta n} = \|\mathbf{s}_{n1+\Delta n} - \mathbf{s}_{n2+\Delta n}\| \quad . \quad (2.31)$$

Entonces λ está determinado por

$$\delta_{\Delta n} \cong \delta_0 e^{\lambda \Delta n} \quad , \quad \delta_{\Delta n} \ll 1 \quad , \quad \Delta n \gg 1 \quad . \quad (2.32)$$

Si λ es positivo existe una divergencia exponencial de trayectorias cercanas (caos).

Dos trayectorias no pueden separarse más de lo que les permite el tamaño del atractor, de manera que la expresión de la Ec. (2.33) es sólo válida durante tiempos Δn para los que $\delta_{\Delta n}$ permanece pequeña. Una definición matemática más rigurosa tiene que involucrar un primer límite $\delta_0 \rightarrow 0$ de manera que el segundo límite $\Delta n \rightarrow \infty$ pueda realizarse, sin que se produzcan efectos de saturación. Sólo de esta forma el exponente λ se hace una cantidad invariante y bien definida.

En el caso de sistemas disipativos, existe al menos un exponente de Lyapunov negativo. En este caso, si el exponente de Lyapunov máximo es cero, el movimiento se denomina marginalmente estable. Si un sistema determinístico se perturba con ruido aleatorio, las escalas pequeñas pueden caracterizarse mediante un proceso de difusión, con $\delta_{\Delta n}$ creciendo como $\sqrt{\Delta n}$. En ese caso el exponente de Lyapunov máximo es infinito. De acuerdo a la definición matemática este resultado es válido independientemente de lo pequeña que sea la componente del ruido. Si se suponen sólo errores de medición aditivos,

se puede tratar de estimar el exponente de Lyapunov del supuesto sistema determinístico subyacente.

Los exponentes de Lyapunov tienen unidades inversas de tiempo y proporcionan escalas de tiempo típicas para la divergencia o convergencia de trayectorias próximas. Cuando los datos corresponden a un sistema continuo, discretizado mediante una sección de Poincaré (Apéndice) se debe conocer el tiempo promedio entre dos puntos consecutivos del mapa, τ_p para relacionar los exponentes de Lyapunov del mapa con los del flujo. La relación es

$$\lambda_{map} = \lambda_{flow} \cdot \tau_p \quad . \quad (2.33)$$

El exponente de Lyapunov máximo de un sistema es una cantidad global característica. Pero las mediciones que se pueden realizar de diversas maneras pueden someter los datos a procesos de reescalamiento, desplazamiento etc. y al propio método de reconstrucción del espacio de estado que es absolutamente arbitrario. Estas modificaciones no afectan los exponentes de Lyapunov dado que se trata de una cantidad invariante a todas estas transformaciones (mientras ellas sean suaves).

Dado que un exponente de Lyapunov máximo (positivo), es un indicador de la presencia de caos, es importante determinarlo para una secuencia temporal. El primer algoritmo fue propuesto por Wolf *et al.* [1985], pero no es muy robusto y puede conducir a resultados erróneos. Una debilidad que presenta es que no prueba la existencia de divergencia exponencial sino que asume su existencia y por lo tanto conduce a exponentes aún finitos para el caso de datos estocásticos, donde el verdadero exponente es infinito. Los métodos de Sano y Sawada [1985] y Eckmann *et al.* [1986] son muy eficientes si los datos aproximan bien la dinámica del sistema. En los algoritmos propuestos por Rosenstein *et al.* [1993] y por Kantz [1994] en forma independiente se comprueba la divergencia exponencial de trayectorias cercanas y luego se decide si tiene sentido calcular el exponente máximo de Lyapunov de la serie de datos.

Las proyecciones, involucradas durante el proceso de medición, pueden hacer que las distancias se reduzcan para tiempos cortos aún cuando crezcan en el espacio de estados verdadero. Las distancias en el espacio de estado verdadero no crecen homogéneamente sobre todo el atractor y pueden llegar a reducirse localmente pero el exponente de Lyapunov es un promedio de las velocidades de divergencias locales. Los datos experimentales generalmente están contaminados por ruido. Su influencia puede minimizarse usando una estadística adecuada en el cálculo del exponente. Para obtener el crecimiento exponencial medio a partir de los datos puede emplearse el procedimiento de Rosenstein *et al.* [1993] incluido en una de las rutinas del paquete TISEAN usado en esta tesis.

2.2 –3 Geometría del atractor caótico y los fractales.

La dinámica del caos se manifiesta como una sensibilidad a las condiciones iniciales. Este comportamiento temporal del sistema caótico tiene su contrapartida en la geometría del atractor en el espacio de fase. Los atractores de sistemas disipativos caóticos tienen generalmente una geometría muy complicada. Un sistema descrito por ecuaciones diferenciales autónomas (flujo) no puede ser caótico en menos de tres dimensiones. Empleando el mismo argumento que indica que las trayectorias en un sistema determinístico no se pueden cruzar, se puede inferir que tanto el espacio de fase como el atractor de un

flujo caótico deben tener más de dos dimensiones. Es suficiente un número levemente mayor a dos y el movimiento sobre un fractal de dimensión $2+\varepsilon$ puede ser verdaderamente caótico. Las dimensiones no enteras se asignan a objetos que exhiben autosimilitud y muestran la misma estructura en todas las escalas.

La autosimilitud de los conjuntos se puede cuantificar mediante la dimensión de Hausdorff, [Hausdorff, 1918], pero la dimensión de box counting es mucho mas conveniente para el cálculo y su límite superior es la dimensión de Hausdorff. Sea un conjunto de puntos ubicados en R^m , que se desea cubrir con cajas regulares de lado ε . Se denomina $M(\varepsilon)$ al número de cajas que contienen al menos un punto. Para un conjunto autosimilar se cumple

$$M(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D_F} \quad . \quad (2.34)$$

Donde el exponente D_F se denomina dimensión de box counting o capacidad. Más significativo es otorgar mayor peso a aquellas regiones que son visitadas más frecuentemente. Siguiendo esta idea se definen familias de dimensiones generalizadas [Renyi, 1971] que difieren entre si por la forma que son pesadas las diferentes regiones.

Todas las definiciones de dimensión dan valores coincidentes cuando se las aplica a objetos no-fractales (una colección finita de puntos es de dimensión cero, las líneas tienen dimensión uno, las superficies dos, etc). La dimensión de correlación, introducida por Grassberger y Procaccia en 1983, es de particular interés en las aplicaciones prácticas donde la geometría de los objetos tiene que reconstruirse a partir de un conjunto finito de datos, que en general pueden contener errores. Se define la Suma de Correlación, para un conjunto de puntos x_n en un espacio vectorial, como la fracción de todos los posibles pares de puntos que están a una distancia ε en una norma particular. La expresión es:

$$C(\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|) \quad (2.35)$$

Donde θ es la función escalón de Heaviside, $\theta(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $\theta(x) = 1$ para $x > 0$. La suma es igual al número de pares (x_i, x_j) cuya distancia es menor que ε . En el límite para una cantidad infinita de datos ($N \rightarrow \infty$) y para ε pequeño, se espera que C sea proporcional a ε^D , de donde se puede definir la dimensión de correlación D como

$$d(N, \varepsilon) = \frac{\partial \ln C(\varepsilon, N)}{\partial \ln \varepsilon} \quad , \quad (2.36)$$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} d(N, \varepsilon) \quad . \quad (2.37)$$

Se puede verificar que ésta definición determina correctamente las dimensiones de objetos geoméricamente regulares. Para los casos prácticos, N está limitada por el tamaño de la muestra y ε por la precisión finita de los datos y por la pérdida de los vecinos más próximos en el caso de escalas pequeñas.

Las diferentes definiciones de dimensión, los exponentes de Lyapunov, etc. son formas de cuantificar las propiedades de una señal. Cada uno de estos conceptos permite

transformar una secuencia de datos en un número (o unos pocos) que aportan un conocimiento más profundo de la dinámica del sistema.

Si se debe determinar si un objeto geométrico es una superficie o un volumen, conociendo la dimensión, esta no puede depender de los detalles de la medición o la resolución de los datos. La dimensión de Correlación es una medida invariante pero la suma de correlación no lo es para una escala dada, ε_0 . De esta forma, no podemos tomar $d(N, \varepsilon_0)$ como una estimación de D . La dimensión de Correlación es una herramienta para cuantificar la autosimilitud cuando se sabe que ésta se halla presente.

Las definiciones de suma y dimensión de Correlación involucran a vectores en el espacio de fase y posiciones de los puntos sobre el atractor. Cuando se tiene una serie escalar, primero se debe reconstruir el espacio de fase mediante el procedimiento de embedding ya descrito. Una vez que se reconstruyen los vectores, la estimación de la dimensión de Correlación se hace en dos etapas. Primero se tiene que determinar la suma de correlación $C(\varepsilon)$ para el rango de ε disponibles y para diferentes dimensiones de embedding m . Luego se inspecciona $C(m, \varepsilon)$ para hallar signos de autosimilitud, si esta se confirma, entonces es posible calcular un valor para la dimensión.

Para estimar la suma de correlación, de la distribución, se tiene que extrapolar información obtenida a partir de la muestra finita. El estimador de la Ec. (2.35) tiende a dar dimensiones demasiado pequeñas cuando los pares que se toman no son estadísticamente independientes. Para series de datos temporales con autocorrelaciones distintas de cero no puede asumirse independencia. Los vectores de embedding, para tiempos sucesivos, se hallan también próximos en el espacio de estado para evoluciones continuas del tiempo. A esto se le denomina correlación temporal. Las correlaciones temporales más importantes se deben a que los datos que se hallan próximos en el tiempo también lo están en el espacio. Esto no ocurre solamente en sistemas puramente determinísticos sino también en algunos de naturaleza estocástica. Los métodos cuantitativos de análisis de series temporales pueden polarizarse debido a la presencia de correlaciones temporales (se puede subestimar la dimensión de correlación). Las señales estocásticas, (dimensión infinita) pueden aparecer como de dimensión finita. Para evitarlo se deben descartar aquellos pares de puntos que están temporalmente próximos.

2.2- 4 Aplicación de los métodos para series de tiempo no-lineales –Paquete TISEAN

Para comprobar el funcionamiento de las herramientas de análisis no lineal se emplea una secuencia de valores obtenida a partir de un oscilador de Rössler empleando la rutina ODE45 de Matlab®.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha + x_1(x_2 - \beta) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + \gamma x_3 \end{cases} \quad (2.38)$$

Para $\alpha = 2$, $\beta = 4$ y $\gamma = 0.45$ el sistema presenta comportamiento caótico. La variable que se utilizó en el proceso de evaluación es x_3 .

Se analizó también el efecto de agregar una señal de información (senoidal) mediante suma directa y mediante descomposición *APD* al atractor caótico. Se emplea el siguiente conjunto de algoritmos elaborados por el proyecto TISEAN para cuantificar los indicadores mencionados (disponibles en <http://www.mpiyks-dresden.mpg.de/~tisean>).

a) *Reconstrucción del atractor a partir de la serie temporal de la variable x_3 .*

La técnica de reconstrucción más importante es el *método de los retardos*. Los vectores en el nuevo espacio, el espacio de embedding, se forman con versiones retardadas de las mediciones escalares. Empleando el algoritmo *delay.exe* de TISEAN se obtiene la reconstrucción del atractor de Rössler mostrada en la Figura 2.8.

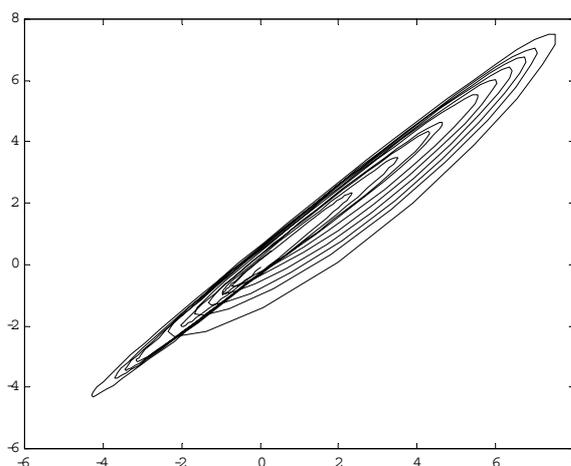


Fig. 2.8 Reconstrucción del atractor de Rossler a partir de la variable x_3 empleando el algoritmo *delay.exe*

El algoritmo *delay.exe* (basado en el algoritmo de la información mutua demorada de Fraser y Swinney [1986]) no proporciona el retardo adecuado para “desplegar” completamente el atractor. Un método alternativo, que calcula el retardo adecuado a partir de la información espectral, obtiene mejores resultados. Si se calcula una FFT de 10000 puntos de la secuencia x_3 se verifica que su espectro se halla comprendido entre los índices 0 y 500. El retardo adecuado se calcula como

$$\text{Retardo} \cong \frac{\text{índice de la frecuencia de muestreo}}{\text{índice de la frec. mas significativa}} = \frac{10000}{500} = 20 \text{ puntos} \quad . \quad (2.39)$$

La Fig.2.9b muestra el atractor reconstruido a partir de la información espectral mostrada en la Fig. 2.9a. El algoritmo de reconstrucción automática efectúa los siguientes pasos:

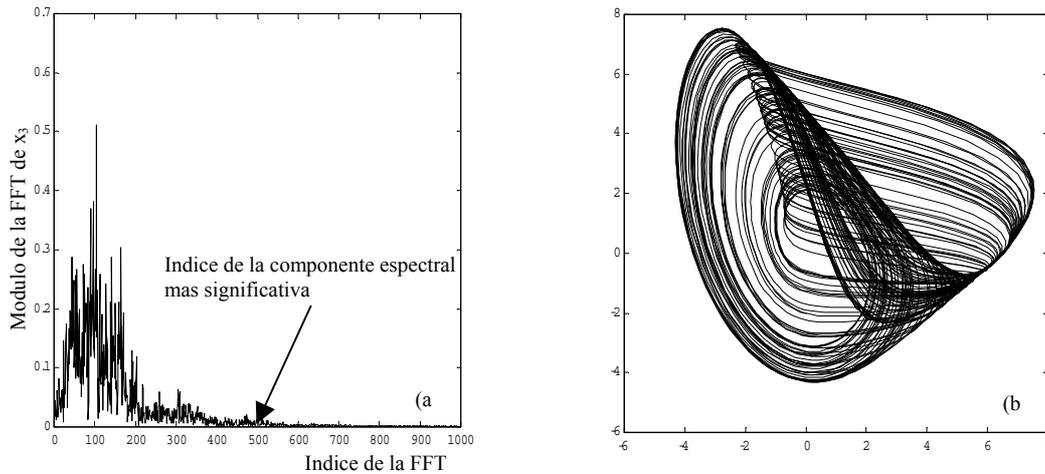


Fig.2.9 a) amplitud de la FFT de la secuencia x_3 b) reconstrucción del atractor con el retardo calculado a partir de la información espectral

- a) Se calcula la FFT de la secuencia ingresada.
- b) Se determina la componente espectral cuya magnitud sea por ejemplo menor que el 5 % de la magnitud de la componente espectral máxima.
- c) Se determina su índice.
- d) Se calcula la Ec. (2.39).

Las Figuras 2.10 y 2.11 muestran los espectros y el atractor reconstruido para los casos de la suma de la señal caótica con una señal senoidal y la descomposición APD respectivamente.

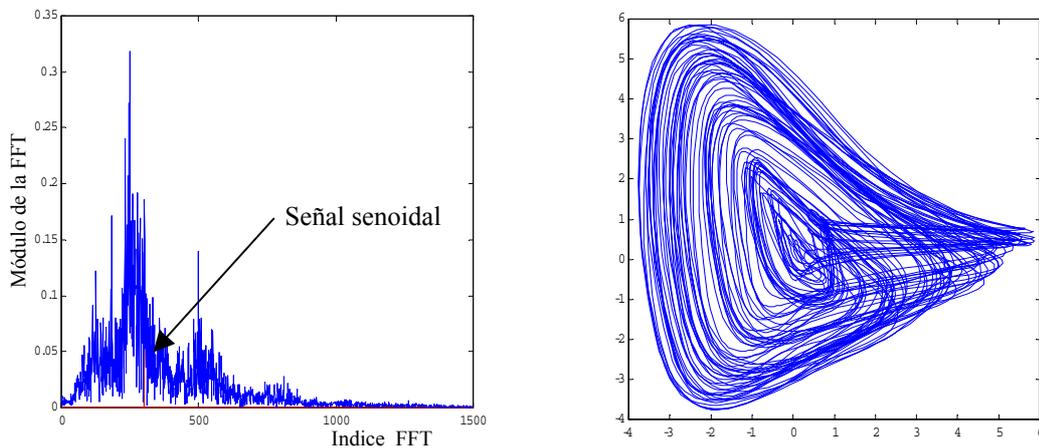


Fig.2.10 a) Espectro de la suma de una señal senoidal y la variable x_3 del Rossler b) Atractor reconstruido

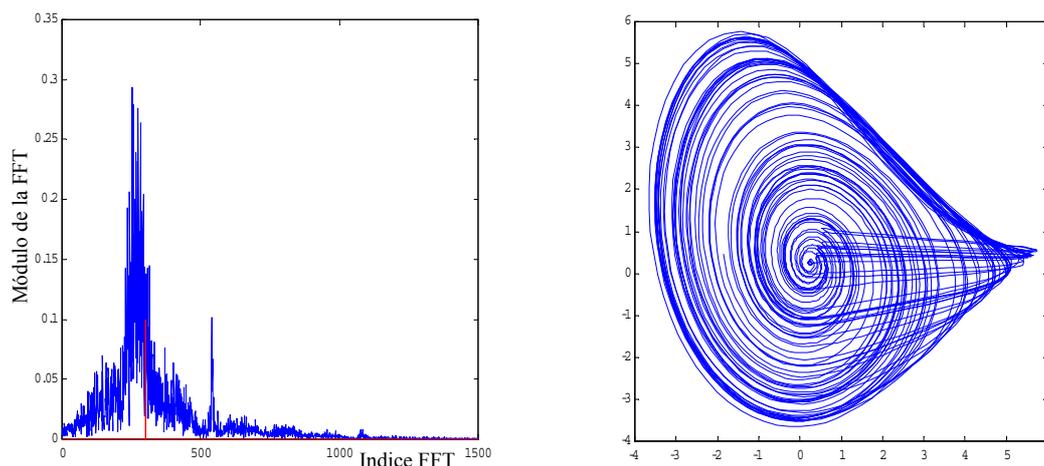


Fig. 2.11 a) Espectro de la variable x_3 de la descomposición APD b) Atractor reconstruido

b) *Exponente máximo de Lyapunov* .

El exponente máximo de Lyapunov puede calcularse empleando la rutina *lyap_k.exe* (Sección 2.2.2). La zona lineal de las curvas (Fig. 2.12), construidas para diferentes valores de ε , se ajusta con una recta cuya pendiente es el valor del exponente máximo de Lyapunov.

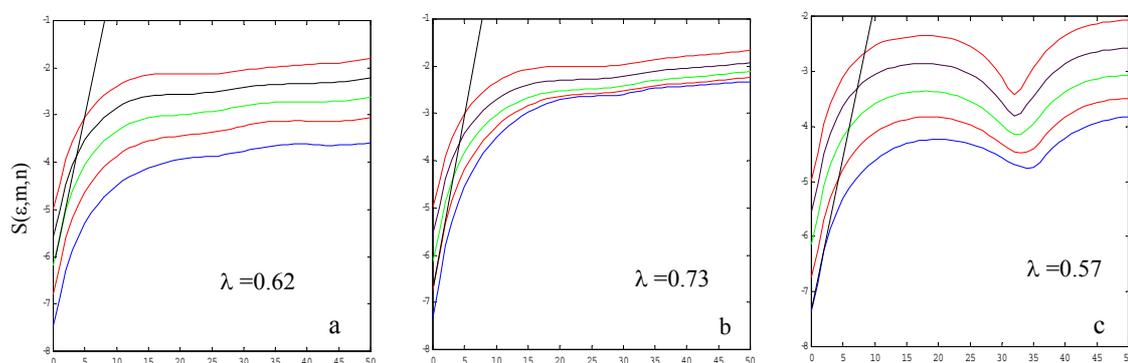


Fig.2.12 Cálculo aproximado del exponente máximo de Lyapunov para diferentes ε y $dim=2$ a) Caso sin señal b) Suma c) Descomposicion APD

c) *Dimensión de Correlación*

La dimensión de Hausdorff es, desde el punto de vista matemático, el concepto mas natural para caracterizar los conjuntos fractales. Pero en el caso de contar con datos que provienen de una medición es mas adecuada la dimensión de correlación. Las limitaciones de cualquier enfoque numérico se deben a que se cuenta con un conjunto finito de datos para caracterizar todo un conjunto o una medida invariante como es la dimensión. El paquete TISEAN ha implementado el estimador de Takens-Theiler (un estimador de máxima verosimilitud) que aplicado a los resultados de la suma de correlación, $C(\varepsilon)$, permite determinar la dimensión de correlación (*c2t.exe*).

$$D_{TT}(\varepsilon) = \frac{C(\varepsilon)}{\int_0^\varepsilon \frac{C(\varepsilon')}{\varepsilon'} d\varepsilon'} \quad (2.40)$$

Se grafica $D_{TT}(\varepsilon)$ vs. $\log(\varepsilon)$ para diferentes dimensiones de embedding. La dimensión de correlación se determina como el valor de $D_{TT}(\varepsilon)$ donde las curvas presentan una zona de comportamiento aproximadamente lineal. La Figura 2.13 muestra los resultados cuando se aplica a los tres casos bajo análisis.

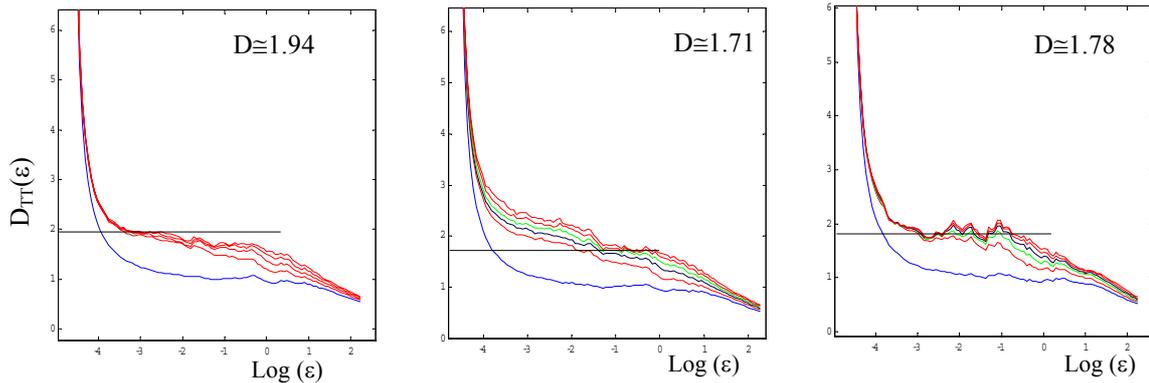


Fig. 2.13 Dimensión de correlación empleando el estimador de Takens-Theiler a) Sin señal b) Suma c) APD

2.2 –5 Bifurcaciones

Una bifurcación es un cambio abrupto de la geometría del atractor o de la topología para un valor crítico de los parámetros de control. Una bifurcación implica un cambio en la estabilidad de los atractores existentes o bien la aparición y desaparición de atractores.

Se han observado distintos tipos de bifurcaciones. En la mayoría de los modelos matemáticos no lineales así como en muchos sistemas experimentales aparecen las denominadas bifurcaciones de duplicación de período: para un valor crítico de los parámetros una órbita estable de período p se hace inestable y simultáneamente emerge una órbita de período $2p$. Las bifurcaciones de duplicación del período a veces se presentan en cascada constituyendo el denominado escenario de Feigenbaum, en el que incrementando los parámetros de control aparecen nuevas duplicaciones de período hasta que se alcanza un punto de acumulación para el cual la dinámica se vuelve caótica.

Una bifurcación que presenta un diagrama muy similar es la denominada bifurcación pitchfork en la que un punto fijo estable se hace inestable y se crean dos nuevos puntos fijos estables. En la bifurcación tangente (bifurcación silla–nodo) un régimen caótico se transforma súbitamente en una solución periódica estable al modificar el parámetro de control. Se debe mencionar, por último, la bifurcación super crítica de Hopf, en la que existe un valor del parámetro para el cual un punto fijo estable se hace inestable y da lugar al nacimiento de un ciclo límite estable. Los casos mencionados están representados en la Figura 2.14.

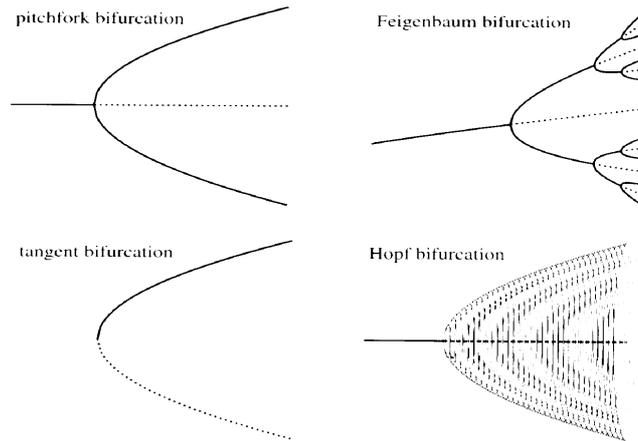


Fig.2.14 Gráfico de los diferentes tipos de bifurcación

El estudio de las bifurcaciones de los sistemas no lineales ha cobrado gran importancia pues, desde el punto de vista práctico los parámetros de un sistema estructuralmente estable, deben elegirse alejados de las fronteras que separan las distintas regiones de estabilidad estructural en el espacio de los parámetros, es decir alejados de las hipersuperficies de bifurcación. En efecto, dado que siempre existen perturbaciones que alteran los valores de los parámetros (condiciones ambientales, errores en la evaluación de algoritmos o en la medición de variables, etc.) si no se tomara esta precaución se corre el riesgo que el sistema no se comporte de acuerdo a lo esperado, ni siquiera desde el punto de vista cualitativo. La dificultad es que, en la mayoría de los casos, esas hipersuperficies se conocen sólo parcialmente, motivo por el cual todo estudio que apunte a una mejor determinación de las fronteras entre regiones tiene importancia fundamental en la aplicación real de los sistemas no lineales.

2.3 Técnicas Estadísticas en el Procesamiento y Análisis de Series Temporales

2.3.1 Entropía

Distintos conceptos y métodos estadísticos, desarrollados inicialmente para el estudio de la termodinámica y la mecánica estadística, han sido modificados para su aplicación a series temporales. Uno de estos conceptos básicos es la entropía, magnitud que pretende cuantificar el desorden de un sistema y que, en el caso de las series temporales, se generaliza para caracterizar la cantidad de información almacenada en distribuciones de probabilidad más generales, generalización conocida como Teoría de la Información. Esta teoría ganó un notable desarrollo entre 1940 y 1950 a partir de los trabajos de Shannon y Weaver [1949], Renyi [1971] y Kolmogorov [1958].

Todo sistema puede ser considerado como una fuente de información y cualquier secuencia de valores medidos constituye un conjunto de números que pueden analizarse como un mensaje. Si los valores numéricos se distribuyen de acuerdo con alguna distribución de probabilidad, y las transiciones entre diferentes números ocurren con probabilidades bien definidas, es posible determinar parámetros estadísticos del sistema que permiten inferir cuánta información se posee sobre el estado futuro cuando se ha observado todo el pasado y qué información adicional aporta una nueva medición. Por ejemplo si un sistema descansa en un punto fijo estable, una única observación es suficiente para determinar totalmente su futuro, con la misma precisión de la medición. Para un sistema periódico, es necesaria la observación sobre un período completo para poder predecir toda la señal. Y si el sistema es un generador de números aleatorios en el intervalo $[0,1]$, no se puede predecir la próxima salida aunque se tenga un número infinito de observaciones previas (pero debe notarse que tanto los generadores “físicos” como los producidos por una computadora no son realmente aleatorios sino pseudoaleatorios).

El valor numérico de la entropía de una serie temporal es de interés dado que su inversa proporciona la escala de tiempo relevante para la predictibilidad del sistema. Además suministra información topológica del proceso de plegado típico en sistemas no lineales caóticos. La entropía está relacionada con otros cuantificadores ya definidos como exponentes de Lyapunov y las dimensiones.

Las entropías de series temporales son difíciles de obtener numéricamente porque su cálculo requiere mayor cantidad de datos que los necesarios para estimar el máximo exponente de Lyapunov o la dimensión de correlación. De hecho se necesita un gran número de datos para poder evaluar las probabilidades de cada estado del sistema, punto de partida para el cálculo de la entropía. Además la partición del espacio de fase debe tender a infinito. La implementación directa de la definición de entropía de Kolmogorov–Sinaí requiere un proceso de box-counting. Por ejemplo, si los datos se normalizan de modo que queden restringidos al intervalo unitario, debe cubrirse el espacio de fase con $1/\varepsilon$ intervalos iguales de tamaño ε para estimar las probabilidades conjuntas p_{i_1, \dots, i_m} contando el número n_{i_1, \dots, i_m} de elementos de la serie temporal que caen dentro de la secuencia de intervalos I_{i_1}, \dots, I_{i_m} . Posteriormente se debe evaluar un histograma m -dimensional.

Existe una estrecha relación entre la Entropía y otros cuantificadores estadísticos de un sistema. Los exponentes de Lyapunov por ejemplo caracterizan la divergencia o convergencia exponenciales de dos trayectorias con condiciones iniciales muy próximas. Si

las trayectorias divergen la predicción del estado futuro se hace más difícil a medida que transcurre el tiempo. En efecto, la incerteza en el estado presente hace que éste sea no un punto sino una pequeña esfera alrededor del valor medido y la evolución temporal deforma esta esfera convirtiéndola en un elipsoide, cuyos semiejes se expanden (si $\lambda > 0$) y contraen (si $\lambda < 0$) en un factor $e^{\lambda t}$. Aunque el volumen total del elipsoide generalmente se reduce debido a la contracción en ciertas direcciones, la incerteza sobre el estado futuro se incrementa a causa de los ejes que se expanden. Si existen varios exponentes λ_i positivos, cada una de las direcciones inestables contribuye a este efecto. La identidad de Pesin [Pesin, 1977] determina la relación entre la entropía de Kolmogorov – Sinaí y los exponentes de Lyapunov positivos

$$h_{ks} = \sum_{i:\lambda_i>0} \lambda_i \quad . \quad (2.41)$$

La suma de todos los exponentes de Lyapunov positivos constituye un límite superior para la entropía de Kolmogorov-Sinaí [Ruelle, 1978], y la identidad de Pesin (Ec. (2.49)) es válida cuando la medida invariante es continua sobre las direcciones inestables. La identidad de Pesin puede generalizarse teniendo en cuenta la fractalidad [Ledrappier y Young, 1985]

$$h_{ks} = \sum_{i:\lambda_i>0} D_i \cdot \lambda_i = - \sum_{i:\lambda_i<0} D_i \cdot \lambda_i \quad , \quad (2.42)$$

donde las dimensiones D_i se denominan dimensiones parciales y son las dimensiones de información del conjunto formado por la intersección del atractor con las direcciones estables o inestables relacionadas a λ_i . Con frecuencia, la identidad de Pesin es la única forma de obtener una buena estimación de la entropía de Kolmogorov–Sinaí de una serie temporal.

La dimensión de Kaplan–Yorke [Kaplan y Yorke, 1979], también llamada dimensión de Lyapunov, está dada por

$$D_{KY} = k + \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|} \quad , \quad (2.43)$$

donde $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \leq 0$, se suponen idénticas a la dimensión de información D_1 . Esta expresión se comprobó para mapas bidimensionales [Ledrappier y Young, 1985] pero existen contra ejemplos para dimensiones mayores. En muchos sistemas se cumple que $D_{KY} = D_1$.

La dinámica simbólica, introducida por Hadamard [1893] para analizar sistemas complejos, también está estrechamente relacionada con la entropía. Un punto importante del trabajo de Hadamard fue el lograr una descripción simple de las posibles secuencias que pueden presentarse en flujos geodésicos sobre superficies de curvatura negativa. Introdujo un conjunto finito de pares de símbolos prohibidos y definió las secuencias posibles como aquellas que no contenían pares prohibidos. Más tarde Morse y Hedlund [1944] usaron este método para comprobar la existencia de periodicidades en diferentes sistemas. Estos

trabajos demostraron que en muchas circunstancias es posible una descripción finita de la dinámica de un sistema.

La idea básica es convertir la serie de tiempo medida en una correspondiente secuencia de símbolos y así tener una representación simbólica del sistema investigado. Los conceptos para analizar tales secuencias fueron desarrollados por Shannon en su trabajo “*Predictions and Entropy of Printed English*” [Shannon, 1951]. Desde entonces, el enfoque de Shannon fue aplicado a un amplio rango de tópicos incluyendo biosecuencias y otras portadoras de información [Ebeling y Jimenez –Montano, 1980; Herzel et al., 1994; Boyajian y Lutz, 1992].

Para ejemplificar la relación entre dinámica simbólica y entropía se considera el mapa logístico que, por sus características de “universalidad”, representa el comportamiento de una amplia clase de mapas. Su expresión analítica es

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad , \quad 0 \leq x_n \leq 1 \quad , \quad 0 < r \leq 4 \quad (2.44)$$

El mapa logístico es un sistema ampliamente investigado y presenta bifurcaciones de duplicación de período en el rango $3.5 \leq r \leq 4$. Para $r \approx 3.569946$ el sistema ingresa en el caos y para $r = 4$ alcanza el caos totalmente desarrollado.

Para obtener la dinámica simbólica del mapa logístico se grafica la ecuación recursiva x_{n+1} vs x_n y se particiona el intervalo $[0,1]$ en tantos segmentos disjuntos como letras se desee utilizar. La Figura 2.15 muestra la gráfica para $r = 4$ y para una partición en dos niveles.

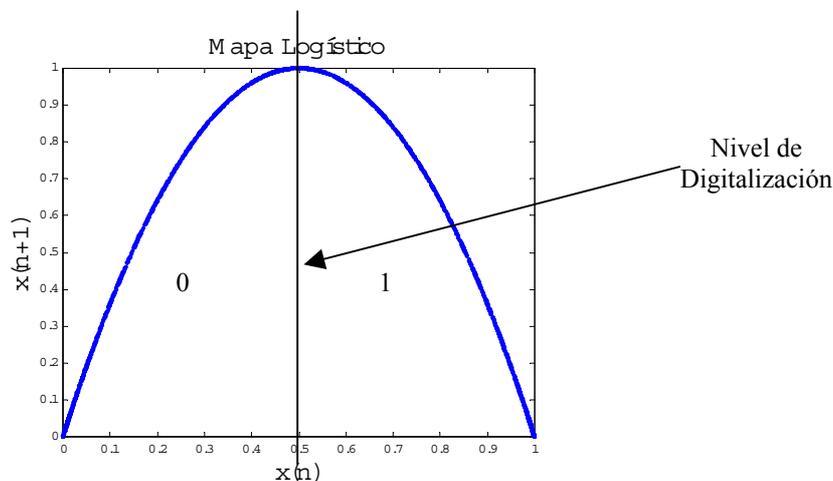


Fig. 2.15 Gráfico de x_{n+1} vs x_n para $r = 4$ en el Mapa Logístico

Con esta elección de un alfabeto de sólo dos símbolos, la dinámica del Mapa Logístico se reduce a una secuencia de bits donde el bit 0 corresponde a $x_n \leq 1/2$ y el bit 1 corresponde a $x_n > 1/2$. Son posibles otras particiones como muestra la Figura 2.16.

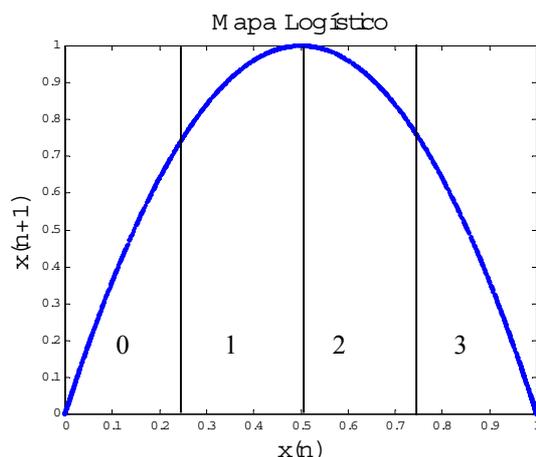


Fig. 2.16 Refinamiento de la partición del Espacio de Fase del Mapa Logístico

Cuando el número de niveles es mayor que dos, la dinámica simbólica queda entonces representada por una secuencia de números enteros. Se puede refinar la partición de manera que el espacio de fase quede dividido en sectores cada vez más pequeños a costa de aumentar la cantidad de símbolos que representan la dinámica. En el caso de las denominadas particiones generantes, P_g , el límite para particiones muy finas puede evitarse. Una partición se denomina generante si el refinamiento dinámico producido cuando n se incrementa, produce una división del espacio de fase en regiones arbitrariamente finas, es decir cada secuencia de símbolos (infinita) se corresponde con un único punto en el espacio de fase. En este caso el mapeo entre la secuencia simbólica (infinita) y la serie de tiempo escalar (infinita) es única. Aun cuando las particiones generantes se conocen para diversos sistemas es difícil obtenerlas prácticamente.

Una vez elegida una partición es posible evaluar la entropía de Shannon de la secuencia de símbolos. La mejor partición será aquella que revela más efectivamente la aleatoriedad de los datos originales como fue sugerido en [Steuer et al., 2001] y esa partición es la que produce máxima entropía.

El gráfico de la Figura 2.17 muestra la entropía como función del número de niveles de la partición, para el caso del mapa logístico. Se observa que la partición propuesta en la Figura 2.15, que divide en dos sectores idénticos el espacio de fase, corresponde a la máxima entropía.

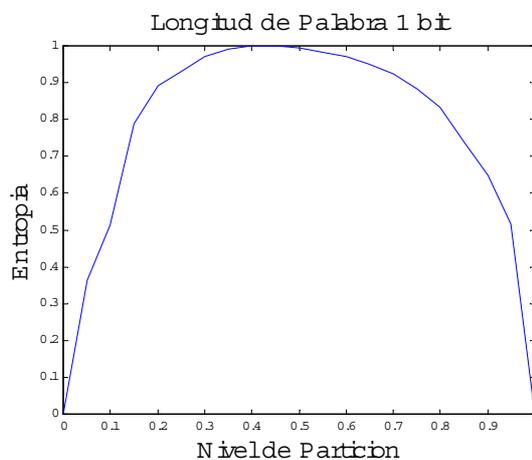


Fig. 2.17 Entropía vs nivel de partición para el caso del Mapa Logístico con $r=4$

Efectivamente sea S una secuencia de N símbolos que pertenecen a un alfabeto finito de λ letras. Los subconjuntos de n letras se denominan *palabras_n* o *bloques_n*. Suponiendo estacionariedad, cualquier *palabra_n* i se espera que ocurra con una probabilidad bien definida p_i^n en cualquier sitio arbitrario de la secuencia. Siguiendo a Shannon, las entropías de las palabras de longitud n (entropías de *gram_n*) están dadas por

$$H_n = -\sum p_i^{(n)} \log_2 p_i^{(n)} \quad . \quad (2.45)$$

La sumatoria debe efectuarse sobre todas las palabras con $p_i^{(n)} > 0$.

Las entropías H_n miden la cantidad de información contenida en una palabra de longitud n , que es equivalente a la información promedio necesaria para predecir una subsecuencia de longitud n . Se pueden introducir las entropías condicionales h_n como la información promedio necesaria para predecir el próximo símbolo dando los precedentes n símbolos

$$h_n = H_{n+1} - H_n \quad . \quad (2.46)$$

La interpretación de las entropías condicionales h_n implica la siguiente desigualdad

$$h_{n+1} \leq h_n \quad . \quad (2.47)$$

Una cantidad de particular interés es la entropía de la fuente definida como el límite de las entropías condicionales h_n

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{n} \quad . \quad (2.48)$$

La entropía límite h (entropía de Kolmogorov- Sinaí) es la cantidad promedio de información necesaria para predecir el próximo símbolo cuando se tiene la información completa de la historia previa del sistema. Dado que una entropía de Kolmogorov-Sinaí implica la existencia de un exponente de Lyapunov positivo, es una medida importante del caos en tanto que la velocidad de convergencia de las entropías diferenciales, al límite h , puede tomárselo como una medida de correlación.

En el caso de sistemas continuos se requiere una selección discreta de muestras obtenida a través de un mapa de *Poincaré*, seguida de la representación simbólica de los datos reales x_t . Nuevamente se efectúa una partición finita P que divide el espacio de fase continuo Γ en λ conjuntos disjuntos. Cada conjunto es identificado con un símbolo (o letra) A_i perteneciente al alfabeto A . La secuencia simbólica resultante da ahora una descripción “gruesa” de la evolución temporal de la dinámica. Aplicando los conceptos de entropía sobre las secuencias simbólicas se obtienen las entropías condicionales $h_n(P)$ con respecto a la partición P . En el caso de sistemas determinísticos de tiempo discreto $f: R^m \rightarrow R^m$ cada *palabra_n* identifica una región Γ_n en el espacio de fase.

$$\Gamma_n = A \cap f^{-1}(A_2) \cap \dots \cap f^{n-1}(A_n) \quad , \quad (2.49)$$

donde $f^{-(i-1)}(A_i)$ indica la iteración $(i-1)$ ésima de la partición correspondiente a la letra i ésima. Para una elección apropiada de la partición se supone que la región I_n se achica a medida que se incrementa n (refinación dinámica).

La entropía de Kolmogorov - Sinaí está determinada por el límite de las entropías condicionales $h_n(P)$ para particiones cada vez más finas o, en forma equivalente, como el supremo sobre todas las posibles particiones P ,

$$h = \sup_{\{P\}} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(P) \quad (2.50)$$

La aproximación de Kolmogorov–Sinaí requiere considerar palabras cada vez más largas, pero los datos experimentales siempre son racionales pues el número de cifras es finito. Por lo tanto, la partición óptima debería maximizar h_n para una palabra larga, pero finita, de longitud $n+1$. Larga significa, en este contexto, tan larga como sea posible para minimizar los efectos de la longitud finita.

2.3.2 Complejidad Estadística

La adaptación de Kolmogorov–Sinaí de la Teoría de la Información de Shannon permitió la caracterización estadística de fuentes deterministas caóticas. Estos esfuerzos para describir la impredecibilidad de sistemas dinámicos condujeron a la definición de cantidades tales como la entropía métrica, los Exponentes de Lyapunov y las dimensiones fractales que pueden emplearse para detectar la presencia y para cuantificar el comportamiento caótico determinístico.

No obstante su utilidad, estas medidas no logran capturar adecuadamente las estructuras correlacionadas en el comportamiento de estos sistemas. La existencia de una estructura implica que existe alguna relación entre sus componentes. Cuanto mayores y más intrincadas son las correlaciones entre los constituyentes del sistema, más estructurada es la distribución subyacente. Sin embargo, las estructuras y correlaciones no son completamente independientes de la aleatoriedad. Generalmente se acepta que, tanto la máxima aleatoriedad (desorden) como los sistemas perfectamente ordenados, carecen de estructuras. Para un nivel de aleatoriedad alejado de estos extremos, existe un enorme rango de procesos estructurados de diferente forma.

En años recientes se viene realizando un considerable esfuerzo para desarrollar una medida general que cuantifique el grado de estructura o patrón presente en un proceso. Existen muchos métodos *ad hoc* para detectar estructuras, pero ninguno de aplicación tan amplia como lo es la entropía para indicar aleatoriedad. Las cantidades que se han propuesto como medidas generales de estructuras se denominan “*medidas de complejidad estadística*”. Las definiciones corrientes caen dentro de tres amplias categorías (Figura 2.18).

a) Caso I: Se considera la complejidad como monotónicamente creciente en función del desorden, ejemplo de esto son las complejidades algorítmicas [Kolmogorov, 1965; Chaitin, 1966] y las diversas entropías [Shannon, 1948; Shannon y Weaver, 1949; Renyi, 1970].

b) Caso II: Son aquellas en las que la *complejidad* es una función convexa del desorden, es decir la complejidad tiene un mínimo para los sistemas completamente

ordenados o completamente desordenados con un máximo en algún nivel intermedio. A esta categoría pertenecen las profundidades lógica y termodinámica [Lloyd y Pagels, 1988; Bennett, 1987] así como la complejidad MPR [Martin et al., 2003] empleada en el capítulo 4 de esta tesis.

c) Caso III: Engloba las definiciones que asocian la complejidad con el orden, estas identifican complejidad con auto-organización y la auto-organización con el orden. [Mc Shea, 1991]

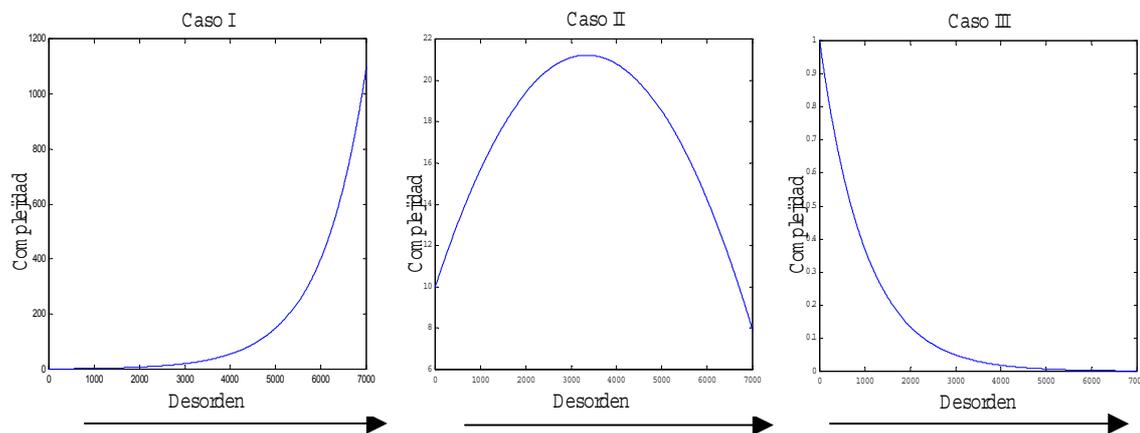


Fig. 2.18 Gráficos de complejidad estadística según tres definiciones diferentes

En particular, en esta tesis se emplean las complejidades de Martín-Plastino-Rosso (MPR) y se dan a continuación las definiciones que conducen a la Complejidad Estadística MPR y la complejidad de Zipping.

Shiner, Davison y Landsberg (SDL) [1999] propusieron una medida de complejidad estadística (SDL) formada por el producto de dos factores: uno de orden y otro de desorden. Para una distribución de probabilidad $\{p_i\}$ se define su información I asociada. El factor de “desorden” que utilizaron es la entropía normalizada $H = I / I_{max}$, donde I es la medida de información de Shannon $I = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$ e I_{max} es la información para el caso de distribución de probabilidad uniforme. El factor de “orden” queda expresado por $\Theta = 1 - H$. Tanto Θ como H toman valores entre 0 y 1. Luego la complejidad de SDL es $C^{(SDL)} = H(1-H) = \Theta(1-\Theta)$.

López – Ruiz, Mancini, y Calbet (LMC) [1995] han propuesto una medida de complejidad estadística basada en la noción de desequilibrio. LMC se define como:

$$C^{(LMC)} = Q.H \tag{2.51}$$

Donde Q es la medida del desequilibrio y H ya fue definida en SDL. La cantidad Q fue definida como una “distancia” en el espacio de probabilidad. Mide cuan lejos se halla $\{p_i\}$, en este espacio respecto de la distribución uniforme $\{p_e\}$, que caracteriza el equilibrio en la mecánica estadística de Gibbs, $p_e = 1/N$.

En la $C^{(LMC)}$ la distancia empleada para la evaluación de Q es la Euclídea. Es decir

$$\begin{aligned} Q_E(\vec{P}) &= Q_0^{(E)} D_E(\vec{P}, \vec{P}_e) = Q_0^{(E)} \|\vec{P} - \vec{P}_e\|_E \\ &= Q_0^{(E)} \sum_{i=1}^N \left[p_i - \frac{1}{N} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

con

$$Q_0^{(E)} = \frac{N}{N-1}. \quad (2.53)$$

La norma Euclídea ignora la naturaleza estocástica de los vectores \vec{P} . Para resolver esta dificultad Martín-Plastino-Rosso[2003] propusieron otra medida del desequilibrio que emplea una distancia de acuerdo a las ideas de Wooters [Wooters, 1980].

El concepto de distancia estadística de Wooters se origina en el contexto de la mecánica cuántica. Se usa básicamente para distinguir entre diferentes preparaciones de un estado cuántico dado. La distancia estadística entre dos puntos de un espacio de probabilidad de N dimensiones es la longitud estadística de la curva más corta que conecta los dos puntos en este espacio. A su vez la longitud estadística de una curva es el máximo número de puntos, mutuamente distinguibles, a lo largo de la curva. Inspirado en el trabajo de Wooters, se define el “desequilibrio” Q (*Distancia de Wooters*) por

$$\begin{aligned} Q_W(\vec{P}) &= Q_0^{(W)} D_W(\vec{P}, \vec{P}_e) = \\ &= Q_0^{(W)} \cos^{-1} \left[\sum_{i=1}^N [p_i]^{1/2} [1/N]^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

con

$$Q_0^{(W)} = 1 / \cos^{-1} \left\{ [1/N]^{1/2} \right\} \quad (2.55)$$

2.3 -4 Complejidad de Zipping

El problema de la codificación eficiente cuando se envían mensajes es bastante antiguo. Un ejemplo de ello lo constituye el código Morse que codifica un texto con dos caracteres: el punto y la línea. La idea es determinar la mejor forma (más corta) de codificar los caracteres del idioma inglés con secuencias de puntos y líneas. Morse codificó los caracteres más frecuentes con el mínimo número de símbolos. Por lo tanto la letra e , la letra del idioma inglés más frecuente, se codificó con un punto, y el número 0 se codificó con 5 líneas. Aunque este tipo de codificación está bien definida, su uso no es demasiado práctico dado que están sustentados en la existencia de una fuente ergódica que permite calcular *a-priori* las probabilidades de las N palabras.

