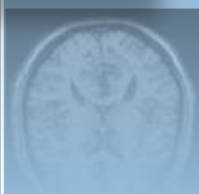


Segmentación en Imágenes Médicas mediante técnicas de Morfología Matemática Difusa



Lic. Agustina Bouchet

Dirección: Dra. Virginia Ballarin

Co-dirección: Dr. Marcel Brun



RINFI es desarrollado por la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

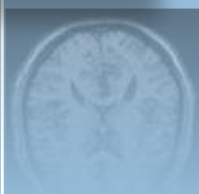
Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución- NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Segmentación en Imágenes Médicas mediante técnicas de Morfología Matemática Difusa



Lic. Agustina Bouchet

Dirección: Dra. Virginia Ballarin

Co-dirección: Dr. Marcel Brun

***“El experimentador que no sabe lo que está buscando
no comprenderá lo que encuentra.”***

Claude Bernard (1813-1878), fisiólogo francés.

Índice

Listado de Acrónimos	7
Listado de Figuras.....	8
Listado de Tablas.....	11
Capítulo 1: Introducción	15
1.1 Motivación y presentación del problema	15
1.2 Objetivos de esta tesis.....	17
1.3 Publicaciones que sustentan esta tesis	18
1.4 Estructura de la tesis	20
Capítulo 2: Teoría de Conjuntos Clásicos	23
2.1 Introducción	23
2.2 Nociones sobre la teoría de conjuntos	24
2.3 Relación de orden entre conjuntos	29
2.4 Funciones	31
2.5 Teoría de reticulados	31
Capítulo 3: Morfología Matemática	34
3.1 Introducción	34
3.2 Tipos de imágenes.....	35
3.3 Propiedades de las transformaciones morfológicas	36
3.4 Elemento estructurante.....	38
3.5 Morfología Matemática binaria	39
3.5.1 Operadores básicos binarios.....	39
3.5.2 Propiedades de los operadores básicos binarios	42
3.5.3 Filtros básicos binarios.....	44
3.5.4 Propiedades de los filtros básicos binarios.....	47
3.5.5 Extracción de bordes	48
3.6 Morfología Matemática en niveles de gris	49
3.6.1 Operadores básicos en niveles de gris.....	51
3.6.2 Filtros básicos en niveles de gris	54
3.6.3 Filtros secuenciales alternados	56
3.6.4 Gradiente morfológico.....	58
3.6.5 Transformada Top-Hat.....	59

3.6.6 Umbralamiento	61
Capítulo 4: Teoría de Conjuntos Difusos.....	64
4.1 Introducción	64
4.2 Conjuntos difusos y funciones de pertenencia	66
4.3 Conceptos de la teoría de conjuntos difusos	68
4.4 Operaciones entre conjuntos difusos.....	69
4.5 Normas y conormas triangulares	71
4.6 Complemento difuso	74
4.7 Principio de extensión de Zadeh	75
Capítulo 5: Morfología Matemática Difusa	77
5.1 Reseña histórica	77
5.2 Suma y resta de Minkowski para conjuntos difusos	79
5.3 Definición de los operadores básicos de la MMD	90
5.3.1 Enfoque de De Baets	90
5.3.2 Enfoque de Bloch y Maître.....	92
5.3.3 Enfoque de Sinha y Dougherty.....	95
5.3.4 Enfoque basado en la traducción de las fórmulas de Serra en términos de la lógica difusa.....	99
5.4 Unificación de las definiciones de los operadores básicos	103
5.5 Operadores y filtros de la MMD.....	107
Capítulo 6: Resultados: Morfología Matemática Compensatoria	110
6.1 Introducción	110
6.2 Lógica Difusa Compensatoria.....	111
6.3 Lógica Difusa Compensatoria basada en la media aritmética	113
6.4 Comparación gráfica de los operadores	119
6.5 Relación entre la Lógica Difusa Compensatoria propuesta y la Lógica Booleana	124
6.6 Ejemplo ilustrativo: Competitividad de empresas	125
6.7 Morfología Matemática Compensatoria	129
6.8 Discusión	130
Capítulo 7: Resultados: Robustez de los operadores básicos	132
7.1 Materiales y métodos.....	132
7.2 Resultados.....	137
7.3 Discusión	147