Los denominados compresores o zipeadores son programas concebidos para encontrar el archivo más pequeño que representa una secuencia dada. Uno de los primeros algoritmos de compresión, el de Lempel –Ziv [1976] tiene la particularidad que si codifica

un texto de longitud L extraído de una fuente ergódica, cuya entropía por carácter es s entonces la longitud del archivo zipeado dividido por la entropía del texto converge a 1 a medida que la longitud del texto se incrementa. Esto significa que la efectividad de la compresión es mejor cuanto mayor sea la longitud del archivo a comprimir y que la entropía de una cadena de caracteres puede calcularse mediante un proceso de compresión.

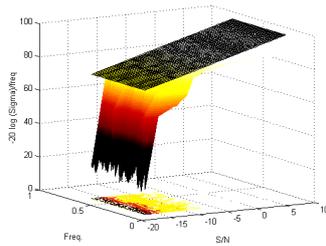
Según se ha mencionado en secciones previas la Teoría de la Información se halla íntimamente ligada a los sistemas dinámicos. Si un sistema es caótico, su horizonte de predicibilidad es temporalmente limitado. El límite está asociado con su exponente positivo de Lyapunov. La secuencia temporal, generada a partir de una de sus trayectorias caóticas, no puede comprimirse por un factor arbitrario, es decir es algorítmicamente compleja. En un sistema caótico, una pequeña perturbación $|\delta x_0|$ produce una separación, creciente con el tiempo, entre una trayectoria y la misma perturbada, dada por

$$|\delta x(t)| \approx |\delta x(0)| e^{\lambda t} \quad , \quad (2.56)$$

donde $\lambda > 0$ es el máximo exponente de Lyapunov. Se tiene de esta manera una rápida amplificación (exponencial) de un error en las condiciones iniciales. Por esta razón el número de bits por unidad de tiempo necesarios para describir la trayectoria es proporcional a λ . Por el contrario, una trayectoria regular puede comprimirse fácilmente.

La caracterización de la información contenida en una secuencia puede enfocarse desde dos puntos de vista. El primero es de índole estadística, es decir no considera la transmisión de un mensaje específico, sino las propiedades estadísticas del mensaje emitido por la fuente. Esto la hace un método poderoso para caracterizar sistemas caóticos. El segundo punto de vista considera el problema de caracterizar una secuencia particular y conduce a la teoría de la complejidad algorítmica. La complejidad algorítmica se encuentra relacionada con el problema de compresión de los datos.

La entropía de Shannon determina la máxima compresión posible de una secuencia. En efecto, si la longitud N es suficientemente larga, la longitud mínima de la secuencia con la cual se pueda reconstruir la secuencia original será $h_{sh}T / \log_2 m$ (siempre empleando m símbolos). Esta relación crea un vínculo entre la entropía de Shannon y otras definiciones equivalentes de complejidad las que se enfocan en cadenas de caracteres en lugar de utilizar la totalidad de la secuencia emitida por la fuente. Entre ellas, probablemente la mejor definición es la complejidad algorítmica de Chaitin–Kolmogorov que indica que la complejidad algorítmica de una cadena de caracteres es la longitud (en bits) del programa más pequeño que produce como salida esa cadena. Esta definición es extremadamente abstracta y, en principio, es imposible encontrar tal programa.



Capítulo 3

Procesamiento de señales inmersas en AWGN y en caos

3.0 Introducción

En este capítulo se presentan resultados originales sobre técnicas de rescate de información inmersa en ruido y en señales caóticas en casos en que no es posible un filtrado directo del ruido. El estudio comprende la simulación por computadora de las técnicas propuestas así como su realización real. Se analizan distintas situaciones de interés en comunicaciones:

- Estimación de los parámetros (amplitud y frecuencia) de señales periódicas inmersas en ruido blanco gaussiano y caos empleando correlación y técnicas espectrales [Hidalgo y Fernández, 1994; Hidalgo y Fernández, 1997; Fernández et al., 2004; Fernández et al., 2005; Hidalgo et al., 2002].
- Rescate de señales periódicas (senoidales, cuadradas, triangulares) y no periódicas (en especial señales de voz) inmersas en ruidos aditivos, de tipo blanco gaussiano y caótico. Se desarrolló un método que combina filtrado digital y wavelets. [Fernández et al., 2002; Fernández et al., 2003].
- Rescate de señales periódicas y no periódicas de voz empleando un receptor caótico gemelo al transmisor. [Hidalgo et al., 2001b; Hidalgo et al., 2002].
- Detección de la presencia de una señal de información en una portadora caótica empleando conceptos de entropía y complejidad. [Fernández et al., 2005].
- Para las implementaciones reales se diseñaron bancos de medición controlados por PC, que emplean placas DSP (*Digital Signal Processors*). [Hidalgo et al., 2001; Rivera et al., 2001; Rivera et al., 2003; Fernández et al., 2004; Fernández et al., 2005]

3.1 Estimación de amplitud y frecuencia de señales periódicas inmersas en ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN)

En numerosas aplicaciones es de relevancia poder estimar, con el menor error posible, tanto la amplitud como la frecuencia de una señal periódica inmersa en ruido [Kay, 1989; Gough, 1994; Quinn, 1997; Macleod, 1998]. En la literatura específica se ha propuesto una amplia variedad de estimadores que se diferencian entre sí en cuatro aspectos: a) el umbral de la relación S/N por encima del cuál la estimación tiene un error aceptable; b) el rango de frecuencia dentro del cuál debe permanecer la señal para obtener una estimación con error aceptable; c) el sesgo (bias) de la estimación y d) la complejidad computacional de los algoritmos utilizados.

Para el caso de señales senoidales Rife y Boorstyn propusieron un estimador de frecuencia de máxima verisimilitud (MLE) basado en el cálculo de la FFT [Rife y Boorstyn, 1974]. Este estimador exhibe el típico efecto de umbral de los estimadores no-lineales pero su comportamiento es independiente de la frecuencia. Brown y Wang desarrollaron un estimador basado en múltiples aplicaciones de un proceso de diezmado y filtrado pasabajos, estimando la frecuencia mediante técnicas de predicción lineal y heterodinización digital. El algoritmo es uniforme en todo el rango de frecuencias digitales (± 1) y su complejidad computacional es menor que la del caso anterior [Brown y Wang, 2002].

Para aplicaciones en tiempo real se emplean procedimientos basados en el Teorema de Prony como el presentado por Marple [Marple, 1987], con buenos resultados. La propuesta de Marple consiste en calcular en forma analógica la autocorrelación de la señal y determinar la frecuencia de la señal senoidal empleando un modelo autoregresivo. La desventaja de este método es que admite niveles de relación S/N sólo moderadamente altos (mayores a 5 dB). Boyte *et al.* [1990] propusieron una mejora al método de Prony que lo hace más exacto en presencia de niveles moderados de ruido. Fung *et al.* [2004] consideraron la situación que se presenta cuando el registro de datos es corto. El algoritmo que proponen muestra un excelente comportamiento en un amplio rango de frecuencias y es esencialmente no polarizado, pero tiene la desventaja de requerir que la relación S/N sea superior a 0 dB. Muravchik y Löffler [1988] presentaron dos estimadores para la función Distribución Espectral de Potencia (PSD) asociada a una serie temporal que convergen con probabilidad uno a la verdadera PSD .

La propuesta de esta tesis [Fernández *et al.*, 2004] es un método basado en el uso conjunto de la función autocorrelación y de un algoritmo iterativo que, a partir de una primera aproximación de la FFT calcula la verdadera relación entre el período de la señal y la duración de la ventana rectangular utilizada. A partir de esta relación se ajusta por software la frecuencia de muestreo para disminuir la dispersión espectral. Este método de ventana ajustable representa una mejora significativa de las mediciones [Hidalgo *et al.*, 2002].

Sea $s(t)$ una señal periódica de amplitud pico A_s , frecuencia f_s y $n(t)$ una señal de ruido blanco con distribución gaussiana y valor medio nulo. Considerando que el ruido es aditivo, se obtiene entonces la información enmascarada

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (3.1)$$

Si se admite que las señales $s(t)$ y $n(t)$ no se encuentran correlacionadas, la función autocorrelación de $x(t)$ consta de sólo 2 términos

$$R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau) \quad , \quad (3.2)$$

donde $R_{ss}(\tau)$ y $R_{nn}(\tau)$ son respectivamente las funciones autocorrelación de la señal y autocorrelación del ruido. Las señales $s(t)$ y $R_{ss}(\tau)$ son periódicas y de igual período, en tanto que $R_{nn}(\tau)$ decae exponencialmente por tratarse de ruido filtrado. Por lo tanto, para valores de τ suficientemente grandes es posible obtener la información de amplitud y frecuencia de la señal $s(t)$ a partir de la amplitud y frecuencia de $R_{xx}(\tau)$.

El algoritmo desarrollado, que se describe en la sección 3.1.2, se basa en el cálculo de la *FFT* con una ventana de duración autoajutable y, como se demuestra mejora los errores en la estimación de ambos parámetros, respecto del uso de ventanas usualmente empleadas en los sistemas de medición.

La Ec. (3.2) presupone un tiempo de integración infinito, cosa que no es posible si se quieren realizar los cálculos con una computadora. En la práctica se emplea una estimación no polarizada dada por

$$\hat{R}_{xx}(n) \cong \frac{1}{N-n} \sum_{j=0}^{N-n} x(j\Delta) x(j\Delta - n\Delta) \quad (3.3)$$

para $0 \leq n \leq N$, donde N es la longitud del registro y Δ es el período de muestreo ($1 / f_M$). La Ec. 3.13 presenta errores significativos cuando el valor de $n \rightarrow N$, por lo que para calcular su *FFT* se debe considerar un segmento de longitud N_w ubicado simétricamente entre los N valores de $\hat{R}_{xx}(n)$.

La Transformada Discreta de Fourier (*DFT*) de un segmento de longitud N_w de la Ec. (3.3) puede calcularse por la expresión

$$F(k) = \sum_{n=n_{min}}^{N_w+n_{min}-1} \hat{R}_{xx}(n) \exp^{-j\frac{2\pi nk}{N_w}} \quad , \quad (3.4)$$

con $k = 0, \dots, N_w - 1$; donde n_{min} es el mínimo valor de n para el cuál puede despreciarse la contribución de $R_{nn}(\tau)$. Dado que la Ec. (3.4) se calcula mediante el algoritmo de la *FFT*, N_w debe ser potencia de 2.

El uso de un segmento de longitud fija para el cálculo es equivalente a pesar la función original mediante una ventana rectangular de duración N_w y produce el efecto conocido como dispersión espectral. Para tratar de resolver este problema generalmente se recurre al empleo de diferentes funciones ventana. Como se expuso anteriormente en esta tesis se adopta el uso de una ventana rectangular, cuya duración se ajusta automáticamente para adaptarse a un número entero de períodos de la señal, obteniendo una mejora apreciable en la determinación simultanea de amplitud y frecuencia respecto de las ventanas usualmente adoptadas en la literatura [*Fernández et al., 2005*].

3.1.2 Algoritmo para obtener una ventana autoajutable en el cálculo de la FFT

El análisis espectral de señales muestreadas es una técnica básica en muchas disciplinas científicas. Las señales se transforman del dominio del tiempo al de la frecuencia empleando la *DFT*, que puede calcularse en forma eficiente con el algoritmo de la *FFT*. Si la frecuencia de muestreo y la duración de la ventana no son los adecuados, el empleo de la *DFT* produce los errores denominados solapamiento y dispersión espectral. El solapamiento se produce cuando la frecuencia de muestreo no es suficientemente alta, y puede reducirse aumentando dicha frecuencia. La dispersión espectral se debe al truncamiento requerido para convertir la señal muestreada en una secuencia de longitud finita. Para resolver este problema se han desarrollado un conjunto de métodos conocido como Transformada Rápida de *Fourier* Interpolada (*IFFT = Interpolated Fast Fourier Transform*), que calculan la frecuencia, amplitud y fase de las líneas espectrales originales a partir de las del espectro distorsionado. Se diferencian esencialmente por el tipo de ventana que utilizan para calcular la *FFT*.

El método de la ventana ajustable que aquí se presenta también puede considerarse como una técnica *IFFT*. La principal diferencia es que sólo se utiliza una ventana rectangular y un algoritmo desarrollado en lenguaje *C*. A pesar de su simplicidad, el método es muy eficiente para reducir significativamente la dispersión espectral. La idea principal del algoritmo es evaluar la frecuencia de la señal de entrada, y luego modificar por software la frecuencia de muestreo, mediante las técnicas de diezmado e interpolación, de forma de obtener una ventana rectangular cuya duración sea adecuada. Aunque el algoritmo se desarrolló sobre la base de señales armónicas, los resultados experimentales y las simulaciones muestran una drástica reducción de la dispersión espectral también en el caso de señales poliarmónicas. Se verificó la estabilidad del método frente a diferentes estrategias de diezmado e interpolación, tanto en las simulaciones como en mediciones reales. Actualmente existen instrumentos de laboratorio que incorporan los algoritmos de cálculo de la *FFT* y reducción de dispersión espectral. Un caso típico es el osciloscopio HP5420A, capaz de mostrar “on line” la *FFT* de la señal de entrada. Incluye tres tipos de ventanas: *Hanning*, *Flattop* y *Rectangular*. El método propuesto en esta tesis es comparado con mediciones reales hechas con este instrumento.

Sea una señal periódica, $s(t) = A_o \cos(2\pi t / T_0 + \phi)$ con período T_0 desconocido. Sea $w(t)$ una función ventana rectangular de ancho T_w , definida por

$$w(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_w \\ 0 & t < 0 \text{ o } t \geq T_w \end{cases} \quad . \quad (3.5)$$

Si se multiplican $s(t)$ y $w(t)$, se obtiene

$$x(t) = w(t) \cdot s(t) \quad . \quad (3.6)$$

Las respectivas transformadas de Fourier son:

$$W(f) = T_w e^{-j\pi f T_w} \text{sinc}(f T_w)$$

$$X(f) = \frac{A}{2} \left[(e^{j\theta} e^{-j\pi T_w (f-1/T_0)} T_w \text{sinc}(T_w (f-1/T_0))) + e^{-j\pi T_w (f+1/T_0)} T_w \text{sinc}(T_w (f+1/T_0)) \right] \quad (3.7)$$

Para aplicar la *FFT* se toman N muestras de la señal con un período de muestreo T_s . La ventana $w(t)$ representa una limitación al valor máximo de N , que deberá satisfacer $N \leq T_w/T_s$. El espectro discreto dado por

$$\{\tilde{X}(k)\} = \{X(k/T_w), \quad k = 0, \dots, N-1\} \quad (3.8)$$

no tendrá componentes espectrales artificiales (es decir no tendrá dispersión espectral) únicamente en el caso en que T_w/T_0 sea un entero; pero esto generalmente no se cumple debido a que T_0 no se conoce a priori.

Por ejemplo, en la Figura 3.1 se considera el caso particular de una onda senoidal de amplitud 1 Vpp y período $T_0 = T_w / 2.5$. El espectro resultante $X(f)$ está dibujado en línea de puntos. El resultado de la *FFT* es un conjunto de muestras de este espectro tomadas a intervalos de $1/T_w$, que están representadas en la Figura 3.2 mediante líneas sólidas (bins). El gráfico muestra como se ha modificado el espectro de la señal: se ha perdido la componente espectral real y apareció una cantidad de componentes espurias.

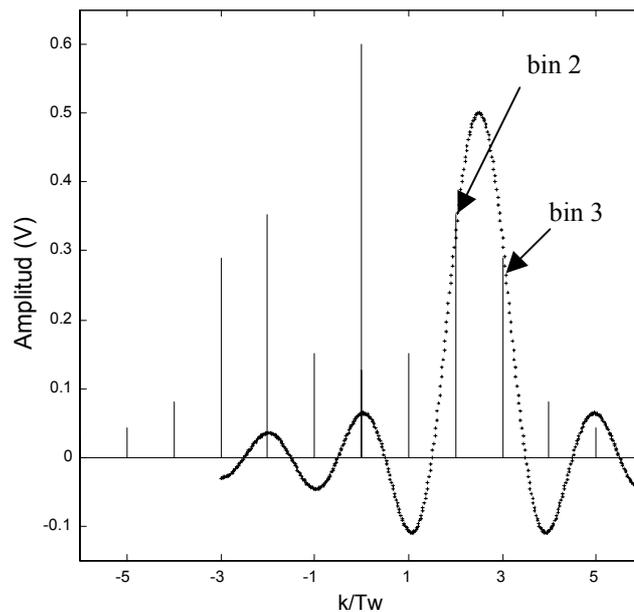


Fig. 3.1 Espectro discreto de $s(t)$ obtenido con la DFT

El algoritmo propuesto consta de los siguientes pasos:

- 1) A partir del gráfico distorsionado del módulo de la *DFT* se determinan:
 - a) A_1 la amplitud de la mayor barra espectral y k_1 su orden (es decir el bin 2 en la Figura 3.1).
 - b) A_2 la amplitud de la máxima barra espectral adyacente a la anterior y su orden $k_2 = k_1 \pm 1$ (es decir el bin 3 en la Figura 3.1).
- 2) Si se supone que f_s es lo suficientemente elevada como para despreciar las componentes espectrales centradas en múltiplos de f_s , entonces puede escribirse

$$A_1 \propto \text{sinc}(k_1 - C) + \text{sinc}(k_1 + C) = \frac{\cos(k_1 \pi)}{\pi} \frac{2C}{C^2 - k_1^2} \quad , \quad (3.9)$$

$$A_2 \propto \text{sinc}(k_2 - C) + \text{sinc}(k_2 + C) = \frac{\cos(k_2 \pi)}{\pi} \frac{2C}{C^2 - k_2^2} \quad , \quad (3.10)$$

donde $C = T_w/T_0$ es la relación entre la duración de la ventana y el período de la señal. Si se divide (3.9) por (3.10) se obtiene

$$C^2 = \frac{A_1.k_1^2 + A_2.k_2^2}{A_1 + A_2} \quad . \quad (3.11)$$

3) Se resuelve la ecuación (3.11) para T_0

4) Se define un nuevo tamaño de ventana T_w' que se ajusta para ser exactamente un múltiplo entero m de T_0 ,

$$T_w' = mT_0 = \text{int}(C) \frac{T_w}{C} \quad , \quad (3.12)$$

donde $\text{int}(C)$ significa la parte entera de C .

Debe notarse que este nuevo tamaño de ventana podría obtenerse re-muestreando la señal con un número diferente de muestras y/o con un período de muestreo diferente, pero en la práctica ninguno de estos cambios puede hacerse de manera directa. El número de muestras está limitado a ser una potencia de dos para aprovechar la eficiencia de la *FFT* y el período de muestreo se puede cambiar por hardware (modificando la frecuencia de un *DDS -Direct Digital Synthesis*). En nuestro caso se modifica la frecuencia de muestreo por software a un nuevo valor dado por

$$f_s' = \frac{N}{T_w'} \quad . \quad (3.13)$$

Para lograr esta modificación se utilizan dos procedimientos básicos del procesamiento digital de señales: el *diezmado* y la *interpolación*. Los métodos de interpolación analizados (lineal y sinc) para crear las nuevas muestras condujeron a resultados similares en la estimación tanto de la amplitud como de la frecuencia de la señal. Por lo tanto en el caso de mediciones reales se empleó la interpolación lineal que resulta más simple.

Sea $(L-1)$ el número de muestras insertadas por la *interpolación* entre dos muestras consecutivas de la secuencia original, y $(M-1)$ el número de muestras removidas por el *diezmado*, entonces

$$f_s' = \frac{L}{M} f_s \quad . \quad (3.14)$$

Combinando las ecuaciones (3.13) y (3.14) se obtiene

$$\frac{L}{M} = \frac{C}{\text{int}(C)} \quad . \quad (3.15)$$

Una condición adicional es que tanto L como M deben ser números enteros dado que representan respectivamente la cantidad de puntos que se colocan entre muestras y la

cantidad de puntos que se remueven. En este trabajo se usa $M=1000$ para obtener al menos tres dígitos exactos en el cociente de la ecuación (3.14), obteniendo de la misma el correspondiente valor de L . La nueva secuencia “re-muestreada” por software de la manera indicada, se emplea para hacer un nuevo cálculo de la FFT , a partir del cual se recuperan la amplitud y la frecuencia de la señal. La Figura 3.2 muestra el diagrama de flujo que sintetiza el algoritmo propuesto.

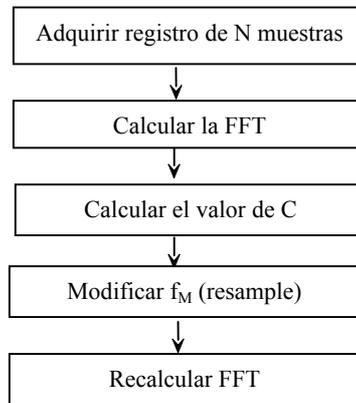


Fig. 3.2 Diagrama de flujo del algoritmo

3.1.3 Banco de Medición

En la Figura 3.3 se presenta el banco experimental utilizado para verificar el funcionamiento del algoritmo. Está constituido por una placa DSP Dalanco Spry 310 conectada al bus ISA de una PC , un generador de funciones programable (HP33120A) y un osciloscopio HP 54520 que tiene la capacidad de calcular la FFT de la señal de entrada. La interfase GPIB se utiliza para controlar los procesos de ajuste de los instrumentos y la medición. Se adquieren $N = 1024$ muestras de la señal entregada por el generador de funciones a una $f_s = 50$ Ks/s, lo que corresponde a un tamaño de ventana $T_w \cong 20.4$ ms y una resolución teórica en frecuencia de 48.828 Hz. En todos se ajusta el osciloscopio para medir con la máxima resolución posible (1 dB/div).

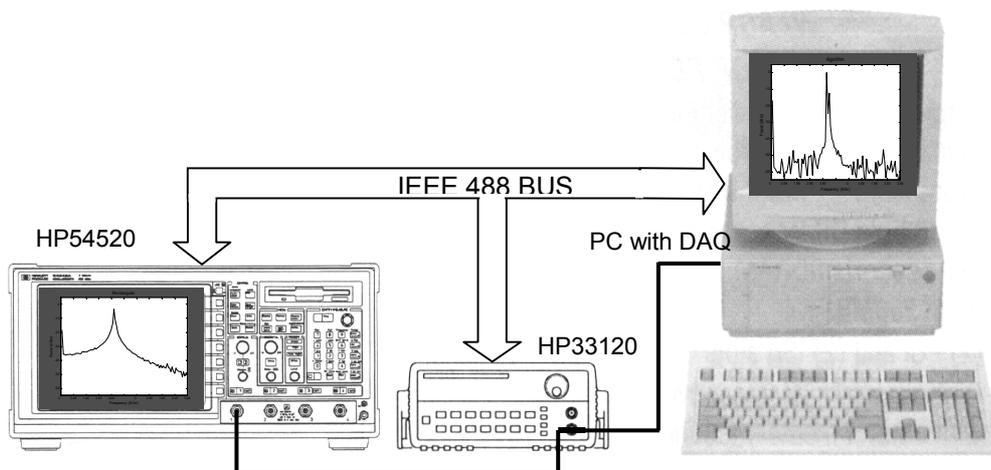


Fig. 3.3 Banco de medición para probar las características del algoritmo

Se mide una forma de onda senoidal de $A_0 = 0.5 V_p$ (1 Vpp o +3.9794 dBm) y frecuencia f_s en el rango 100 Hz a 5 kHz aproximadamente. El tamaño de ventana utilizado en la primera aproximación debe ser mayor que el período de la señal para obtener buenos resultados. En todas las mediciones reportadas aquí, elegimos una ventana de muestreo de por lo menos el doble del período de la señal (esta condición impone el límite menor de frecuencia en 100 Hz). Por otra parte la frecuencia de muestreo debe ser por lo menos diez veces la frecuencia fundamental de la señal de entrada para obtener más de 10 muestras/período (lo que impone el límite de la frecuencia mas alta en 5 kHz). Cabe notar que estas limitaciones son usuales en cualquier técnica de *FFT*. Las diferencias entre el espectro teórico, los valores medidos empleando el algoritmo propuesto y el resultado que se obtiene empleando algunas ventanas estándar se muestra en las Figuras (3.4-3.7). En las Figuras 3.4 se muestran los errores de amplitud ($20 \log \hat{A}/A_0$) para el rango completo de frecuencias. El generador cambia la frecuencia de la señal en pasos de $48.828 / 4 \text{ Hz} = 12.207 \text{ Hz}$.

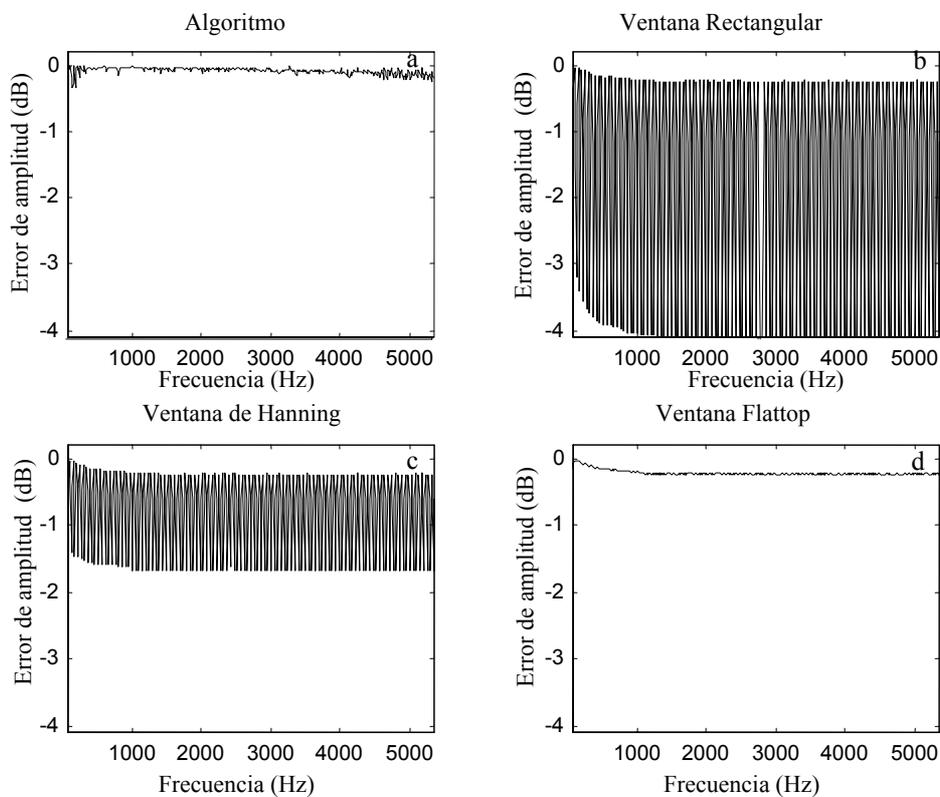


Fig. 3.4 Errores de amplitud obtenidos comparando el valor estimado con el valor real: a) Algoritmo; b) Ventana Rectangular; c) Ventana de Hanning; d) Ventana Flattop

Todas las curvas de error denominadas "algoritmo" muestran el valor medio sobre una estadística de 100 mediciones. La dispersión tiene un valor máximo dado por: $\sigma_A = 0.29 \text{ dB}$ (Figura 3.4).

Puede notarse que los errores en el algoritmo se incrementan cada vez que el tamaño de la ventana original tiene un valor cercano a un múltiplo del período de la señal. El motivo de ello es que para esos valores particulares en realidad no sería necesario efectuar correcciones en el tamaño de la ventana. Este efecto disminuye para altas frecuencias debido a que el número de ciclos dentro de la ventana aumenta. Por otro lado, para estos mismos

valores de frecuencia los errores obtenidos con el algoritmo son considerablemente menores que los del osciloscopio. Solamente en el rango de muy baja frecuencia la ventana *Flattop* proporciona un espectro con un error de amplitud menor.

La Figura 3.5 muestra los errores relativos en frecuencia para los mismos casos que los mostrados en la Figura 3.4. La dispersión en el cálculo de la frecuencia empleando el algoritmo tiene un valor máximo dado por $\sigma_f = 0.421\text{Hz}$.

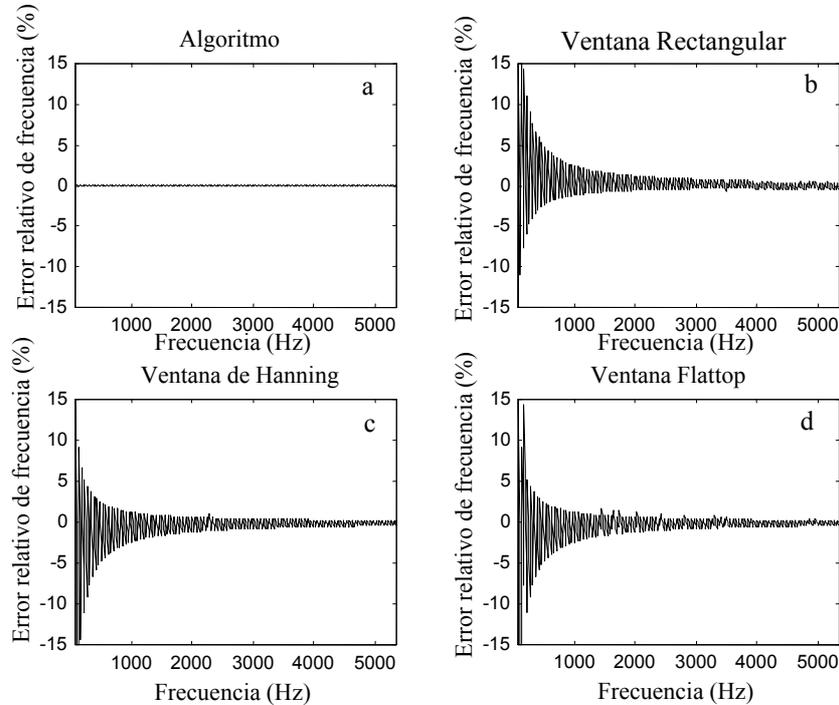


Fig. 3.5 Errores relativos de frecuencia: a) algoritmo b) ventana rectangular c) ventana de Hanning d) ventana Flattop

Las Figuras 3.6 a 3.11 son ampliaciones de las Figuras 3.4 y 3.5 en los rangos de frecuencias bajas, medios y altos respectivamente. En estos casos el paso de frecuencia se reduce a $48.828 / 40 \text{ Hz} = 1.2207 \text{ Hz}$.

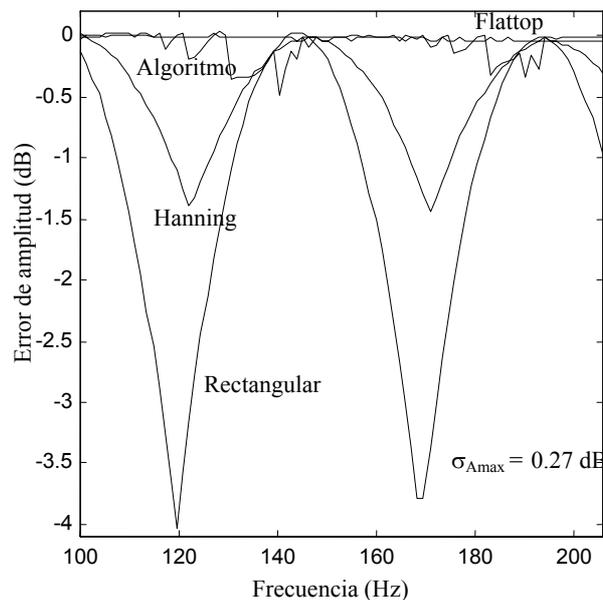


Fig. 3.6 Ampliación de la Fig. 3.4 para el caso de bajas frecuencias

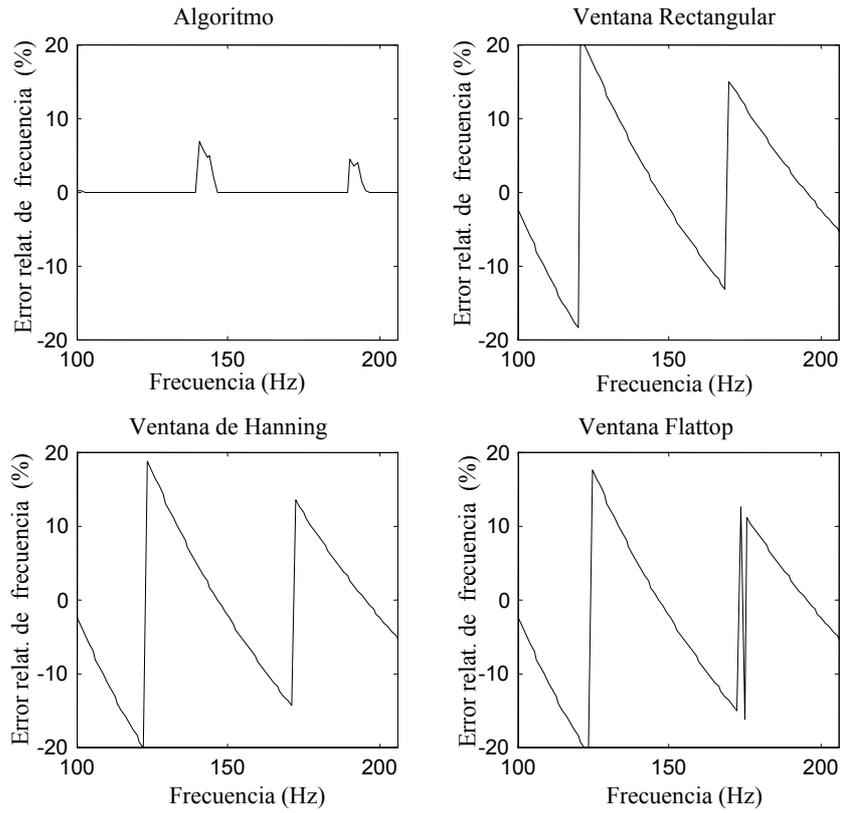


Fig. 3.7. Ampliación de la Fig. 3.5 para el caso de bajas frecuencias

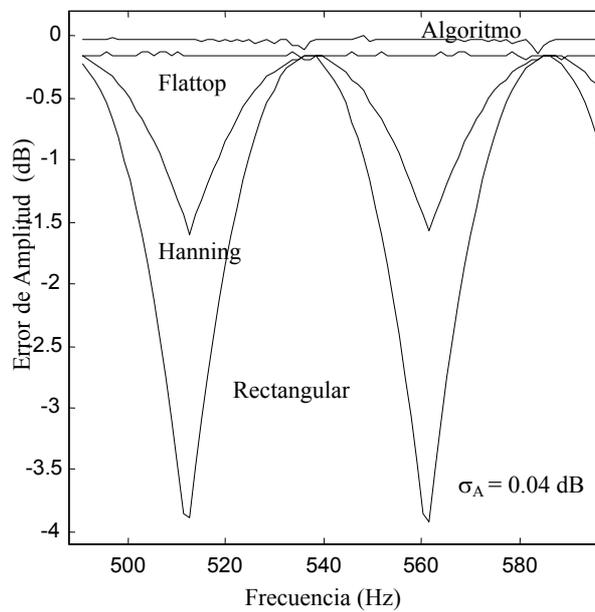


Fig. 3.8 Ampliación de la Fig. 3.4 para el rango de frecuencias medias

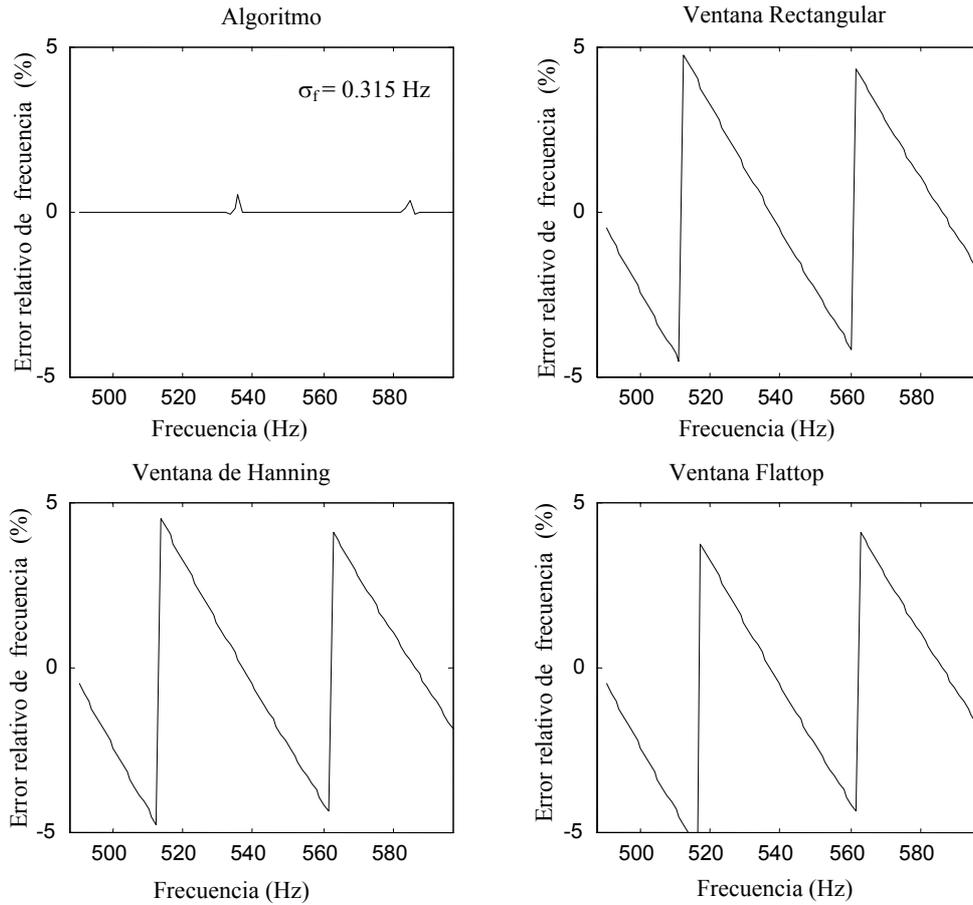


Fig. 3.9. Ampliación de la Fig. 3.5 para el rango de frecuencias medias

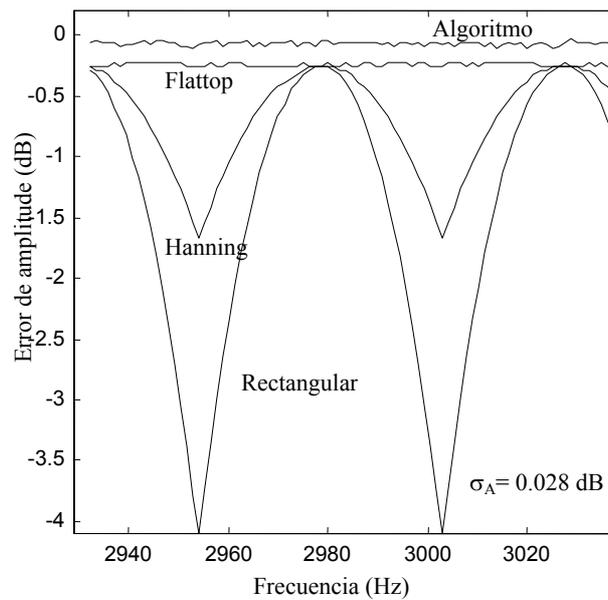


Fig. 3.10. Ampliación de la Fig. 3.4 para el rango de frecuencias altas

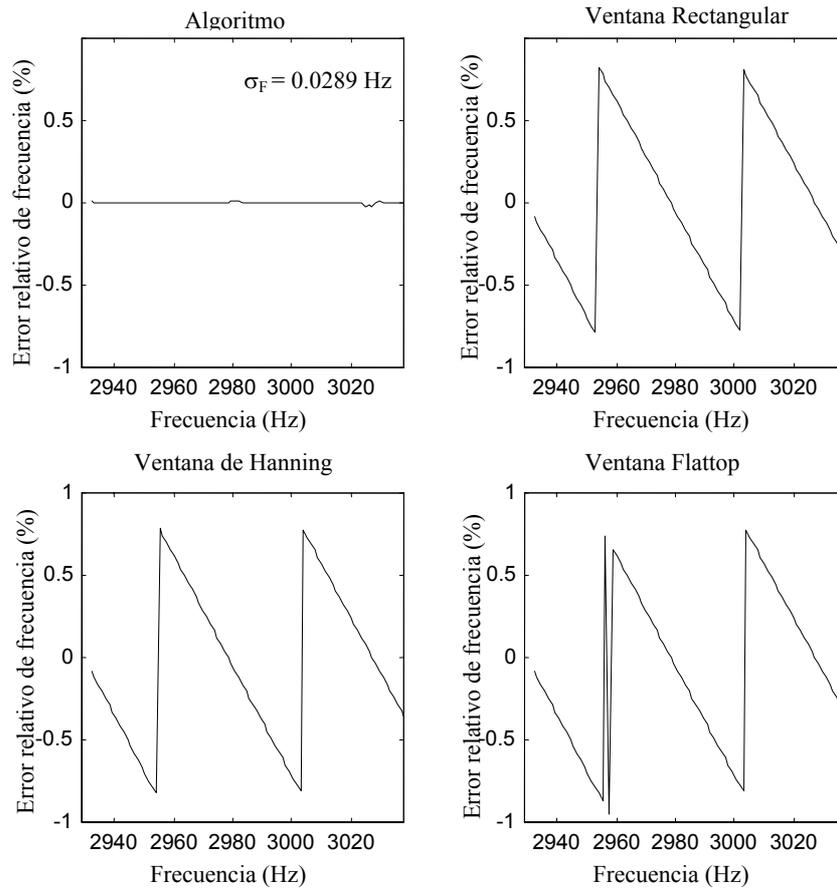


Fig. 3.11 Ampliación de la Fig. 3.5 para el rango de las frecuencias altas

Las Tablas 3.1a y 3.1b muestran la aplicación del algoritmo de ventana autoajutable aplicado sobre una onda cuadrada de período $T_w/9.5$. La columna denominada *Exact* corresponde a la Transformada de Fourier teórica. Las restantes corresponden a los resultados obtenidos por el algoritmo y por las ventanas *Rectangular*, *Hanning* y *Flattop* del HP5420A.

Tabla 3-1a: Errores de frecuencia para una onda cuadrada empleando el algoritmo y las ventanas usadas por un instrumento comercial

Frec. (Hz)	Exact	Algoritmo		Rectangular		Hanning		Flattop	
	Valor	Valor	Error	Valor	Error	Valor	Error	Valor	Error
Fundamental	463.87	463.37	-0.50	488.28	24.41	488.28	24.41	439.45	-24.42

Tabla 3-2b: Errores de amplitud para una onda cuadrada empleando el algoritmo y las ventanas usadas por un instrumento comercial

Amplitud dBm	Exact	Algoritmo		Rectangular		Hanning		Flattop	
	Valor	Valor	Error	Valor	Error	Valor	Error	Valor	Error
1 ^{ra} arm.	6.078	6.062	-0.016	2.188	-3.890	4.688	-1.390	5.937	-0.141
3 ^{ra} arm.	-3.465	-3.520	-0.055	-6.563	-3.098	-5.000	-1.535	-3.438	0.027
5 ^{ta} arm.	-7.902	-8.028	-0.126	-11.563	-3.661	-9.375	-1.473	-7.813	0.089
7 ^{ma} arm.	-10.824	-10.831	-0.007	-14.063	-3.232	-12.188	-1.375	-10.930	-0.099
9 ^{na} arm.	-13.007	-13.075	-0.068	-16.625	-3.618	-14.688	-1.681	-13.125	-0.118

La capacidad del algoritmo para separar dos componentes espectrales muy próximas (a menor distancia que la resolución teórica de ventana) se prueba empleando una señal compuesta dos ondas senoidales de 2077 Hz, 0.66 V_{pp} y 2167 Hz, 0.17 V_{pp} respectivamente. La FFT se muestra en las Figuras 3.12a a-d y los valores medidos se reportan en la Tabla 3.2.

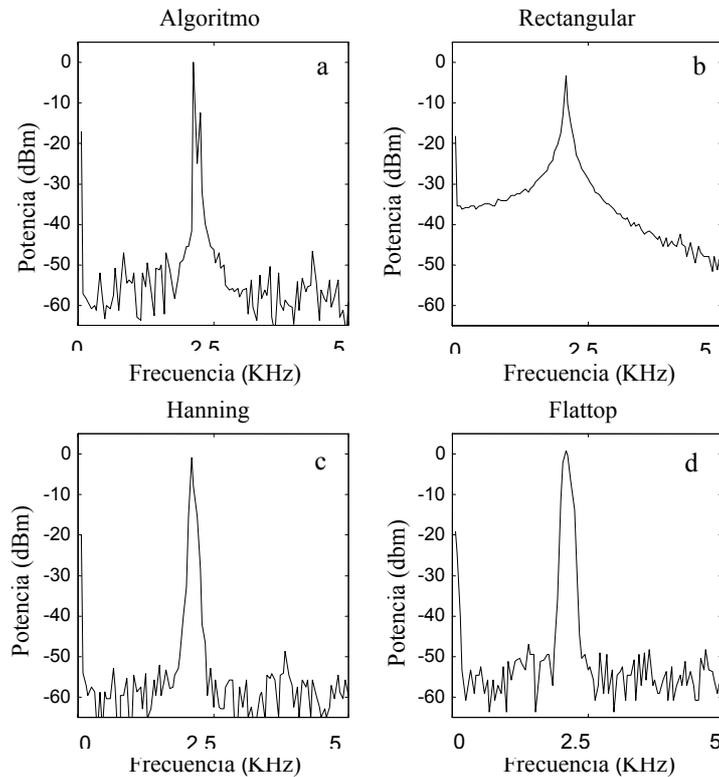


Fig. 3.12 Espectros de la señal compuesta por dos senoidales una de 2077 Hz y 0.66 V_{pp} y la otra de 2167 Hz y 0.17 V_{pp}

Esta señal es especialmente interesante ya que su espectro teórico tiene dos componentes espectrales tan cercanas que se requiere una resolución en frecuencia menor a la que se podría obtener, teóricamente, con la ventana. Los espectros obtenidos con el osciloscopio HP, utilizando las diferentes ventanas, se muestran en la figura 3.12 a-d. El osciloscopio no es capaz de resolver cada línea espectral, mostrando solamente un pico. Si se aplica el algoritmo (Fig. 3.12a) ambas componentes espectrales se identifican claramente. Esta capacidad se confirma en la Tabla 3.2

Tabla 3.2: comparación del método propuesto con distintas estrategias de estimación de amplitud y frecuencia

	Exact	Algoritmo		Rectangular		Hanning		Flattop	
	Valor	Valor	Error	Valor	Error	Valor	Error	Valor	Error
Señal senoidal 1:									
Frec. (Hz)	2077	2075	-0.09%	2020	-2.74%	2050	-1.3%	2050	-1.3%
Amp (dBm)	0.37	0.0844	-0.29 db	-3.75	-4.12 db	-1.25	-1.62 db	0.9375	0.57 db
Señal senoidal 2: (N.D.*: no detectada)									
Frec. (Hz)	2167	2171.4	0.2%	N.D.*	N.D.*	N.D.*	N.D.*	N.D.*	N.D.*
Amp (dBm)	-11.41	-12.54	-1.13 db	N.D.*	N.D.*	N.D.*	N.D.*	N.D.*	N.D.*

Para obtener errores de frecuencia del orden de los producidos por el algoritmo (menores que 1Hz) se deben utilizar ventanas cuya longitud es cincuenta veces mayor, con el correspondiente incremento del tiempo de procesamiento y requisitos de memoria. El empleo de este algoritmo elimina la noción habitual que la resolución de frecuencia es f_s/N . Dado que cambia dinámicamente la frecuencia de muestreo disminuye significativamente el error por debajo de esa resolución original.

3.1.4 Combinación de autocorrelación y ventana ajustable para estimación de parámetros de señales periódicas inmersas en AWGN

En el caso de una señal periódica inmersa en AWGN puede combinarse la autocorrelación en la forma indicada en la sección 3.1.1, con el método descrito en las secciones 3.1.2 a 3.1.4, para recuperar la amplitud y frecuencia de la autocorrelación de la señal. Si se conoce el tipo de señal (senoidal, cuadrada, triangular, etc.) pueden entonces recuperarse la amplitud y frecuencia de la señal a partir de las de su correlación. La figura 3.13 muestra un diagrama en bloques del sistema.

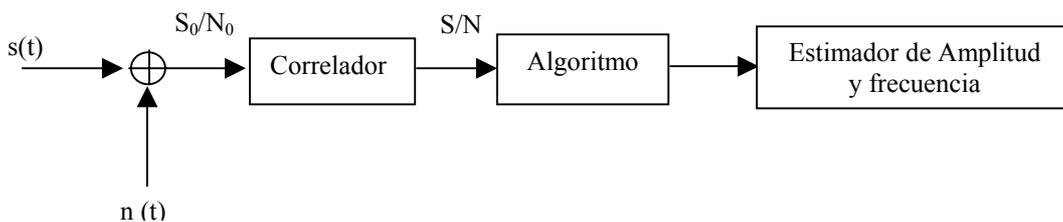


Fig. 3.13. Diagrama en bloques del sistema que realiza la estimación de amplitud y frecuencia de señales periódicas.

Empleando Matlab[®], se simula el funcionamiento del algoritmo. Se genera una señal senoidal $s(t)$ de 2048 muestras de amplitud $A_0 = 1V$ y 382 ciclos dentro de la ventana, a la que se le suma ruido $n(t)$ de amplitud 3 veces superior ($S/N = -9.54 \text{ dB}$). La Fig. 3.14 muestra la señal suma $x(t) = s(t) + n(t)$.

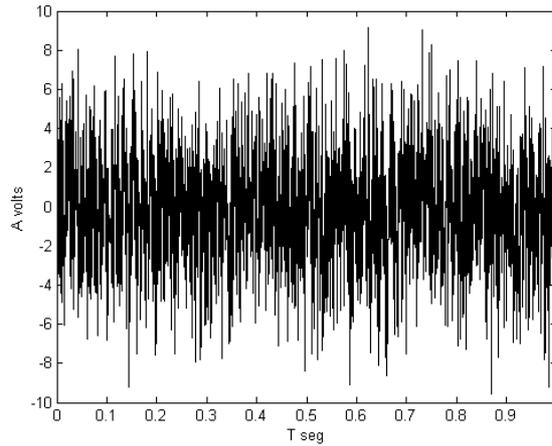


Fig. 3.14 Señal senoidal enmascarada por AWGN

La Fig. 3.15 muestra el segmento N_W de la función $R_{xx}(\tau)$ elegido para calcular su FFT según lo indicado en 3.1.1.

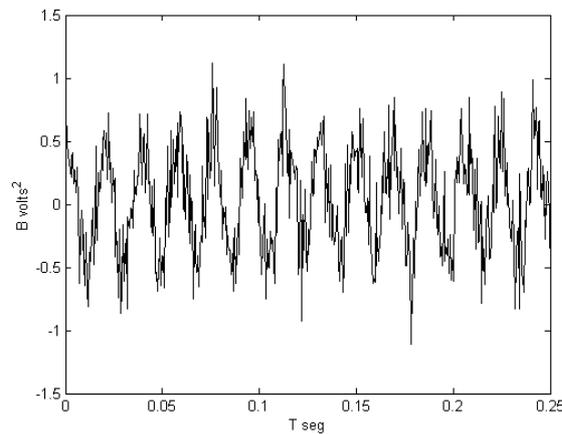


Fig. 3.15 Segmento N_W de la función autocorrelación

La Fig.3.16a muestra el segmento N_W de 512 puntos de la señal senoidal inmersa en AWGN, en la Fig. 3.16b se grafica la función autocorrelación $R_{xx}(\tau)$. La Fig 3.16c corresponde a la FFT de este segmento donde se observa la dispersión espectral producida por la ventana rectangular. La Fig 3.16d muestra el mismo segmento de 512 puntos en su versión diezmada e interpolada, de manera que dentro de la ventana el número de ciclos de la señal sea entero. En esta caso se ha reducido notablemente la dispersión espectral y el error en la estimación de la amplitud y frecuencia de la señal es significativamente menor.

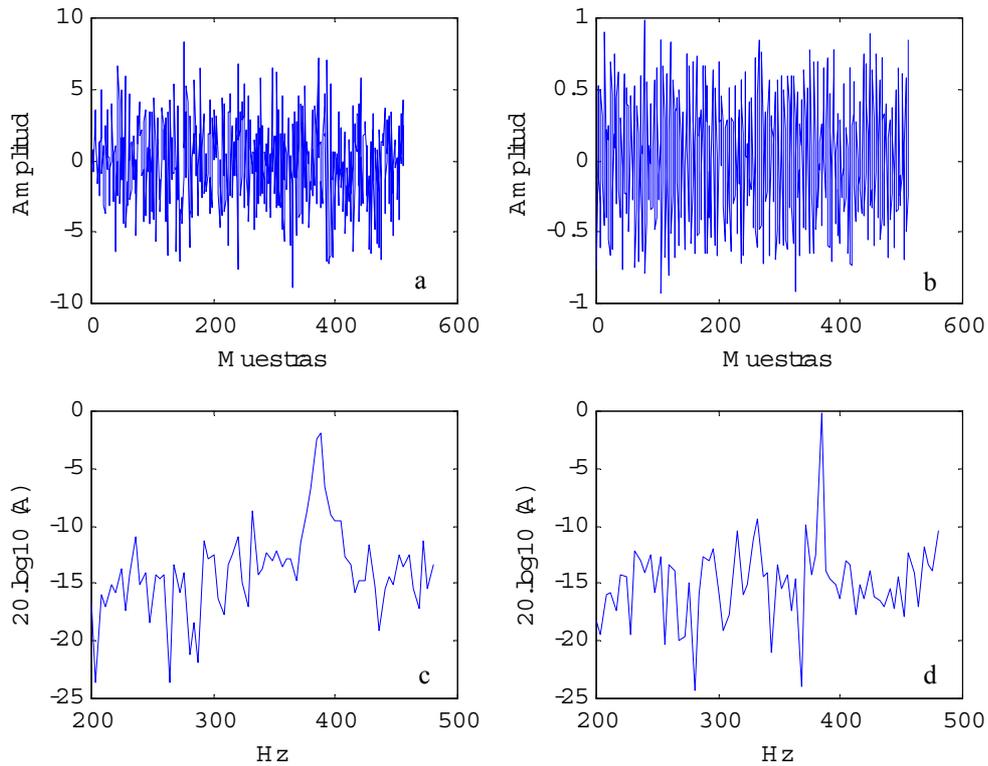


Fig. 3.16 a) Señal senoidal inmersa en AWGN b) Función autocorrelación $R_{xx}(\tau)$. c) FFT con la ventana rectangular tradicional d) FFT con ventana autoajustable

En la Figura 3.17a se muestra el histograma (*PDF*) obtenido para 2000 valores de la estimación de amplitud obtenida con el algoritmo y en la 3.17b se presenta el caso de la estimación empleando la ventana rectangular tradicional.

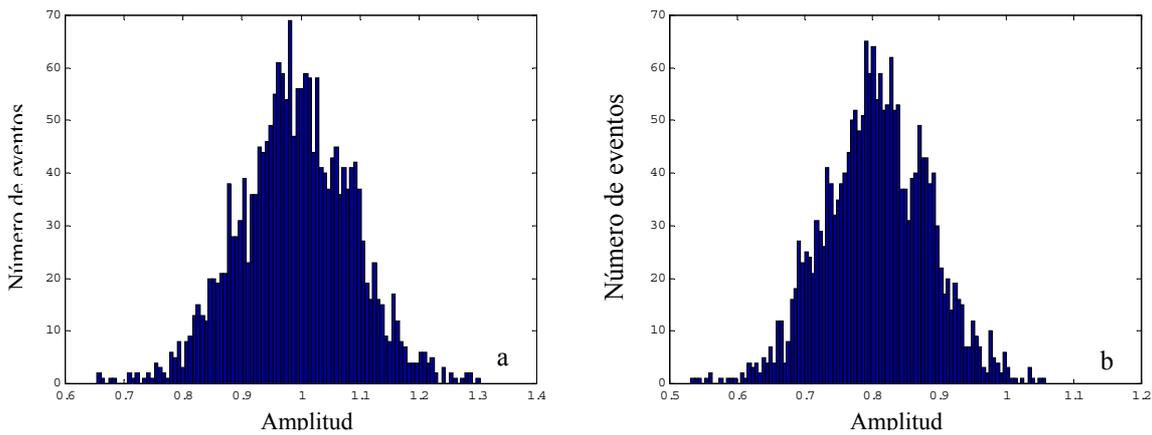


Fig 3.17. a) *PDF* para 2000 valores de amplitud con ventana autoajustable b) *PDF* para 2000 valores de amplitud con ventana rectangular

La estimación de la amplitud para el caso de la Fig. 3.17 a es $\hat{A} = (0.9912 \pm 0.095) V$ en tanto que para el caso de la Fig. 3.17 b es $\hat{A} = (0.8073 \pm 0.076) V$. Es decir la estimación realizada con la ventana autoajustable tiene un error mucho menor y su valor medio tiende al valor real de la señal (no-sesgada).

La PDF de la estimación de la frecuencia de la señal inmersa en AWGN se muestra en la Fig. 3.18a empleando la ventana autoajustable ($\hat{f} = (382.0099 \pm 0.0874) \text{ Hz}$) y en la Fig. 3.18b con la ventana rectangular ($\hat{f} = 380 \text{ Hz}$ o $\hat{f} = 384 \text{ Hz}$). En este último caso la frecuencia estimada oscila, según el nivel de ruido adicionado, entre dos valores determinados por la resolución espectral de la FFT (la resolución es igual a la inversa de la duración de la ventana de 512 puntos $-1/4$ de 2048- que se emplea para el cálculo).

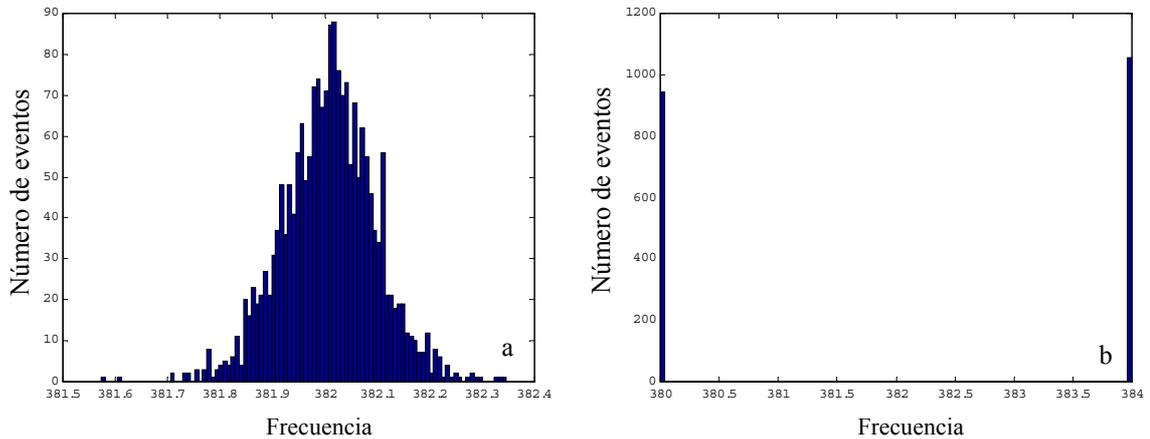


Fig 3.18. a) PDF para 2000 valores de frecuencia con ventana autoajustable b) PDF para 2000 valores de frecuencia con ventana rectangular

La Fig. 3.19 muestra el logaritmo del error en la estimación de frecuencia (σ_f) normalizado con la frecuencia medida, como función de la frecuencia y de S/N . El valor unitario en el eje de frecuencias corresponde a la mitad de la frecuencia de muestreo.

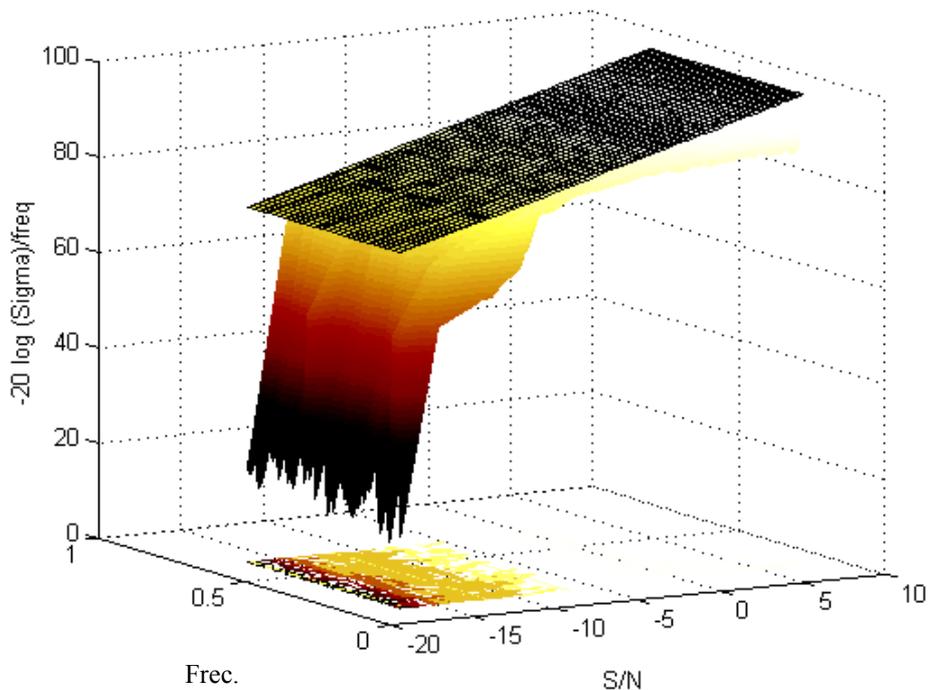


Fig. 3.19. Comparación entre los errores en la estimación de la frecuencia obtenidos con el método propuesto, y la cota de Cramer Rao

El plano que cubre el gráfico de la Fig. 3.19 representa una *cota de mínimo error* en la estimación de acuerdo a los trabajos originales de *Cramer Rao [1946]*. Es usual emplear esta cota como parámetro de comparación de los diversos métodos de estimación de la frecuencia [*Rife y Boorstyn, 1974; Lang y Mc Clellan, 1980; Fitz, 1994; Macleod, 1998; Brown y Wang, 2002; Fernández et al, 2004*]. Para el método de estimación propuesto la cota está dada por

$$\sigma_{CR}^2 = \frac{6}{\left(\frac{A^2}{\sigma^2}\right)N(N^2 - 1)} \quad (3.16)$$

donde N es el número de iteraciones para el cálculo de la estadística, A es el valor eficaz de amplitud de la señal, σ es la dispersión del ruido a la salida del correlador y σ_{CR} es el límite del error de la estimación de la frecuencia. Si a σ_{CR} se lo divide por la frecuencia de muestreo digital (2π) y se calcula el logaritmo se obtiene el plano mostrado en la Fig. 3.19,

$$20 \log \frac{\sigma}{2\pi} = 20 \log \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6}{\left(\frac{A^2}{\sigma^2}\right)N(N^2 - 1)}} \quad (3.17)$$

En la Figura 3.20 se muestra la curva para una frecuencia fija (300 ciclos en la ventana) con diferentes relaciones S/N. En esta se observa claramente la presencia de un umbral propio de los sistemas no lineales para una relación S/N de aproximadamente -15 dB. A partir de ese valor se obtiene una estimación de la frecuencia con un error próximo al determinado por la cota de Cramer Rao.

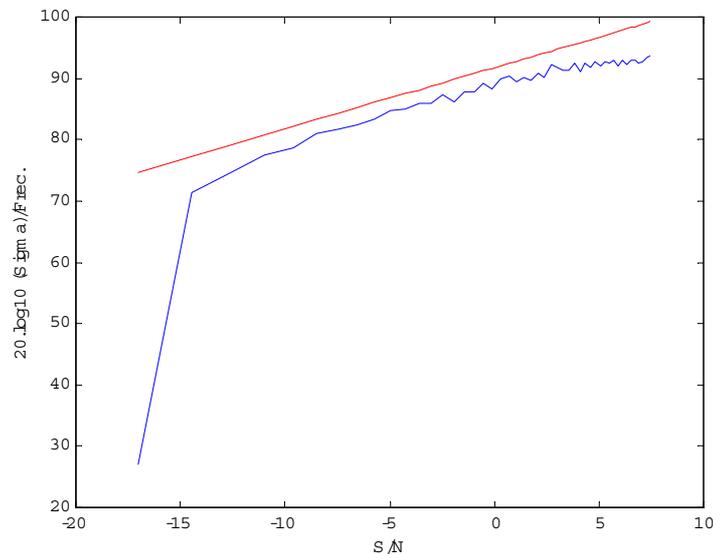


Fig. 3.20 Intersección de las superficies de la figura 3.19 con el plano $f=300$ ciclos/ventana

Es posible realizar un gráfico similar (Fig. 3.21) para evaluar el error cometido en la estimación de la amplitud de la señal senoidal para diferentes frecuencias y relaciones S/N.

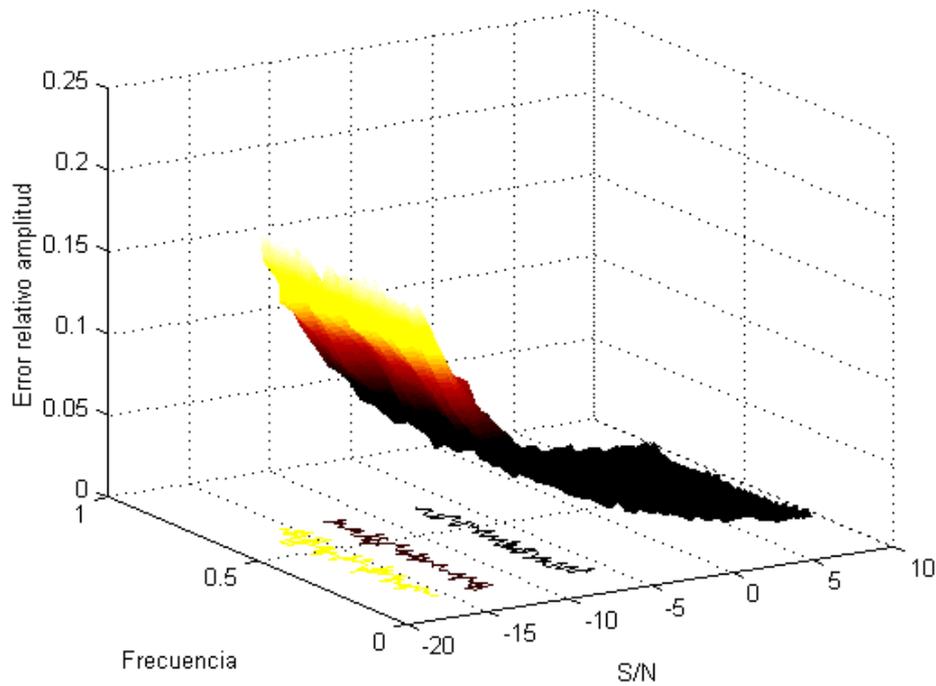


Fig. 3.21. Error relativo en la estimación de amplitud para diversas frecuencias y relaciones S/N

Si se grafica una de las curvas de la Fig. 3.21 para diferentes S/N y frecuencia fija (300 ciclos en la ventana) se obtiene la Fig. 3.22.

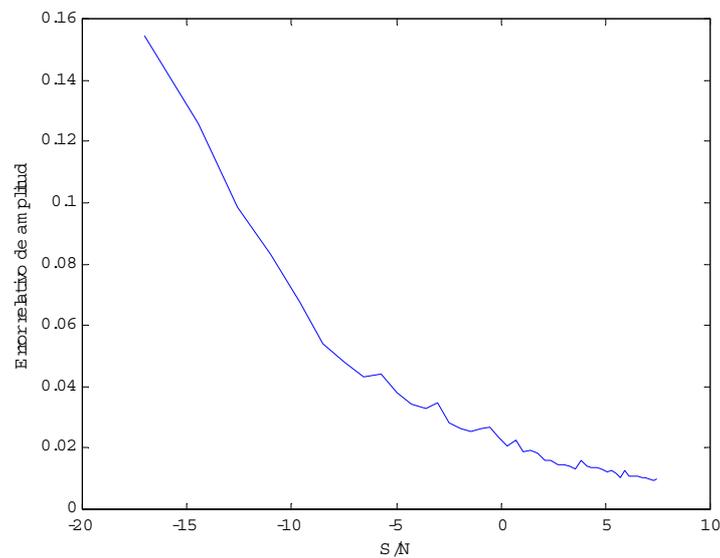


Fig. 3.22 Intersección de la superficie de la Fig. 3.21 con el plano $f=300$ ciclos/ventana

Cabe destacar que para obtener con una ventana rectangular convencional resoluciones comparables a las del método propuesto se requieren ventanas mucho más largas, implicando un elevado tiempo de procesamiento.

3.1.5 Banco de Medición para estimación de señales inmersas en ruido por el método propuesto en 3.1.4

Para verificar experimentalmente la efectividad del método propuesto en 3.1.4 se implementó el banco de medición de la Fig. 3.23. El circuito adicionado permite sumar señales provenientes de los dos generadores empleados para generar la señal y el ruido respectivamente. A la salida del generador de ruido se colocó un filtro pasabajos con una frecuencia de corte $f_c = 8700 \text{ Hz}$ para limitar su potencia.

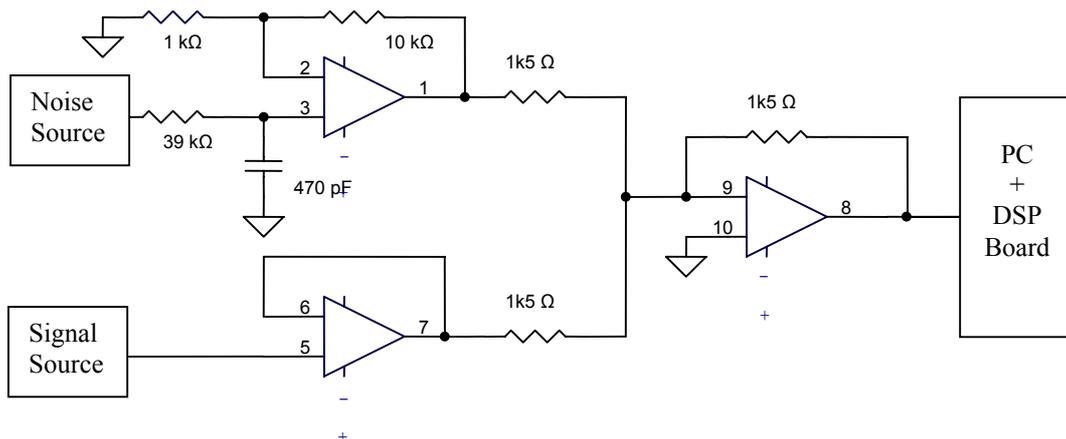


Fig. 3.23 Circuito para comprobar el comportamiento del algoritmo de ventana autoajustable

Se ajustó el generador 1 para generar una salida senoidal de amplitud $A = 40 \text{ mV}_P$ y $f = 660 \text{ Hz}$ en tanto que el generador 2 se ajustó para entregar un nivel de ruido $\sigma = 250 \text{ mV}$. Para calcular la estadística que permita estimar los parámetros de la señal periódica se adquirieron 3000 muestras. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.24.

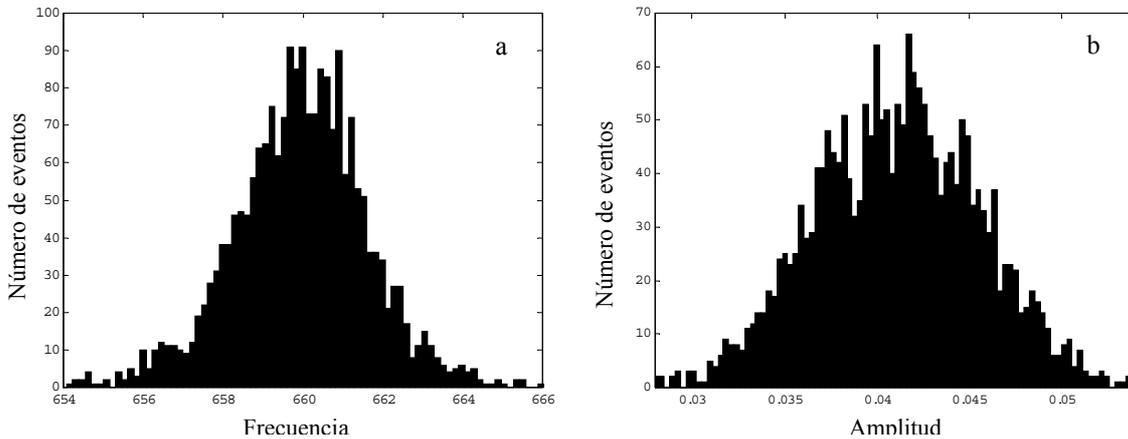


Fig. 3.24 Resultados obtenidos en a) la estimación de la frecuencia b) la estimación de amplitud

El valor estimado de la frecuencia resultó $\hat{f} = 659.9358 \text{ Hz}$ con una dispersión $\sigma_f = 1.739 \text{ Hz}$ y para la amplitud $\hat{A} = 41.1 \text{ mV}$ con $\sigma_A = 4.4 \text{ mV}$. Luego se ajustó el generador 1 para obtener una onda cuadrada de amplitud $A = 80 \text{ mV}_{PP}$ y $f = 660 \text{ Hz}$. El generador 2 entrega un nivel de ruido $\sigma = 250 \text{ mV}_{RMS}$. Para calcular la estadística que permita estimar los parámetros de la señal periódica se adquirieron 3000 muestras. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.25.

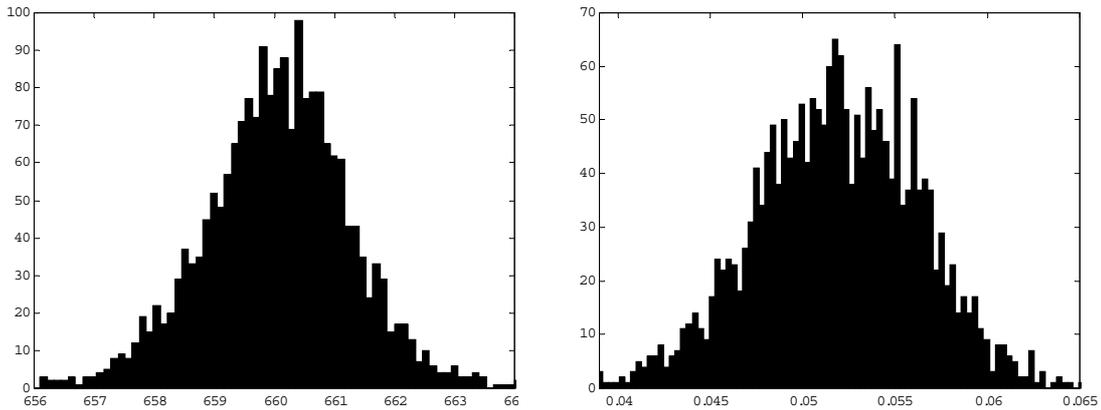


Fig. 3.25 Resultados obtenidos en a) la estimación de la frecuencia de la onda cuadrada b) la estimación de amplitud de la onda cuadrada

Las estimaciones obtenidas son: $\hat{f} = 660.0 \text{ Hz}$ con una dispersión $\sigma_f = 1.2 \text{ Hz}$ y $\hat{A} = 51 \text{ mV}$ con $\sigma_A = 4.5 \text{ mV}$. Nótese que la amplitud y frecuencia estimadas corresponden a la correlación de la onda cuadrada. La frecuencia de la onda cuadrada es idéntica a la de su correlación pero su amplitud resulta ser $\hat{A}_c = \frac{\hat{A}\pi}{2} = 81.5 \text{ mV}$.

3. 2 Estimación de parámetros amplitud y frecuencia de señales periódicas inmersas en ruido caótico aditivo

Las series temporales caóticas poseen información cualitativa que permite clasificar el sistema que las genera. Esa información puede obtenerse de dos maneras:

- 1.- Reconstruyendo el atractor, mediante el método de los retardos. Cada sistema tiene un atractor característico.
- 2.- Empleando la función autocorrelación, que produce un determinado patrón para cada tipo de sistema.

La Fig. 3.26 muestra los atractores reconstruidos a partir de una serie temporal originada en cuatro sistemas diferentes: *Chua*, *Rössler*, *Lorenz* y *Van der Pol*. La Fig. 3.27 muestra la reconstrucción del espacio de fase de otros dos sistemas caóticos discretos muy estudiados: el mapa de *Henon* y el de *Yamakawa*.

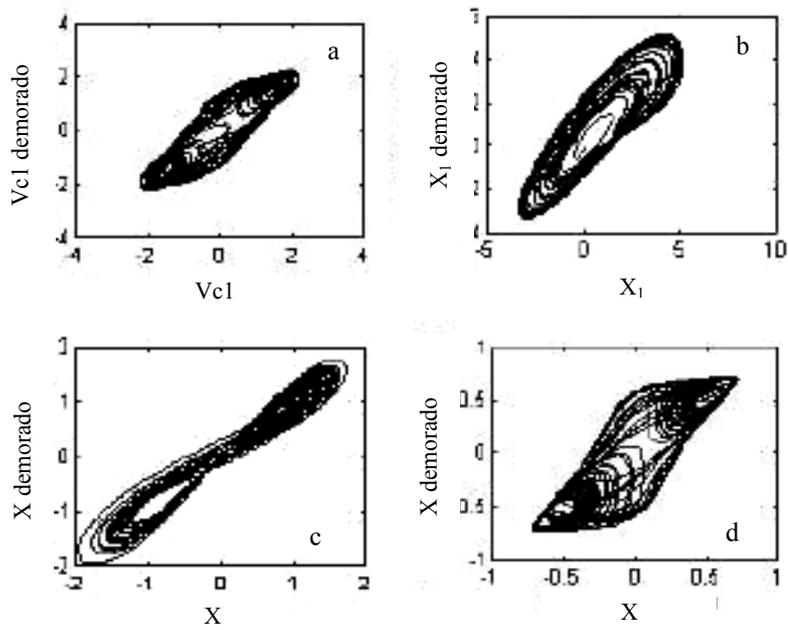


Fig. 3.26 Cuatro atractores caóticos típicos a) Chua b) Rössler c) Lorenz d) Van der Pol

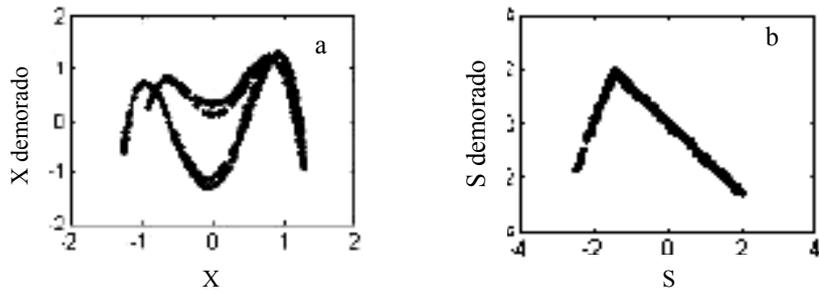


Fig. 3.27 Reconstrucción del espacio de fase a) Mapa de Henon b) Mapa de Yamakawa

La Fig. 3.28 muestra las funciones autocorrelación de los sistemas de Chua, Henon, Lorenz y Rössler.

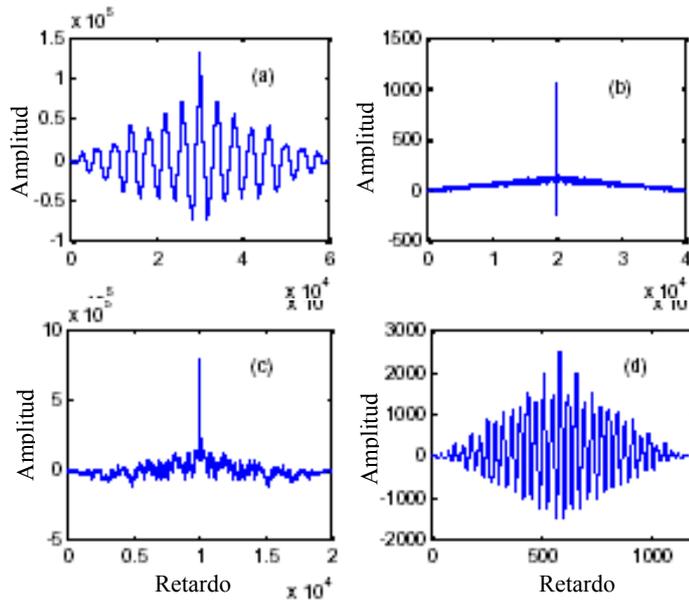


Fig. 3.28 Funciones autocorrelación cuatro sistemas caóticos: a) Chua b) Henon c) Lorenz d) Rössler

Se puede concluir que el proceso de reconstrucción del atractor y el cálculo de la función autocorrelación conducen a una identificación del sistema caótico que encripta la información. Sin embargo el conocimiento del sistema no es suficiente para descifrar el mensaje: el filtrado perfecto del mensaje sólo es posible si se conoce además los parámetros empleados y la estrategia de modulación empleada. Si bien todos los sistemas de encriptado caótico se basan en ocultar la información en la señal caótica, en algunos sistemas simplemente se suma la señal al caos (ACHN) mientras que en otros se efectúa un proceso de modulación lineal o no lineal (esquema APD por ejemplo). Como se mostró en la sección 3.1.5 el algoritmo de la *Ventana Autoajustable* en combinación con la función autocorrelación permiten estimar amplitud y frecuencia fundamental de una señal periódica inmersa AWGN. A continuación se analiza la posibilidad de emplearlo cuando la máscara es caótica y aditiva.

Sea $s(t)$ una señal senoidal de amplitud A_s (en el ejemplo $A_s = 0.1 V$) y frecuencia f_s (en el ejemplo $f_s = 210$ ciclos en la ventana) y sea $n(t)$ una señal caótica (en el ejemplo la variable x_3 del oscilador de Rössler (Ec. (2.9))). La señal enmascarada con ACHN está dada por

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad . \quad (3.19)$$

La Figura 3.29 muestra la aplicación del algoritmo cuando la señal senoidal está bien enmascarada, es decir cuando no es posible por filtrado separar los espectros de ambas señales.

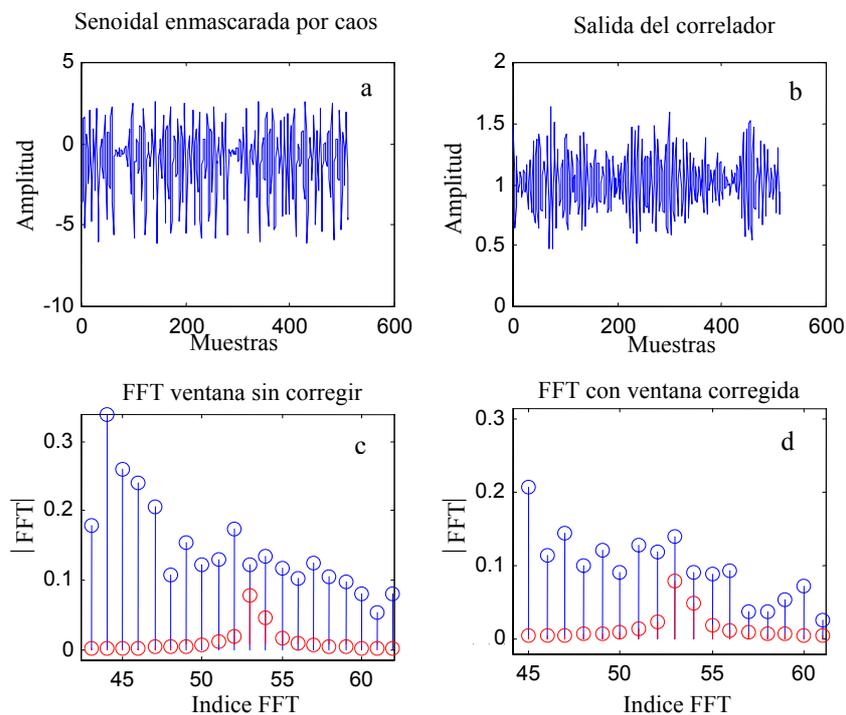


Fig. 3.29 a) Suma de señal senoidal y caos b) Salida del correlador c) FFT de la salida del correlador (azul) –Espectro de la señal (rojo) d) FFT de la salida del correlador calculada con ventana autoajustable (azul) – Espectro de la señal (rojo)

Los resultados de la estimación son malos y lo mismo ocurre en el caso de una onda cuadrada según se muestra en la Fig. 3.30. La razón es que, como se puede observar en la Figura 3.28d, la autocorrelación de la señal del oscilador de Rössler no se extingue luego

de algunos τ como ocurre con el ruido blanco gaussiano. Por lo tanto, cuando se aplica el método propuesto en 3.1.1 la autocorrelación R_{xx} no coincidirá con la de la señal, y en su *FFT* existen componentes espectrales espurias que enmascaran la identificación de los componentes de la señal bajo análisis.

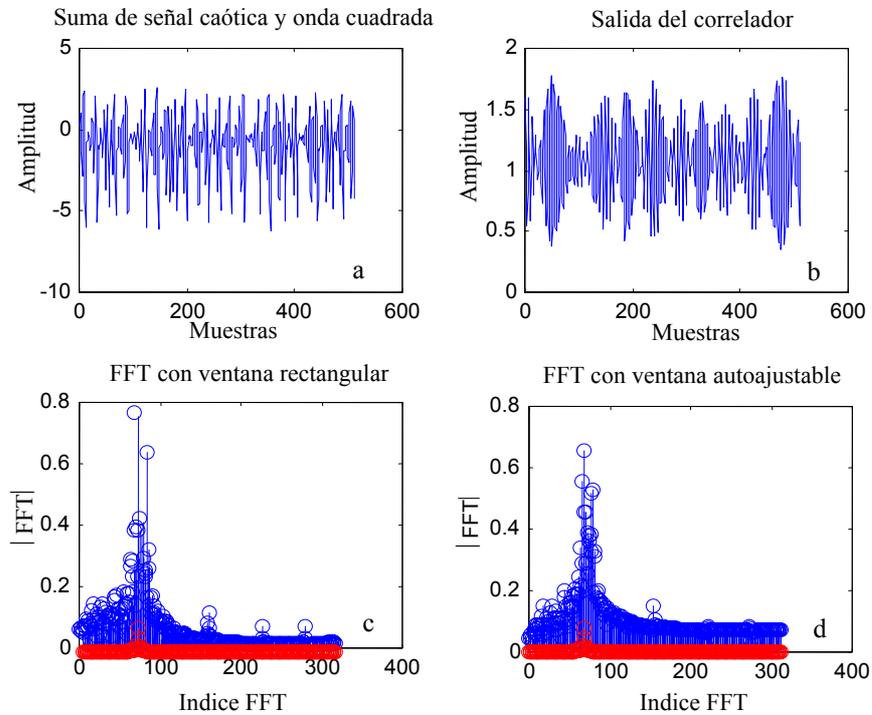


Fig. 3.30 a) Suma de onda cuadrada y caos b) Salida del correlador c) FFT de la salida del correlador (azul) –Espectro de la cuadrada (rojo) d) FFT calculada con ventana autoajustable (azul)- Espectro de la cuadrada

Sin embargo, si el oscilador caótico presenta una función autocorrelación que decae rápidamente con el retardo, tal como ocurre con el oscilador de Henon (Fig. 3.28b), el método propuesto en 3.1.3 permite estimar frecuencia y amplitud de la señal periódica. En una simulación típica una señal senoidal de amplitud $A_s = 0.2 V$ y frecuencia $f_s = 211.75 Hz$ fue contaminada con ruido caótico aditivo generado por un oscilador de Henon. Los histogramas obtenidos se muestran en la Figura 3.31.

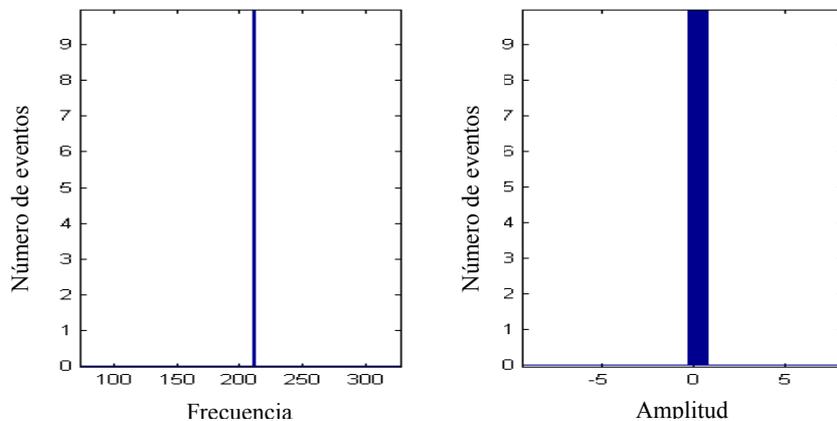


Fig. 3.31 Histogramas de la suma de una senoidal y una señal de un oscilador de Henon a) Frecuencia b) Amplitud

La Fig. 3.32 muestra el comportamiento del algoritmo en sus diferentes etapas. Nótese que, si se hubiera empleado ventana convencional se hubiera obtenido: $\hat{f}_s = 216 \text{ Hz}$ y $\hat{A} = 0.238 \text{ V}$. Los valores fueron obtenidos para 100 estimaciones. Se concluye entonces que el método propuesto en 3.1 puede extenderse a máscaras caóticas con autocorrelación rápidamente decreciente con el retardo.

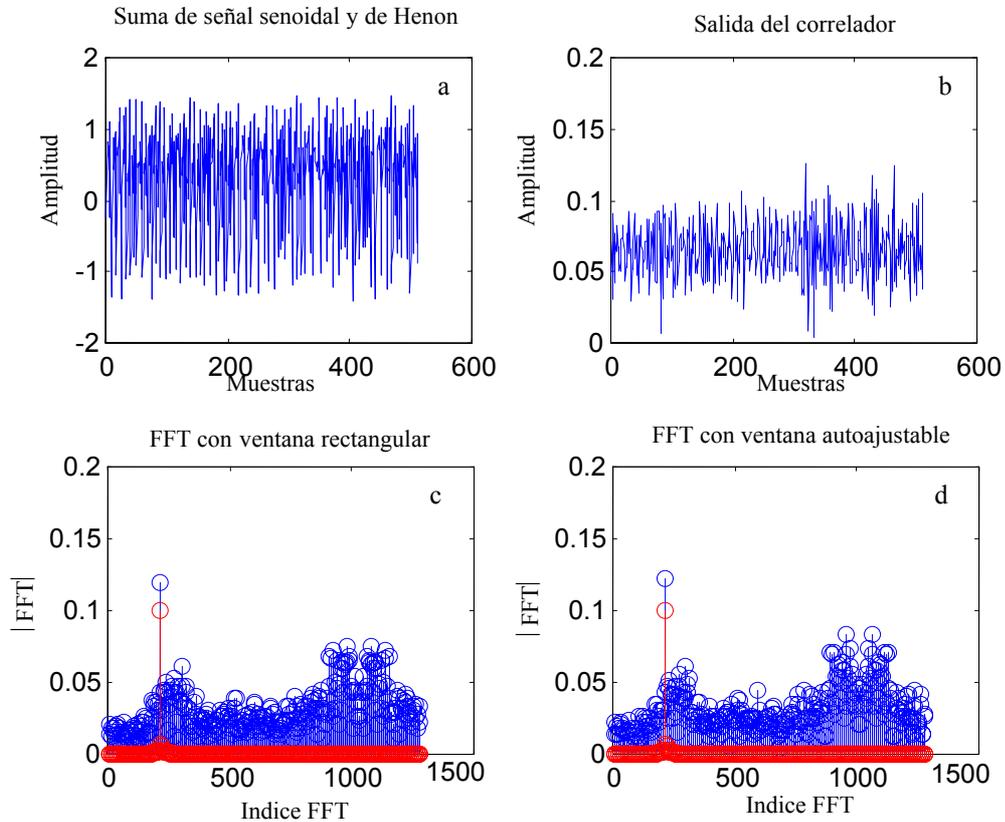


Fig. 3.32 a) Suma de onda senoidal y Henon b) Salida del correlador c) FFT de la salida del correlador d) FFT calculada con ventana autoajustable

3.3 Recuperación mediante sincronización de sistemas caóticos, de señales inmersas en caos y AWGN combinados.

La sincronización de sistemas caóticos permite recuperar información inmersa en caos aún en casos más ingeniosos de enmascaramiento. De hecho el receptor de un sistema de comunicaciones basado en caos puede pensarse como el filtro ideal que permite eliminar totalmente la señal caótica que enmascara la información. Un caso es el método *APD* desarrollado por Kocarev y colaboradores [Kocarev y Parlitz, 1995]. En el método *APD* la información no se suma a la portadora caótica sino que se introduce en la dinámica del sistema transmisor. Por ejemplo, un sistema *APD* de Rössler está modelado por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{d\tau} = \alpha + x_1(x_2 - \beta) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - x_3 \\ \frac{dx_3}{d\tau} = x_2 - x_3 + s \\ s = \gamma x_3 + i^t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{d\tau} = \alpha + y_1(y_2 - \beta) \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -y_1 - y_3 \\ \frac{dy_3}{d\tau} = y_2 - y_3 + s \\ i^r = s - \gamma x_3 \end{array} \right. , \quad (3.19)$$

donde $\tau = t / \Delta$ es el tiempo adimensional, Δ es el parámetro de escalamiento temporal, $i^t(t)$ es el mensaje original, $i^r(t)$ es el mensaje recuperado, s es la señal enviada por el canal, x_i son las variables de estado del transmisor, y_i son las variables de estado del receptor y $\alpha = 2$, $\beta = 4$ y $\gamma = 1.45$. En la Figura 3.33a se muestra $i^t(t)$ como función de t / T_s , donde $T_s = 1/11025$ s es el período de muestreo, y en la Fig. 3.33b el correspondiente espectro de potencia.

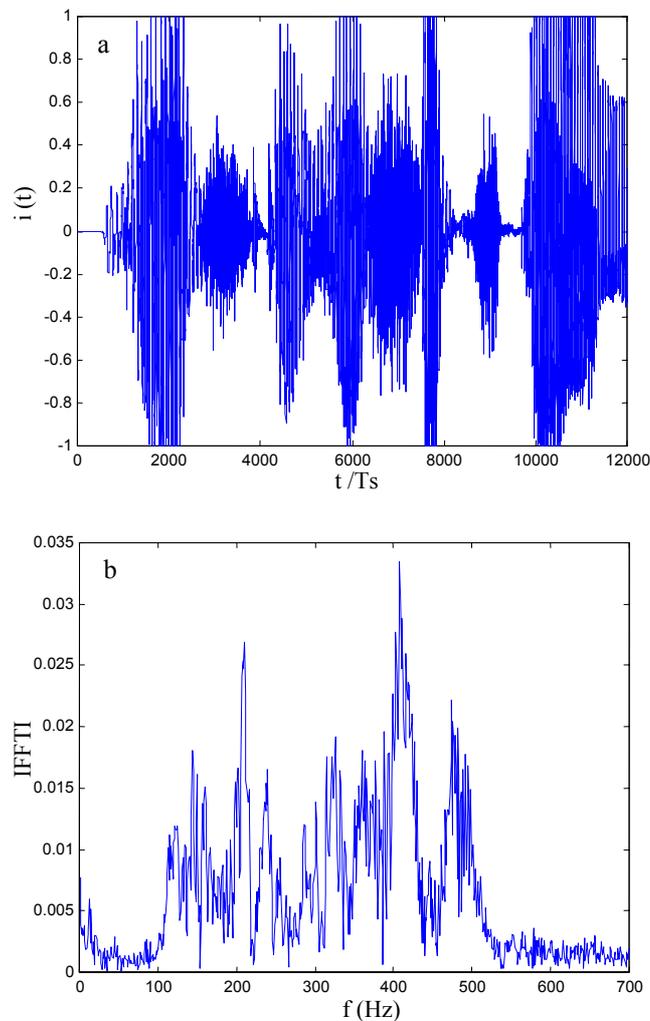


Fig. 3.33 a) Mensaje original: la voz de un hombre diciendo “this is a 16” b) Espectro de la señal de voz.

La Fig. 3.34 a-c muestra s para $\Delta = 100$, 20 y 5, respectivamente. Nótese que el ancho de banda de s (para $i^t = 0$) puede controlarse cambiando Δ . A medida que Δ disminuye todas las velocidades del oscilador de Rössler se incrementan y aparece contenido de mayor frecuencia en la señal de enmascaramiento. De este modo puede controlarse el efecto de superposición entre el espectro de la señal caótica y la señal de información.