Capítulo 8: Resultados: Robustez de los filtros básicos	150
8.1 Materiales y métodos.....	150
8.2 Resultados.....	152
8.3 Discusión	160
Capítulo 9: Resultados: Eliminación de ruido por medio de filtros secuenciales alternados	162
9.1 Materiales y métodos.....	162
9.2 Resultados.....	163
9.3 Discusión	171
9.3.1 Filtro apertura-cierre	171
9.3.2 Filtro cierre-apertura	172
9.3.3 Conclusión.....	174
Capítulo 10: Resultados: Robustez de operadores para la detección de bordes y la aplicación del Top-Hat	176
10.1 Materiales y métodos.....	176
10.2 Resultados.....	180
10.2.1 Resultados de los experimentos utilizando ruido	180
10.2.2 Resultados de los experimentos utilizando la convolución	181
10.3 Discusión	205
10.3.1 Experimentos utilizando ruido	205
10.3.1.1 Gradiente por dilatación	205
10.3.1.2 Gradiente por erosión.....	205
10.3.1.3 Gradiente morfológico.....	206
10.3.1.4 Top-Hat por apertura.....	206
10.3.1.5 Top-Hat por cierre	207
10.3.2 Experimentos utilizando la convolución	208
10.3.2.1 Gradiente por dilatación	208
10.3.2.2 Gradiente por erosión.....	208
10.3.2.3 Gradiente morfológico.....	209
10.3.2.4 Top-Hat por apertura.....	209
10.3.2.5 Top-Hat por cierre	210
10.3.3 Conclusiones	210
Capítulo 11: Aplicación: Segmentación de imágenes usando la MMD	212
11.1 Segmentación.....	212
10.2 Materiales y métodos.....	213

10.3 Resultados	214
10.4 Discusión	218
Capítulo 12: Conclusiones	220
Apéndice A: Lógica Difusa	223
A.1 Conjunción difusa y disyunción difusa	223
A.2 Las normas en la definición de los operadores básicos de la MMD	223
A.3 La conjunción de la LDC en la definición de la dilatación	226
Apéndice B: Elementos estructurantes.....	229
B.1 Generación del elemento estructurante difuso.....	229
B.2 Elemento estructurante difuso de dimensión 3×3	230
B.3 Elemento estructurante difuso de dimensión 5×5	231
B.4 Elemento estructurante difuso de dimensión 7×7	232
B.5 Elemento estructurante difuso de dimensión 11×11	232
B.6 Elemento estructurante difuso de dimensión 15×15	233
Apéndice C: Comportamiento de la norma Drástica en la detección de bordes	236
Apéndice D: Software Implementado: Librería de MMD.....	240
D.1 Descripción de la librería	240
Referencias.....	253

Listado de Acrónimos

PDI – Procesamiento Digital de Imágenes

MM – Morfología Matemática

RM – Resonancia Magnética

TAC – Tomografía Axial Computada

MMD – Morfología Matemática Difusa

MMC – Morfología Matemática Compensatoria

EE – Elemento Estructurante

LD – Lógica Difusa

LB – Lógica Booleana

LDC – Lógica Difusa Compensatoria

LDCBMG – Lógica Difusa Compensatoria basada en la media geométrica

LDCBMA – Lógica Difusa Compensatoria basada en la media aritmética

CPLDC – Cálculo Proposicional de la Lógica Difusa Compensatoria

CPB – Cálculo Proposicional Booleano

Listado de Figuras

Figura 2.1: Reflexión de un conjunto	26
Figura 2.2: Traslación de un conjunto	27
Figura 2.3: Suma de Minkowski	28
Figura 2.4: Resta de Minkowski	29
Figura 3.1: Tipo de imágenes.....	36
Figura 3.2: Formas básicas de elementos estructurantes planos.....	39
Figura 3.3: Dilatación y erosión binarias	41
Figura 3.4: Aplicación de la dilatación y erosión binarias	41
Figura 3.5: Erosión y dilatación discretas.....	44
Figura 3.6: Apertura de una imagen binaria	45
Figura 3.7: Cierre de una imagen binaria.....	46
Figura 3.8: Aplicación de la apertura binaria y del cierre binario	46
Figura 3.9: Extracción de bordes.....	49
Figura 3.10: Ejemplo de dilatación de una señal unidimensional	52
Figura 3.11: Ejemplo de erosión de una señal unidimensional	52
Figura 3.12: Aplicación de la dilatación y erosión en imágenes en niveles de gris.....	53
Figura 3.13: Apertura de una señal unidimensional con un elemento estructurante lineal	55
Figura 3.14: Cierre de una señal unidimensional con un elemento estructurante lineal	55
Figura 3.15: Aplicación de la apertura y del cierre en imágenes en niveles de gris	55
Figura 3.16: Aplicación del filtro cierre-apertura.....	57
Figura 3.17: Aplicación del filtro apertura-cierre.....	57
Figura 3.18: Gradientes en imágenes en niveles de gris	59
Figura 3.19: Top-Hat por apertura	60
Figura 3.20: Top-Hat por cierre	60
Figura 3.21: Aplicación de la transformada Top-Hat.....	61
Figura 4.1: Visualización de los conceptos de la teoría de conjuntos difusos.....	69
Figura 4.2: Gráfico de la t-norma estándar	72
Figura 4.3: Gráfico de la s-norma estándar	74
Figura 6.1: Gráfico de la conjunción de la LDCBMG en distintas perspectivas	120
Figura 6.2: Gráfico de la conjunción de la LDCBMA en distintas perspectivas	121
Figura 6.3: Gráfico de la diferencia entre las conjunciones de la LDCBMG y la LDCBMA	121

Figura 6.4: Gráfico de la disyunción de la LDCBMG en distintas perspectivas.....	122
Figura 6.5: Gráfico de la disyunción de la LDCBMA en distintas perspectivas	123
Figura 6.6: Gráfico de la diferencia entre las disyunciones de la LDCBMG y la LDCBMA.....	123
Figura 7.1: Esquema del diseño de los experimentos	133
Figura 7.2: Imágenes utilizadas para desarrollar los experimentos.....	134
Figura 7.3: Visualización de los elementos estructurantes difusos	136
Figura 7.4: Imágenes que se utilizan para visualizar los resultados.....	138
Figura 7.5: Visualización de los resultados para la dilatación	139
Figura 7.6: Gráficos de los errores para la dilatación	141
Figura 7.7: Diagramas de cajas para la dilatación	142
Figura 7.8: Visualización de los resultados para la erosión.....	143
Figura 7.9: Gráficos de los errores para la erosión	145
Figura 7.10: Diagramas de cajas para la erosión	146
Figura 8.1: Esquema del diseño de los experimentos	150
Figura 8.2: Imágenes utilizadas para desarrollar los experimentos.....	152
Figura 8.3: Visualización de los resultados para la apertura	154
Figura 8.4: Gráficos de los errores para la apertura	156
Figura 8.5: Diagramas de cajas para la apertura	156
Figura 8.6: Visualización de los resultados para el cierre	157
Figura 8.7: Gráficos de los errores para el cierre	159
Figura 8.8: Diagramas de cajas para el cierre	159
Figura 9.1: Esquema del diseño de los experimentos	163
Figura 9.2: Visualización de los resultados del filtro apertura-cierre.....	165
Figura 9.3: Gráficos de los errores para el filtro apertura-cierre.....	167
Figura 9.4: Diagramas de cajas para el filtro apertura-cierre.....	167
Figura 9.5: Visualización de los resultados del filtro cierre-apertura.....	168
Figura 9.6: Gráficos de los errores para el filtro cierre-apertura.....	170
Figura 9.7: Diagramas de cajas para el filtro cierre-apertura.....	170
Figura 9.8: Visualización de los resultados del filtro apertura-cierre con un EE de 11×11	172
Figura 9.9: Visualización de los resultados del filtro cierre-apertura con un EE de 11×11	173
Figura 10.1: Esquema del diseño de los experimentos en los cuales se utilizó ruido.....	177
Figura 10.2: Esquema del diseño de los experimentos en los cuales se utilizó la convolución	177
Figura 10.3: Imágenes utilizadas para desarrollar los experimentos.....	179
Figura 10.4: Visualización de los resultados de los experimentos utilizando ruido	183