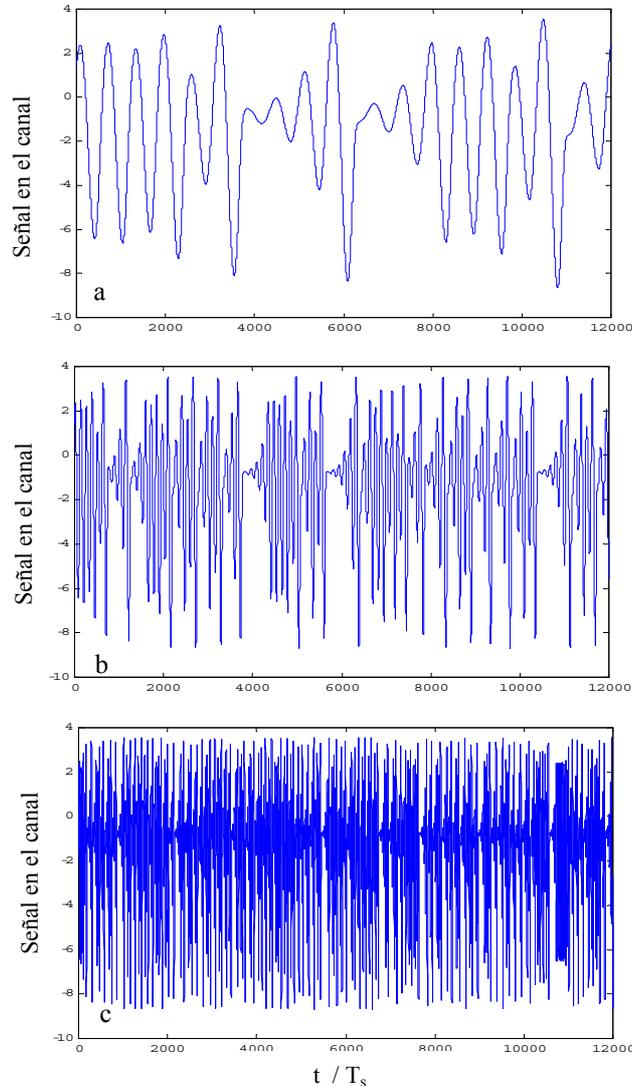


Fig. 3.34. Señal s enviada a través del canal de comunicaciones para tres valores de Δ a) $\Delta = 100$; b) $\Delta = 20$; c) $\Delta = 5$

La Fig. 3.35 muestra i^r como función de i^t para $\Delta = 100$. En ella se muestra que el *proceso de filtrado no lineal* realizado por el receptor permite que la información se recupere sin ruido de sincronización (resultados similares se obtienen para $\Delta = 20$ y $\Delta = 5$). Nótese que la señal utilizada (voz) es una de espectro amplio que en general es más compleja de recuperar que las señales senoidales, periódicas y poliarmónicas.

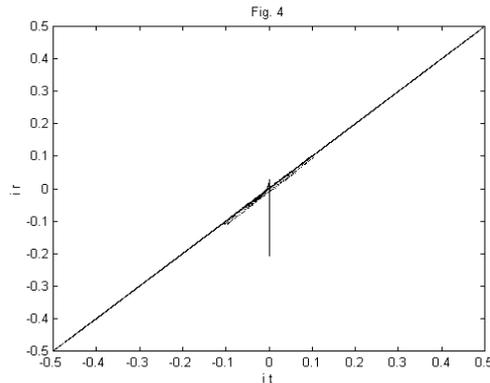


Fig. 3.35 Mensaje recuperado en el receptor como función del mensaje original para $\Delta = 100$. Las condiciones iniciales son $(1,1,1)$ para las variables de estado del transmisor y $(0,1,1)$ para las del receptor. La línea vertical central en la figura corresponde al transitorio previo a la sincronización.

Un caso más interesante es el de enmascaramiento por un proceso compuesto. La señal de información (azul) es enmascarada con caos utilizando el esquema *APD* y luego es contaminada con AWGN para simular los efectos del canal de comunicación. Interesa evaluar la capacidad del proceso de filtrado no lineal para recuperar la información. Se analizaron señales senoidales y poliarmónicas con distintos niveles del AWGN.

La Figura 3.36a muestra los espectros de una señal senoidal (azul) con $A = 0.4 V_{PP}$ y $f = 1000 \text{ Hz}$ enmascarada con una señal caótica de Rössler (rojo) con el esquema *APD*. El AWGN tiene una dispersión $\sigma = 0.01 V$.

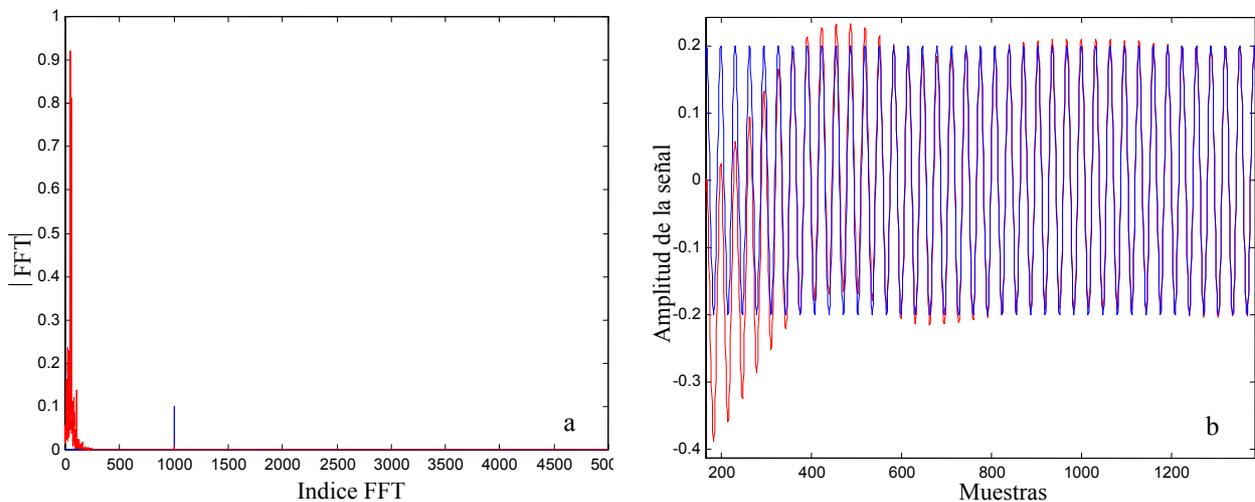


Fig. 3.36 a) Espectro de la máscara caótica y de la señal senoidal b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

En la Figura 3.37 se muestra el caso en que la misma señal senoidal $A = 0.4 V_{PP}$ y $f = 1000 \text{ Hz}$ es enmascarada en esquema *APD* por un oscilador de Rössler que cubre totalmente el espectro de la señal (señal bien enmascarada). El AWGN tiene $\sigma = 0.01 V$.

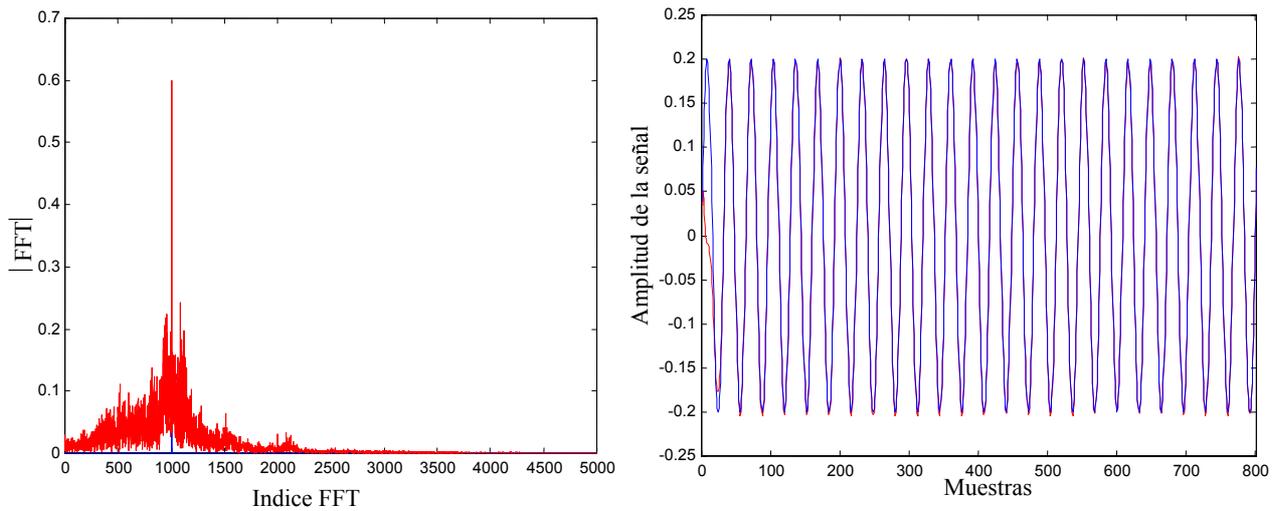


Fig. 3.37 a) Espectro de la máscara caótica y de la señal senoidal b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

En las Figuras 3.38 y 3.39 se muestra el caso de una onda cuadrada para casos mal y bien enmascarados respectivamente. La onda cuadrada tiene $A = 0.4 V_{PP}$ y $f = 750 \text{ Hz}$ y el AWGN tiene $\sigma = 0.01 \text{ V}$.

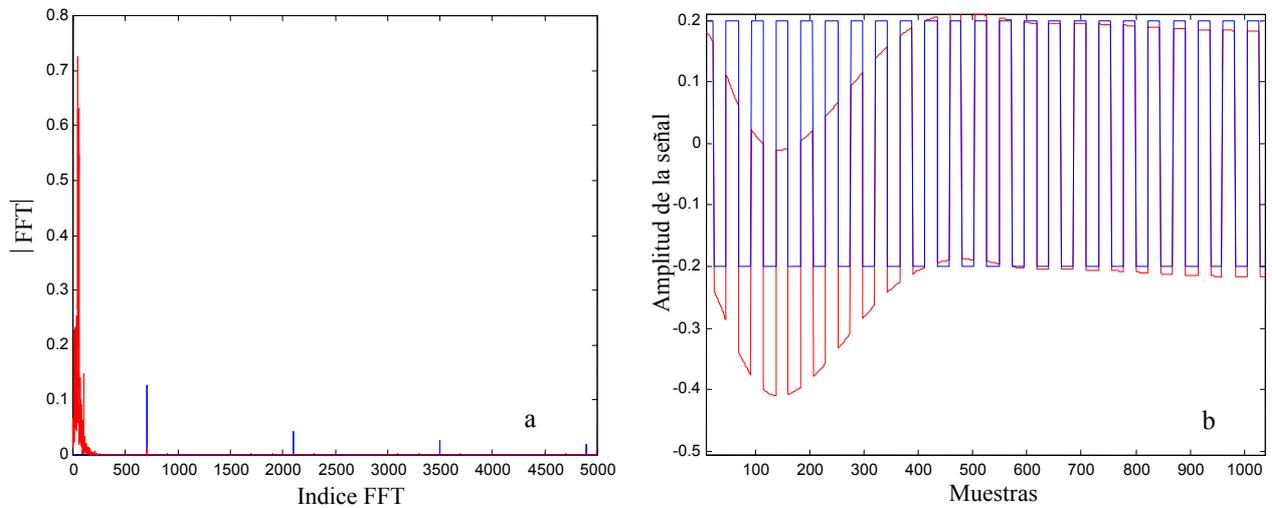


Fig. 3.38 a) Espectro de la máscara caótica y de la onda cuadrada b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

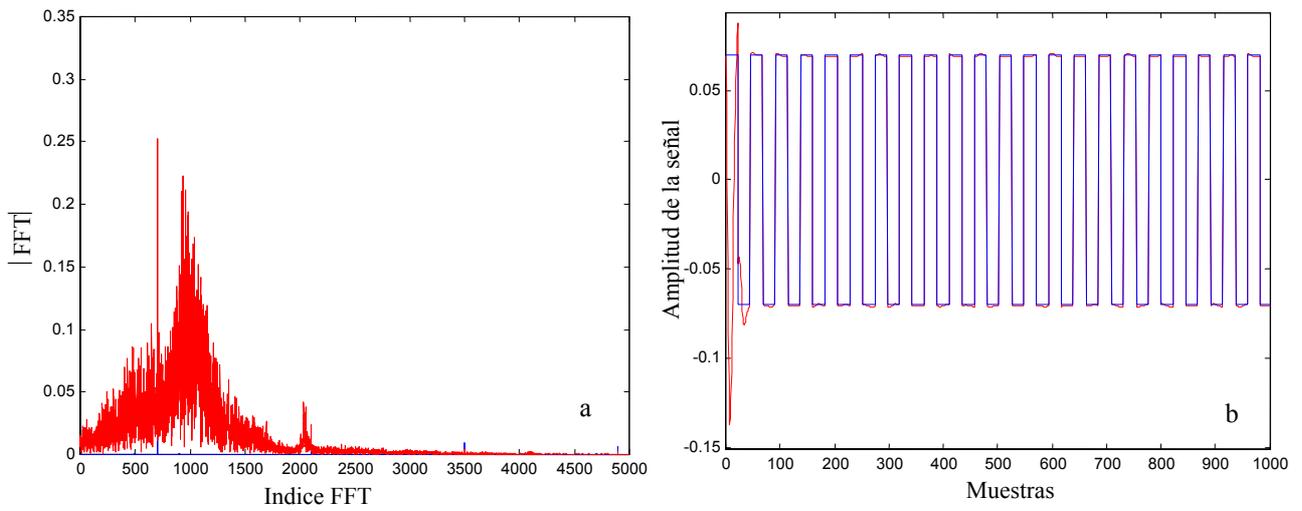


Fig. 3.39 a) Espectro de la máscara caótica y de la onda cuadrada b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

En las figuras 3.40 y 3.41 se muestra el caso de una señal triangular de $A = 0.3 V_{PP}$, $f = 1000 \text{ Hz}$ para los mismos tipos de enmascaramiento de los casos senoidal y cuadrada.

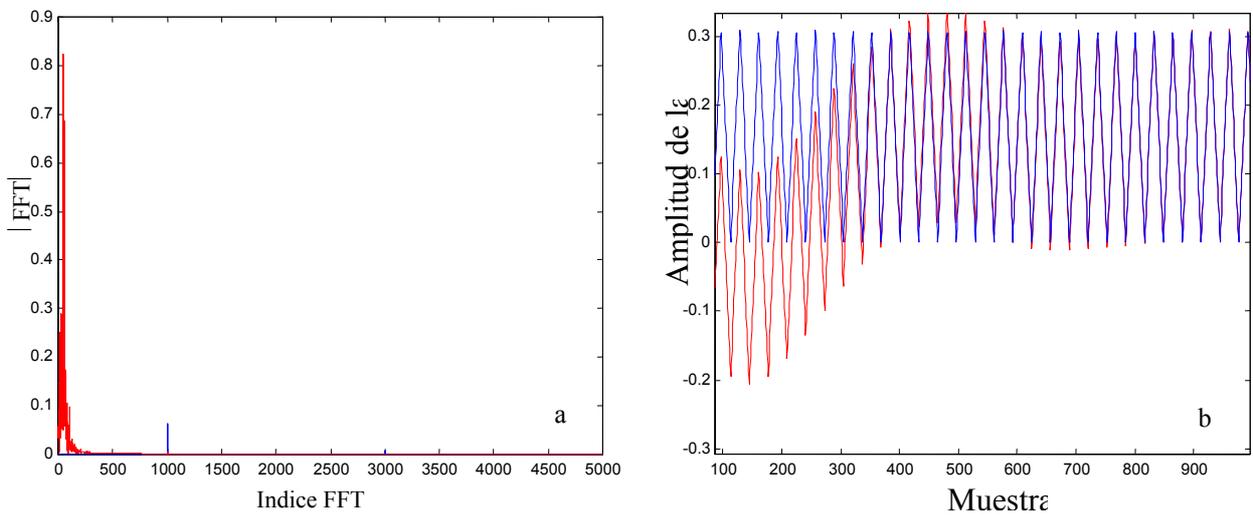


Fig. 3.40 a) Espectro de la máscara caótica y de la onda triangular b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

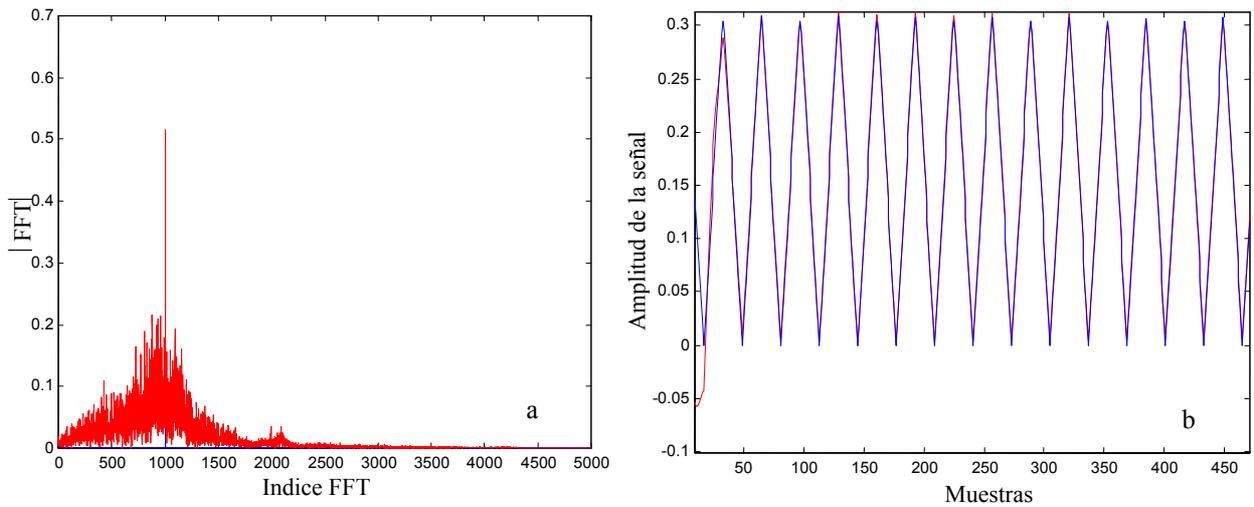


Fig. 3.41 a) Espectro de la máscara caótica y de la onda triangular b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

El empleo del receptor gemelo en configuración *APD* permite recuperar señales periódicas y multifrecuentes bien o mal enmascaradas como se observa en las figuras 3.36 a 3.41 aún con la presencia de AWGN contaminando el canal de comunicación. En el caso en que ambos ruidos son aditivos (ACHN + AWGN) también la recuperación es muy buena con el receptor gemelo. Las Figuras 3.42 a 3.49 muestra los mismos casos de las Figuras 3.33 a 3.40 pero ahora con ACHN +AWGN. Las amplitudes y frecuencias de las señales son las empleadas en el caso *APD*. El AWGN adicionado tiene $\sigma = 0.01 V$

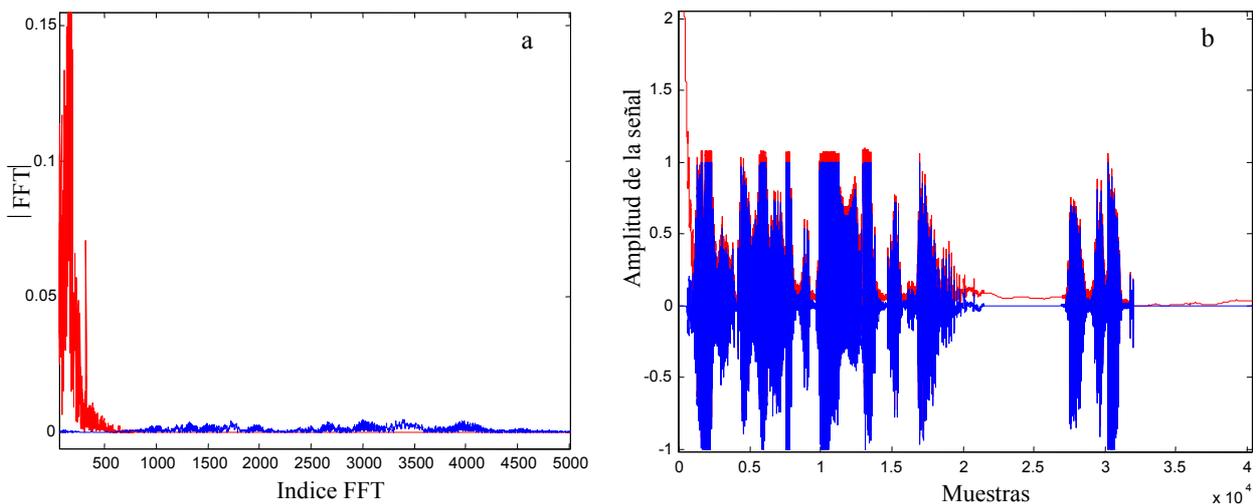


Fig. 3.42 a) Espectro de la máscara caótica y de la señal de voz b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

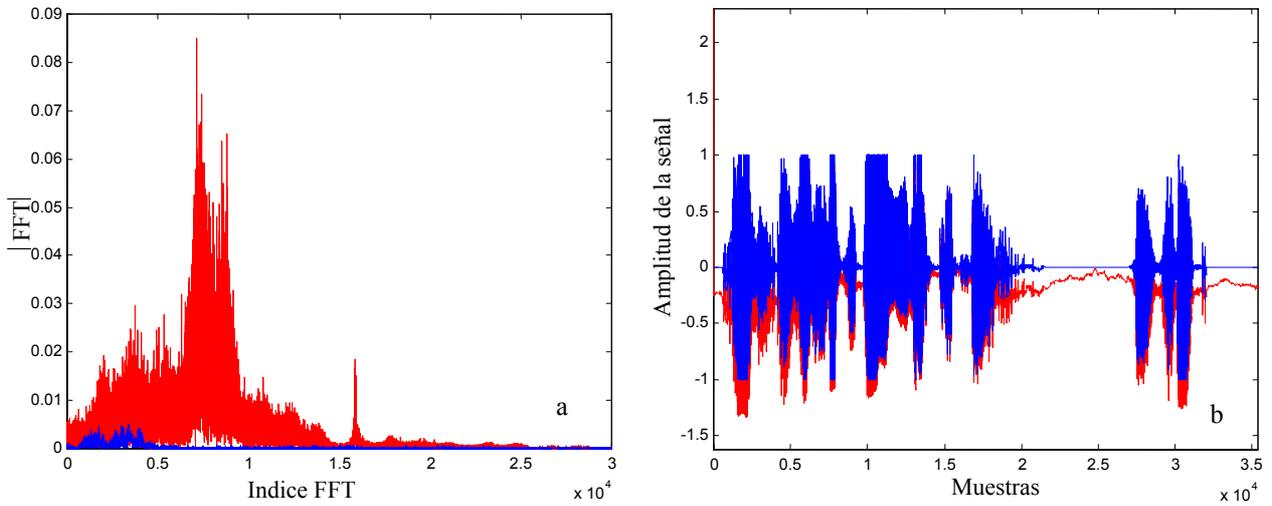


Fig. 3.43 a) Espectro de la máscara caótica y de la señal de voz b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

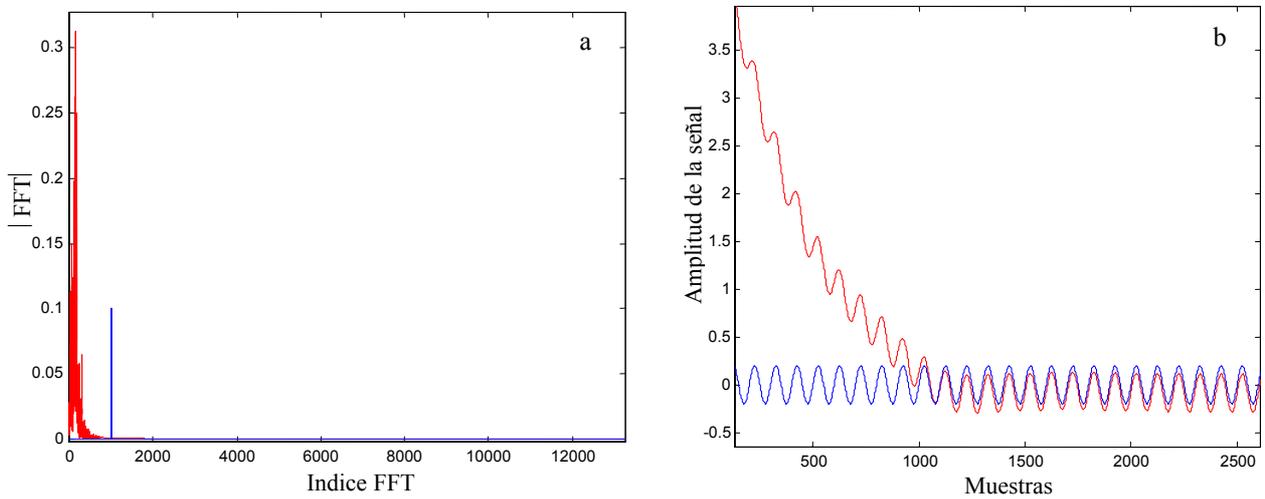


Fig. 3.44 a) Espectro de la máscara caótica y de la señal senoidal b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

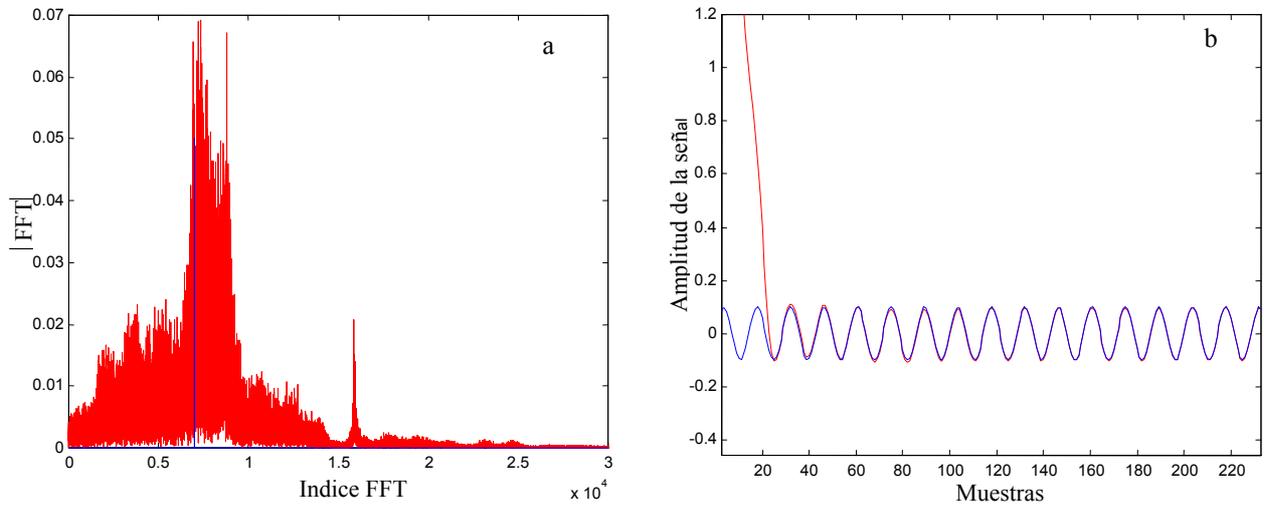


Fig. 3.45 a) Espectro de la máscara caótica y de la señal senoidal b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

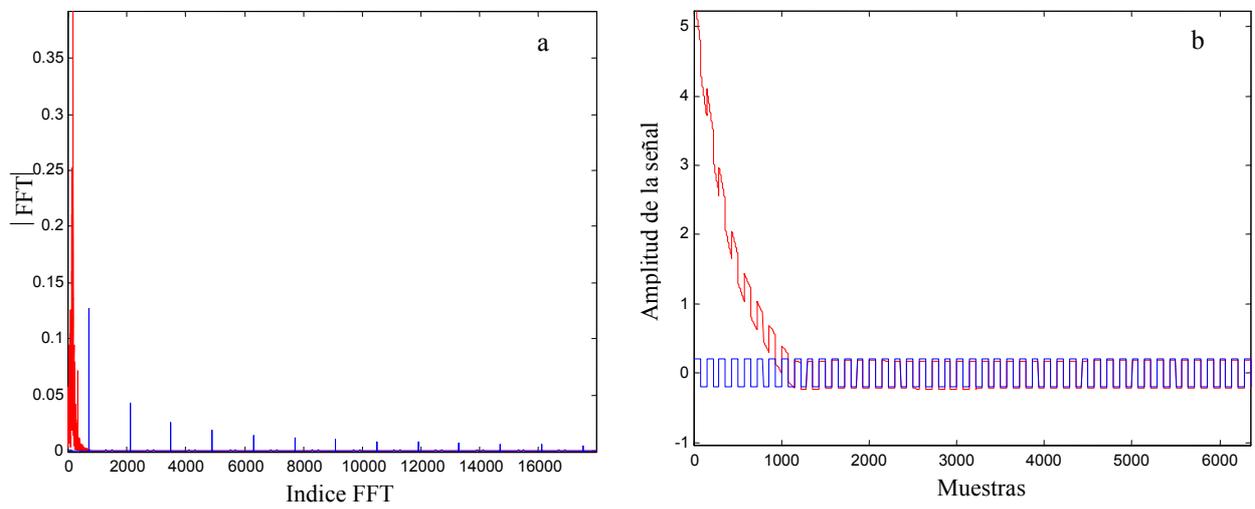


Fig. 3.46 a) Espectro de la máscara caótica y de la onda cuadrada b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

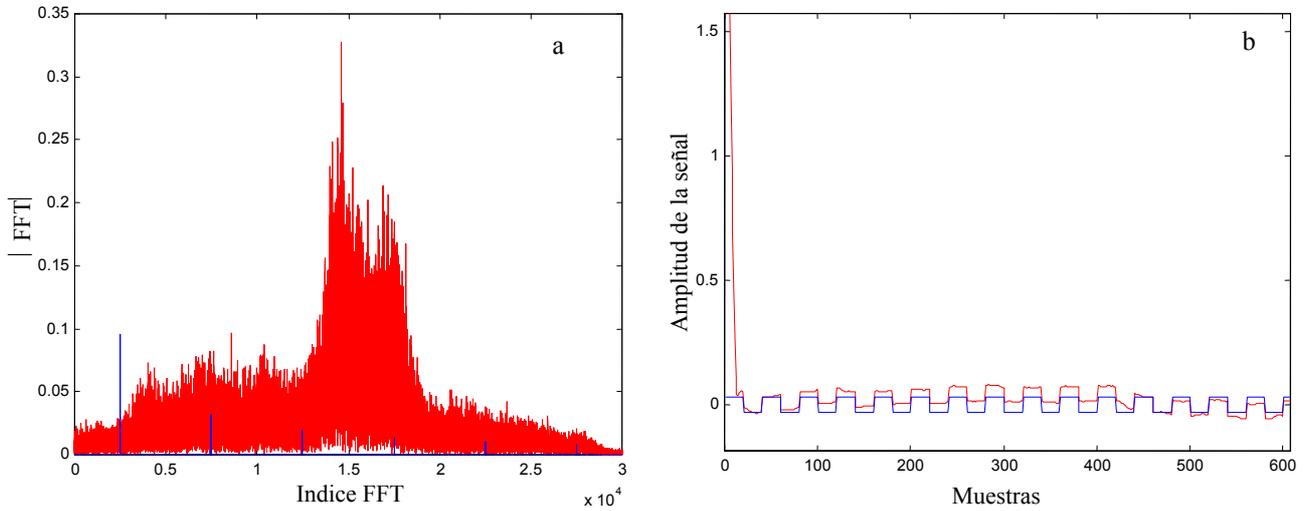


Fig. 3.47 a) Espectro de la máscara caótica y de la onda cuadrada b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

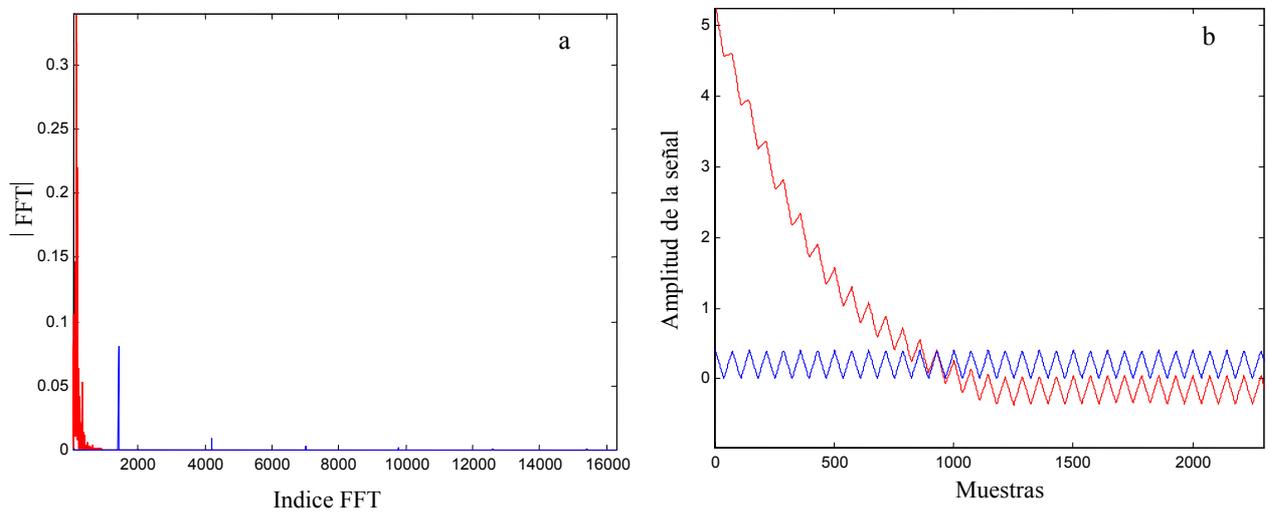


Fig. 3.48 a) Espectro de la máscara caótica y de la onda triangular b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

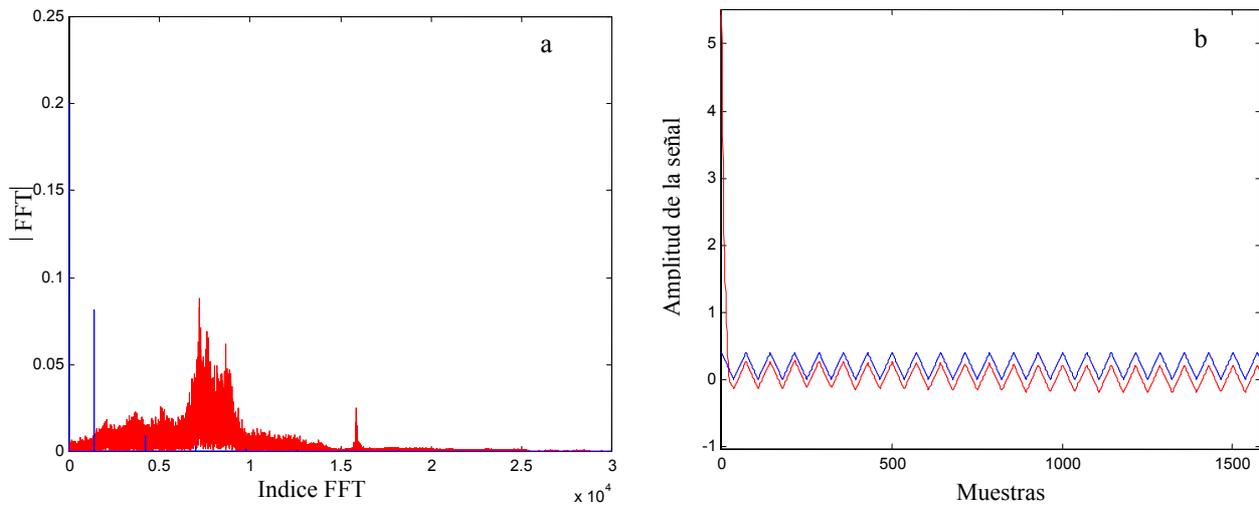


Fig. 3.49 a) Espectro de la máscara caótica y de la onda triangular b) Señal recuperada por el receptor gemelo (rojo) y señal de información (azul)

Los resultados mostrados en las Figuras 3.42 a 3.49 indican que el receptor gemelo se comporta como un filtro ideal que recupera la información en el caso que esta se suma a la portadora caótica, sin importar si los espectros de ambas se hallan superpuestos, aún con la presencia de AWGN.

3.4 Métodos para eliminar máscaras caóticas basados en reconstrucción de atractores

Como se vio las máscaras caóticas aún en el caso aditivo, resultan en general más difíciles de eliminar que el AWGN, a menos que se disponga del filtro ideal (sistema que logra sincronización idéntica). Short [1994] y Short y Parker [1998] han propuesto un método para desenmascarar mensajes basados en la reconstrucción completa del espacio de fase a partir de una serie temporal, seguido por la estimación local de la dinámica de la portadora en cada punto del atractor caótico.

Perez y Cerdeira [1995] propusieron un método de extraer los mensajes empleando mapas de retorno de dos dimensiones. Zhou y Lai [1999] emplearon un espacio de coordenadas de embedding especial para recuperar mensajes enmascarados por señales caóticas en el caso de sistemas con retardo temporal y diversos exponentes de Lyapunov positivos. Feng y Tse [2001] diseñaron un demodulador adaptativo on line usando redes neuronales con funciones de base radial. D'Anjou *et al.*, [2001] presentaron una regla adaptativa de parámetros que sincroniza globalmente un sistema caótico de Lorenz con valores de parámetros inicialmente diferentes. Todos los métodos mencionados están basados en el Teorema de Takens que prevé la posibilidad de reconstruir el espacio de fase en función de las muestras de una única variable del sistema dinámico. Para que sean efectivos, se requiere una serie temporal suficientemente larga de una o de varias variables de estado así como alguna información respecto del tipo de sistema caótico y del rango de los parámetros a ser explorado.

En el trabajo de Perez y Cerdeira se demostró la forma en que la máscara caótica puede removerse sin necesidad de recurrir a un sistema receptor gemelo. La idea consiste en efectuar una reconstrucción parcial de la dinámica del sistema empleando mapas de retorno.

El sistema debe ser de baja dimensión y debe tener una rápida relajación de la dinámica hacia el atractor, al menos en las escalas de tiempo usadas en el mensaje. Esto permite a un tercero (intruso) efectuar una reconstrucción parcial de la dinámica empleando mapas de retorno. Analizando la evolución de la señal sobre el conjunto de atracción de esos mapas, el mensaje puede extraerse. Este proceso no emplea en ningún momento la reconstrucción completa de la dinámica del transmisor, un procedimiento que consume gran cantidad de tiempo, y que requiere el embedding en un espacio de mayor dimensión al del receptor propuesto.

Para mostrar la forma en que se efectúa el desenmascaramiento se simula el comportamiento de un sistema transmisor-receptor que emplea las ecuaciones de Lorenz. Las ecuaciones del transmisor y receptor son

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{d\tau} = \sigma(y_1 - x_1) \quad (a) \\ \frac{dy_1}{d\tau} = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \quad (b) \\ \frac{dz_1}{d\tau} = x_1y_1 - bz_1 \quad (c) \end{array} \right. , \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_2}{d\tau} = \sigma(y_2 - x_2) \quad (a) \\ \frac{dy_2}{d\tau} = rx_2 - y_2 - x_2z_2 \quad (b) \\ \frac{dz_2}{d\tau} = x_2y_2 - bz_2 \quad (c) \end{array} \right. , \quad (3.21)$$

donde $\tau = K.t$ es un factor de escala. Los valores de los parámetros son $\sigma = 16.0$, $r = 45.6$ y $b = 4$. En el segundo conjunto de ecuaciones, el uso de x_1 en lugar de x_2 en las ecuaciones 3.21b y c tiene el efecto de sincronizar el segundo oscilador al primero. Esto significa que si se comienza con dos osciladores desde diferentes condiciones iniciales, pero usando el mismo conjunto de parámetros, las variables en el receptor tenderán a los valores en el transmisor. La transmisión de los datos se implementa de dos formas. En el caso de la transmisión digital se modifica el parámetro b , en las ecuaciones del transmisor, entre dos valores de referencia $b = 4$ y $b = 4.4$. El parámetro correspondiente en el receptor se mantiene fijo en el nivel de referencia, dando como resultado que los osciladores se sincronizan cuando los parámetros son iguales y se desincronizan cuando son diferentes. Esta desincronización se manifiesta en el cuadrado de la diferencia $(x_2 - x_1)^2$ que presenta fluctuaciones permanentes cuando los dos b son diferentes.

La segunda opción para la transmisión de los mensajes es sumar un pequeño mensaje analógico $m(t)$ a la variable $x_1(t)$ produciendo una excitación modificada $s(t) = x_1(t) + m(t)$. Esta nueva excitación se alimenta en el receptor. Se logra una sincronización que está lejos de ser perfecta dado que la señal de entrada no es exactamente una variable del sistema de Lorenz. No obstante, la frustración del proceso de sincronización puede usarse como una forma de recuperar el mensaje, usando para este propósito la diferencia $s(t) - x_2(t)$. Este proceso dista de ser trivial. La diferencia entre la excitación y la respuesta no reproduce exactamente el mensaje $m(t)$, y la correlación entre las dos depende fuertemente de las frecuencias involucradas. Esto sucede porque, como puede verse en el proceso de simulación, el error en el proceso de sincronización decae con su propia escala temporal y no monótonamente.

Este retardo en la sincronización afecta la calidad en el mensaje recuperado. Para el caso de frecuencias comparables con las predominantes en el ruido de sincronización, el mensaje reconstruido tiene un nivel importante de ruido y no puede reproducirse adecuadamente. Para frecuencias mas bajas el mensaje recuperado contiene un amplio espectro de frecuencias por encima de la transmitida y la salida reproduce aproximadamente el mensaje si se realiza un filtrado pasabajos. En el caso de frecuencias muy altas, por encima de la frecuencia dominante del oscilador de Lorenz, ocurre un fenómeno diferente. El período del mensaje es mucho más chico que el tiempo de decaimiento del proceso de sincronización y el mensaje y el mecanismo de sincronización y desincronización se desacoplan. Esto hace al mensaje recuperado prácticamente igual al original pero los espectros del sistema de Lorenz y del mensaje están tan separados que este puede recuperarse mediante un simple proceso de filtrado pasa-altos.

Un enfoque alternativo, que propone el trabajo de Perez y Cerdeira, consiste en emplear un mapa de Lorenz. Este se aplica sobre una de las variables del conjunto de ecuaciones (3.20) produciéndose un mapa de retorno donde la totalidad de la dinámica es atraída a un conjunto prácticamente unidimensional. Se construye el mapa de retorno de la variable $x(t)$ del oscilador de Lorenz comenzando por un punto en un tiempo arbitrario. Se denomina t_n al tiempo en el que $x(t)$ alcanza su n ésimo máximo local y X_n es su valor en ese momento. Similarmente se define otro mapa de retorno donde u_m es el tiempo en el que $x(t)$ alcanza su m ésimo mínimo local e Y_m es el valor de $x(t)$ en ese momento. Usando estos valores se pueden construir los mapas de retorno X_{n+1} vs X_n (Fig. 3.50) e Y_{m+1} vs Y_m (Fig.3.51). Estos dos mapas tienen atractores que son casi 1D.

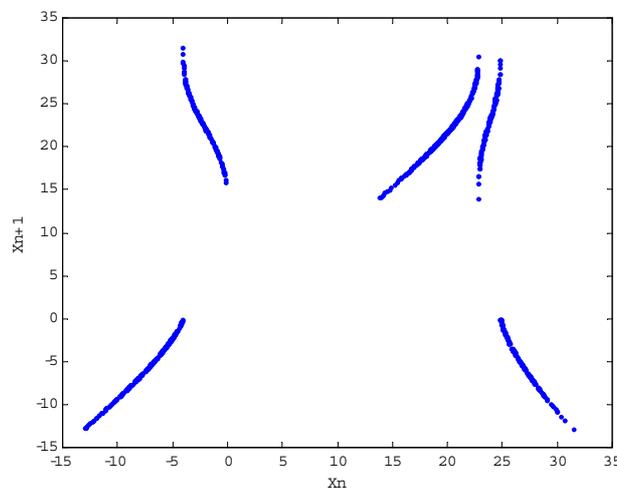


Fig. 3.50 Mapa de retorno de los máximos locales del oscilador de Lorenz

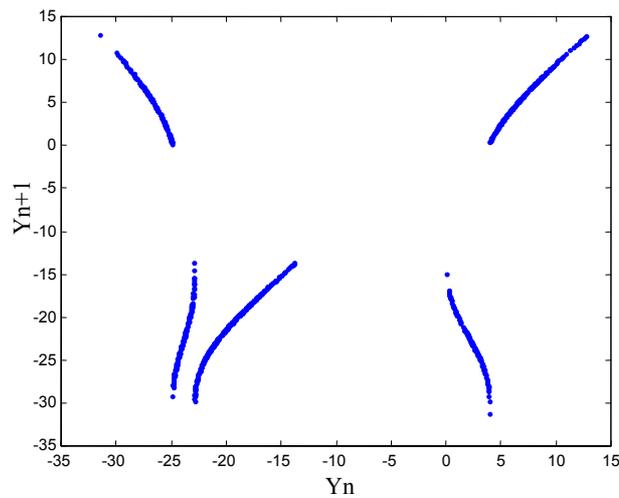


Fig. 3.51 Mapa de retorno de los mínimos locales del oscilador de Lorenz

Aplicando la transformación $Y \rightarrow -Y$, el atractor para el mapa Y es idéntico al del mapa X . Esto tiene su origen en el hecho que la dinámica es invariante a las transformaciones $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$ y por lo tanto los máximos de $x(t)$ y los mínimos de $-x(t)$ dan el mismo mapa de retorno.

En lugar de emplear los dos mapas de retorno directamente, se pueden lograr mejores resultados empleando las siguientes combinaciones lineales $A_n = (X_n + Y_n)/2$, $B_n = X_n - Y_n$, $C_n = (X_{n+1} + Y_n)/2$ y $D_n = Y_n - X_{n+1}$. Estos son simplemente los valores promedio de un par consecutivo de máximo-mínimo y la distancia entre ellos. Los mapas de retorno B_n vs A_n y D_n vs C_n son atractores muy simples. Cada uno de ellos está constituido por tres segmentos 1D desconectados y tienen la misma inversión de la simetría que en los casos de los mapas X e Y de manera que la sección B vs A es idéntica a la de $-D$ vs $-C$. (Fig. 3.52).

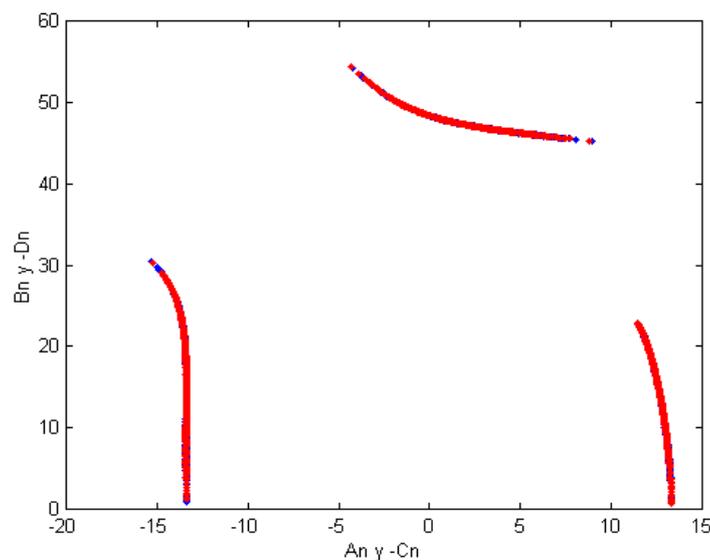


Fig. 3.52 Atractores de los mapas de retorno obtenidos de los máximos y mínimos de $x(t)$ en el oscilador de Lorenz. Se han superpuesto los atractores de los mapas A_n vs B_n y $-C_n$ vs $-D_n$

La llave para extraer el mensaje de la máscara caótica, en el caso de la transmisión digital es reconocer que un pequeño cambio en los parámetros del transmisor no sólo frustra la sincronización sino que también afecta el atractor obtenido en el mapa de retorno. Dado que el cambio es pequeño, el único efecto es un corrimiento en la posición de los segmentos del atractor, mientras se conserva su forma general. En el atractor que se obtiene cuando existe un mensaje (Figura 3.53) aparecen dos ramas donde antes aparecía una (sistema de Lorenz no perturbado)

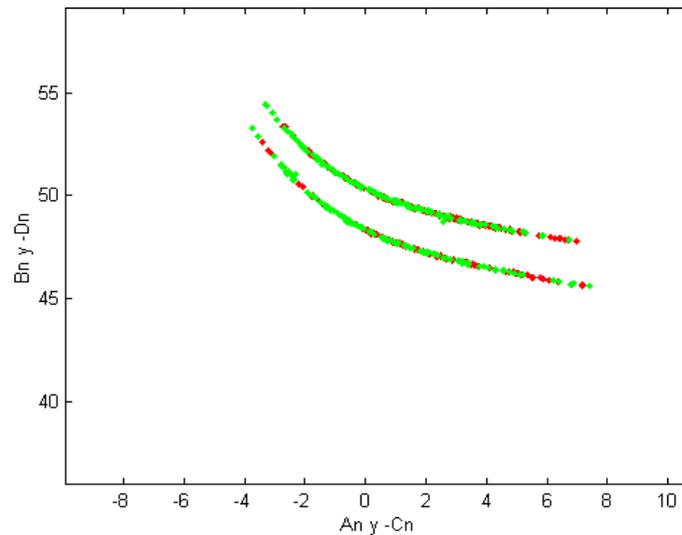


Fig. 3.53 Segmento del atractor del mapa de retorno, dividido por el uso de $b = 4$ y $b=4.4$ en la generación de la señal

Una vez que se conoce que la conmutación entre los dos parámetros implica también conmutar entre las dos ramas del atractor, es simple ir al atractor y clasificar los puntos de acuerdo a la rama en la que caen. Se pueden usar sólo los puntos que están claramente separados asignándole, en forma arbitraria, un 0 o un 1 a cada rama del atractor. Luego se lee en las secuencias temporales los valores t_n y u_n y se grafican los valores asignados vs el tiempo. El resultado puede parecer carente de sentido dado que la asignación de los ceros y unos se hizo en forma arbitraria. Se necesitan probar diferentes asignaciones y comparar los resultados. La correcta será aquella que muestre largas secuencias de sólo ceros o sólo unos. Este requisito se debe a que los bits del mensaje original tienen que ser suficientemente largos para superar el retardo de sincronización y permitir que $x_l(t)$ en el transmisor pase por varios máximos y mínimos antes de cambiar de valor.

Para optimizar el algoritmo de selección de los puntos, es posible crear una función F_1 (empleando la función *polyfit* de *Matlab*[®]) que marque la separación entre ambas ramas (Figura 3.54). Se eligen algunos pares de puntos en el canal entre ambas ramas en el gráfico B_n vs A_n y se obtiene

$$F1 = 0.0523394 * A_n^2 - 0.8655828 * A_n + 49.6276764 \quad (3.22)$$

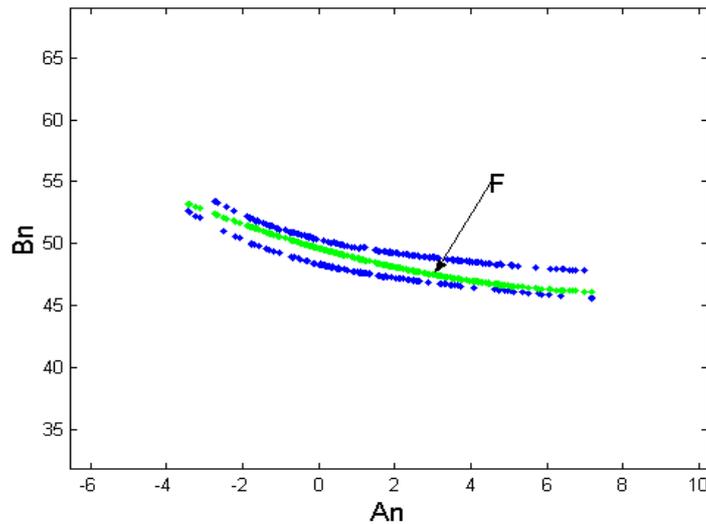


Fig. 3.54 Función $F1$ empleada en la asignación de los valores de los puntos de cada rama

Este simple algoritmo permite la reconstrucción del mensaje (Fig. 3.55), excepto por la pequeña ambigüedad de decidir que bits se identifican con 1's y cuales con 0's. En el caso analógico, la separación del mensaje de baja amplitud de la portadora caótica no es mucho más difícil que la extracción de los mensajes digitales, al menos para bajas frecuencias.

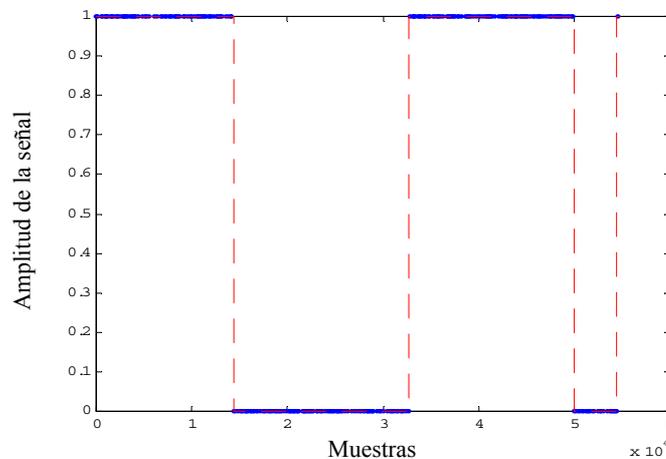


Fig.3.55 Desenmascaramiento de la señal en la transmisión digital, usando el mapa de retorno y una asignación correcta de 0's y 1's a cada rama del atractor. En línea cortada (rojo) la señal transmitida

Cualquier tipo de perturbación de la portadora afecta los atractores quasi unidimensionales de los mapas de retorno; en el modo analógico de transmisión el efecto de sumar el mensaje $s(t)$ a la portadora $x_1(t)$ es dispersar el atractor, transformando los tres segmentos en tres líneas difusas. Si se superpone el atractor obtenido durante los silencios del mensaje (una línea densa), se observa que el ensanchamiento de los segmentos (en presencia del mensaje) es casi simétrico alrededor del mismo.

Lo que se hace para recuperar el mensaje es medir la distancia entre la posición de los puntos en el atractor con el mensaje y el lugar que deberían haber ocupado en su ausencia, teniendo en cuenta a que lado del punto se ha movido. Esta distancia puede

aproximarse razonablemente como la menor distancia al atractor silente. En este caso dos de las ramas del atractor son casi verticales y la otra es prácticamente horizontal. Por lo tanto es suficiente con tomar la distancia x en el caso de las ramas verticales y la distancia y para la horizontal. Para comprobar el funcionamiento de esta técnica de desenmascaramiento se suma a la señal del oscilador una senoidal de amplitud $A = 0.2 V_p$. Los espectros del oscilador y de la señal se muestran en la Fig. 3.56.

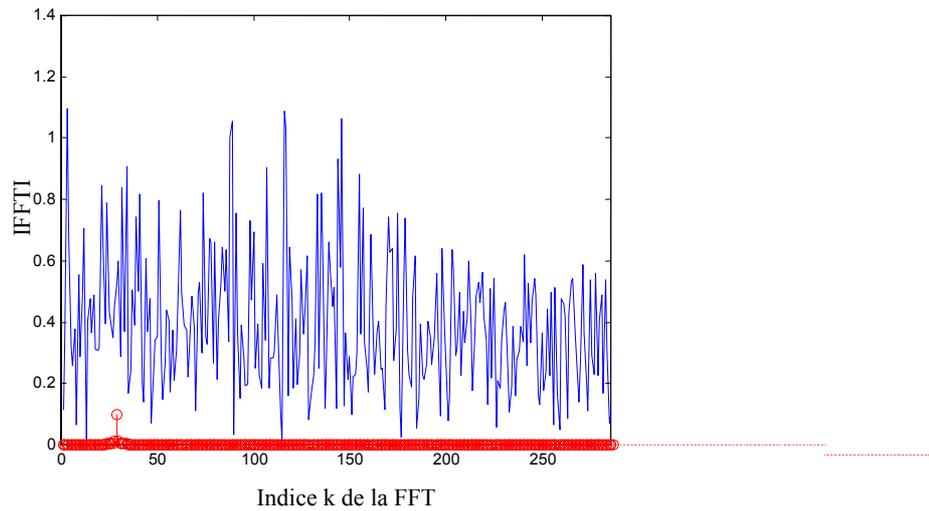


Fig. 3.56 Espectros del oscilador de Lorenz (azul) y de la señal senoidal (rojo)

En la Fig. 3.57 se muestra el aspecto de la rama horizontal del atractor con y sin señal. Se observa la forma en que se dispersa el atractor alrededor del eje constituido por el atractor silente.

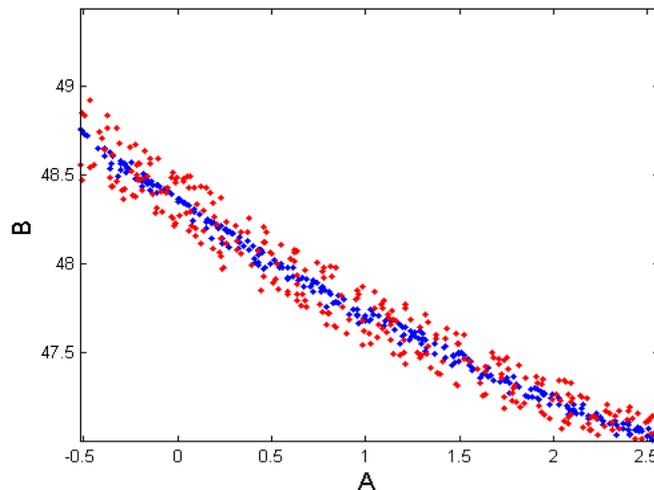


Fig. 3.57 Rama horizontal del atractor con señal (rojo) y sin señal (azul)

Los resultados de este procedimiento son bastante satisfactorios para frecuencias por debajo de la frecuencia a la cual se halla el pico del espectro del oscilador de Lorenz (f_c). En estos casos la portadora tiene varios mínimos y máximos por cada período del mensaje, con lo que se consigue una buena reconstrucción con algunas redundancias y bajo nivel de ruido. La calidad del mensaje recuperado se deteriora a medida que se traspone la frecuencia f_c y para frecuencias superiores los resultados son muy pobres.

El trabajo de *Perez-Cerdeira* ha demostrado que es posible desenmascarar mensajes transmitidos empleando un par caótico Lorenz-Lorenz. El modo de transmisión digital se desenmascara fácil y eficientemente si se produce una división clara de las ramas del atractor. Este esquema funciona aún en condiciones de bajos niveles de ruido. En el caso de enmascaramiento de mensajes analógicos, la remoción de la máscara trabajará para frecuencias hasta una frecuencia de corte que se corresponde con el pico de frecuencia en el espectro del oscilador de Lorenz. Para frecuencias próximas a esta frecuencia de corte, este esquema de extracción proporciona pobres resultados, fallando completamente para frecuencias mucho más altas (Fig.3.58 y 3.59b).

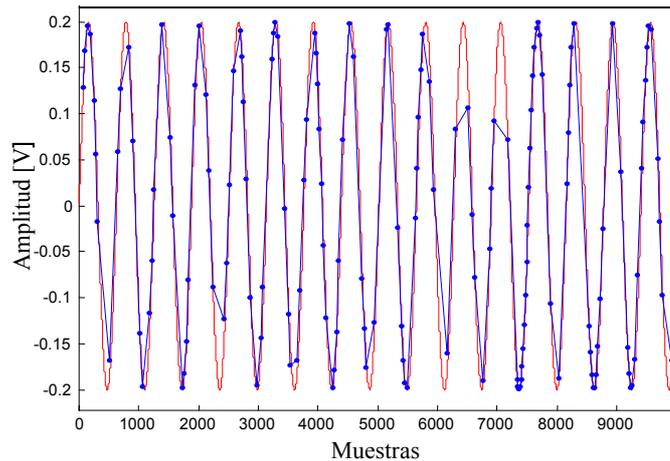


Fig. 3.58 Reconstrucción del mensaje analógico usando el mapa de retorno. En rojo el mensaje original $m(t) = 0.2 \sin(2\pi ft)$ y en azul el mensaje reconstruido

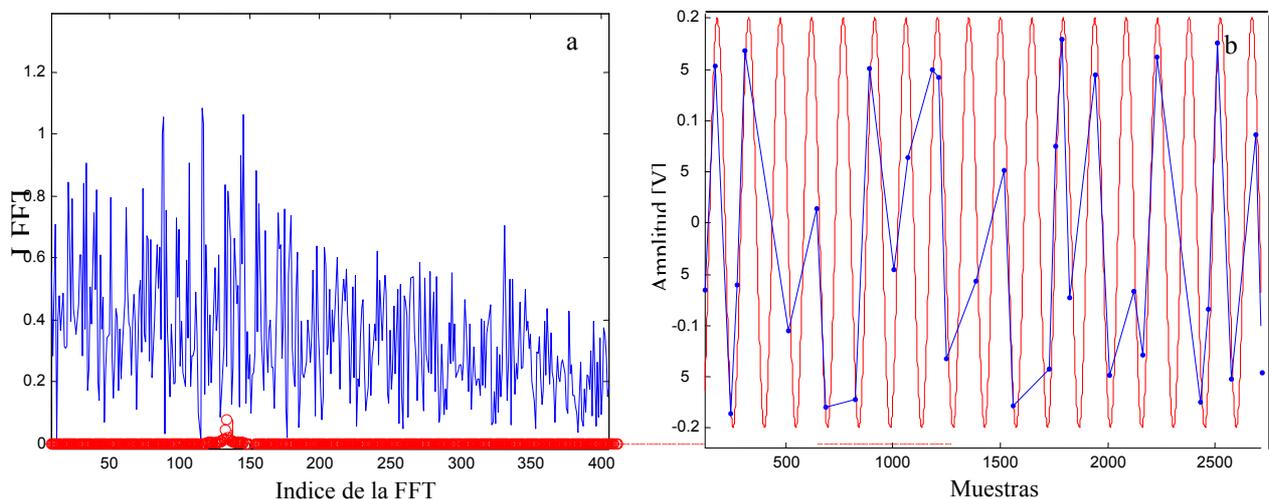


Fig. 3.59 a) Espectros de la señal y la máscara caótica b) reconstrucción de la señal empleando mapas de retorno

Siguiendo este procedimiento lo que se necesita para evitar que el mensaje sea desenmascarado es transmitir a frecuencias suficientemente altas. En este caso, el transmisor y receptor trabajarán en un sector donde el espectro de potencia del oscilador de Lorenz es de reducida amplitud y no tendrá suficiente nivel para enmascarar la señal por lo tanto esta puede recuperarse mediante un proceso de filtrado.

El análisis previo puede extenderse a otros sistemas caóticos sincronizados. En general en las dinámicas que tienen un único exponente de Lyapunov positivo y los restantes son suficientemente negativos como para asegurar una rápida sincronización, los atractores en los mapas de retorno son casi unidimensionales y muestran cualquier perturbación sobre la portadora.

3.5 *Análisis Wavelet Multiresolución(MRA) de señales enmascaradas con caos*

3.5.1 *Señales enmascaradas en esquema APD*

Recientemente se ha reportado que las wavelets son particularmente adecuadas para la detección de estructuras coherentes, y se ha propuesto un procedimiento de desenmascaramiento on line basado en las wavelets [Huang *et al.*, 2001]. A continuación se analiza la capacidad del análisis wavelet multiresolución para desenmascarar información oculta bajo una portadora caótica según el esquema APD. Se exploran varias familias de wavelets y diferentes osciladores caóticos. Empleando un parámetro que controla el escalamiento temporal se puede modificar el espectro de la máscara. Los resultados muestran que las wavelets son efectivas para descubrir el mensaje sólo en casos particulares con pobre enmascaramiento.

Es interesante analizar el espectro de la máscara caótica generada en un sistema APD para predecir si las técnicas de filtrado lineal pueden ser útiles en el procedimiento de desenmascaramiento. Para ello se evalúa la *FFT* de la máscara caótica para diferentes resoluciones espectrales. El resultado muestra que el espectro es denso sin discontinuidades. En consecuencia los filtros de *Wiener* y otras técnicas de filtrado digital, tales como los filtros peine usados en las transmisiones de las señales de televisión color, son inútiles para eliminar la máscara caótica.

Desde el punto de vista del procesamiento, el análisis empleando wavelets discretas puede considerarse un proceso de filtrado empleando filtros en espejo-cuadratura. La señal analizada pasa a través de estos filtros complementarios y sale como dos señales: una que conserva el contenido en baja frecuencia (aproximación) y la otra que contiene la información de alta frecuencia (detalle). En *MRA*, el proceso de descomposición se itera en sucesivas aproximaciones que se vuelven a descomponer, de manera que la señal se divide en varias componentes de menor resolución.

El procedimiento para desenmascarar la información mediante *MRA* es el siguiente:

- 1) Descomponer la señal s empleando la familia wavelet seleccionada. En esta tesis se emplean wavelets de las familias *Daubechies* y *Splines Simétricas y Biortogonales*. Los resultados que se presentan se obtuvieron con db10, pero son representativos del comportamiento de las otras familias.
- 2) Obtener las aproximaciones y los detalles para cada nivel (ver Figuras 3.60 y 3.61).
- 3) Evaluar la diferencia i^{ap} entre s y la aproximación en ese nivel (Fig. 3.62).
- 4) Seleccionar el nivel más adecuado, eso implica el nivel donde i^{ap} es la mejor aproximación al mensaje. En la Figura 3.62, tres niveles ($j = 4, j = 5$ y 6) son muy similares al mensaje original con el que se los compara.

Si la señal es un mensaje de audio se puede escuchar la señal i^{ap} correspondiente a cada nivel y seleccionar la mejor.

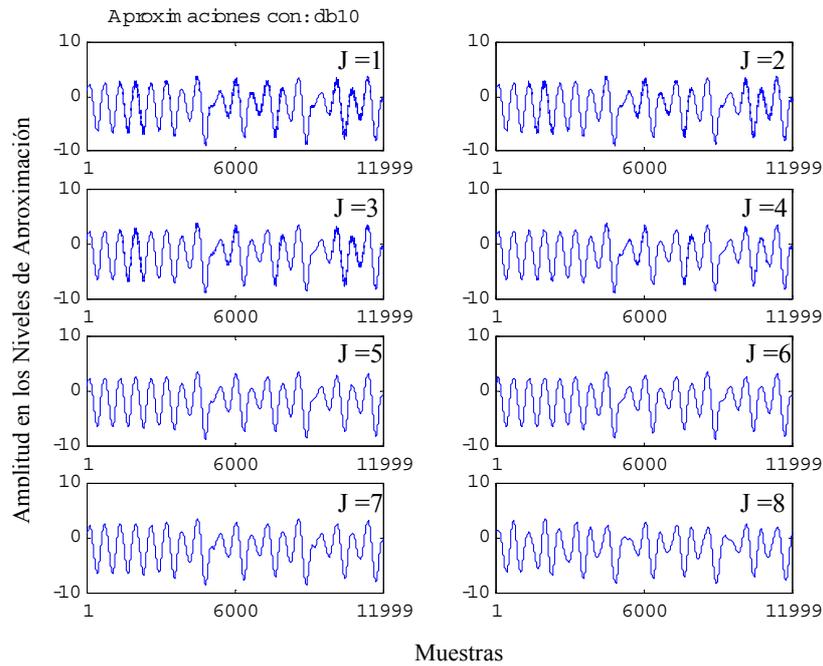


Fig. 3.60 Aproximaciones de la señal s usando la wavelet $db10$ en el caso $\Delta = 100$

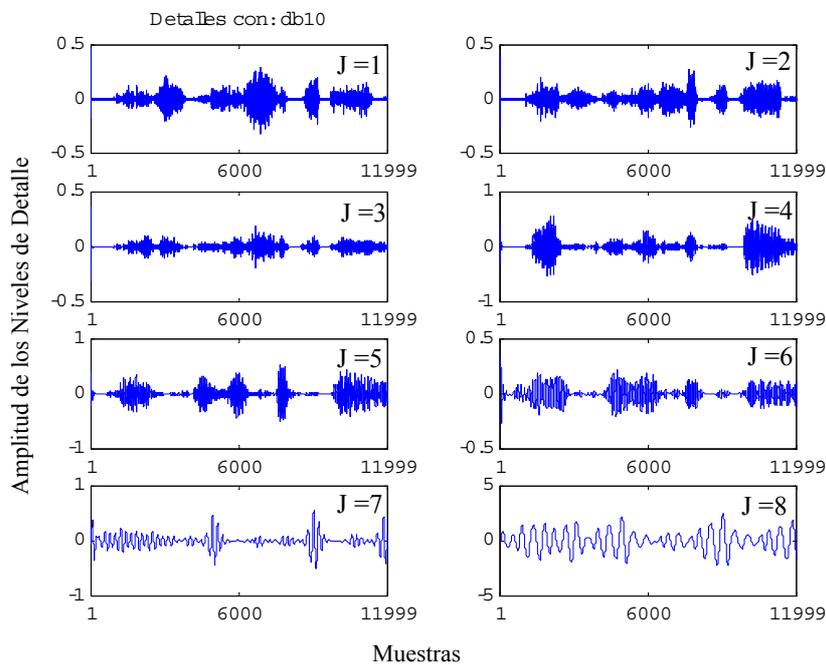


Fig. 3.61 Detalles de la señal s usando wavelets $db10$ en el caso $\Delta = 100$

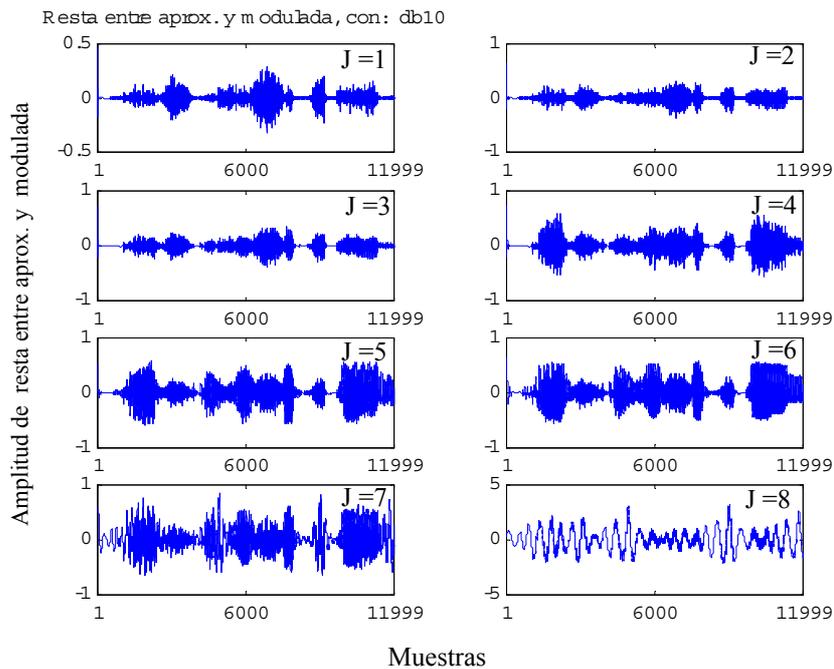


Fig.3.62 Diferencias i^{ap} entre la señal s y las aproximaciones para el caso $\Delta = 100$ para las wavelets db10. El mejor nivel es $j = 6$

La Fig. 3.63 muestra i^{ap} como función del mensaje original i^t para cada nivel. Esta figura confirma que $j = 6$ es la mejor elección. Si se analizan las Figuras 3.60 y 3.61, *MRA* parece ser efectivo para eliminar la máscara caótica. Desafortunadamente para $\Delta = 20$ el ruido en la aproximación al mensaje, i^{ap} , se incrementa. El método falla completamente para $\Delta = 5$ (Fig. 3.64c). Todas las familias de wavelets analizadas conducen a los mismos resultados.

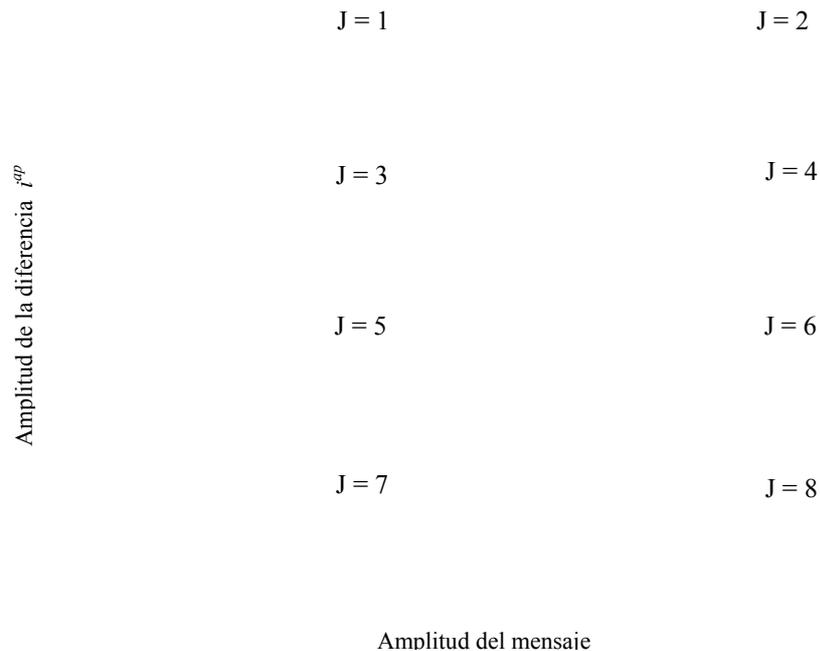


Fig. 3.63 Diferencias entre i^{ap} entre s y la aproximación para diferentes niveles como función del mensaje original i^t en el caso $\Delta = 100$ para las wavelets db10. El mejor nivel es $J=6$

Amplitud del mensaje recuperado

Amplitud del mensaje

Fig. 3.64 Diferencia i^{ap} entre s y la aproximación como función del mensaje original i^t para las wavelets db10 y diferentes valores de Δ en el mejor nivel de descomposición a) $\Delta=100$ (enmascaramiento pobre) b) $\Delta=20$ (enmascaramiento en la zona de bajas frecuencias) ; c) $\Delta = 5$ (enmascaramiento completo)

Un criterio alternativo para seleccionar el nivel wavelet que mejor separa la señal caótica (*caos*) de la información (*info*) es el propuesto por Huang. [2001]. Este consiste en calcular la relación entre la potencia del caos y la potencia ($s - A_j$) para cada nivel de aproximación A_j (*SNR*). Si se tiene una señal $s = caos + info$, para un nivel de descomposición j , puede escribirse (sección 2.1.8)

$$s = caos + info = A_j + D_1 + \dots + D_j \quad , \quad (3.23)$$

entonces $s - A_j = D_1 + \dots + D_j = i^{ap}$, es la suma de todos los niveles de detalle hasta j . El criterio de Huang indica que el mejor nivel de descomposición es aquel para el cual la relación *SNR*, evaluada según la Ec. 3.24, es máxima. Ese nivel es el que mejor separa la portadora caótica de la información.

$$SNR_j = 10 \log_{10} \frac{\sum (caos - \langle caos \rangle)^2}{\sum (i_j^{ap} - \langle i_j^{ap} \rangle)^2} dB \quad (3.24)$$

Donde $\langle \rangle$ significa valor medio de los elementos del vector al nivel j .

Si se aplica este razonamiento, se obtienen los resultados de la Tabla 3.3. Esta muestra que el nivel $j = 6$ es el que mejor separa la información del caos. Esto implica que el caos se encuentra en la región cubierta por el nivel de aproximación $j = 6$ y la información en todos los niveles de detalle hasta $j = 6$ inclusive.

Tabla 3.3. SNR para los 8 niveles de descomposición wavelet

Escala	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8
SNR (dB)	26.4305	26.5896	26.6896	29.0764	34.0306	40.2133	29.1854	9.3991

Para profundizar en la razón de estos resultados, se analiza el espectro de la señal enmascarada $1.45.x_3$ y del mensaje usando la FFT. Las Figuras 3.65 a-c muestran los resultados. Para $\Delta = 100$ (Fig. 3.65a) ambos espectros no están superpuestos, para $\Delta = 20$ (Fig. 3.65b) se superponen parcialmente en la zona de bajas frecuencias y finalmente para $\Delta = 5$ (Fig. 3.65c) los dos espectros están completamente solapados. En concordancia con este resultado el MAR es eficiente en el caso $\Delta = 100$, se hace menos efectivo a medida que Δ disminuye y falla completamente para $\Delta = 5$.

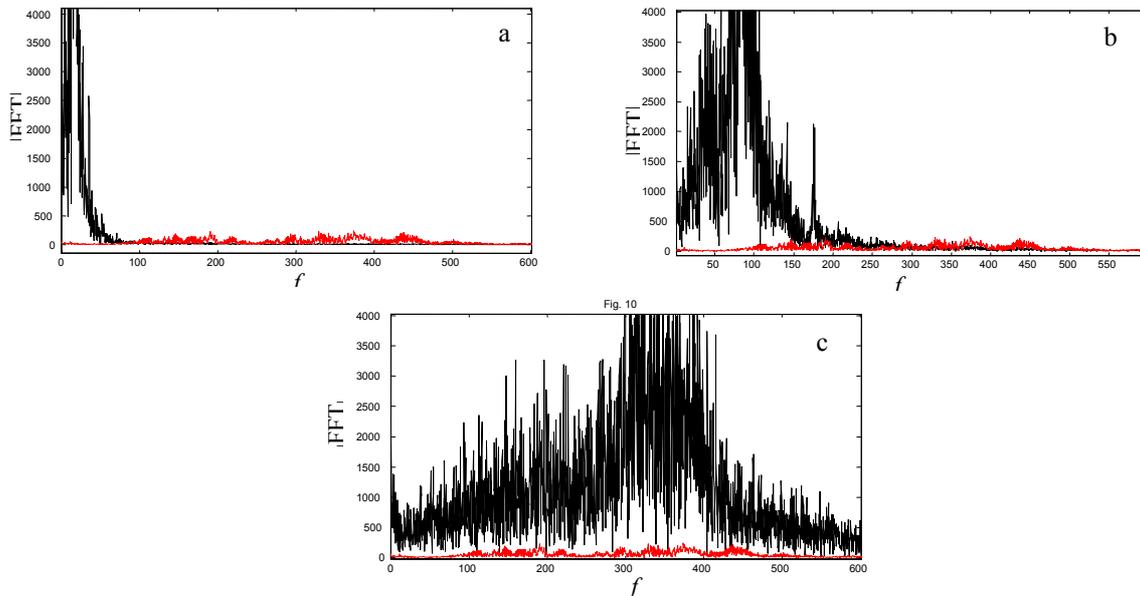


Fig. 3.65 Espectros del mensaje y la máscara caótica $1.45.x_3$ para a) $\Delta = 100$ b) $\Delta = 20$ c) $\Delta = 5$

La superposición aparente de los espectros no es razón suficiente para rechazar la posibilidad de desenmascarar la información mediante otras técnicas de filtrado. La transmisión de la señal de televisión color emplea espectros aparentemente mezclados para enviar las informaciones de color y luminancia en el mismo ancho de banda. En este caso, la separación se hace mediante filtros peine. Estos son eficientes siempre que los espectros estén mezclados pero no superpuestos. Para analizar las características del espectro de la señal enmascarada se lo evalúa con diferentes niveles de resolución. Las Figs. 3.66a y b son dos casos representativos y contienen ampliaciones de la Fig. 3.65c en el rango de frecuencia $f = [340,350]$ Hz. En este rango el mensaje constituido por la voz humana tiene la mayoría de su contenido espectral. En el caso de la Fig. 3.66, las resoluciones espectrales son $\delta f = 0.4594$ Hz (Fig. 3.67a) y $\delta f = 0.3063$ Hz (Fig. 3.66b). Cualquier otra resolución produce resultados similares. Es claro que todas las frecuencias presentes en el

mensaje aparecen también en el espectro caótico (espectro denso). Una separación mediante filtros peine es entonces imposible.

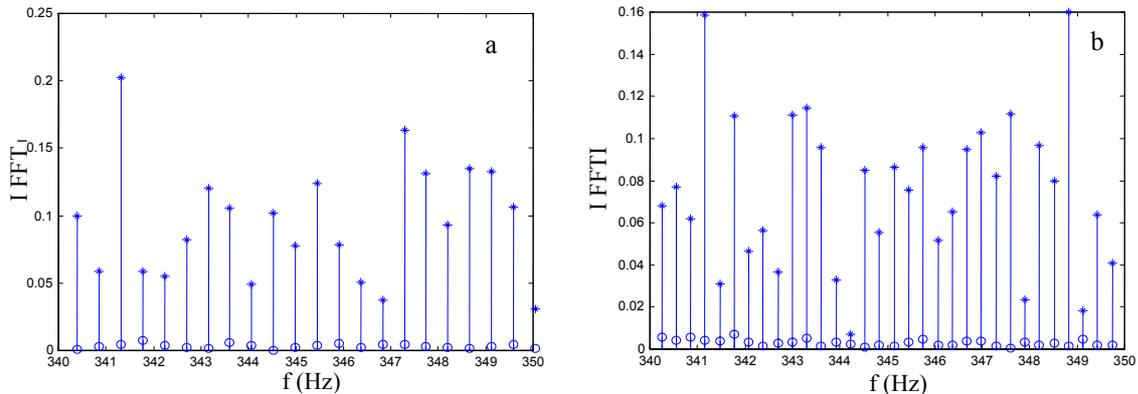


Fig. 3.66 Espectros de la señal enmascarada $1.45 x_3$ (triángulos) y el mensaje original (círculos) para $\Delta = 5$ (bien enmascarada). Las resoluciones en frecuencia son a) $\delta f = 0.4594$ Hz b) $\delta f = 0.3063$ Hz

En resumen, se puede concluir que el encriptado caótico producido en el esquema **APD no puede quebrarse en general mediante métodos espectrales**. Sólo en los casos particulares donde el enmascaramiento es pobre (el espectro de potencia del mensaje no se halla completamente cubierto por la máscara caótica) el análisis con wavelets es efectivo. Falla en cambio si la máscara ocupa la misma banda que el mensaje.

3.5.2 Señales enmascaradas en ACHN (ruido caótico aditivo)

Los casos que se presentan a continuación se analizan mediante wavelets *Daubechies* de orden 10 con 8 niveles de detalle y aproximación. Los filtros digitales que se emplean son del tipo *Butterworth* de 4^{to} orden. Los niveles de aproximación de las wavelets se incluyen sólo en los casos que la señal está mal enmascarada (no se recupera en ningún nivel de detalle). Los niveles de detalle marcados con recuadro azul indican la presencia de la señal buscada o de alguna de sus armónicas.

La Figura 3.67a muestra (en verde) el espectro de la señal senoidal de amplitud $A = 0.2 V_P$ y frecuencia digital $f_d = 0.075$ a la que se le ha adicionado la variable x_3 (azul) proveniente de un oscilador caótico de Rössler (Ec. 1.21). La Figura 3.67b indica como se recupera la información empleando el filtro pasabanda orden centrado en la frecuencia de la información y un ancho de banda $\Delta B = 0.025$.

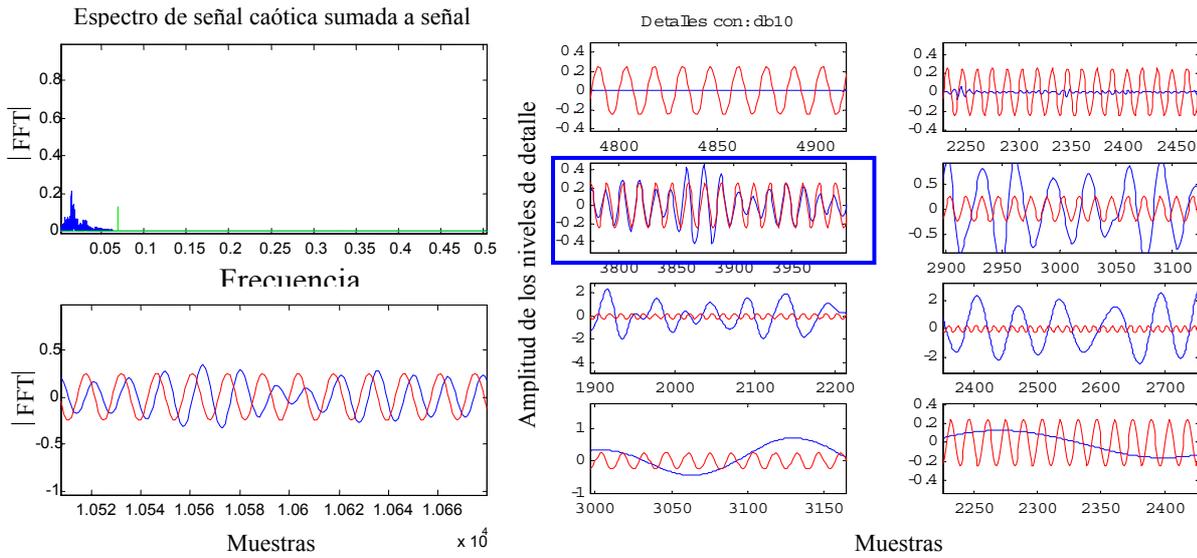


Fig. 3.67 a) Espectros de la señal compuesta (caos + senoidal) b) Señal recuperada mediante filtrado digital c) Nivel 3 de detalle de las wavelets db10 que recuperan la señal senoidal (azul), señal original (rojo)

Se observa que es posible recuperar sin problemas la señal senoidal. En la Figura 3.67c se muestran los niveles de detalle de la wavelet aplicada a la señal compuesta. El recuadro en azul indica el nivel que recupera la información. Analizando la ubicación espectral de la información y los rangos de frecuencia que cubren cada uno de los filtros de detalle (pasaltos) de las wavelets, a priori es posible establecer cual es el nivel de detalle que recupera la información. El nivel 1 cubre el rango de frecuencias digitales entre 0.25 y 0.5, el nivel 2 entre 0.125 y 0.25, el 3 entre 0.0625 y 0.125 etc. La frecuencia de interés se halla ubicada en 0.075 por consiguiente es rescatada por el nivel de detalle 3.

La Figura 3.68a muestra el espectro de la suma (en verde la ubicación del espectro de la senoidal de amplitud $A = 0.25 V$ y $f_d = 0.03$). En la Fig. 3.68b se muestra el resultado al filtrar la suma con un filtro centrado en la frecuencia $f_d = 0.03$ (donde se halla la señal a rescatar) y $\Delta B = 0.02$. La Fig. 3.68c muestra los niveles de aproximación y la Fig. 3.69 los de detalle de la wavelet empleada. Es imposible recuperar la información, cualquiera sea el nivel de aproximación o detalle, como era de prever del análisis espectral de la suma de las dos señales.

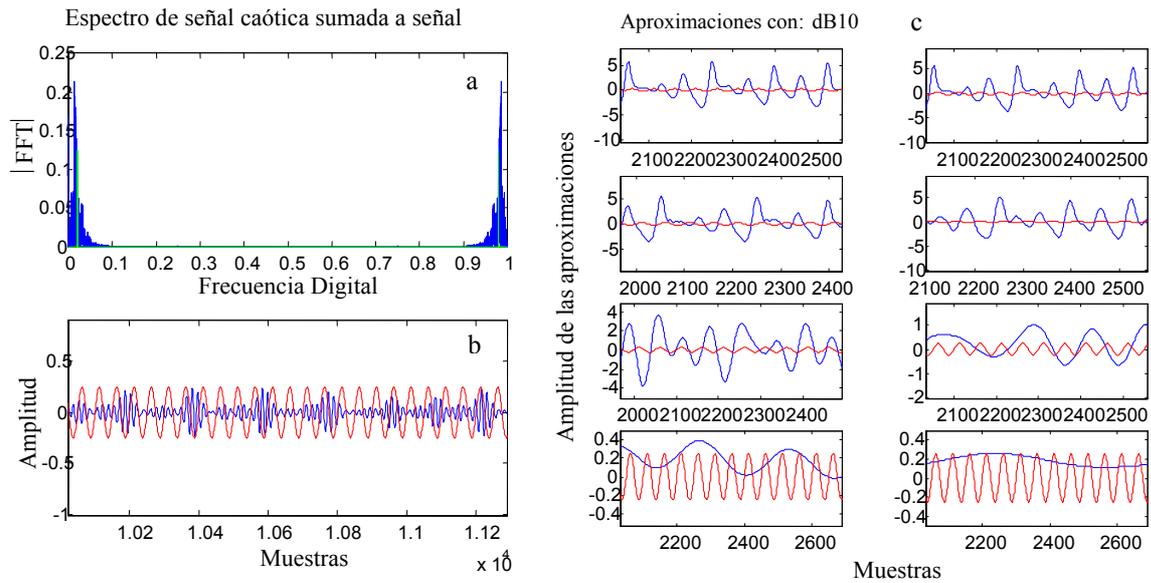


Fig. 3.68 a) Espectros de la señal compuesta (caos + senoidal) b) Señal recuperada mediante filtrado digital centrado en la frecuencia de la senoidal c) Niveles de aproximación de las wavelets db10 (en rojo señal original)

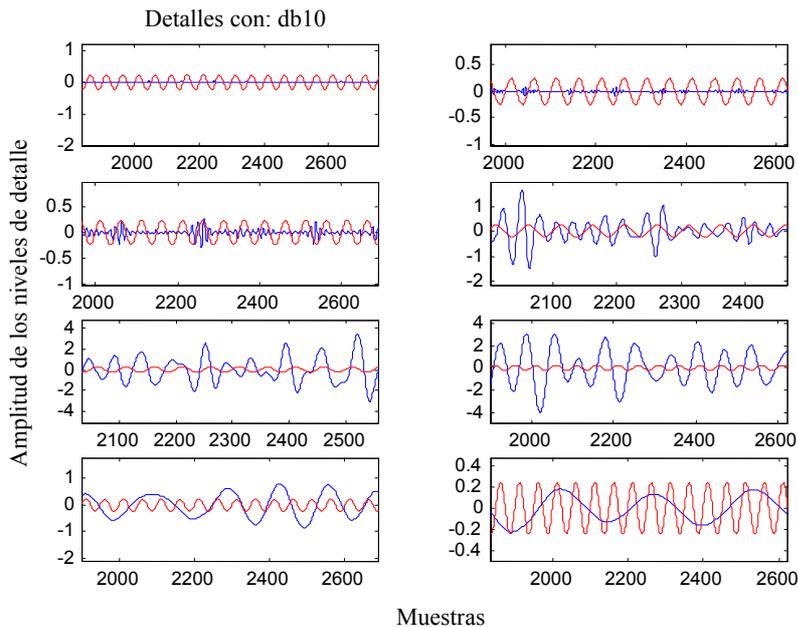


Fig. 3.69 Niveles de detalle de db10 (azul) para la señal suma de caos y senoidal (rojo)

En el caso que una onda cuadrada ($A = 0.4$ y $f_d = 0.05$) se suma a la señal caótica, de manera que los espectros sean los que muestra la Fig. 3.70a, (en verde el espectro de la onda cuadrada) es posible recuperarla empleando un filtro pasaaltos ($\Omega_c = 0.045$) que elimine el espectro del caos (Fig. 3.70b). Los resultados de aplicar wavelet a la suma se muestran en 3.70c.

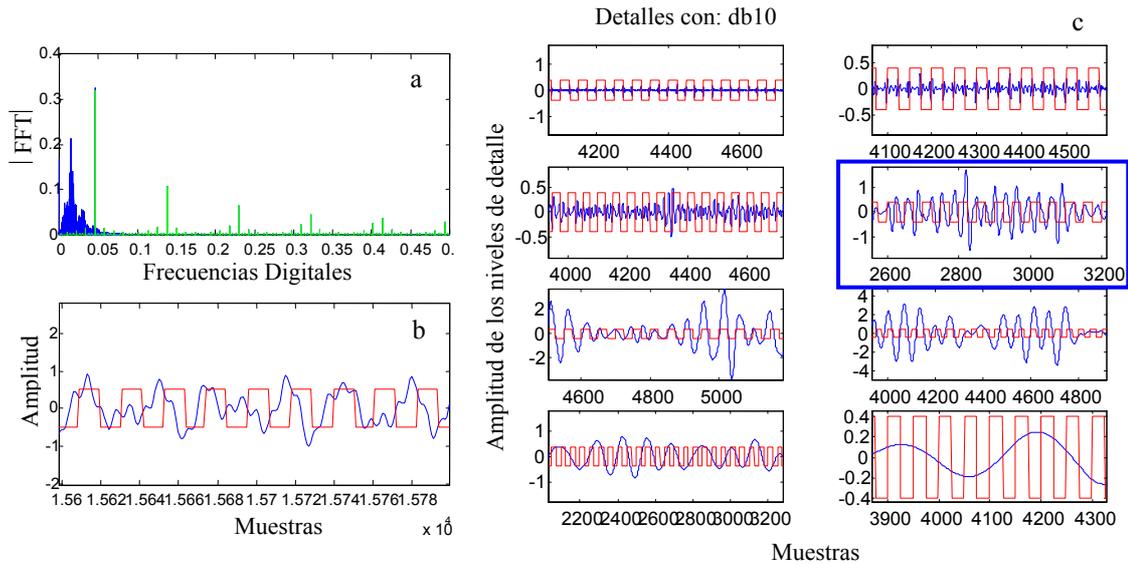


Fig. 3.70 Espectros de la señal compuesta (caos + cuadrada) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasaaltos c) Niveles de aproximación de las wavelets db10. (en rojo señal original)

Dado que el espectro de la onda cuadrada no es de banda limitada y está constituido por infinitas componentes armónicas (en la Fig. 3.70a puede verse el solapamiento espectral de la gráfica del espectro de la onda cuadrada), cada nivel wavelet recupera un conjunto de esas componentes espectrales. En este caso el nivel cuatro recupera aproximadamente (dado que está afectado por la presencia de la señal caótica) la componente fundamental de la cuadrada. Recuperar la onda cuadrada, en este caso, se reduce a sumar las contribuciones de los niveles que “aportan” alguna componente. El efecto es equivalente al obtenido por el filtro pasa-altos en la Fig. 3.70a.

La Fig. 3.71a, 3.71b, 3.71c y 3.72 muestran los resultados de aplicar filtrado y descomposición wavelet a una onda cuadrada ($A = 0.4 V$ y $f_d = 0.01$) enmascarada por la señal caótica. En este caso no es posible recuperar la onda cuadrada. Las componentes más significativas se hallan ocultas por el caos.

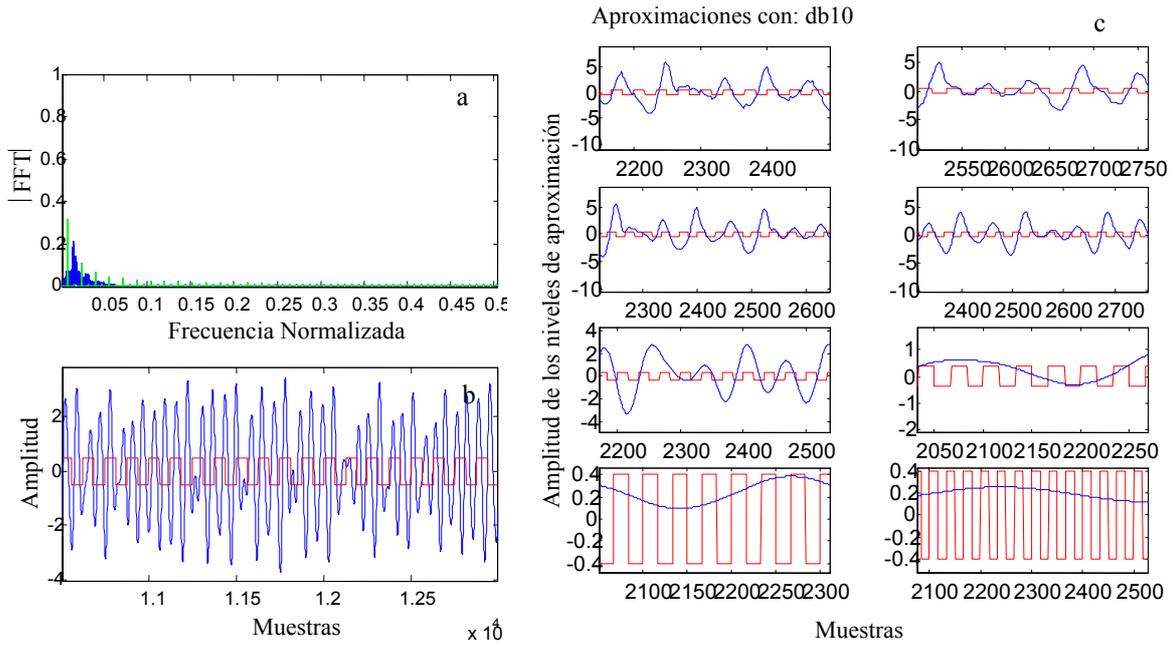


Fig. 3.71 Espectros de la señal compuesta (caos + cuadrada) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasaaltos c) Niveles de aproximación de las wavelets db10. (en rojo señal original)

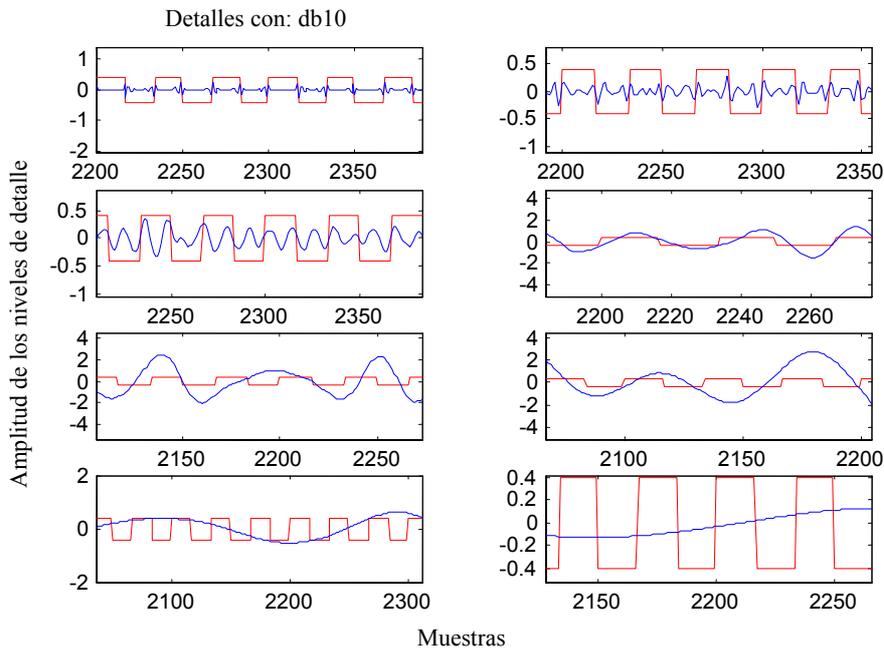


Fig. 3.72 Niveles de detalle wavelet para la onda cuadrada bien enmascarada por el caos

La onda triangular tiene el mismo contenido armónico que la onda cuadrada por lo tanto los resultados y las conclusiones son equivalentes y pueden verse en las Figuras 3.73 a 3.75.