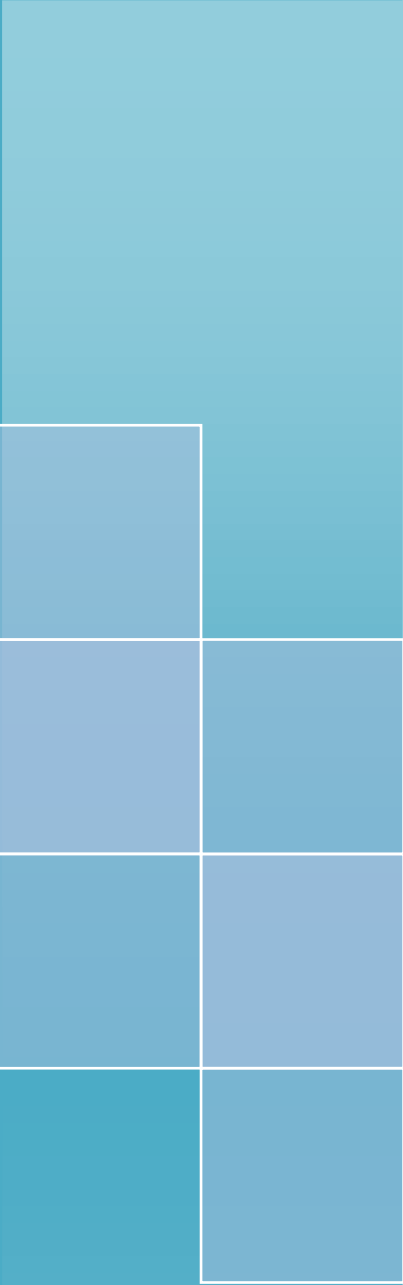
Figura 10.5: Gráficos de los errores del gradiente por dilatación	185
Figura 10.6: Diagramas de cajas para el gradiente por dilatación	185
Figura 10.7: Gráficos de los errores del gradiente por erosión	187
Figura 10.8: Diagramas de cajas para el gradiente por erosión	187
Figura 10.9: Gráficos de los errores del gradiente morfológico	189
Figura 10.10: Diagramas de cajas para el gradiente morfológico	189
Figura 10.11: Gráficos de los errores del Top-Hat por apertura	191
Figura 10.12: Diagramas de cajas para el Top-Hat por apertura	191
Figura 10.13: Gráficos de los errores del Top-Hat por cierre	193
Figura 10.14: Diagramas de cajas para el Top-Hat por cierre	193
Figura 10.15: Visualización de los resultados de los experimentos utilizando la convolución .	194
Figura 10.16: Gráficos de los errores del gradiente por dilatación.....	196
Figura 10.17: Diagramas de cajas para el gradiente por dilatación	196
Figura 10.18: Gráficos de los errores del gradiente por erosión	198
Figura 10.19: Diagramas de cajas para el gradiente por erosión	198
Figura 10.20: Gráficos de los errores del gradiente morfológico	200
Figura 10.21: Diagramas de cajas para el gradiente morfológico	200
Figura 10.22: Gráficos de los errores del Top-Hat por apertura	202
Figura 10.23: Diagramas de cajas para el Top-Hat por apertura	202
Figura 10.24: Gráficos de los errores del Top-Hat por cierre	204
Figura 10.25: Diagramas de cajas para el Top-Hat por cierre	204
Figura 11.1: Segmentación de angiografías: Ejemplo 1	215
Figura 11.2: Segmentación de angiografías: Ejemplo 2.....	216
Figura 11.3: Segmentación de angiografías: Ejemplo 3.....	217
Figura B.1: Visualización tridimensional del EE $B_{3 \times 3}$	231
Figura B.2: Visualización tridimensional del EE $B_{5 \times 5}$	231
Figura B.3: Visualización tridimensional del EE $B_{7 \times 7}$	232
Figura B.4: Visualización tridimensional del EE $B_{11 \times 11}$	233
Figura B.5: Visualización tridimensional del EE $B_{15 \times 15}$	234