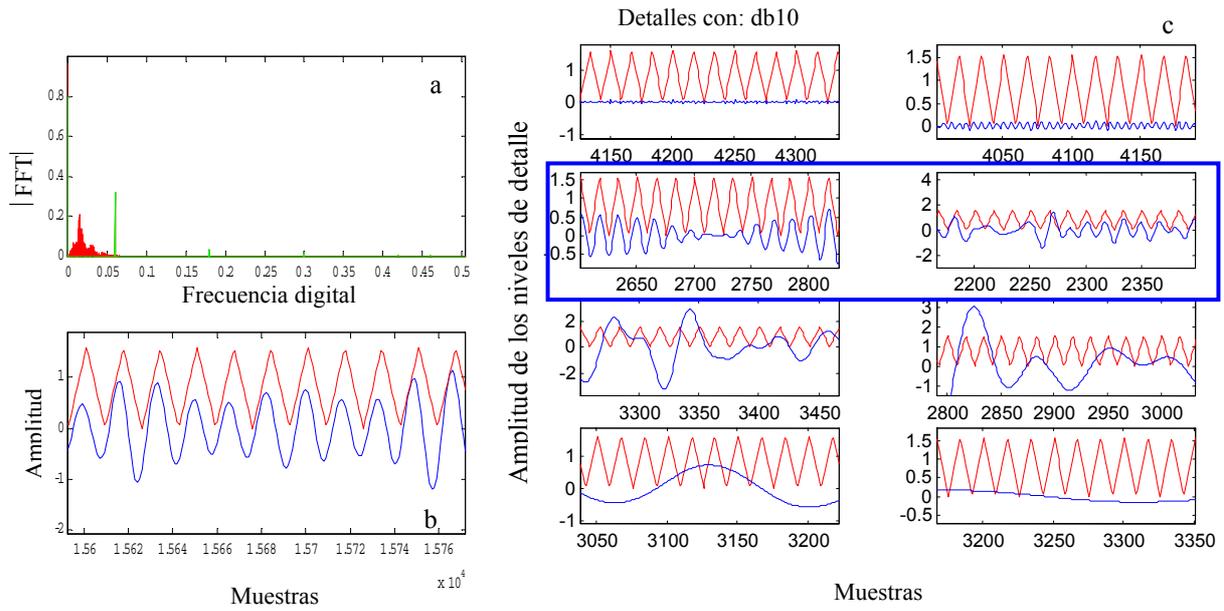


Fig. 3.73 Espectros de la señal compuesta (caos + triangular) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasaaltos c) Niveles de aproximación de las wavelets db10.(en rojo señal original)

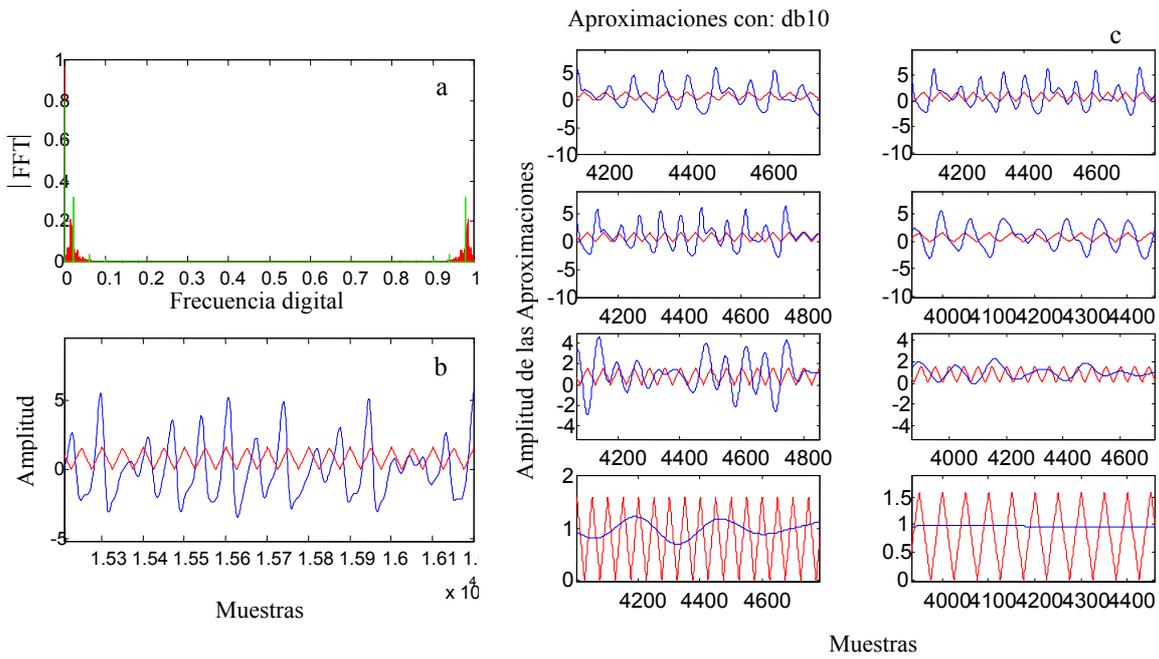


Fig. 3.74 Espectros de la señal compuesta (caos + triangular) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasaaltos c) Niveles de aproximación de las wavelets db10.(en rojo señal original)

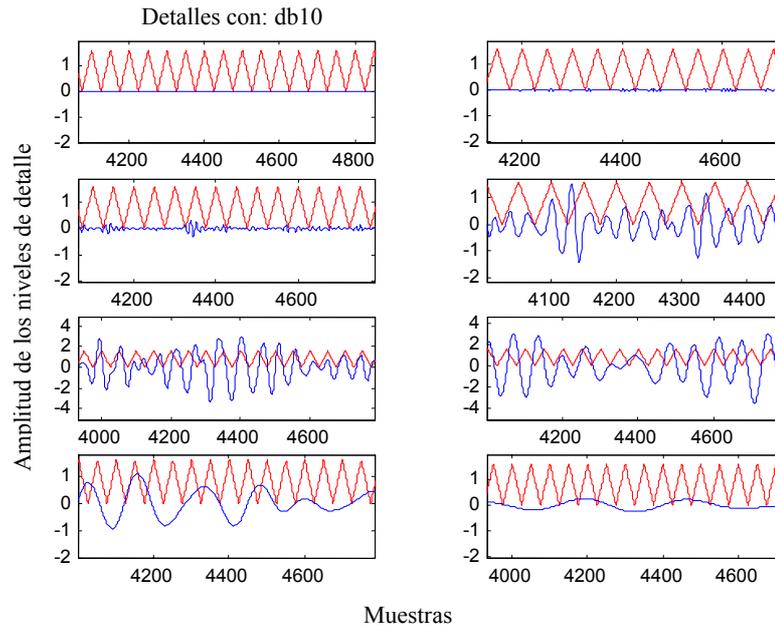


Fig. 3.75 Niveles de detalle wavelet para la onda triangular bien enmascarada por el caos

El caso de la señal de voz tiene características similares a las de las señales poliarmónicas (cuadrada y triangular). Si el espectro se halla separado del espectro caótico se puede recuperar fácilmente mediante un simple filtrado pasa-altos o con los filtros de detalle de las wavelet. La señal de voz empleada es la que se usó en el esquema APD, la de un hombre diciendo “*this is a 16*”. Resultados típicos se muestran en las figuras 3.76 y 3.77.

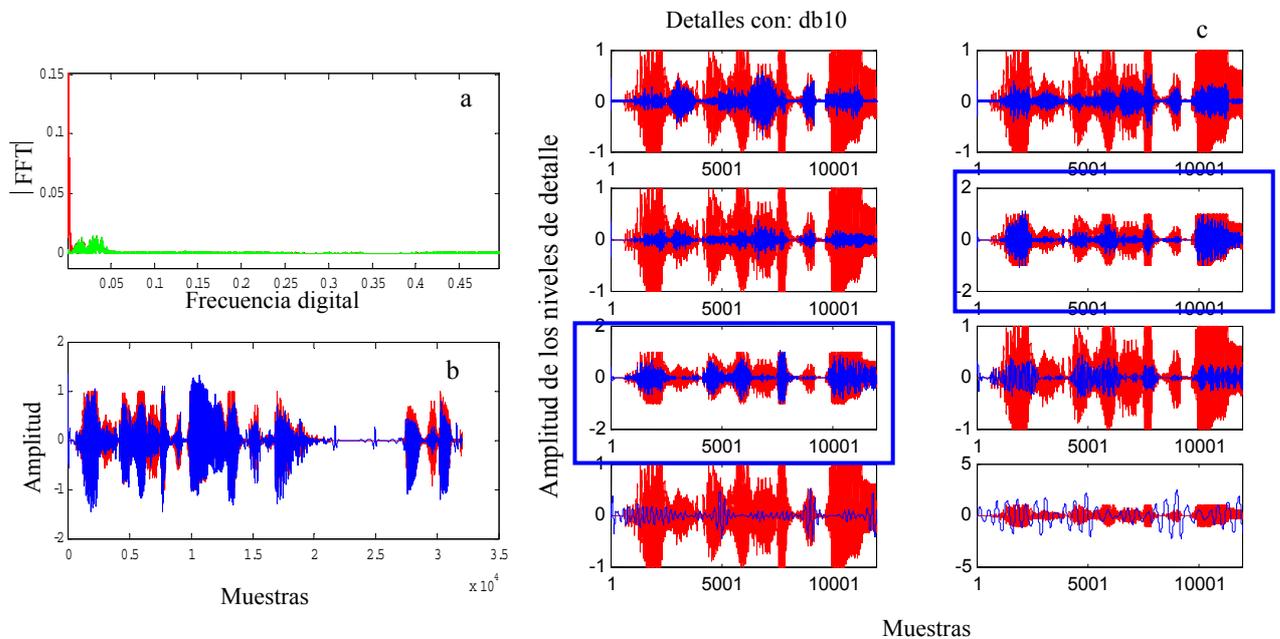


Fig. 3.76 Espectros de la señal compuesta (caos + voz) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasaaltos c) Niveles de detalle de las wavelets db10.(en rojo señal original)

En la Fig. 3.76 a se muestran los espectros para el caso en que el enmascaramiento es pobre ($\Delta = 100$) y se le superpone la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-banda Butterworth de 4^{to} orden con frecuencias de corte inferior $f_{ci} = 345 \text{ Hz}$ y $f_{cs} = 1033 \text{ Hz}$. Con estas frecuencias de corte se asegura que la señal caótica queda fuera de la banda pasante del filtro. Empleando la función *filter* de Matlab[®] se filtra la señal transmitida s y se obtiene el resultado mostrado en la Fig. 3.76b. Como se observa, el registro de voz se recupera con mínima distorsión. Se puede verificar que en el caso bien enmascarado ($\Delta = 5$), las limitaciones son las mismas que con las wavelets.

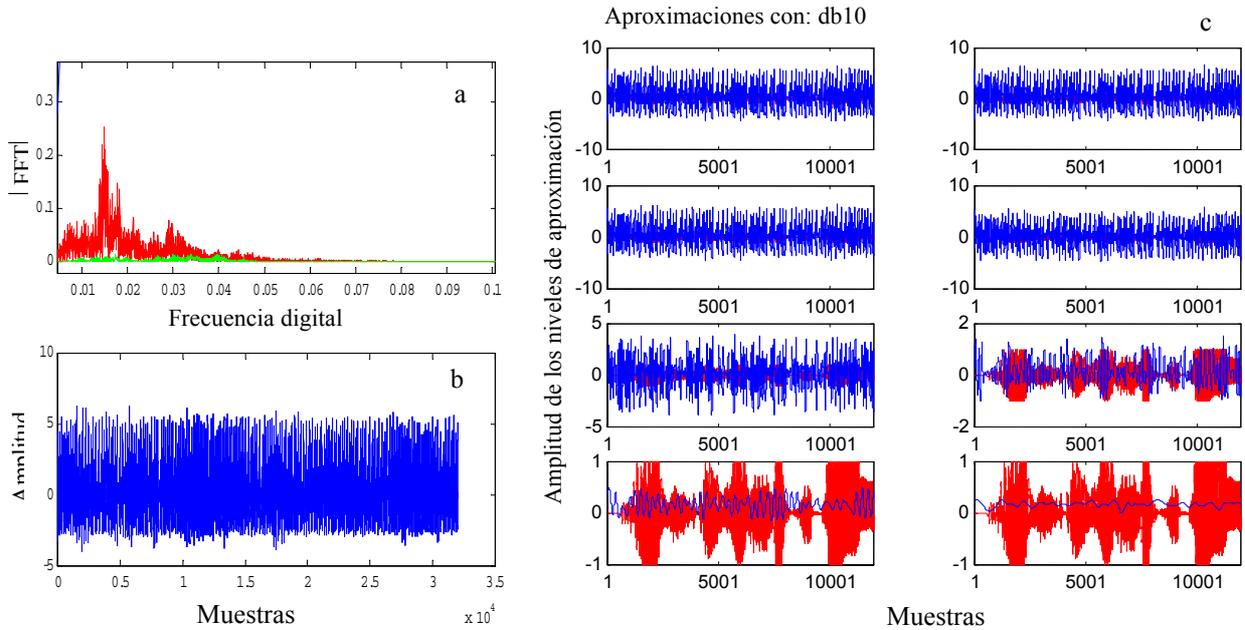


Fig. 3.77 Espectros de la señal compuesta (caos + voz) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de aproximación de las wavelets db10 (en rojo señal original)

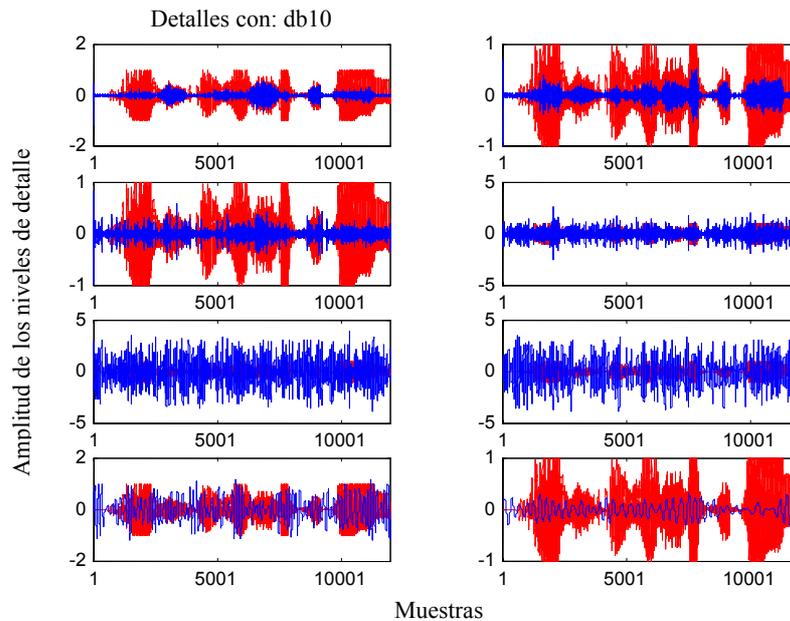


Fig. 3.78 Niveles de detalle wavelet para la señal de voz bien enmascarada por el caos

Cuando el espectro de la señal de voz está cubierto por la máscara caótica, es imposible recuperar la información ya sea mediante filtrado digital o mediante wavelets.

3.5.3 Señales enmascaradas con AWGN

Los casos que se presentan a continuación se analizan mediante wavelets *Daubechies* de orden 10 con 8 niveles de detalle y aproximación. Los filtros digitales que se emplean son del tipo Butterworth de 4^{to} orden. Los niveles de aproximación de las wavelets se incluyen sólo en los casos que la señal está mal enmascarada (no se recupera en ningún nivel de detalle). Los niveles de detalle marcados con recuadro azul indican la presencia de la señal buscada o de alguna de sus armónicas. Se incluyen además las funciones de transferencia ($|H(w)|$, en azul) de los filtros pasabanda empleados para reducir la potencia de ruido. La señal senoidal tiene una amplitud $A = 0.2 V$ y una frecuencia digital $f_d = 0.025$.

La potencia de ruido (σ^2) es variable para obtener un buen y mal enmascaramiento de la señal. La Fig. 3.79a muestra los espectros de la señal senoidal y la del ruido. En este caso es posible rescatar la señal empleando el proceso de filtrado convencional (Fig. 3.79b) y el análisis wavelet (Fig. 3.79c). El ruido se ajusta en este caso para que $\sigma = 1 V$.

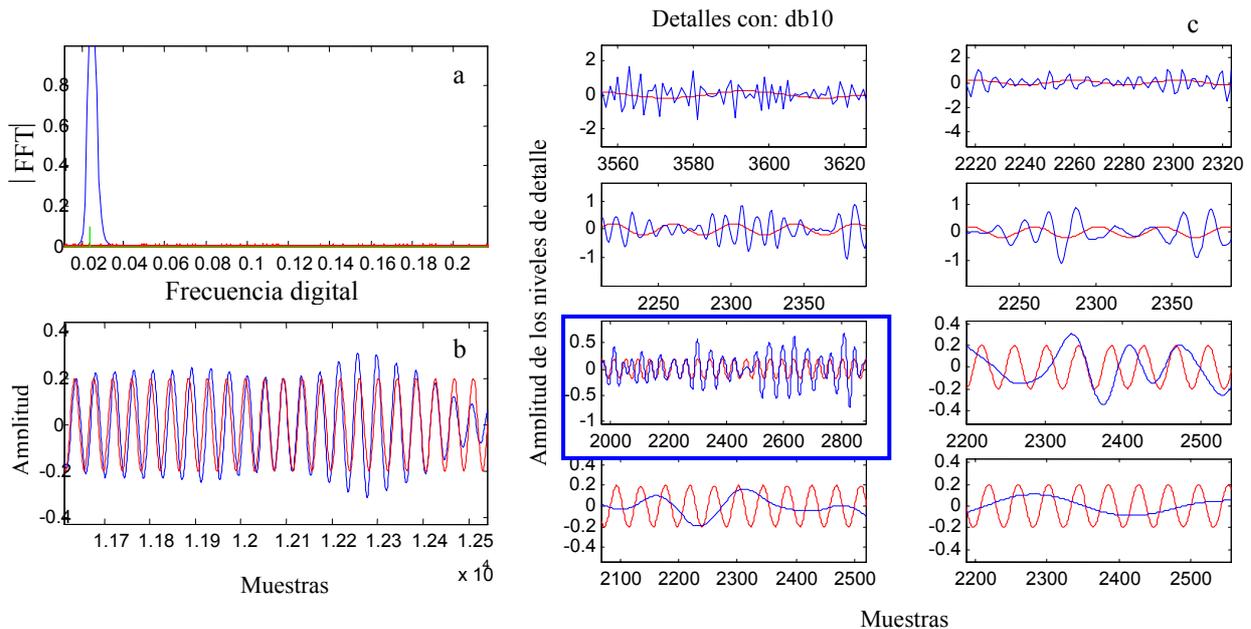


Fig. 3.79 Espectros de la señal compuesta (senoidal + ruido) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de detalle de las wavelets db10 (en rojo señal original)

A pesar que el nivel de ruido supera ampliamente a la señal, es posible estimar (con mayor error) la amplitud de esta. En el caso del análisis wavelet, el nivel 5 de detalle (marcado en azul, Figura 3.80) indica la presencia de la señal en esa banda de frecuencias. Es posible estimar, con la información en este nivel, la frecuencia y amplitud de la senoidal

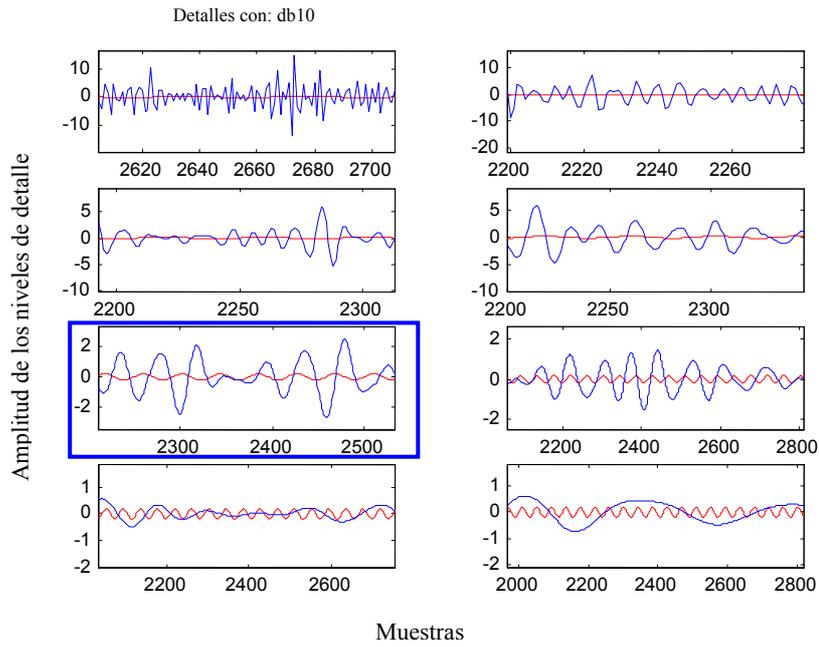


Fig. 3.80 Niveles de detalle wavelet para la señal senoidal bien enmascarada por el ruido

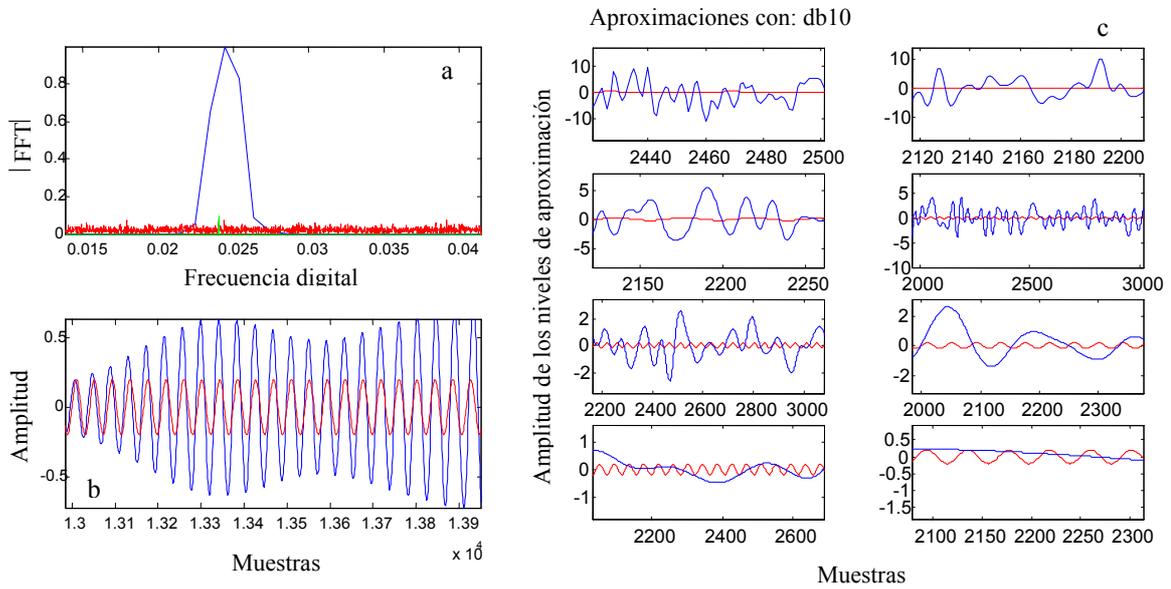


Fig. 3.81 Espectros de la señal compuesta (senoidal + ruido) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de aproximación de las wavelets db10. (en rojo señal original)

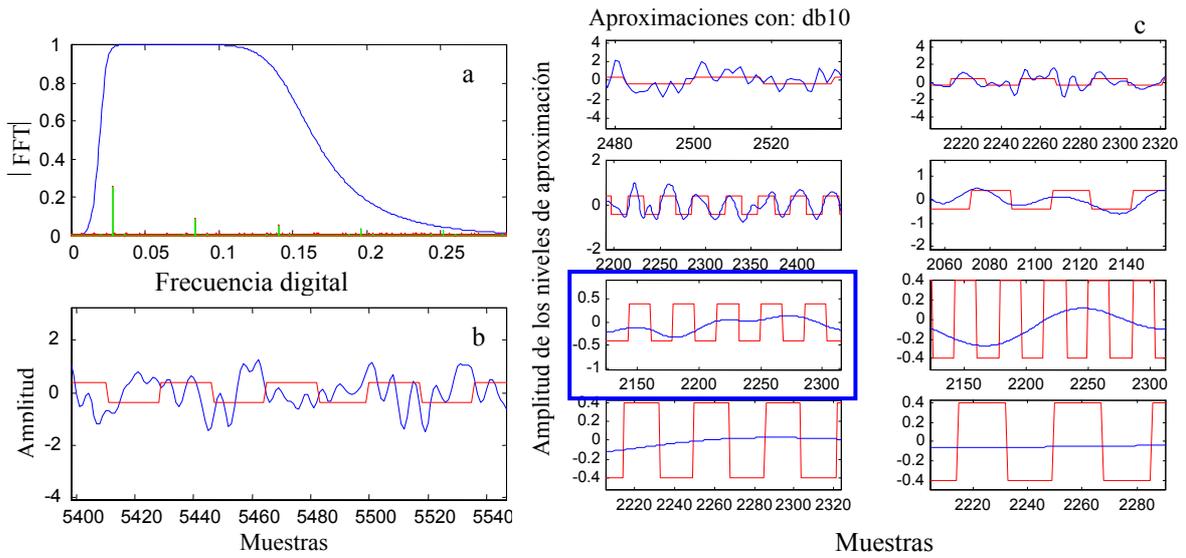


Fig.3.82 Espectros de la señal compuesta (cuadrada + ruido) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de aproximación de las wavelets db10.(en rojo señal original)

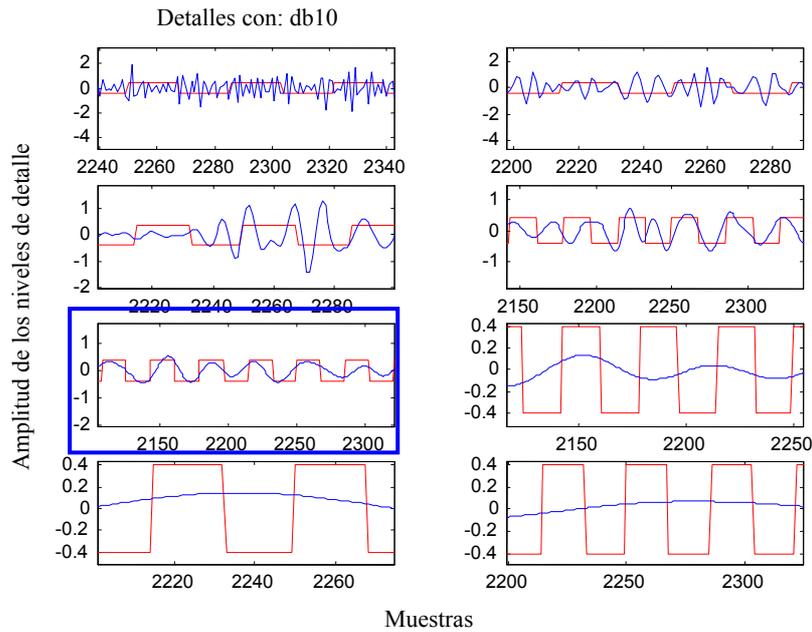


Fig. 3.83 Niveles de detalle wavelet para la onda cuadrada mal enmascarada por el ruido

La Figura 3.82 corresponde a una onda cuadrada mal enmascarada ($A = 0.4 V$; $\sigma = 1 V$). Se observa en la Fig. 3.82a, que el empleo de un filtro pasabanda con un ancho de banda suficiente para que abarque la frecuencia fundamental y sus armónicas principales, implica que no es posible realizar un filtrado adecuado para reducir el nivel de ruido como ocurría en el caso de la señal senoidal. La presencia de ruido en la banda pasante afecta la forma en que se recupera la onda cuadrada (Fig. 3.82b). En el caso del análisis wavelet (Fig. 3.82c y 3.83) los niveles 3 de aproximación y 5 de detalle recuperan la frecuencia fundamental de la onda cuadrada.

En el caso $\sigma = 6 V$ no puede recuperarse información respecto de la señal ni con filtrado convencional ni con análisis wavelet. (Figuras 3.84 y 3.85)

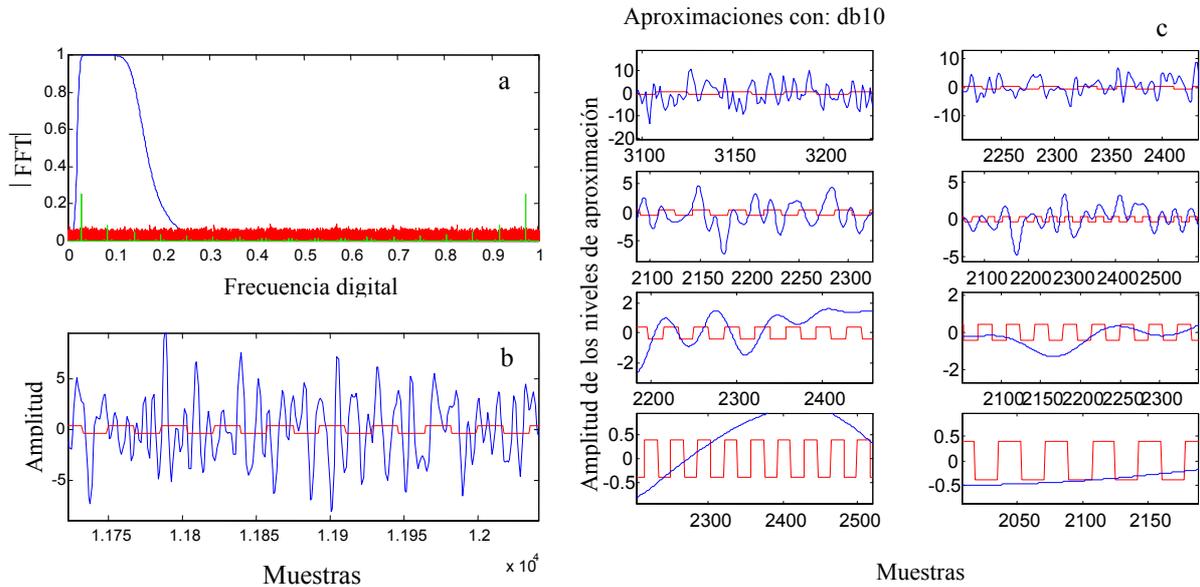


Fig. 3.84 Espectros de la señal compuesta (cuadrada + ruido) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de aproximación de las wavelets db10. (en rojo señal original)

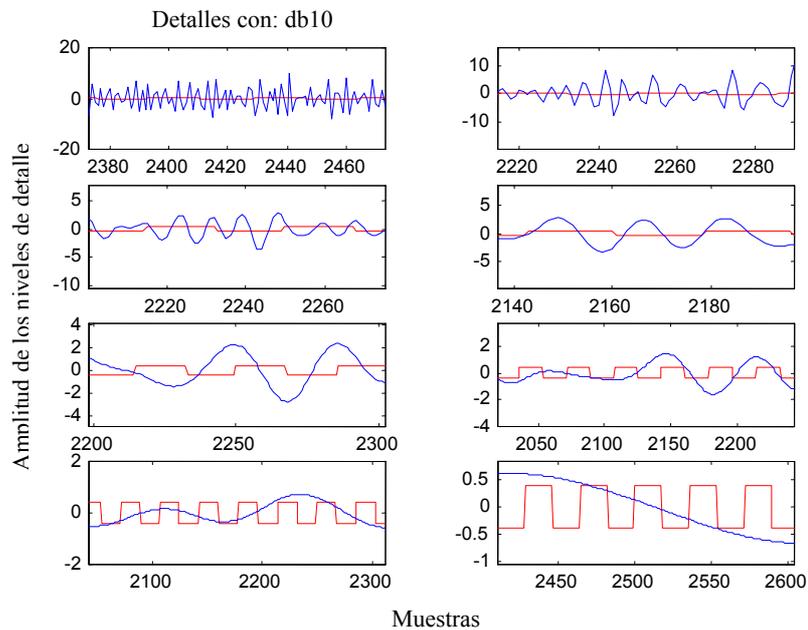


Fig. 3.85 Niveles de detalle wavelet para la onda cuadrada bien enmascarada por el ruido

En forma similar una onda triangular puede recuperarse mediante filtrado digital y en los niveles 2, 3 y 4 de aproximación y 5 de detalle de las wavelets (Figura 3.86 y Figura 3.87) si no está bien enmascarada ($A_p = 0.75 V$, $\sigma = 1 V$).

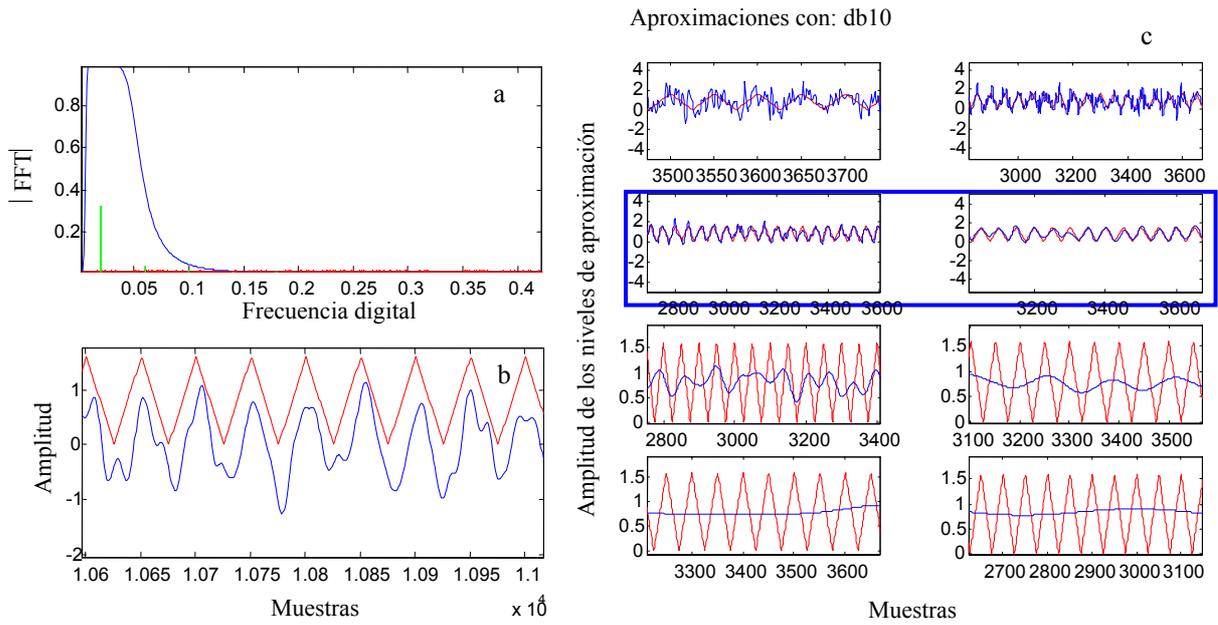


Fig. 3.86 Espectros de la señal compuesta (triangular + ruido) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de aproximación de las wavelets db10.(en rojo señal original)

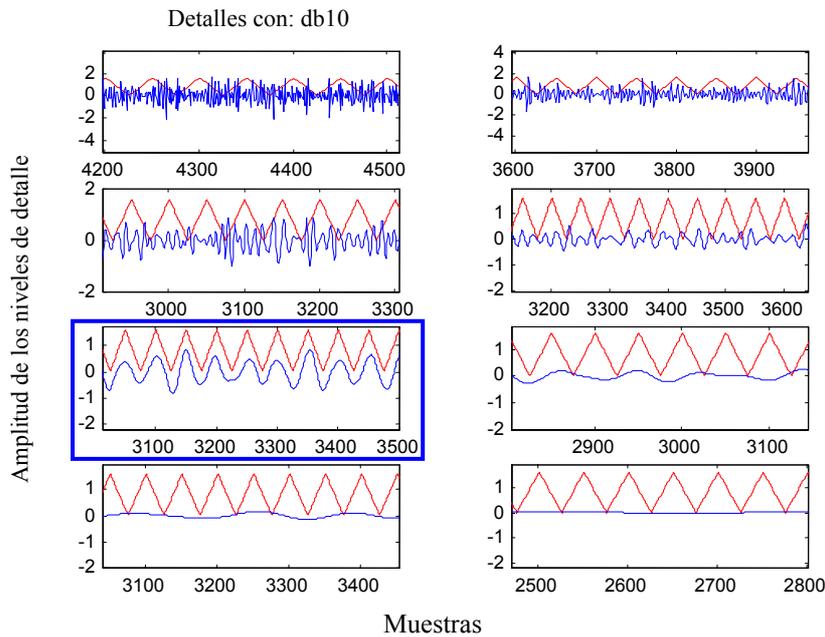


Fig. 3.87 Niveles de detalle wavelet para la onda triangular mal enmascarada por el ruido

La onda triangular bien enmascarada ($A = 0.175 V$, $\sigma = 3 V$) por AWGN no puede recuperarse mediante filtrado digital ni por análisis wavelet (Figuras 3.88 y 3.89).

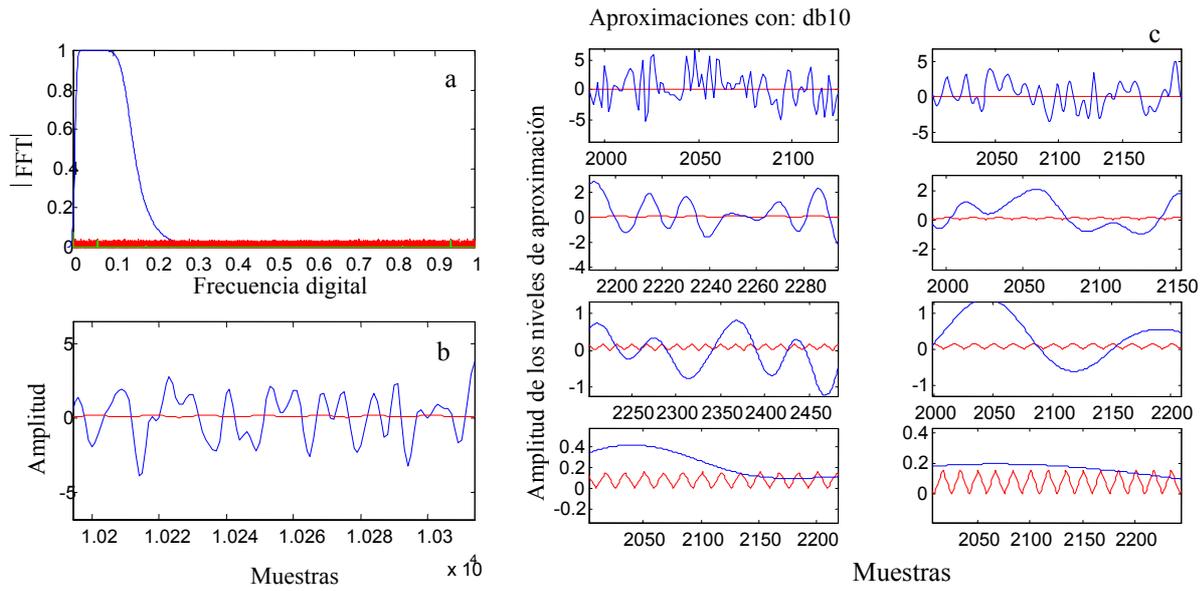


Fig. 3.88 Espectros de la señal compuesta (triangular + ruido) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de aproximación de las wavelets db10. (en rojo señal original)

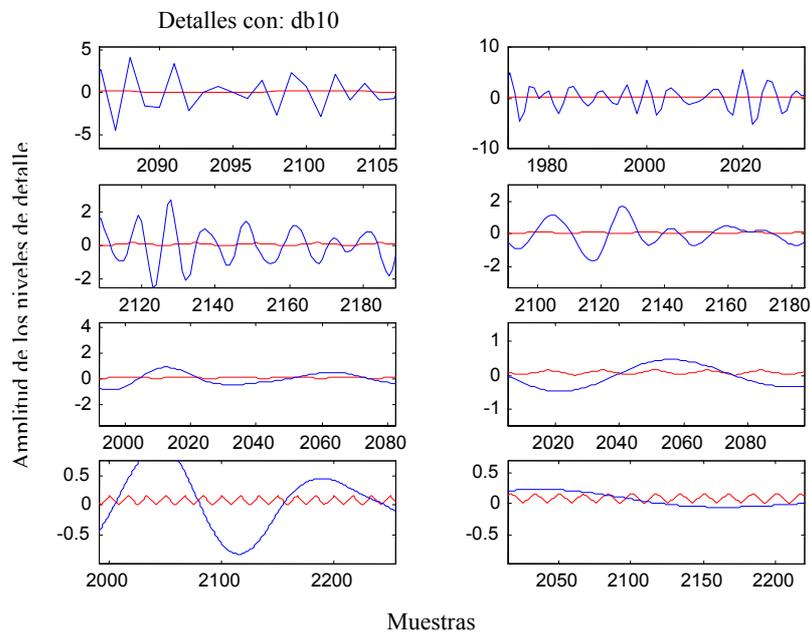


Fig. 3.89 Niveles de detalle wavelet para la onda triangular bien enmascarada por el ruido

La señal de voz presentada previamente (“this is a 16”) enmascarada con AWGN de $\sigma = 1 V$ puede recuperarse mediante un filtrado tradicional (Figura 3.90a) y en el nivel 4 de aproximación y el 5 de detalle de las wavelets.

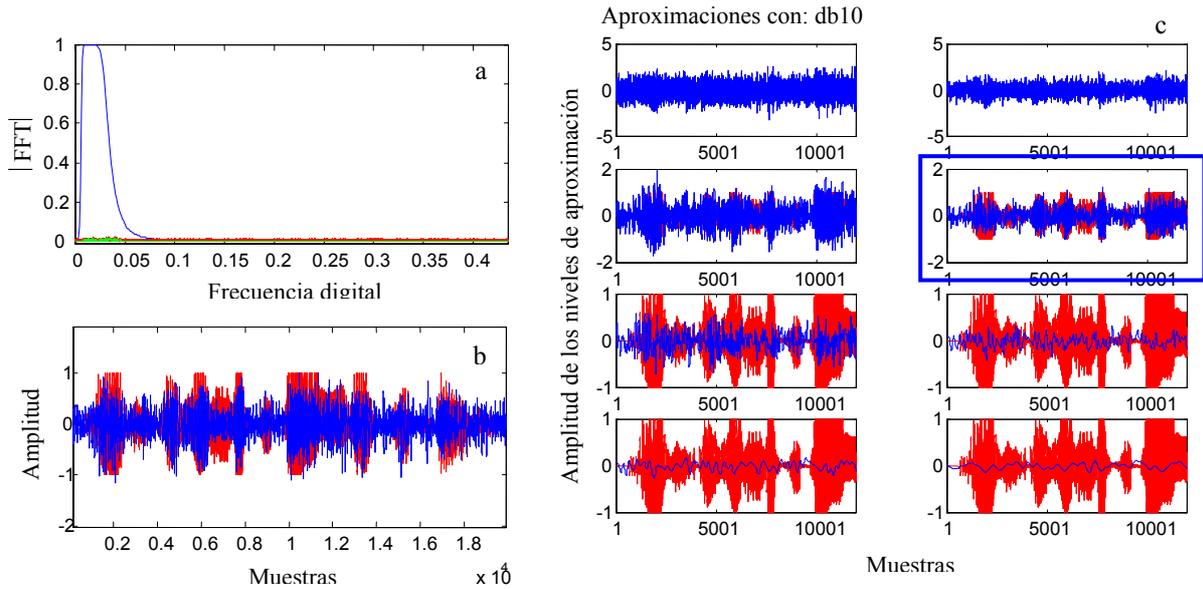


Fig. 3.90 Espectros de la señal compuesta (voz + ruido) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de aproximación de las wavelets db10. (en rojo señal original)

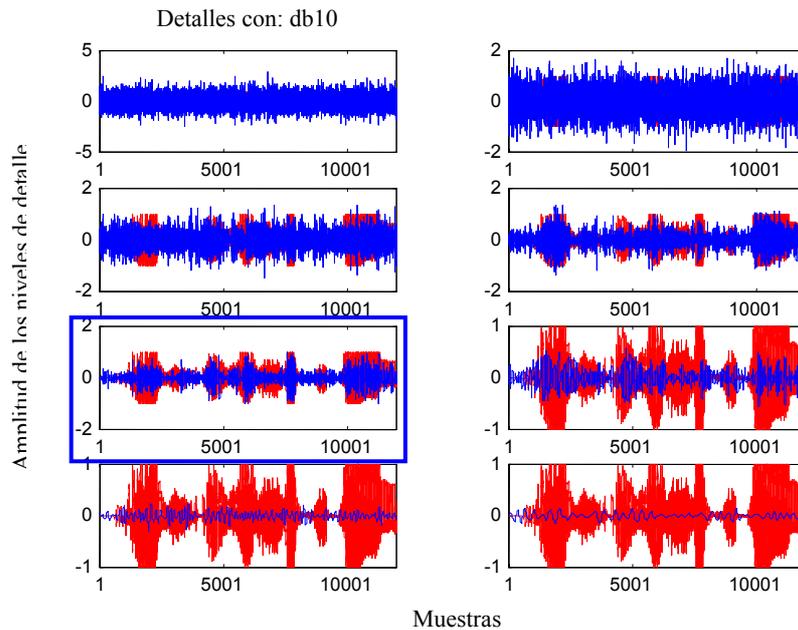


Fig. 3.91 Niveles de detalle wavelet para la señal de voz mal enmascarada por el ruido

En cambio si se eleva el ruido a $\sigma = 3 V$, no se puede recuperar la señal de voz mediante filtrado digital (Figura 3.93a) o empleando el análisis wavelet (Figuras 3.92b y 3.93). Dado que la señal de voz tiene un ancho de banda que cubre varios cientos de Hertz es imposible efectuar un filtrado selectivo para reducir la presencia de ruido en la banda seleccionada. Esta situación es similar a lo ocurrido con las señales poliarmónicas.

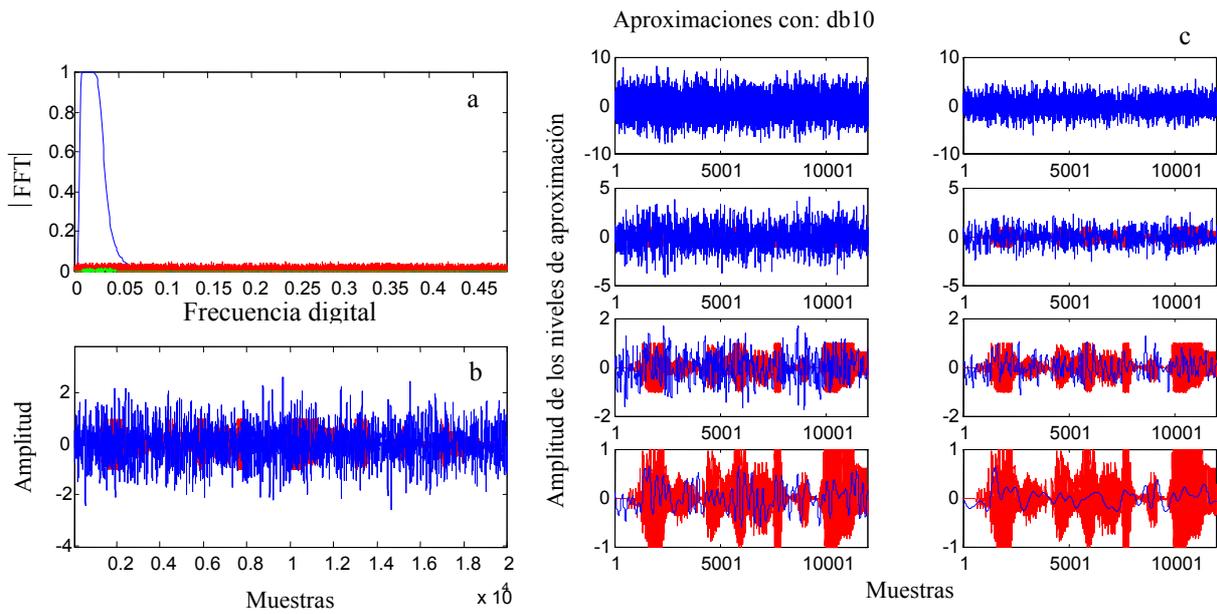


Fig. 3.92 Espectros de la señal compuesta (voz + ruido) b) Señal recuperada mediante filtrado digital pasabanda c) Niveles de aproximación de las wavelets db10 (en rojo señal original)

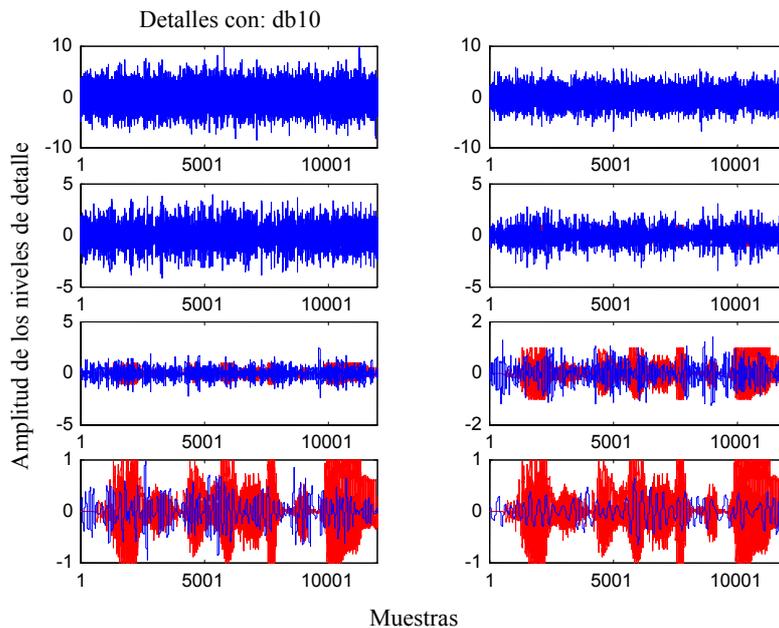


Fig. 3.93 Niveles de detalle wavelet para la señal de voz bien enmascarada por el ruido

En este caso las wavelets no son lo suficientemente selectivas (a la frecuencia elegida) para recuperar la señal. Los resultados obtenidos para el esquema *APD* (extensivos al caso de la suma de la información a la señal caótica) empleando *MRA* con wavelets pueden conseguirse empleando cualquier filtro digital.

3.6 Conclusiones

En este capítulo se han explorado diversas alternativas para el rescate de señales inmersas en ruido caótico y estocástico. La combinación de la función autocorrelación y FFT con ventana autoajutable ha demostrado ser efectiva en el rescate de señales armónicas y poliarmónicas (en un amplio rango de frecuencias) sumergidas en AWGN aún en condiciones altamente desfavorables como lo es una relación señal a ruido de hasta -15 dB. Esta técnica ha demostrado también eficacia en la estimación de frecuencias en el caso de señales armónicas sumergidas en ruido caótico de banda ancha, dado que en este caso la función autocorrelación del ruido caótico es similar a la del ruido estocástico (mapa de Henon). La estimación de la amplitud presenta un error mayor que en el caso del ruido estocástico, puesto que el estimador empleado es el adecuado para el ruido estocástico. Este método puede implementarse sencillamente en una PC equipada con una placa DSP para producir estimaciones de amplitud y frecuencia en tiempo real con mínimo error (del orden del establecido por la cota de Cramer Rao).

Se mostró también que el receptor gemelo es un filtro ideal que recupera siempre cualquier tipo de señal ya sea que ésta se sume a la portadora caótica o bien que se incluya en la dinámica del oscilador (*APD*) aún en presencia de AWGN. La construcción del receptor gemelo presenta la dificultad de conocer con precisión el tipo de sistema transmisor y los parámetros que lo gobiernan. Esta información sólo la dispone el receptor autorizado. Para identificar el tipo de sistema empleado en el enmascaramiento de la señal, se puede efectuar una reconstrucción del atractor utilizando las técnicas basadas en el Teorema de Takens. El aspecto del atractor es una firma distintiva de cada sistema. Determinar exactamente los parámetros que gobiernan la dinámica del transmisor es una tarea que requiere un proceso iterativo de prueba (por ejemplo, con una computadora) sobre todos los posibles conjuntos de valores que generan el comportamiento caótico y obtenerlos es, indefectiblemente, una cuestión de tiempo. Una vez identificado el sistema y conseguidos los parámetros de transmisión se construye el receptor gemelo con el que puede eliminarse la máscara caótica.

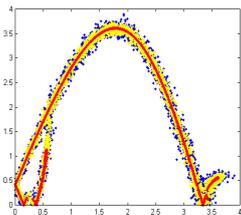
El empleo de la Transformada Wavelet, como el de cualquier filtro digital, ha demostrado ser efectivo en aquellos casos que la máscara caótica tiene un espectro que no se halla superpuesto al del mensaje a recuperar. En el caso de que la señal esté sumergida en AWGN el proceso de recuperación depende del nivel de ruido y de la frecuencia de la señal. La Transformada Wavelet tiene mejores niveles de resolución (filtros de menor ancho de banda) para los niveles de detalle más altos (frecuencias más bajas), esto le permite reducir los niveles de potencia de ruido y por lo tanto aumentan las posibilidades de recuperar la señal bajo análisis.

Se ha presentado también un método que permite desenmascarar señales ocultas en una portadora caótica empleando reconstrucción de atractores. Se han analizado las limitaciones del método comprobándose su validez en el rango de bajas frecuencias y para pequeños niveles de la señal (cubiertas por el espectro del caos). Para frecuencias superiores a la de la máscara caótica este método falla completamente. Pero esta situación puede abordarse con muy buenos resultados empleando, por ejemplo, Transformada Wavelet o filtrado digital convencional.

El análisis desarrollado en este capítulo confirma que existen diversas alternativas para eliminar una máscara caótica en un sistema de transmisión, y esta forma de enmascaramiento no puede considerarse como sinónimo de comunicación segura.

A continuación se resumen, en un cuadro comparativo, los resultados obtenidos al aplicar los métodos presentados para desenmascarar señales inmersas en ruido caótico y/o estocástico.

Método	Señales sumergidas en AWGN	Señales sumergidas en caos aditivo	Señales sumergidas en caos, en configuración APD	Señales sumergidas en caos y AWGN
Autocorrelación y FFT con ventana autoajutable	Recupera señales periódicas (S/N > -15 dB). Amplio rango de frecuencias.	Recupera señales periódicas si el caos tiene una función autocorrelación similar a la del ruido estocástico.	Recupera señales periódicas si el caos tiene una función autocorrelación similar a la del ruido estocástico.	Recupera señales periódicas si el caos tiene una función autocorrelación similar a la del ruido estocástico.
Receptor gemelo	-----	Recupera siempre	Recupera siempre	Recupera siempre.- El nivel de ruido no debe afectar la dinámica del receptor
Reconstrucción de atractores	-----	Recupera señales de pequeña amplitud y baja frecuencia (hasta el rango cubierto por el espectro caótico).	Recupera señales de pequeña amplitud y baja frecuencia (hasta el rango cubierto por el espectro caótico).	El nivel de ruido puede frustrar la reconstrucción
Wavelets- (Algoritmo de Mallat)	Recupera señales periódicas de baja frecuencia si los niveles de ruido son bajos.	Recupera cualquier señal si los espectros del caos y la señal están separados	Recupera cualquier señal si los espectros del caos y la señal están separados	Recupera cualquier señal si los espectros del caos y la señal están separados (bajos niveles de ruido estocástico)



Capítulo 4

Investigaciones en curso y Conclusiones

4.0 Introducción

Desde la aparición de la teoría del caos se han desarrollado distintas herramientas para analizar y caracterizar cualitativa y cuantitativamente las señales caóticas. Esas herramientas fueron clasificadas y descritas en el Capítulo 2. En este capítulo se investiga el uso de métodos de análisis alternativos generados a partir de la combinación de la teoría cualitativa de sistemas dinámicos y la mecánica estadística.

En particular se emplea una versión del Mapa de Poincaré, llamado Mapa de Lorenz o de retorno, para convertir un sistema caótico continuo en un mapa unidimensional, en combinación con medidas de complejidad que recientemente han mostrado ser buenos cuantificadores de la aleatoriedad de sistemas complejos [Martín *et al.*, 2003; González *et al.*, 2003; González *et al.*, 2004; González *et al.*, 2005; Larrondo *et al.*, 2003; Larrondo *et al.*, 2004; Larrondo *et al.*, 2005]. Los resultados que se presentan han sido publicados parcialmente [Fernández *et al.*, 2005] y forman parte de las líneas de trabajo que han surgido como continuación de la tesis. El capítulo finaliza con las conclusiones.

4.1 El Mapa de Lorenz o Mapa de Retorno de un sistema caótico continuo

Existen varias estrategias para construir un Mapa de Lorenz de un sistema dinámico. En el caso de este trabajo se lo construye a partir del conjunto de mínimos locales de la serie temporal de una de las variables dinámicas del sistema. Además, ese vector de valores se utiliza para obtener otros cuantificadores del comportamiento del sistema.

La Figura 4.1 muestra el diagrama de bifurcaciones de un oscilador de Rössler con parámetros fijos ($\alpha = 0.45$, $\beta = 2$) y parámetro de control r (γ). El rango de valores de r elegido varía entre 2.5 y 7.3 y permite visualizar distintas dinámicas en el sistema. Puede observarse que el diagrama de bifurcaciones presenta muchas similitudes con el correspondiente a un mapa logístico y pueden definirse con él todos los parámetros empleados usualmente en la teoría de mapas unidimensionales. En particular el valor $r = 4$, adoptado en todos los casos estudiados en esta tesis, corresponde a comportamiento caótico robusto del sistema.

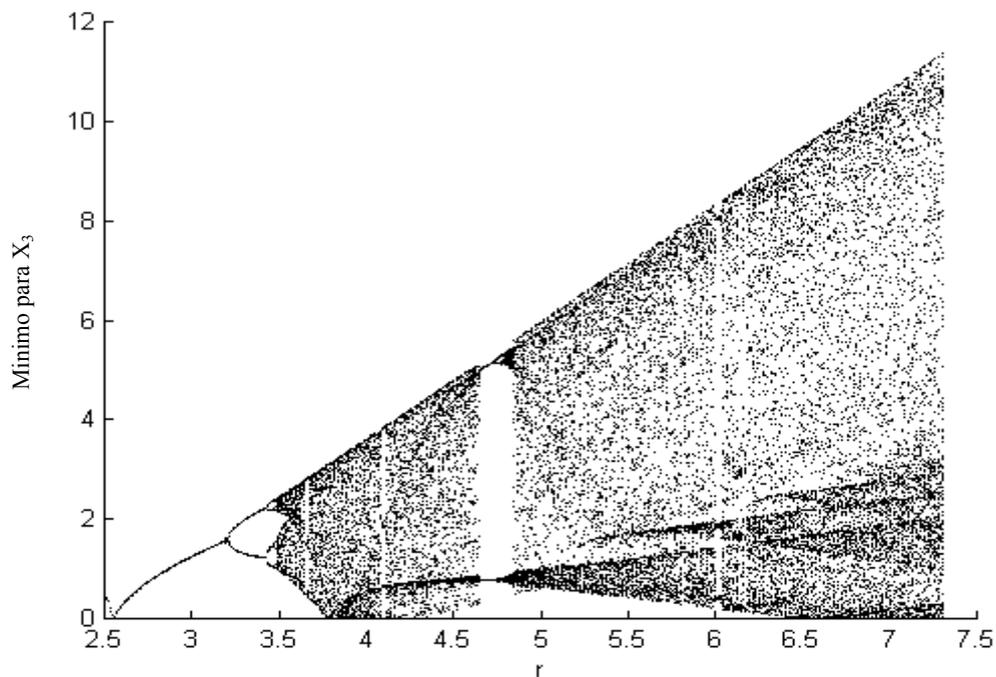


Fig. 4.1 Diagrama de Bifurcaciones de los mínimos del Oscilador de Rössler para diferentes valores de r

El vector de mínimos locales y el mismo vector, desplazado en un lugar, se utilizan para construir el mapa de retorno de los mínimos, que se representa en un gráfico 2D y que es también denominado Mapa de Lorenz del sistema. En particular interesa investigar cómo se ve modificado ese mapa si se combina la señal caótica con una señal de información ya sea en forma aditiva o bien en esquema APD.

En la Fig. 4.2 se muestra el resultado obtenido, con y sin señal, en el caso de un esquema APD. La línea llena en color rojo indica mapa de retorno sin señal y es interesante observar que es también muy similar al mapa logístico. En particular tiene la forma parabólica que lo hace perteneciente a la misma clase de universalidad. En los otros dos casos se ha utilizado señales sinusoidales de igual frecuencia $f = 1000$ Hz y dos valores de amplitud, 0.25 y 0.15 V.

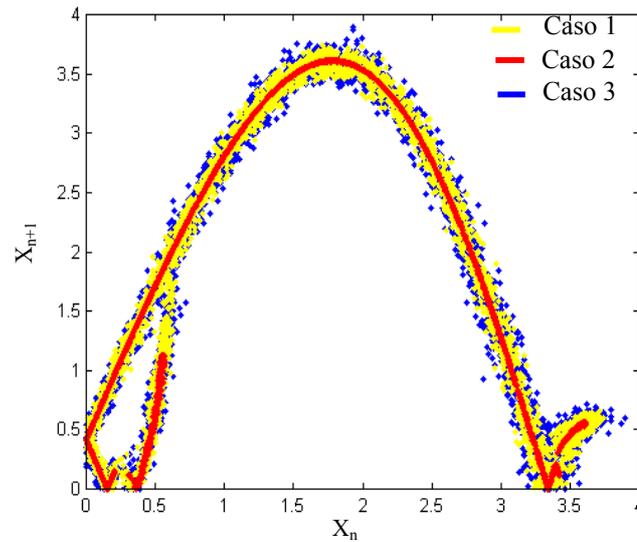


Fig. 4.2 Mapa de Lorenz del oscilador de Rössler con $r=4$ (esquema APD).
 Caso 1: $i=0.15\text{sen}(2\pi 1000t)$; caso 2: $i=0$; caso 3: $i=0.25\text{sen}(2\pi 1000t)$.

En la Fig. 4.3 se muestran los espectros para los tres casos.

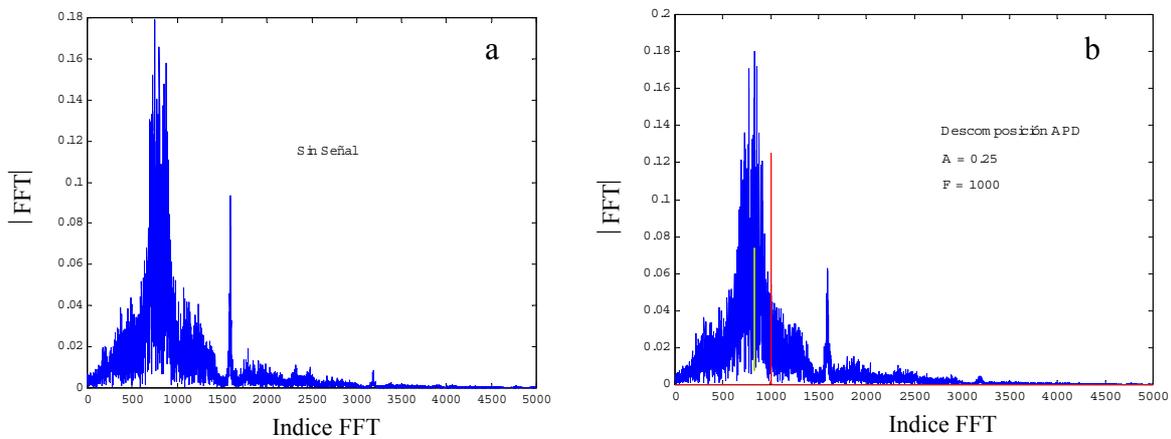


Fig. 4.3 Espectros de la variable x_3 del oscilador de Rössler a) Sin señal b) Con señal. En rojo y verde se superpone los espectros de las señales periódicas de amplitud $A = 0.25$ (rojo) y $A=0.15$ (verde)

El caso de $ACHN$ es analizado en la Figura 4.4, para los mismos dos valores de amplitud de la señal sinusoidal enmascarada. Nótese que la presencia de la señal sinusoidal no destruye el mapa de retorno sino que origina un ensanchamiento del mismo, según sea la amplitud de la señal. La situación es diferente si se adiciona ruido blanco al sistema caótico, ya sea en esquema APD o bien en forma aditiva. Los resultados se muestran en las Figuras 4.5 y 4.6 para el esquema APD y en la Figura 4.7 para el caso aditivo. Nótese que el caso aditivo es el más desfavorable pues el mapa de retorno queda totalmente destruido por efecto del ruido.

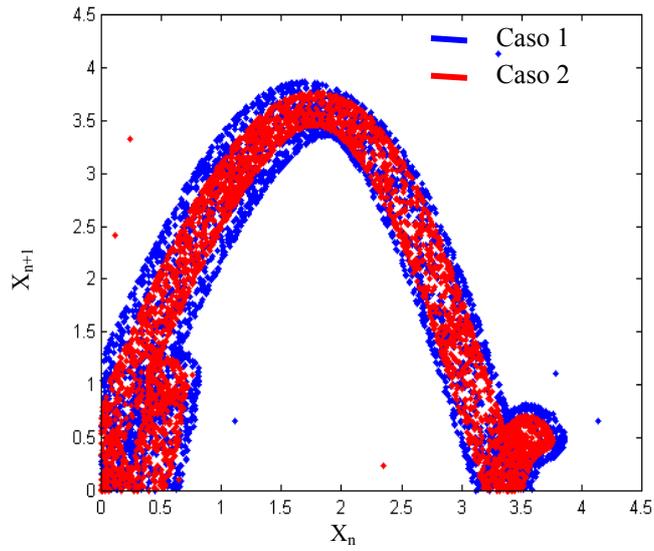


Fig. 4.4 Mapa de Lorenz de la variable x_3 del Oscilador de Rössler sumada a una señal periódica. Caso 1: $i=0.25 \text{ sen}(2\pi 1000 t)$; caso 2: $i = 0.15 \text{ sen}(2\pi \cdot 1000 t)$.

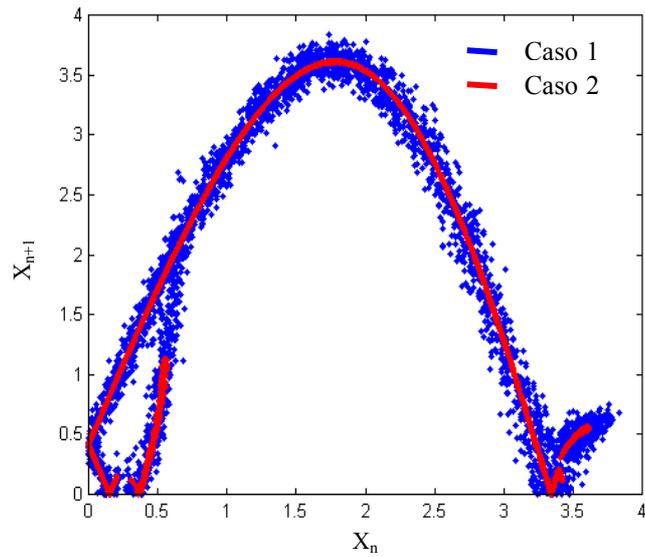


Fig. 4.5 Mapa de Lorenz de la variable x_3 del Oscilador de Rössler con AWGN en esquema APD. Caso 1: $\sigma = 0.25$; caso 2: $\sigma = 0.15$

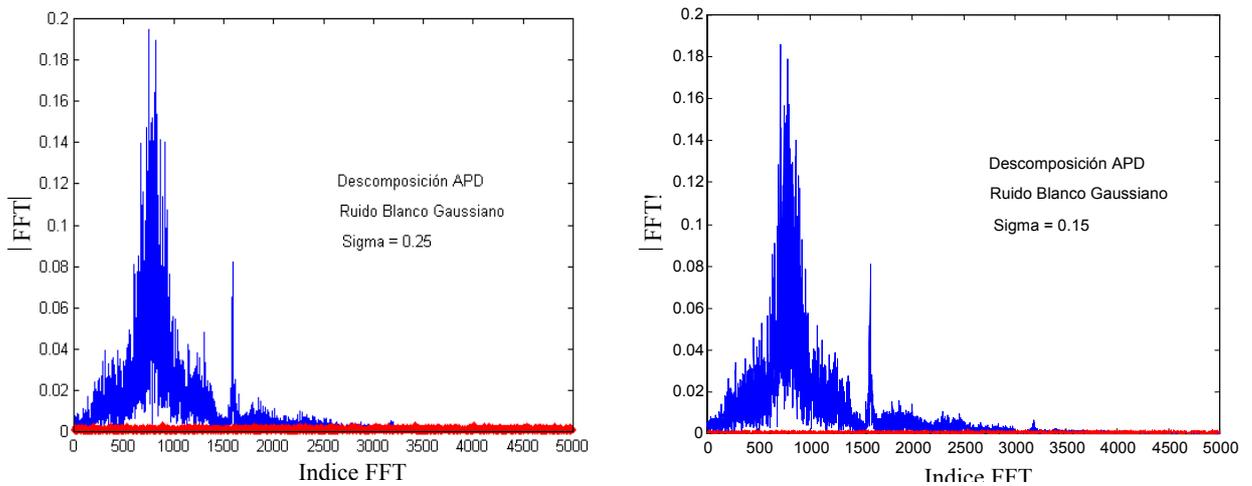


Fig. 4.6 Espectros de la señal caótica x_3 del Oscilador de Rössler con AWGN en esquema APD.
a) $\sigma = 0.25$ b) $\sigma = 0.15$

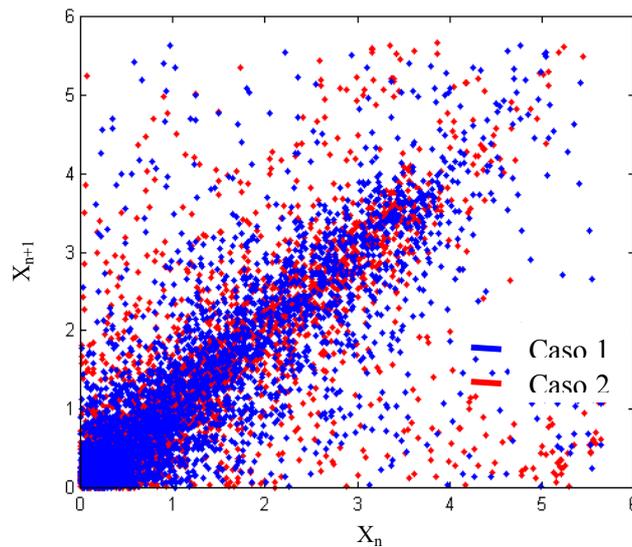


Fig. 4.7 Destrucción del Mapa de Lorenz por la adición de ruido al conjunto de mínimos

Puede observarse que el ruido aditivo le confiere características aleatorias al mapa de retorno, aún para valores muy bajos de su potencia. El mapa de Lorenz, es un caso particular de mapa de Poincaré y es equivalente a un proceso de muestreo irregular de la portadora caótica. El problema de reconstrucción de señales a partir de un muestreo no uniforme ha recibido atención en los últimos años [Milocco, 2005; Sonailon et al., 2005; Feichtinger et al., 1990; Marvasti et al., 1989; Sauer et al., 1987].

4.2 Entropías y complejidades a partir del mapa de retorno

Como se detalló en el Capítulo 2, un método que se emplea con frecuencia en el análisis de series temporales consiste en convertir los datos medidos en una secuencia de símbolos, obteniendo de esta forma una representación aproximada (*de grano grueso*) de la

dinámica del sistema. Es a esta nueva secuencia a la que se le aplican los conceptos de complejidad y entropía. Se mencionó asimismo la necesidad de discretizar el sistema si éste es continuo, empleando un Mapa de Poincaré así como la importancia de los niveles de discretización adoptados.

Para efectuar el análisis, en este trabajo se discretizan los sistemas continuos a través del Mapa de Retorno descrito en la sección anterior. La Figura 4.8 muestra la partición en 8 zonas del mapa de Lorenz del oscilador de Rössler puro (en ausencia de mensaje).

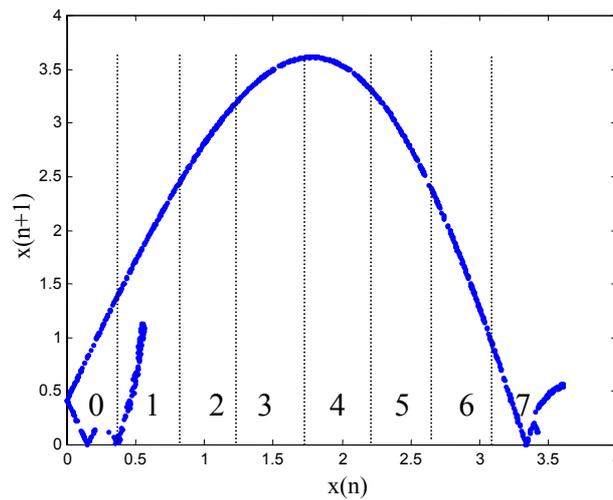


Fig. 4.8 Subdivisión del mapa de retorno en ausencia de mensaje

Como se observa en las figuras mostradas, en el caso en que la portadora caótica transporte un mensaje el mapa de retorno se ensancha (incrementa la dispersión respecto del caso sin información), llegando incluso a dispersarse para el caso de ruido aditivo. Entonces una partición fina del espacio de fase debiera ser más adecuada para detectar la presencia o ausencia de un mensaje inmerso en el caos. Un amplio estudio numérico efectuado con el sistema caótico de Rössler y ambos esquemas de enmascaramiento (APD y suma) permite confirmar esta conjetura.

La Figura 4.9 muestra una partición en 16 niveles del mismo mapa de Lorenz de la Figura 4.8, utilizado en este caso para la transmisión de una señal periódica empleando la descomposición APD.

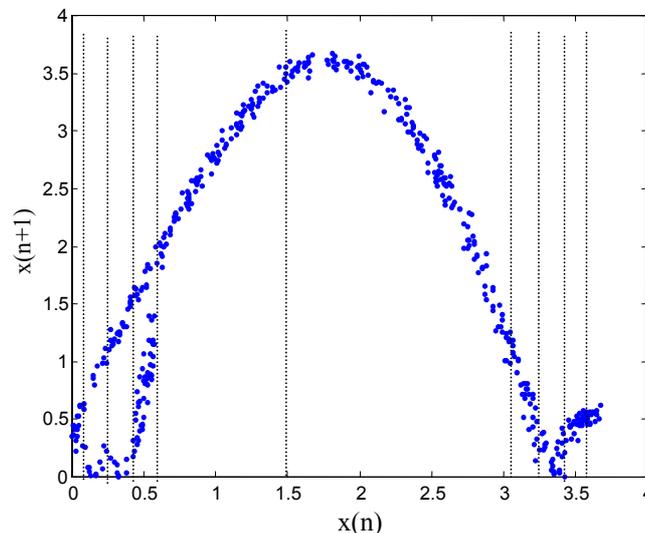


Fig.4.9 Partición en 16 niveles en el caso portadora con señal según el esquema APD

Para realizar el estudio se emplean la Entropía de Shannon (H) y las Complejidades MPR (C^{MPR}) y LMC (C^{LMC}), trabajando con distintas particiones y diferentes longitudes de palabras. Se verifica que si el número de particiones es bajo, no importa cual es la longitud de la palabra que se utiliza, los indicadores no detectan la presencia del mensaje.

En la Figura 4.10 se muestra la Entropía H y las Complejidades C^{MPR} y C^{LMC} para diferentes particiones (2, 8 y 16), como función de la longitud de la palabra, tanto para el esquema APD como para el aditivo. Se emplearon señales senoidales de diferentes amplitudes (A) y ruido blanco gaussiano con diferentes potencias. Es de notar que la partición en 2 niveles no permite diferenciar entre las diversas situaciones planteadas.

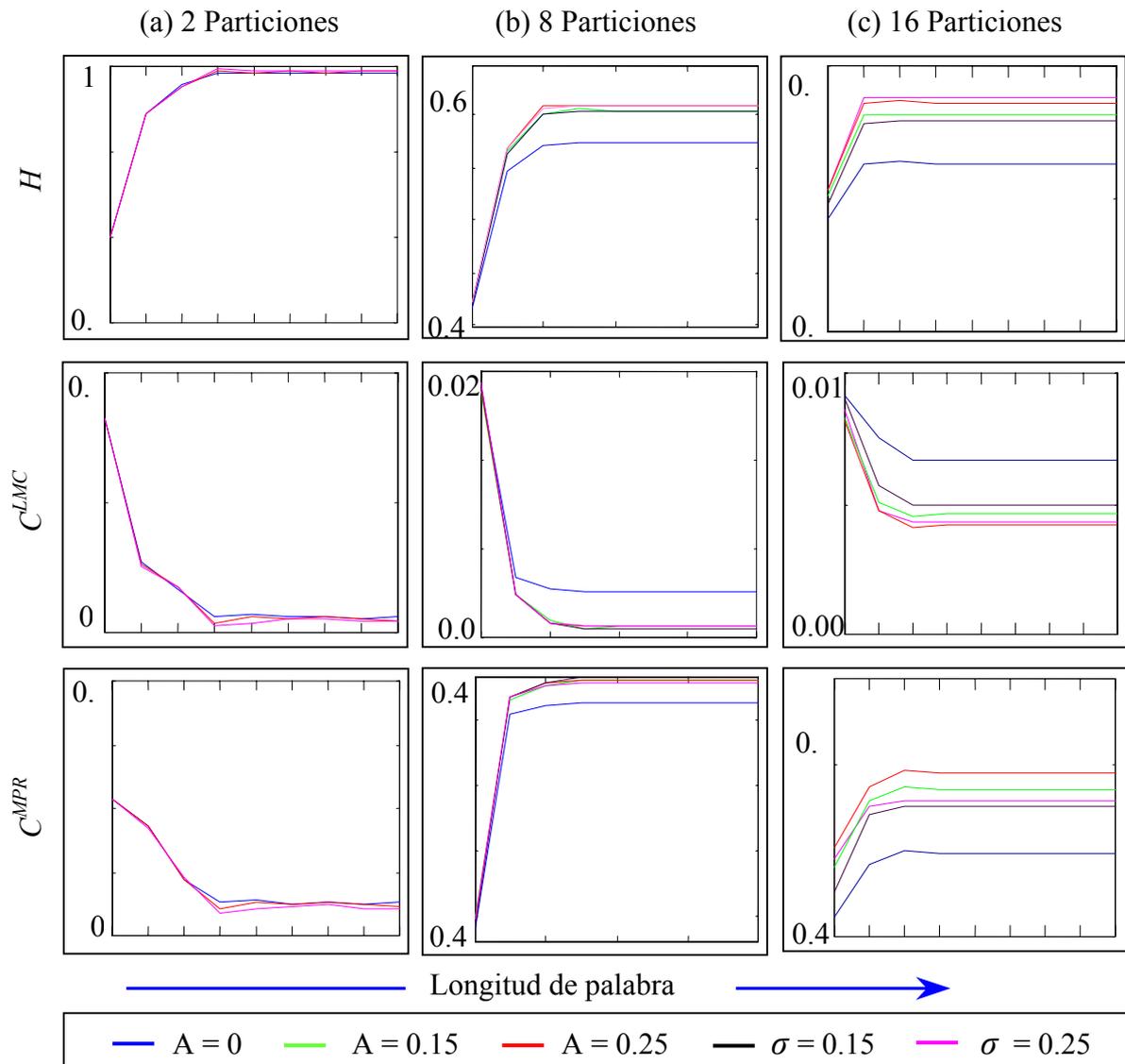


Fig.4.10 Entropía H , Complejidad C^{LMC} y Complejidad C^{MPR} como funciones de la longitud de palabra:
(a) $P = 2$; (b) $P = 8$; (c) $P = 16$

En la Fig. 4.10c se observa que la partición 16 es lo suficientemente refinada como para detectar la presencia de la señal. Empleando el paquete TISEAN, se pueden calcular los

exponentes de Lyapunov (*Método de Sano y Sawada, 1985*) del vector de los mínimos para los casos de descomposición APD y aditivo, con diferentes señales mensaje. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.1. Como se mencionó en el Capítulo 2, la suma de los exponentes positivos proporciona el límite superior para el cálculo de la entropía (identidad de *Pesin*). Un problema que se debe considerar es el relacionado con la longitud finita L de la secuencia. Considerando una longitud de palabra n , pueden construirse $L - n + 1$ palabras diferentes a partir de la secuencia original. Por otro lado, la cantidad de palabras diferentes que se pueden construir con un alfabeto de λ símbolos (para esta partición $\lambda = 2$) es λ^n ; por lo tanto si este número es mayor que $L - n + 1$ existen palabras que nunca se presentarán. Como consecuencia de emplear secuencias de longitud finita, en realidad se obtiene una estimación de la entropía [*Ebeling y Steuer, 2001*]. De esta manera la entropía se transforma en una variable aleatoria a la que se le puede calcular el valor medio y la dispersión. Si el proceso de estimación es no sesgado y eficiente, a medida que aumenta el tamaño L de la secuencia se converge hacia el verdadero valor de la entropía.

<i>Exponente de Lyapunov Positivo</i>	<i>Caso Analizado</i>
7.252833e-01	Sin Señal
6.377721e-01	Senoidal A = 0.25 $f=1000$ - APD
6.507839e-01	Senoidal A = 0.15 $f=1000$ - APD
6.074768e-01	Senoidal A = 0.15 $f=5000$ - APD
6.128498e-01	Senoidal A = 0.25 $f=5000$ - APD
6.082927e-01	Ruido Blanco Gaussiano $\sigma = 0.25$
7.252833e-01	Ruido Blanco Gaussiano $\sigma = 0.15$
6.207847e-01	Senoidal A = 0.25 $f=1000$ - Suma
6.358755e-01	Senoidal A = 0.15 $f=1000$ - Suma
6.283191e-01	Senoidal A = 0.25 $f=5000$ - Suma
6.196062e-01	Senoidal A = 0.15 $f=5000$ - Suma

Tabla 4.1 Exponentes de Lyapunov para los casos analizados, obtenidos con TISEAN

Los valores de la cota máxima para el cálculo de la entropía son próximos a los obtenidos para el caso de una partición en 16 valores del espacio de fase. Es decir, a medida que se “refina” la representación de la dinámica se obtienen valores de la entropía más próximos a los de Kolmogorov-Sinai.

Las Figuras 4.11 y 4.12 muestran el desequilibrio Q y complejidad LMC con la distancia según la norma Euclídea, para una partición del mapa de Lorenz en dos sectores y los bits agrupados en diversas longitudes de palabra en función del valor del parámetro de control. Las probabilidades se calculan con un histograma de 256 niveles.

La norma Euclídea ignora la naturaleza estocástica de los vectores de probabilidad. Para resolver esta dificultad MPR propusieron el uso de la distancia de *Wooters* (Q^W). Las Figuras 4.13 y 4.14 muestran el desequilibrio y la complejidad MPR empleando esta distancia, para diferentes longitudes de palabra. Nuevamente, para el cálculo de probabilidades se utiliza un histograma de 256 niveles. Del análisis de las Figuras 4.13 y 4.14 debe notarse que a partir de $r \cong 3.6$ ambas complejidades dan resultados diferentes.

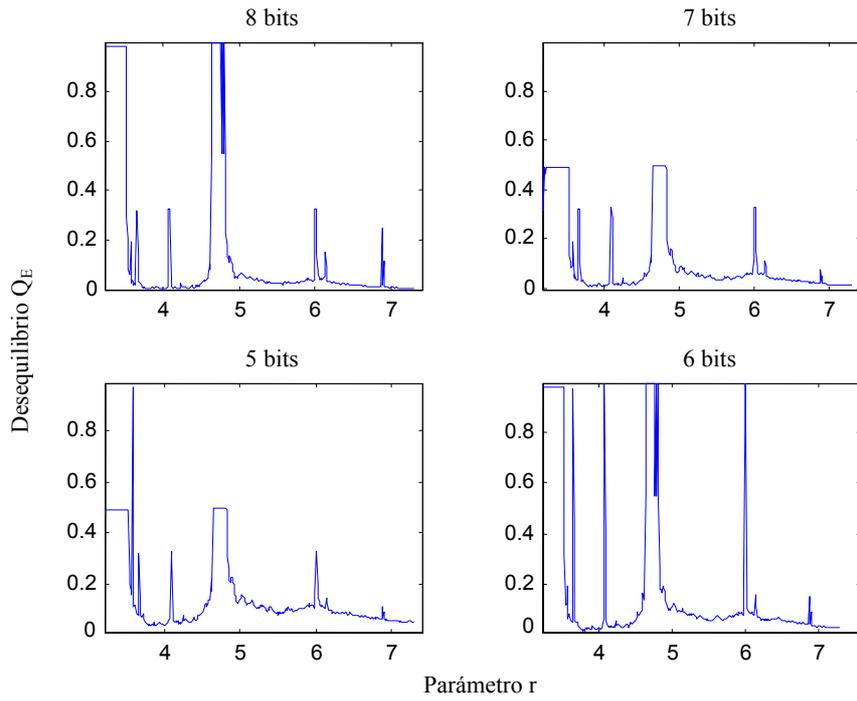


Fig. 4.11 Distancia Euclídea en el Mapa de Lorenz del oscilador de Rössler para diferentes longitudes de palabra (Particion = 2)

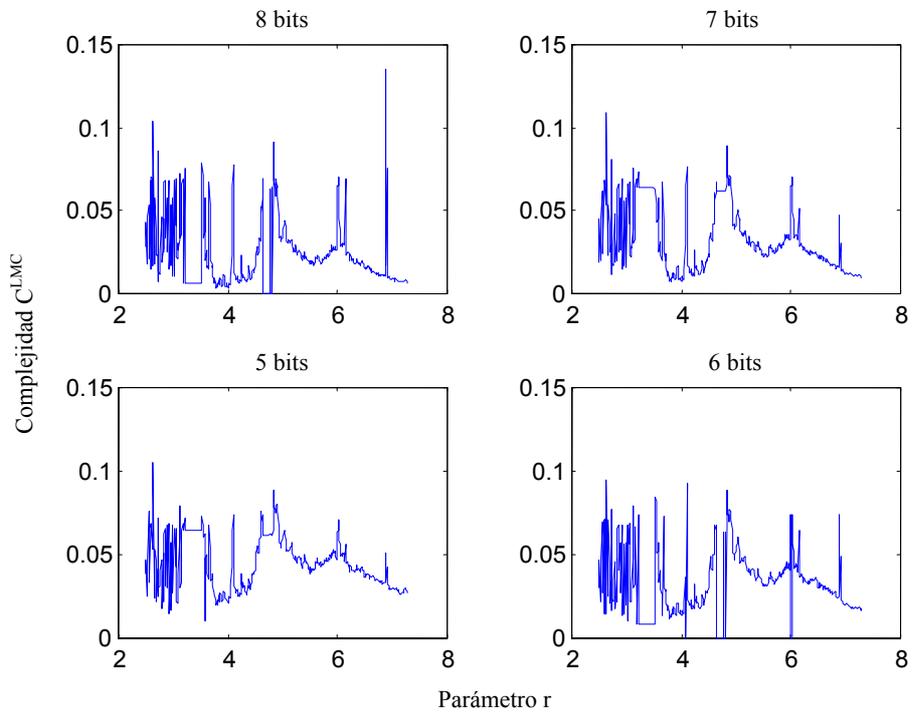


Fig. 4.12 Complejidad calculada con distancia Euclídea, C^{LMC} , para diferentes longitudes de palabra (Partición 2)

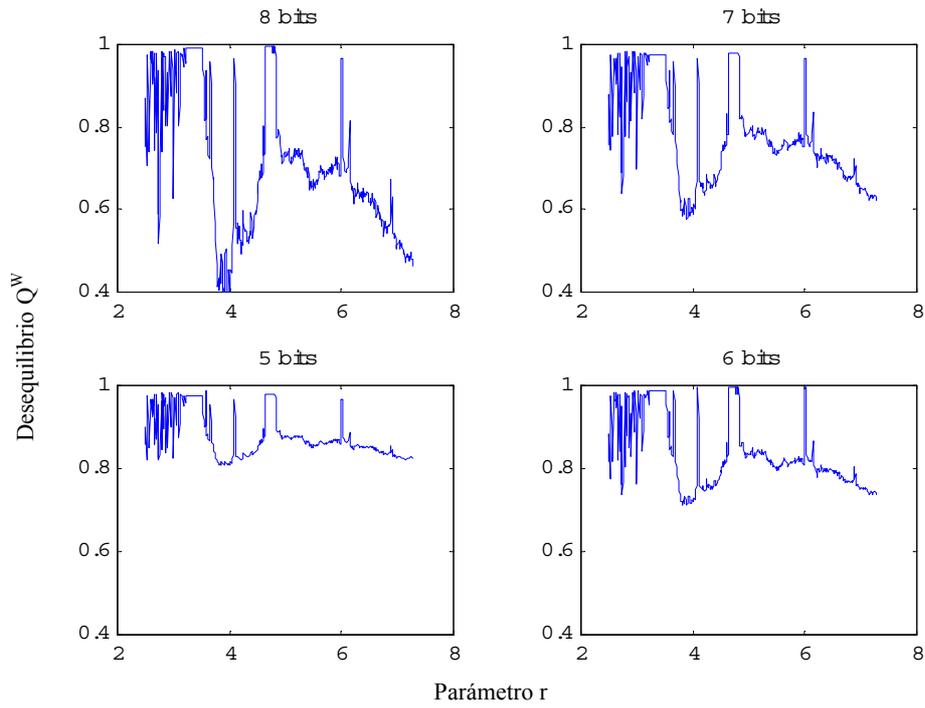


Fig. 4.13 Desequilibrio Q^W en el Mapa de Lorenz del oscilador de Rössler para diferentes longitudes de palabra (Particion = 2).

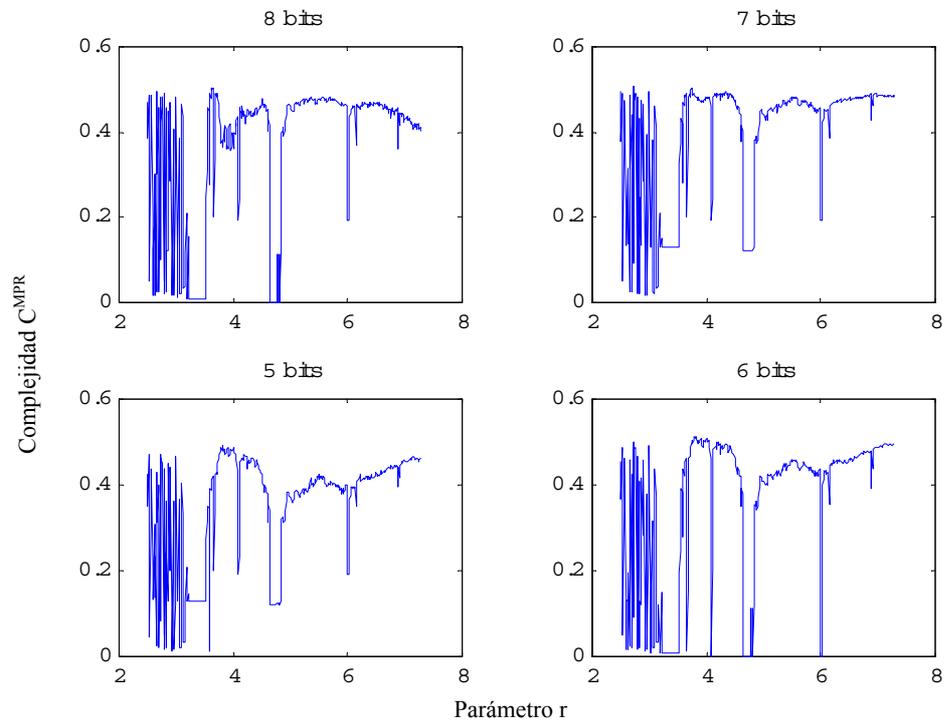


Fig. 4.14 Complejidad calculada con distancia de Wooters, C^{MPR} , para diferentes longitudes de palabra (Partición 2)

Otra variable relevante en la construcción de las gráficas de complejidad, es la cantidad de ventanas diferentes empleadas en el cálculo de las probabilidades. En las Figuras 4.11 y 4.12 se emplearon 256 ventanas. Esta elección afecta el comportamiento de la medida de complejidad para el caso $r = 4$. Cuando el sistema ingresa en comportamiento periódico se observa que la complejidad baja abruptamente. Analizando una de las ventanas, por ejemplo la que se presenta para un valor $r = 6.01$, se puede determinar a partir de los gráficos, que existe una transición del caos a una órbita periódica de período 3. La profundidad de las ventanas está relacionada con la longitud de palabra elegida. Si la longitud es un múltiplo de la periodicidad se logra la complejidad cero. En las Figuras 4.12 y 4.14 puede observarse que para palabras de 6 bits se logra el valor cero. No así para las longitudes de palabra de 5, 7 y 8 bits.

Si se tiene una señal periódica digitalizada con sólo dos símbolos la dinámica queda representada por una secuencia binaria de la forma:

.....1010101010101010.....
 {
 {
 {

En este caso cualquier longitud de palabra par (2, 4, 6, 8 etc.) generará siempre el mismo código y si se calcula la entropía su valor es cero. Las ventanas periódicas de período dos presentan ceros para longitudes pares, las de período triple para longitudes de palabra múltiplos de tres etc.

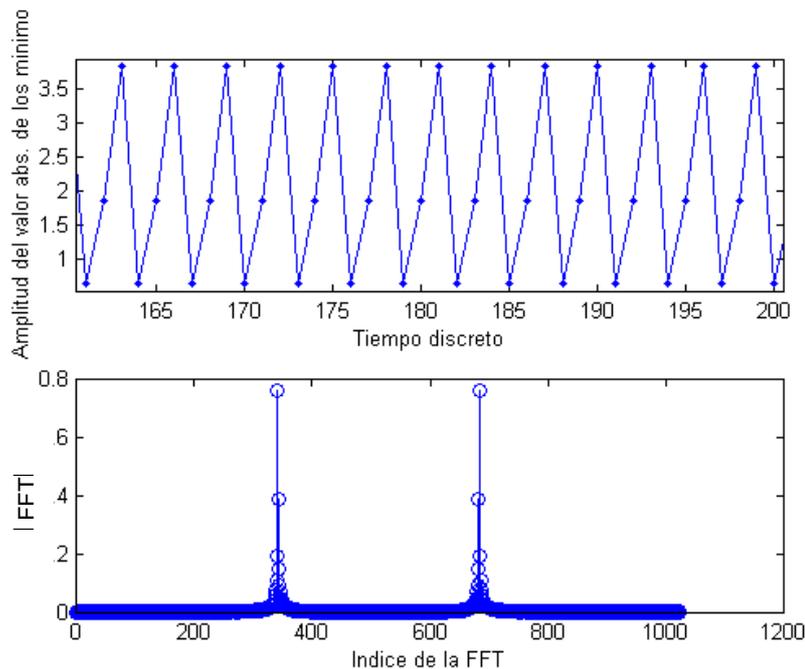


Fig. 4.15. a) Registro de los mínimos para $r = 6.01$ b) FFT del conjunto de mínimos

Dado que se está buscando información de periodicidad, un método alternativo lo constituye el análisis espectral. Analizando el espectro de la serie de valores generados por el Mapa de Lorenz es posible determinar las longitudes de palabra que llevan a cero el valor de la complejidad. Si se considera el caso de la ventana periódica que se obtiene para

$r = 6.01$, la *FFT* de un registro de 1024 muestras es la mostrada en la Fig. 4.15. Las componentes espectrales se ubican alrededor del valor del índice $k = 342$. Estos índices muestran la cantidad de ciclos de la señal periódica dentro de la ventana. Si la cantidad de puntos en la misma es 1024, entonces:

$$M = \frac{1024 \text{ puntos/ventana}}{342 \text{ ciclos/ventana}} \cong 3 \text{ puntos/ciclo}$$

Cualquier agrupamiento de 3 símbolos dará siempre la misma palabra y por lo tanto la entropía será cero. Si se observa la Fig. 4.11, en la que se grafica la complejidad para diferentes longitudes de palabra, es posible advertir que la ventana para $r \cong 6.01$ llega a cero cuando la palabra es de 6 bits y no lo hace para las otras longitudes (5, 7 y 8 no son múltiplos de 3).

Otra forma de evaluar complejidad de un sistema consiste en el cálculo de la llamada complejidad de zipping en la que se analiza el comportamiento frente a un algoritmo de compresión. Para este estudio se empleó el programa *Arj* para comprimir los vectores (partición = 2, palabras de 1 bit) para distintos valores de r . Si se grafica la relación de compresión en función del valor de r se obtiene la Fig. 4.16. Se observa que el resultado es similar al obtenido con la complejidad C^{MPR} .

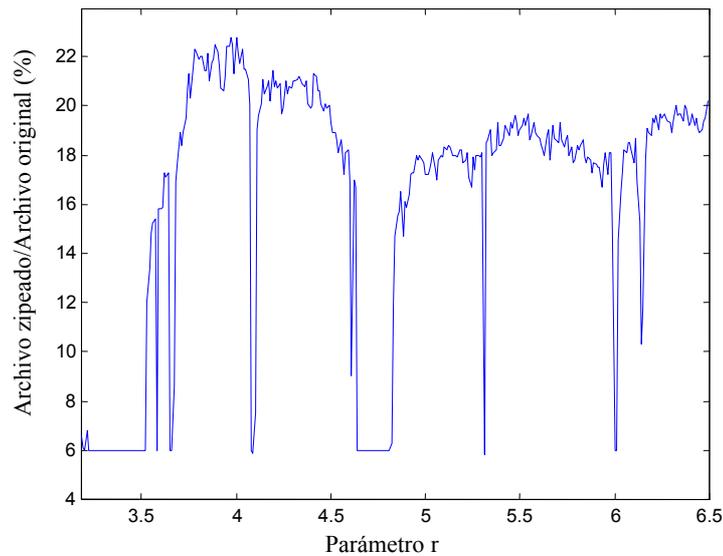


Fig. 4.16. Complejidad de Zipping para diferentes valores de r

Nótese además que la relación de compresión es máxima en las zonas de comportamiento periódico. Se puede determinar la complejidad de zipping para $r = 4$ y diferentes particiones del espacio de fase en función de la longitud de la palabra empleada con y sin señal de información. En la Figura 4.17 se muestran tres particiones diferentes para el caso sin señal y con una señal senoidal ($A = 0.25 \text{ V}$, $f = 1000 \text{ Hz}$) con descomposición APD y suma. Se observa que la relación de compresión se reduce a medida que aumenta el número de particiones, la longitud de palabra y se le agrega señal al sistema. Un aspecto interesante lo constituye el punto a partir del cual las curvas adquieren un valor constante, la máxima compresión para una partición en particular siempre se presentan para la misma longitud de palabra, y son independientes de la presencia o ausencia de señal.

Para la partición 2 el factor de compresión es prácticamente independiente de la presencia de información en ambos esquema (APD o suma). Las tres curvas (casi coincidentes) incrementan su valor con la longitud de palabra. Para los casos de partición 8 y 16 las relaciones de compresión se reducen notablemente en presencia de la señal periódica.

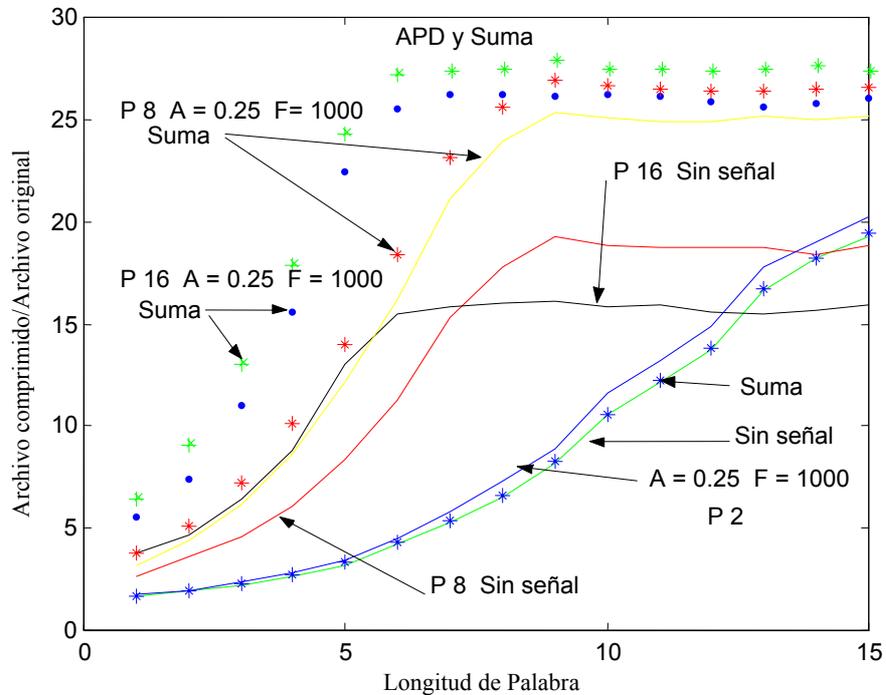


Fig. 4.17 Complejidad de zipping para 3 particiones (2,8 y 16) , sin información y con información en descomposición APD y sumada

A partir de los análisis realizados y los resultados obtenidos, puede concluirse que los cálculos de la entropía y las medidas de complejidad podrían utilizarse como *indicadores* de la presencia o ausencia de mensaje incorporado a la dinámica de un sistema caótico. Esto es válido siempre que se utilice un alfabeto de longitud adecuada para efectuar la codificación.

4.3 Conclusiones

Esta tesis ha presentado distintas estrategias para el procesamiento de señales enmascaradas en ruido, sea éste de tipo caótico determinista, estocástico, o una combinación de ambos. Las estrategias propuestas combinan la teoría de sistemas dinámicos y el caos con la estimación estadística y las técnicas clásicas de procesamiento digital de señales.

Los principales resultados originales que la tesis aporta al área de procesamiento de señales son:

- En el rescate de señales periódicas inmersas en AWGN (ruido blanco gaussiano) se desarrolla un algoritmo novedoso muy eficiente. El mismo utiliza una ventana de duración autoajustable para estimar los parámetros de la Transformada de Fourier de la autocorrelación de la señal contaminada. En la determinación del período de la señal se obtienen resultados muy próximos al límite teórico de Crámer-Rao para la

estimación, aún trabajando con relaciones señal/ruido tan bajas como -15 dB. En el caso de la estimación de amplitud el error es comparable al obtenido con otras técnicas disponibles en la literatura abierta, con la evidente ventaja de ser un método on-line.

- Se desarrolla un banco de medición basado en PC (computadora personal) con el que se comprueba la capacidad del algoritmo en mediciones reales y se efectúan las comparaciones con los métodos usuales.
- El mismo algoritmo presenta resultados satisfactorios para estimar la frecuencia de señales inmersas en ruido caótico determinista aditivo, con un espectro de banda ancha que cubre totalmente al de la señal. En este caso la autocorrelación de la señal caótica (debe disminuir rápidamente con τ) es la característica fundamental para que el método pueda ser aplicado exitosamente. Esta situación se ejemplifica con en el mapa de Hénon.
- Se analiza la validez de una estrategia basada en la Transformada Wavelet, reportada como eficiente en la literatura. Sin embargo, se demuestra que puede emplearse sólo en el caso de señales débilmente enmascaradas; ya sea por no tener un nivel de ruido caótico suficiente o porque el rango de frecuencias del espectro del ruido no cubre en forma total al de la señal. En el caso bien enmascarado, especialmente en el esquema APD (descomposición activa-pasiva) se demuestra que es imposible la separación mediante filtros tipo peine pues la señal y el caos ocupan las mismas frecuencias. Se comprueba asimismo que en los enmascaramientos débiles el criterio de Huang permite seleccionar automáticamente el nivel Wavelet que separa eficientemente la máscara caótica del mensaje.
- En el caso en que la información se recupere con un receptor gemelo al transmisor, se comprueba que puede desenmascarse la señal del ruido caótico, no importando si la misma se incorporó al sistema en forma aditiva o con un esquema APD. En estos casos el receptor se comporta como un filtro sintonizado automáticamente a la frecuencia de la señal. Se demuestra también que la presencia de niveles moderados de AWGN no afecta la recuperación en ninguno de los dos esquemas.
- Para los métodos basados en la reconstrucción del atractor caótico (mapas de retorno) se muestra que en el caso de un esquema aditivo la señal de información puede recuperarse satisfactoriamente. Se demuestra que el método permite recuperar los mensajes, aún cuando la máscara caótica cubre efectivamente a una señal de muy baja amplitud; situación en la cuál los métodos espectrales no son útiles. Los resultados del procedimiento son bastante satisfactorios para frecuencias por debajo de la frecuencia f_c a la cual se halla el pico del espectro del oscilador (en este caso se utilizó un sistema de Lorenz). La calidad del mensaje recuperado se deteriora rápidamente para frecuencias superiores a f_c .
- Se aportan resultados preliminares prometedores para el uso de entropías y medidas de complejidad como indicadores de la presencia de información. Se analizan distintas particiones del mapa de retorno y diferentes longitudes de palabra. Los resultados son comparados utilizando definiciones alternativas de complejidad. Se verifica que la longitud de palabra elegida, para una partición binaria del espacio de fase, es un parámetro relevante para interpretar la complejidad calculada en el caso

de ventanas periódicas. Se analiza, además, como la Transformada de Fourier aplicada a la secuencia que representa el comportamiento en las ventanas periódicas del diagrama de bifurcaciones permite determinar el orden de la periodicidad.

- Además de las dos complejidades consideradas, se aplicó la complejidad de zipping al diagrama de bifurcaciones del mapa de Lorenz, comprobándose una similitud cualitativa con la complejidad *MPR*. Se considera en particular el caso $r = 4$ y diferentes particiones del espacio de fase en función de la longitud de la palabra empleada con y sin señal de información.

En cuanto a la continuación de este trabajo de tesis, en lo inmediato se continúa investigando la aplicación de una nueva medida de complejidad *MPR*, para la cual el desequilibrio es evaluado en términos de la divergencia de Jensen, resultando así una complejidad *MPR* intensiva. Otras mejoras introducidas en el cálculo de estas complejidades incluyen la incorporación directa de la dinámica del sistema en el cálculo de las correspondientes distribuciones de probabilidad a través del método de “Probabilidades de Permutación” propuesto por Bandt y Pompe, [2002].

Se trabaja en la implementación on line de técnicas de medición y procesamiento de señales complejas provenientes de diferentes fuentes. La propuesta es combinar el uso de computadoras de última generación en un esquema de instrumentación en red. Cada PC se encuentra equipada con placas destinadas al Procesamiento Digital de Señales, utilizando procesadores dedicados (DSPs) y dispositivos de lógica programable (FPGA). Esta configuración permitirá la implementación de equipos autónomos de procesamiento que pueden rescatar la información y determinar si la misma debe ser comunicada o no a un centro general de control.

Agradecimientos

Finalizando esta tesis debo mencionar a las personas que contribuyeron a que llegara a buen término. En primer lugar debo agradecer el esfuerzo y dedicación de mis directores, la Dra. Hilda Larrondo y el Dr. Roberto Hidalgo, que me dirigieron y me aconsejaron. Sin su invaluable aporte esta tesis aún sería un proyecto.

A los revisores y evaluadores de esta tesis, Ing. Clara, Dr. Milocco y Dr. Rosso, que con sus comentarios y observaciones permitieron mejorar considerablemente la versión final.

A mis compañeros de trabajo, Ing. Raul Rivera y Ing. Walter Gemín, que son además mis amigos y que me alentaron en todo momento.

Al Mg. Ing. Manuel González, que me brindó su apoyo y su aliento permanente.

A todos mis colegas del Departamento de Electrónica, a las autoridades, docentes, no docentes y alumnos de la Facultad de Ingeniería que con su esfuerzo diario crean el clima de trabajo que hace posible la tarea de investigación.

A Miguel, Vicky y Francisco, que siempre han estado junto a mi.

A mi madre y mis hermanas.

APENDICE

1. Teorema del Muestreo

Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo que tiene una *Transformada de Fourier* continua

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (\text{I.1})$$

Sea $x_n \cong x(nT_s)$, $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ las muestras de $x(t)$ a T_s segundos.

Si $X(j\omega) = 0$ para todo $|\omega| \geq \frac{\pi}{T_s}$, entonces $x(t)$ puede reconstruirse exactamente de sus muestras, x_n , empleando una función de interpolación *sinc* (filtro pasa-bajos ideal).

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_s \cdot x(nT_s) \cdot \left\{ \frac{\sin \left[\frac{\omega_s (t - nT_s)}{2} \right]}{\pi (t - nT_s)} \right\}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}. \quad (\text{I.2})$$

2. Teorema del valor inicial

Si x_n es causal, es decir $x_n = 0$ para $n < 0$, entonces

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} Zx \quad (\text{I.3})$$

3. Teorema de Wiener –Khintchine

Sea x_n una señal real. Entonces:

$$r_{xx}(l) = \overset{F}{\longleftrightarrow} S_{xx}(\gamma) \quad (\text{I.4})$$

Esto implica que la densidad espectral de una señal es la Transformada de Fourier de su Función Autocorrelación. Esta relación es muy importante, dado que implica que la Función Autocorrelación de una señal y su Densidad Espectral contienen la misma información sobre la señal. Dado que ninguna de estas funciones contiene información sobre la fase, es imposible reconstruir de manera unívoca la señal a partir de su correlación o de su densidad espectral

4. Teorema de Parseval

Si

$$x_{1n} \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\gamma)$$

y
 $x_{2n} \xleftrightarrow{F} X_2(\gamma)$ entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{1n} \cdot x_{2n}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\gamma) \cdot X_2^*(\gamma) d\gamma \quad (\text{I-5})$$

En el caso especial que $x_{2n} = x_{1n} = x_n$, la relación de *Parseval* se reduce a :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\gamma)|^2 d\gamma \quad (\text{I.6})$$

La parte izquierda de la ecuación (I.6) es simplemente la energía E_x de la señal $x[n]$. Es también igual a la autocorrelación de $x[n]$, $r_{xx}(l)$, calculada en $l = 0$. El integrando de la parte derecha es igual a la densidad espectral de energía, así, la integral sobre el intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ nos da la energía total de la señal.

$$E_x = r_{xx0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\gamma)|^2 d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\gamma) d\omega \quad (\text{I.7})$$

La Ec. I.7 establece que la operación de transformación preserva la energía de la señal.

5. Secciones de Poincaré

Si se considera el espacio de fase de un sistema de m ecuaciones autónomas, generalmente se encuentra que una dirección local, la tangencial al flujo, no transporta demasiada información. La posición del espacio de fase que apunta en esta dirección puede cambiarse reparametrizando el tiempo. Esta observación puede emplearse para reducir en 1 la dimensión del espacio de fase, al mismo tiempo que se convierte el flujo de tiempo continuo en un mapa de tiempo discreto.

El método, denominado *sección de Poincaré*, consiste en crear una superficie orientada en forma adecuada en el espacio de fase. De esta forma es posible construir un mapa invertible sobre esta superficie siguiendo una trayectoria del flujo. Las iteraciones del mapa están dadas por los puntos donde la trayectoria interseca la superficie en una dirección específica. El tiempo que una trayectoria pasa entre dos intersecciones sucesivas variará, dependiendo de la trayectoria real en el espacio de fase y de la sección de la superficie elegida. Algunas veces después de aplicar esta técnica, sólo se consigue un pequeño número de puntos sobre la superficie. Cada ciclo produce al menos 1 punto sobre la superficie de *Poincaré* (si las intersecciones son menores, la superficie es inapropiada).

Aparte de la construcción de las intersecciones, se puede recoger información sobre los mínimos y máximos de la serie escalar. La derivada de la señal es una coordenada “legal” en el espacio de estado reconstruido. Obtener los mínimos o máximos implica colocar una sección sobre la superficie donde la derivada es igual a cero.

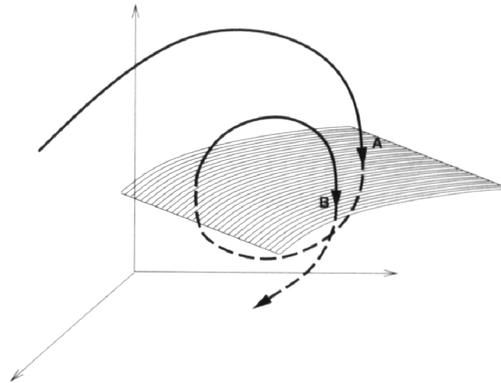


Fig. I.1 Sección de Poincaré

6. Máximo Exponente de Lyapunov- Algoritmo de Rosenstein –Collins - De Luca

El exponente máximo de *Lyapunov* λ_1 , que mide la divergencia promedio entre dos puntos vecinos en un atractor, puede definirse empleando la siguiente ecuación:

$$d(t) = C.e^{\lambda_1 t} \quad (I.8)$$

donde $d(t)$ es la divergencia promedio en el tiempo t y C es una constante que normaliza la separación inicial. *Rosenstein et al.*, proponen el siguiente algoritmo para calcularlo:

1. Reconstruir la dinámica del atractor (empleando el método de los retardos) a partir de la serie temporal. Esta trayectoria reconstruida, \mathbf{X} , puede expresarse como una matriz, donde cada fila representa un vector en el espacio de fase. Es decir $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2 \ \dots \ \mathbf{X}_M]^T$, donde \mathbf{X}_i es el estado del sistema en el instante i . Para una serie temporal de N puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, cada \mathbf{X}_i se construye de la siguiente forma: $\mathbf{X}_i = [x_i \ x_{i+J} \ \dots \ x_{i+(m-1)J}]$, donde J es el retardo y m es la dimensión de embedding. Entonces \mathbf{X} es una matriz de $M \times m$ y las constantes m, M, J , y N están relacionadas: de la siguiente manera $M = N - (m-1)J$.

La dimensión de embedding generalmente se estima empleando el *Teorema de Takens*, es decir se elige $m > 2n$, aunque el algoritmo de *Rosenstein et al.* funciona bien para valores menores de m . J puede determinarse como el valor para el que la función autocorrelación cae a $1-1/e$ de su valor inicial.

2. Localizar los vecinos próximos de cada punto sobre la trayectoria. El vecino, \mathbf{X}_{j1} se encuentra buscando el punto que minimiza la distancia al punto de referencia \mathbf{X}_j , es decir:

$$d_j(0) = \min_{\mathbf{X}_{j1}} \|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{j1}\| \quad (I.9)$$

donde $d_j(0)$ es la distancia inicial desde el punto j a su vecino mas próximo según la norma Euclídea. Se agrega el requisito que ese punto debe estar separado temporalmente una

distancia mayor que el período medio de la serie temporal ($|j - j_l| > \text{período medio}$). Esto permite considerar cada par de vecinos con condiciones iniciales próximas pero pertenecientes a distintas trayectorias. El exponente máximo de Lyapunov puede estimarse como la velocidad media de separación de los puntos vecinos elegidos.

3. A partir de la definición de λ_1 , el par j -ésimo diverge a una velocidad dada por el exponente máximo de Lyapunov, es decir:

$$d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)} \quad (\text{I.10})$$

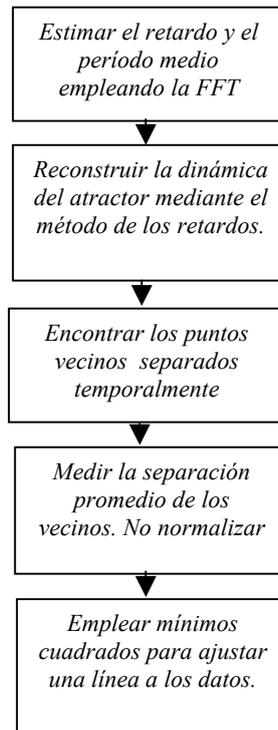
donde C_j es la separación inicial. Tomando el logaritmo a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t) \quad (\text{I.11})$$

que representa un conjunto de líneas paralelas (para $j = 1, 2, \dots, M$) cada una con una pendiente aproximadamente proporcional a λ_1 . El exponente máximo de *Lyapunov* se calcula sencilla y rápidamente usando un ajuste con mínimos cuadrados a la línea promedio definida como:

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle \quad (\text{I.12})$$

donde $\langle \cdot \rangle$ indica promedio sobre todos los valores de j . Este proceso de promediación es la llave para calcular λ_j empleando secuencias cortas y ruidosas. C_j normaliza la separación de los puntos vecinos. El diagrama de flujo a continuación muestra los pasos del algoritmo presentado.



Referencias Bibliográficas

- Abarbanel H. D., Carroll T., Pecora L.M., Sidorovich J.J. & Tsimring L.S. [1994] “Predicting physical variables in time-delay embedding” *Physical Review E* **49** (3), 1840 –1853.
- Adami C.& Cerf N. J. [2000] “Physical complexity of symbolic sequences”, *Physica D* **137**, 62-69.
- Anteneodo C.& Plastino A. R. [1996] ”Some features of the statistical LMC complexity”, *Phys. Lett. A* **223**, 348 .
- Arizmendi, C. M., Larrondo, H. A., Sanchez, J.R. & Piro, O. [1984], “Bifurcaciones y Caos en un Oscilador Electrónico No Lineal”, *69ª. Reunión Nacional de la AFA*, Buenos Aires.
- Babloyantz, A., Lourenco, C.,& Sepulchre, J. A. [1995], “Control of Chaos in delay differential equations, in a network of oscillators and in model cortex”, *Physica D* **86**(1-2), 274 –283.
- Badii R., Broggi G., Derighetti B., & Ravani M. [1988] “Dimension Increase in Filtered Chaotic Signals” *Physical Review Letters* **60** (11), 979 – 982.
- Bandt C.,& Pompe B. [2002] “Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series” *Physical Review Letters* **88** (17), 174102-1 – 174102-4.
- Bennett, C. H. [1987] "*Information, Dissipation, and the Definition of Organization*", Addison-Wesley. Reading, Massachusetts.
- Blaquiere, A., [1966] “Non-linear Systems Analysis” Academic Press, New York.
- Boffetta G., Cencini M.,Falcioni M.,& Vulpiani A. “Predictability: a way of characterize Complexity” *arXiv:nlin.CD/0101029 v1 17 Jan 2001*
- Bollt E.,& Lai Y. Ch. [1998] “ Dynamics of coding in communicating with chaos” *Physical Review E* **58** (2), 1724 – 1736.
- Bollt E. M., Stanford T., Lai Y.C., & Ziczowski K. [2000] “Validity of Threshold Crossing Analysis of Symbolic Dynamics from Chaotic Time Series” *Physical Review Letters* **85** (6), 3524 – 3527.
- Boutayeb M., Darouach M.,& Rafaralahy H. [2002] “Generalized State–Space Observers for Chaotic Synchronization and Secure Communication” *IEEE Transactions on Circuits and Systems –I: Fundamental Theory and Applications*. **49** (3), 345 – 349.
- Boyayian, G., & Lutz, T. [1992] “ Evolution of biological complexity and its relation to taxonomic longevity in the Ammonoidea” *Geology* **20**, 983 –986.
- Boyte, B.W., P.K. Rajan & J.N.Y. Tsui. [1990] “A new autoregressive estimator for the estimation of the frequencies of a sinusoidal process corrupted with noise”. *Proceedings of XXII Southeastern Symposium on System Theory*, Cookeville, TN, USA 540-544.

- Broomhead, D. & King, G. P.[1986] “Extracting qualitative dynamics from experimental data”. *Physica D*. **20**, 217.
- Brown T.,& Wang M.M.,[2002] “An Iterative Algorithm for Single Frequency Estimation” *IEEE Transactions On Signal Processing* **50** (11) 2671 - 2682
- Bünner M. J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Parisi J. [1996] “Tool to recover scalar time-delay systems from experimental time series” *Physical Review E* **54** (4), 3082-3085.
- Campbell, A. , González, A., González, D. L., Piro, O.& Larrondo, H. A. [1989], “ Isochrones and the dynamics of kicked oscillators”, *Physica A* **155**, 265 – 274.
- Carroll, T. L. & Pecora L. M. [1991], "Synchronizing chaotic circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **38**(4), 453-456.
- Carroll, T. L. & Pecora L. M. [1993], "Synchronizing nonautonomous chaotic circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **40**(10), 645-650.
- Casdagli, M. , Eubank, S., Farmer,, J. D. & Gibson, J. [1991a] “State space reconstruction in the presence of noise” *Physica D*, **51**, 52.
- Catalán R. G., Garay J. & Lopez Ruiz R. [2002] “ Features of the extension of a statistical measure of complexity to continuous systems” *Physical Review E* **66** (1), 011102 –1 – 011102- 6.
- Cartwright, M. L. [1948], “Forced oscillations in nearly sinusoidal systems”, *Journal of the Institute of Electrical Engineering* **95**, 223 –227.
- Chaitin, G. J. [1966] “ On the length of programs for computing finite binary sequences” *J. ACM* **13**, 547
- Chen s., Hu J., Wang Ch.,& Lü J. [2004] “Adaptive synchronization of uncertain Rössler hyperchaotic system based on parameter identification” *Physics Letters A* **321** 50 –55.
- Chua L.O., M. Hasler, G.S. Moschytz and J. Neirynck, [1995] "Autonomous Cellular Neural Networks: a unified paradigm for pattern formation and active wave propagation" *IEEE Trans. Circuit Sys. I*, **42**, 559-577.
- Chui, C. K [1997], *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Processing*. Siam Monographs on Mathematical Modeling and Computation.
- Cuomo, K. M. [1993], “Synthesizing Self-synchronizing Chaotic Systems”, *International Journal Of Bifurcation And Chaos* **3**(5).
- Cuomo, K. M. & Oppenheim, A. V. [1993], “Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications”, *Physical Review Letters* **71**(1), 65-68.
- Cuomo, K. M., Oppenheim, A. V. & Strogatz, S. H. [1993], “Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications”, *IEEE Transactions on Circuits Systems II* **40**(10), 626-633.
- Cuomo, K. M. [1994], “Synthesizing Self- synchronizing Chaotic Arrays”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **4**(3)

- d' Anjou A., Sarasola C., Torrealdea F. J., Orduna R., & Graña M. [2001] "Parameter-adaptive identical synchronization disclosing Lorenz chaotic masking" *Physical Review E* **63**(046213), 046213-1 – 046213-5.
- Daubechies, I. [1988], "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", *Comm. Pure Appl. Math.*,**41**, 909-996.
- Daubechies, I. [1990], "The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis", *IEEE Trans. Information Theory*, **36** (5), 961-1005.
- Daw C. S., Finney C. A., & Tracy E.R. [2003] "A Review of Symbolic Analysis of Experimental Data" *Review of Scientific Instruments* **74** (2) 915 – 929.
- Ditto W. & Munakata T. [1995] "Principles and Applications of Chaotic Systems" *Communications of the ACM* **38** (11) 96- 102.
- Dmitriev A. S., Panas A.I., Starkov S. O., Kuzmin L. V. [1997] " Experiments on RF Band Communications Using Chaos" *International Journal of Bifurcation and Chaos* **7** (11) 2511 – 2527.
- Duffing, C., [1918]. "Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz und ihre" *Technische Bedeutung Vieweg, Braunscheweig*.
- Ebeling W., Steuer R. [2001] "Partition –Based Entropies of Deterministic and Stochastic Maps" *Stochastics and Dynamics*, Vol 1, Nº 1 1-17. World Scientific Publishing Company.
- Ebeling, W., Jimenez – Montano M. A. , Pohl T. [2000]; in: Karmeshu (ed.). *Entropy Measures, Maximun Entropy Principles and emerging applications*. Springer Berlin .
- Ebeling, W. & Jimenez-Montano M. A. [1980] " On grammars, complexity and information measures of biological macromolecules" *Math. Biosciences* **52**, 53-71.
- Eckmann, J. P.& Ruelle, D. [1985] "Ergodic theory of chaos and strange attractors" *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 67.
- Feng J. & Tse C. [2001] "On-line adaptive chaotic demodulator based on radial-basis-function neural networks" *Physical Review E* **63** (026202), 026202-1 –026202-10.
- Feigenbaum, MJ [1980] "The metric universal properties of period doubling difurcations and the spectrum for a route to turbulence". *Annals of the New York Academy of Sciences*. **357**:330-336
- **Fernández J. G.**, Levin D., Slavin H.,& Larrondo H. A. [2002] "Chaotic encryption and wavelet analysis in a communication system based on active -pasive decomposition" XIII Meeting on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics. Colonia, Uruguay. Poster y publicación en Actas
- **Fernandez, J. G.**, Larrondo, H. A., Slavin, H. A., Levin, D. G., Hidalgo, R. M. & Rivera, R. R. [2003], "Masking properties of APD communication systems", *Physica A* **328**(3-4), 351-359.
- **Fernández J. G**, Hidalgo R. M, Rivera R.R., Gemin W. A. & Larrondo H. A.[2004] "A Correlation - FFT Method for on-line Amplitude and Frequency Estimation".

Enviada para su publicación en IEEE Transactions on Signal Processing. Ed. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. USA. ISSN 1053 -587X .

- **Fernández J. G.**, Hidalgo R.M., Rivera R.R., Gemin W. A. & Larrondo H. A. [2005b] "Medición de amplitud y frecuencia de señales periódicas inmersas en ruido" XI RPIC – Rio Cuarto- Córdoba. Conferencia y publicación en Actas.
- **Fernandez J. G.**, Hidalgo R. M. , Arizmendi C. M. , Rosso O. A., Larrondo H.A. [2005a] “ Codificación, entropía y complejidad en el mapa de Lorenz”. III Taller Regional de Física Estadística y Aplicaciones a la Materia Condensada. Modalidad poster. La Plata.
- Feitchinger H. G., Grochenig K., Strohmmer T., [1995] “Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory” XXX
- Fitz M. P. [1994] “Further Results in the Fast Estimation of a Single Frequency” *IEEE Transactions on Communications* **42** (2/3/4), 862 – 864.
- Fraser, A. M. & Swinney, H. L. [1986] “ Independant coordinates for strange attractors from mutual information” *Phys. Rev. A.*, **33**, 1134.
- Fung, H., Li, K. , Teh, K.,& Kot, A. [2004] “Parameter Estimation of a Real Single Tone from Short Data Records,” *Signal Processing*, **84** (3) 601-617
- Gibson, J. F., Farmer, J. D., Casdagli, M. & Eubank, S. [1992] “An analytic approach to practical state space reconstruction “ *Physica D*, **57**, 1.
- Goedgebuer, J.P., Larger, L. & Porte, H. [1998] “Optical Cryptosystem Based on synchronization of Hyperchaos Generated by a Delayed Feedback Tunable Laser Diode” *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2249.
- González, D. L., Larrondo, H. A., Tomasel, F. & Romanelli, L. [1988], “Measurement of the Correlation Dimension in an Electronic Oscillator”, *First Workshop on Non-linear Phenomena and 3rd Medyfinol*, Mar del Plata.
- González, D. L. & Piro, O. [1983], “Chaos in a Nonlinear Driven Oscillator with Exact Solution”, *Physical Review Letters* **50**(12), 870-872.
- González,C.M., Larrondo,H.A., Gayoso, C. A., Arnone, L.J [2003] “Generación de secuencias binarias pseudo aleatorias por medio de un mapa caótico 3D”. *Proceedings del IX Iberchip*. <http://www.iberchip.org/IX/Articles/PAP-013.pdf>
- González,C.M., Larrondo,H.A., Gayoso, C. A., Arnone, L.J, [2003b] “Generación de secuencias binarias pseudo’aleatorias por medio de un mapa caótico 3D”. *IX Workshop IBERCHIP, La Habana, Cuba*. Presentación oral y publicación en actas.
- González,C.M., Larrondo,H.A., Gayoso, C. A., Arnone, L.J [2004], “Secuencias binarias generadas por un mapa caótico 2D”. *Proceedings del X Iberchip*.

http://www.iberchip.org/iberchip2004/articles/11-2-CMGONZALEZ_MDP_IBERCHIP_04.pdf
- González,C.M., Larrondo,H.A., Gayoso, C. A., Arnone, L.J, Boemo, E. I. [2004b] “Digital Signal Transmission with Chaotic Encryption: Design and Evaluation of a FPGA Realization.” Los Alamos CR 0402056 (<http://arXiv.org/abs/cs.CR/0402056>) .

- González,C.M., Larrondo,H.A., Gayoso, C. A., Arnone, L.J, [2004c] “Secuencias binarias pseudo aleatorias generadas por un mapa caótico 2D”. *X Workshop IBERCHIP, Cartagena de Indias, Colombia*. Presentación poster
- González,C.M., Larrondo,H.A., Rosso, O.A., [2004d] “A new statistical test for PRNG’s based on chaos”. 2do. *Taller Regional de Física Estadística y sus Aplicaciones a la Física de la Materia Condensada*. TREFEMAC’04. Córdoba, Argentina. Presentación poster y publicación en actas.
- González,C.M., Larrondo,H.A., Rosso,O.A. [2005] “Statistical complexity measure of pseudorandom bit generators.” *Physica A* , **354**, 281-300.
- Gough, P.T. [1994] “A fast spectral estimation algorithm based on the FFT” *IEEE Trans. Signal Processing*, **42**, 1317-1322
- Grassberger, P. [1983] “Generalized dimension of strange attractors” *Phys. Lett. A*, **97**, 227.
- Grassberg, P. & Procaccia, I. [1983] “Measuring the strageness of strange atractors” *Physica D*, **9**, 189.
- Hadamard, J. "Résolution d'une question relative aux déterminants." *Bull. Sci. Math.* **17**, 30-31, 1893.
- Hale, J. & Kocak, H. [1991], *Dynamics and Bifurcations*, Springer – Verlag, New York.
- Halle, K. S., Wu, C. W., Itoh, M. & Chua, L. O. [1993], “Spread spectrum communications through modulation of chaos”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **3**(2), 469-477.
- Hausdorff, S. M. [1918] *Dimension und äußeres Maß*. Math. Annalen, **79**, 157.
- Hayes S., Grebogi C., Ott E. & Mark A.[1994] “Experimental Control of Chaos for Communication” *Physical Review Letters* **73** (13), 1781 –1784.
- Herzel, H. Ebeling, W. & Schmitt, A. O. [1994] “ Entropies of biosequences: The role of repeats” *Phys. Rev. E* . 5061- 5071
- Hidalgo, R. M., **Fernandez, J. G.** & Gonzalez, M. L. [1994], “Cálculo de la Función Correlación en Forma Discreta”, *Nueva Telegráfica Electrónica N° 6*, 456-460.
- Hidalgo, R. M., **Fernandez, J. G.** & Aloisio, G. [1997], “Optimización de la ventana de muestreo en el cálculo de la Transformada de Fourier”, *Nueva Telegráfica Electrónica N° 22*, 83-87.
- Hidalgo, R. M., Rivera, R. R. & Gonzalez, M. L. [1997b], “Aplicación de la Interpolación como Técnica de Filtrado Digital”, *Nueva Telegráfica Electrónica N° 24*, 235-239.
- Hidalgo, R. M., **Fernandez, J. G.** & Rivera, R. R. [2001a], “Filtros Digitales: Simulación versus Realización en Tiempo Real”, *Nueva Telegráfica Electrónica N° 45*, 76-79.

- Hidalgo, R. M., **Fernandez, J. G.**, Rivera, R. R. & Larrondo, H. A. [2001b], “Versatile DSP-based Chaotic Communication System”, *Electronics Letters* **37**(19), 1204-1205.
- Hidalgo, R. M., **Fernandez, J. G.**, Rivera, R. R. & Larrondo, H. A. [2002], “A Simple Adjustable Window Algorithm to Improve FFT Measurements”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **51**(1), 31-36.
- Hidalgo R. M., **Fernández J. G.**, Rivera R. R. Levin D., & Larrondo H. A. [2002] "Chaotic communication systems: analog vs. DSP realization." XIII Meeting on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics- Colonia, Uruguay. Poster y publicación en Actas.
- Hidalgo, M.R. [2003], *Sincronización y Caos en Sistemas Electrónicos no Lineales y sus Aplicaciones a las Comunicaciones*. Tesis doctoral. FI. UNMdP.
- Hirsch, M. W. & Smale S. [1974], *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Orlando.
- Huang X., Xu J.,Huang W.,& Lu Z. [2001] “Unmasking Chaotic Mask by a Wavelet Multiscale Decomposition Algorithm” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **11** (2), 561 – 569.
- Hunt, E.R. & Johnson, G. [1993], “Keeping chaos at bay”, *IEEE Spectrum* Nov. 1993, 32-36.
- Kantz, H. [1994] “A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series” *Phys. Lett. A*, **185**, 77.
- Kantz, H. & Schreiber T.[1997], *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- Kaplan, J. L. & Yorke, J. A. [1979] “Chaotic behavior of multi-dimensional difference equations,” in Peitgen, H. O. & Walther, H. O. Springer-Verlag, Berlin , pp. 228, 237.
- Kay, S.M.[1989] “A Fast and Accurate Single Frequency Estimator”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **37**(12), pp. 1987-1989.
- Kennel M. B. & Buh M. [2002] “Estimating good discrete partitions from observed data: symbolic false nearest neighbors” *arXiv:nlin.CD/0304054 v1 26 Apr 2003*
- Kocarev, L. & Parlitz, U. [1995], “General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication”, *Physical Review Letters* **74**(25), 5028-5031.
- Kocarev, L., Parlitz, U.& Stojanovski, T.[1996].”An application of synchronized chaotic arrays”, *Phys. Lett. A* **217**, 280-284.
- Kolmogorov, A. N. [1958] “A new invariant of transitive dynamical systems” *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **119**, 861.
- Kolmogorov, A. N. [1965] “Three approaches to the definition of the concept ‘quantity of information’ ”, *Problems Inform. Transmission* **1**, 1-7.

- Kostelich E. J. & Schreiber T. [1993] “ Noise reduction in chaotic time – series data: A survey of common methods” *Physical Review E*. **48** (3), 1752-1763.
- Lakshmanan, M. & Murali, K. [1996], *Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization*, World Scientific Serires on Nonlinear Science **13**, Singapore.
- Lang S. W., & Mc Clellan J. H [1980] “ Frequency Estimation with Maximun Entropy Spectral Estimators” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing ASSP-28* (6) 716 – 724.
- Larrondo, H. A., Avalos , D. A. & Laura , P.A. [1996], “ Dynamics of kicked oscillator with a delay in its parametric feedback loop: an analitic study”, *Nonlinear Dynamics* **11**, 407-419.
- Larrondo, H. A., Rivera, R.R., Hidalgo, R. M.& Epele, L. [1997], “Direct Memory Access Methods applied to Chaotic Behavior Experiments”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **46** (10), 1183.
- Larrondo, H. A., González, C. M., Rosso, O.A. [2003] “Chaotic Cryptography and Statistical Complexity Measures”. *X Workshop on Instabilities and Nonequilibrium Structures. Viña del Mar, Chile*. Presentación poster.
- Larrondo, H. A., González, C. M., Rosso, O.A. [2004] “Statistical Complexity Measures of chaotic pseudo random number generators”. *Invited talk . XIV Meeting on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics*. La Serena, Chile.
- Larrondo, H. A., González, C. M., Martin, M.T., Plastino, A., Rosso, O.A. [2005] “Intensive Statistical Complexity Measure of pseudorandom bit generators.” *Physica A* **356**, 133–138.
- Ledrappier, F. & Young, L. S. [1985]. “The metric entropy of diffeomorphisms, Parts I and II” *Ann. Math.* , **122**, 509.
- Lefschetz, S. [1957], *Ordinary differential Equations: geometric Theory*, Interscience Publishers, New York.
- Lempel A., & Ziv J.[1976] “ On the complexity of finite sequences” *IEEE Trans. Inform. Theory* **22** , 75.
- Leung H., Yu H. & Murali K. [2002] “Ergodic chaos – based communication schemes” *Physical Review E* **66** (036203), 036203-1 - 036203-7.
- Lloyd, S. & Pagels H. [1988] “ Complexity as Thermodymanic Depth” *Annals of Physics*, **188**, 186-213.
- Lopez-Ruiz R., Mancini H. L., & Calbet X. [1995] ”A statistical measure of complexity”, *Phys. Lett. A* **209**, 321 .
- Loreto V., Paladin G.& Vulpiani A. [1996] “Concept of complexity in random dynamical systems” *Physical Review E* **53** (3), 2087 – 2098.
- Lorenz, E. N. [1963] "Deterministic nonperiodic flow", *J. Athmosph. Sc.* **20**, 130-141.
- Lourenco, C., & Babloyatz, A. [1994], “Control of Chaos in Network with Delay: A Model for Synchronization of Cortical Tissue”, *Neural Computation* **6** (6) 1141.

- Mandelbrot, B.B. [1982] *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman, San Francisco.
- Macleod M. D. [1998] “Fast Nearly ML Estimation of Parameters of Real or Complex Single Tones or Resolved Multiple Tones”, *IEEE Transactions on Signal Processing* **46** (1), 141-148.
- McShea, D. W. [1991] “Complexity and Evolution: what everybody knows” *Biol. Philos.* **6**, 303.
- Malinetskii G. G., Potapov A., & Rakhmanov A. I. “Limitations of delay reconstruction for chaotic dynamical systems” *Physical Review E* **48** (2), 904 – 912.
- Mallat, S. [1989], “ A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation” *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* **11**, 674 –693.
- Mariño I.P., Rosa Jr. E., & Grebogi C. [2000] “Exploiting the Natural Redundancy of Chaotic Signals in Communications Systems” *Physical Review Letters* **85** (2), 2629 – 2632.
- Mariño I. P., Grebogi C., & Rosa Jr. E. [2001] “Reconstruction of Information – Bearing Chaotic Signals in Additive White Gaussian Noise: Performance Analysis and Evaluation” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **11** (10), 2631- 2635.
- Marple S. L, [1987], *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Martin M. T., Plastino A., Rosso O. A. [2003], “Statistical complexity and disequilibrium”, *Physics Letters A* **311**(2,3), 126. –132
- Matsumoto, T., Chua L. O.& Komuro, M. [1984]. “A Double-Scroll Chaotic Attractor from a Third Order Reciprocal Circuit”. *Department, University of California, Berkeley* UCB/ERL M84/73
- Melczarsky, I., Hidalgo, R. M. & Larrondo, H. A. [1999], “Sistemas de Comunicaciones Empleando Portadora Caótica”, *Anales VIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control* **3**, 66-11 a 75-11.
- Mensour, B. & Longtin, A.[1998] “Synchronization of delay-differential equations with application to private communication ” *Phys. Lett. A* **244**, 59
- Milocco R.H. [2005] “Filtrado óptimo de datos muestreados con múltiples intervalos asincrónicos” *XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de septiembre de 2005*.
- Minorsky, N. [1962], *Nonlinear Oscillations*, Van Nostrand, Princeton.
- Mischaikow K., Mrozek M., Reiss J.,& Szimczak A. [1999] “Construction of Symbolic Dynamics from Experimental Time Series” *Physical Review Letters* **82** (6), 1144 – 1147.
- Mitra, S. K. [1998], *Digital Signal Processing*, McGraw-Hill, New York.
- Moiola, J. L. & Chen, G. [1996], *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*. World Scientific Series on Nonlinear Science **21**. Singapore.

- Morse, M. A & Hedlund, G. A. "Unending Chess, Symbolic Dynamics, and a Problem in Semigroups." *Duke Math. J.* **11**, 1-7, 1944.
- Murali K. & Lakshmanan M. [1994] "Drive –response scenario of synchronization in identical nonlinear systems" *Physical Review E* **49** (6), 4882 –4885.
- Muravchik, C.H.; Loffler, H.E. [1988] "Estimation of the power distribution function" *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* **36** (1), 132-134.
- Newell, T. C., Alsing, P.M., Gavrielides, A.& Kovanis, V. [1994], "Synchronization of Chaotic Diode Resonators by Occasional Proportional Feedback", *Physical Review Letters* **72** (11), 1647 – 1650.
- Nicolis G. & Prigogine I, [1989] *Exploring complexity: an introduction.* Freeman, New York.
- Oliver B. M. & Cage J. M. [1971] , *Electronic Measurements and Instrumentation.* Mc Graw-Hill Book Company.
- Ogorzalek, M. J. [1997], *Chaos and Complexity in Nonlinear Electronic Circuits*, World Scientific, Singapore.
- Oppenheim A. V. & Schafer R. W. [1976], *Digital Signal Processing.* Prentice Hall, Inc.
- Ott, E., Grebogi, C.& Yorke, J. A [1990], " Controlling chaos", *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 –1199.
- Parker, T. S. & Chua, L. O. [1989], *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, New York.
- Parker A.,& Short K. [2001] "Reconstructing the Keystream from a Chaotic Encryption Scheme" *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **48** (5), 624 – 630.
- Parlitz U., Chua L. O., Kocarev L., Halle K. S. & Shang A. [1992], "Transmission of digital signals by chaotic synchronization", *International Journal of Bifurcation and Chaos* **2**(4) 973-977.
- Parlitz U. [1996] "Estimating Model Parameters from Time Series by Autosynchronization" *Physical Review Letters* **76** (8), 1232 –1235.
- Parlitz U., & Kocarev L., [1997], " Using Surrogate Data Analysis for Unmasking Chaotic Communication Systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos* **7** (2) 407-413.
- Pecora, L. M., & Carroll, T. L. [1990], "Synchronization in chaotic systems", *Physical Review Letters* **64**(8), 821-824.
- Pecora, L. M., & Carroll, T. L. [1991], "Driving systems with chaotic signals", *Physical Review* **A44**(4), 2374-2383.
- Pecora L.M., Carroll T.L., Johnson G. A. & Mar D. J. [1997] "Fundamentals de synchronization in chaotic systems, concepts, and applications" *Chaos* **7** (4), 520 – 542.

- Peng J. H., Ding E. J., Ding M., & Yang W. [1996] “Synchronizing Hyperchaos with a Scalar Transmitted Signal” *Physical Review Letters* **76** (6), 904 – 907.
- Perez G., & Cerdeira H. [1995] “Extracting Messages Masked by Chaos” *Physical Review Letters* **74** (11), 1970 – 1973.
- Pesin, Ya. B. [1977] “Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory”. *Russ. Math. Surveys*, **32**, 55.
- Politi, L & Vulpiani A. [1988], *Measures of Complexity*. Springer – Verlag. Berlin
- Ponomarenko V. I., & Prokhorov M.D. [2002] “Extracting information masked by the chaotic signal of a time –delay system” *Physical Review E* **66** (026215), 026215-1 – 026215-5.
- Proakis J.G. & Manolakis D. G. [2000], *Tratamiento Digital de Señales*, Prentice Hall.
- Quinn B. G. [1997] “Estimation of Frequency, Amplitude, and Phase from DFT of a Time Series” *IEEE Transactions on Signal Processing* **45** (3), 814 – 817.
- Renyi, A. [1970]. *Probability Theory*. North Holland, Amsterdam.
- Rife D. C. & Boorstyn R.R. [1974] “Single Tone Parameter Estimation from Discrete Time Observations” *IEEE Transactions on Information Theory* **IT-20**, 591-598.
- Rivera, R. R., Hidalgo, R. M. & **Fernandez, J. G.** [2001], “Instrumentación Virtual: Nuevas Técnicas de Medición Basadas en PC”, *Nexos N° 13*, 27-30.
- Rivera, R. R., Hidalgo, R. M. & **Fernandez, J. G.**, Gemin, W. A., González, M. L. [2003], “Internet y la instrumentación distribuida en red”, *Nexos N° 16*, 23-25.
- Rosenblum, M.G., Pikovsky, A. S. & Kurths, J. [1996], “Phase Synchronization of Chaotic Oscillators”, *Physical Review Letters* **76** (11), 1804 – 1807.
- Rosenstein, M. T., Collins, J. J. & De Luca, C. J., [1994], “Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times” *Physica D*, **73**, 82.
- Roxin E. & Spinadel V. [1976], *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* Eudeba, Argentina.
- Rössler, O. E. [1976], “An equation for continuous chaos”, *Physics Letters A* **57**(5), 397-398.
- Rössler, O. E. [1979], “An equation for hyperchaos”, *Physics Letters A* **71**(2-3), 155-157.
- Ruelle, D. [1978] *Thermodynamic Formalism*. Addison –Wesley, Reading.
- Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S. & Abarbanel, H. D.L. [1995], “Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems”, *Physical Review E* **51**, 980 – 994.

- Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S. & Volkovskii, A. R. [2001], “Digital communication Using Chaotic-Pulse-Position Modulation”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* **48**(12), 1436-1444
- Sano, M. & Sawada, Y. [1985] “Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series“, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 1091.
- Sauer, T., Yorke, J. A. & Casdagli, M. [1991] “Embedology” *J. Stat. Phys.* , **65**, 579.
- Schreiber T.& Schmitz A. [1997] “Classification of Time Series Data with Nonlinear Similarity Measures” *Physical Review Letters* **79** (8), 1475 – 1478.
- Shannon, C. E. [1948]. “A mathematical theory of communication”. *Bell System Tech. J.* **27**, 379-423, 623-656.
- Shannon C. E, & Weaver W. [1949], *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana II.
- Shannon, C. [1951]. “ Predictions and Entropy of Printed English”, *Bell Systems Tech.* Vol. 30, No. 50.
- Shiner J. S., Davidson M., Landsberg P. T.[1999] “Simple measure for complexity” *Physical Review E* **59** (2), 1459 - 1464.
- Short, K. M. [1994], “Steps toward unmasking secure communications”. *Int. J. of Bifurcations and Chaos*, **4** (4), 959-977.
- Short, K.M. [1996] “Unmasking a modulated chaotic communications scheme” *Int. J. Bifurc. Chaos*, **6**, 367–375
- Short K. M. & Parker A. T. [1998] “Unmasking a hyperchaotic communication scheme” *Physical Review E* **58** (1), 1159 – 1162.
- Staszewski W. J. & Worden K. [1999] “Wavelet Analysis of Time-Series: Coherent Structures, Chaos and Noise” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9** (3), 455 – 471.
- Steuer R., Molgedey L., Ebeling W.,& Jimenez-Montaña M. A. [2001] “Entropy and optimal Partition for Data Analysis”, *Eur. Phys. J. B.* **19**, 265-269.
- Strogatz S.H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering* Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- Sonnaillon M.O., Urteaga R., Bonetto F., [2005]. “Implementación de un amplificador lock-in digital de alta frecuencia usando muestreo no uniforme”. *XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de septiembre de 2005*.
- Szezepánski J. [2000] “ On the Distribution Function of the Complexity of Finite Sequences” *arXiv:math.PR/0009084 v1 8 Sep 2000*.
- Takens, F. [1981] *Detecting Strange Attractors in Turbulence*. Lecture Notes in Math. Vol. 898, Springer, New York.

- Tenny R., Tsimring L., Larson L., & Abarbanel H., [2003] “ Using Distributed Nonlinear Dynamics for Public Key Encryption” *Physic Review Letters* **90** (4), 047903-1– 047903-4.
- Teolis A. [1998], *Computational Signal Processing with Wavelets*. Birkhäuser.
- Tse C. K., Lau F.C., Cheong K., & Hau S [2002] “Return Map Based Approaches for Noncoherent Detection in Chaotic Digital Communications” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. **49** (10), 1495 – 1499.
- Tufillaro N. B., Wyckoff P., Brown R., Schreiber T., & Molteno T. [1995] “Topological time-series analysis of a string experiment and its synchronized model” *Physical Review E* **51**(1), 164 –175.
- Valladares D. L., Boccaletti S., Mancini H. [2001] “Signal Dropout Reconstruction in Communicating with Chaos” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **11** (10), 2621 – 2629.
- Vernan, G.S. [1926], “Cipher printing telegraph systems for secret wire and radio telegraph communications”, *Journal of American Institute of Electrical Engineers* **45**, 109 –115.
- Výugin V. V. [1999] “ Stochastic Properties of Finite Binary Sequences” *The Computer Journal* **42** (4), 294 – 317.
- Walker D. M. & Tufillaro N. B. [1999] “ Phase space reconstruction using input – output time series data” *Physical Review E* **60** (4), 4008 – 4013.
- Williams, C. [2001], “Chaotic Communications Over Radio Channels”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* **48**(12), 1394-1404.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A. [1985] “Determining Lyapunov exponents from a time series” *Physica D*, **16**, 285.
- Wooters W.K. [1980] “Statistical Distance and Hilbert Space” *Physical Review D* **23** (2), 357 –362
- Yang. T., Yang L.B.,& Yang C.M. [1998] “Breaking chaotic secure communication using a spectrogram” *Physics Letters A* **247**, 105 –111.
- Zhou C. & Lai C.H. [1999] “Decoding information by following parameter modulation with parameter adaptive control” *Physical Review E* **59** (6), 6629 – 6636.