Listado de Tablas

Tabla 5.1: Función de pertenencia $\mu(x)$	82
Tabla 5.2: Pertenencia de los elementos $x \in X$ a los α -cortes	82
Tabla 5.3: Cálculo del supremo sobre los $\alpha \in (0,1]$ para cada elemento del dominio X	83
Tabla 5.4: t-normas y s-normas	106
Tabla 5.5: Fórmulas para la dilatación difusa y la erosión difusa	106
Tabla 6.1: Valores obtenidos para la implicación I_1	125
Tabla 6.2: Valores obtenidos para la implicación I_2	125
Tabla 6.3: Significado de los predicados	127
Tabla 6.4: Valores obtenidos a partir de la LDCBMG	128
Tabla 6.5: Valores obtenidos a partir de la LDCBMA	128
Tabla 7.1: t-normas y s-normas	135
Tabla 7.2: Conjunciones y disyunciones de la LDC	135
Tabla 7.3: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 3×3	140
Tabla 7.4: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 5×5	140
Tabla 7.5: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 7×7	140
Tabla 7.6: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 11×11	140
Tabla 7.7: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 15×15	140
Tabla 7.8: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 3×3	144
Tabla 7.9: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 5×5	144
Tabla 7.10: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 7×7	144
Tabla 7.11: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 11×11	144
Tabla 7.12: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 15×15	144
Tabla 8.1: Matriz de errores para la apertura usando un EE de 3×3	155
Tabla 8.2: Matriz de errores para la apertura usando un EE de 7×7	155
Tabla 8.3: Matriz de errores para la apertura usando un EE de 11×11	155
Tabla 8.4: Matriz de errores para la apertura usando un EE de 15×15	155
Tabla 8.5: Matriz de errores para el cierre usando un EE de 3×3	158
Tabla 8.6: Matriz de errores para el cierre usando un EE de 7×7	158
Tabla 8.7: Matriz de errores para el cierre usando un EE de 11×11	158
Tabla 8.8: Matriz de errores para el cierre usando un EE de 15×15	158

Tabla 9.1: Matriz de errores para el filtro apertura-cierre usando un EE de 3×3	166
Tabla 9.2: Matriz de errores para el filtro apertura-cierre usando un EE de 7×7	166
Tabla 9.3: Matriz de errores para el filtro apertura-cierre usando un EE de 11×11	166
Tabla 9.4: Matriz de errores para el filtro cierre-apertura usando un EE de 3×3	169
Tabla 9.5: Matriz de errores para el filtro cierre-apertura usando un EE de 7×7	169
Tabla 9.6: Matriz de errores para el filtro cierre-apertura usando un EE de 11×11	169
Tabla 9.7: Porcentaje de error para el filtro apertura-cierre	172
Tabla 9.8: Porcentaje de error para el filtro cierre-apertura	173
Tabla 10.1: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 3×3	184
Tabla 10.2: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 7×7	184
Tabla 10.3: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 11×11	184
Tabla 10.4: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 3×3	186
Tabla 10.5: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 7×7	186
Tabla 10.6: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 11×11	186
Tabla 10.7: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 3×3	188
Tabla 10.8: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 7×7	188
Tabla 10.9: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 11×11	188
Tabla 10.10: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 3×3	190
Tabla 10.11: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 7×7	190
Tabla 10.12: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 11×11	190
Tabla 10.13: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 3×3	192
Tabla 10.14: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 7×7	192
Tabla 10.15: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 11×11	192
Tabla 10.16: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 3×3	195
Tabla 10.17: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 7×7	195
Tabla 10.18: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 11×11	195
Tabla 10.19: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 3×3	197
Tabla 10.20: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 7×7	197
Tabla 10.21: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 11×11	197
Tabla 10.22: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 3×3	199
Tabla 10.23: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 7×7	199
Tabla 10.24: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 11×11	199
Tabla 10.25: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 3×3	201
Tabla 10.26: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 7×7	201

Tabla 10.27: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 11×11	201
Tabla 10.28: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 3×3	203
Tabla 10.29: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 7×7	203
Tabla 10.30: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 11×11	203
Tabla C.1: EE normalizado	237
Tabla C.2: Ventana de la imagen original	237
Tabla C.3: Ventana de la imagen resultado	238
Tabla C.4: Resultado de aplicar la dilatación sobre la imagen con un EE en forma de cruz	238
Tabla D.1: Funciones generadas en la librería de MMD	240



Capítulo 1

Introducción

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación y presentación del problema

El análisis de imágenes biomédicas se ha convertido en un área de gran relevancia dentro de la disciplina del Procesamiento Digital de Imágenes (PDI). Su objetivo fundamental es la obtención de información médica, que permite mejorar el diagnóstico de posibles patologías y por lo tanto su fiabilidad.

Una imagen médica es aquella que procede del conjunto de técnicas y procesos usados para crear imágenes del cuerpo humano o partes de él con propósitos clínicos, esto es, procedimientos médicos que buscan revelar, diagnosticar o examinar enfermedades, o bien con propósitos científicos médicos, tales como el estudio de la anatomía física y metabólica.

En la medicina actual, hacer diagnósticos utilizando imágenes es una tarea cotidiana. El procesamiento de imágenes de resonancia magnética, tomografía computada, angiografías y otras modalidades, proveen un medio no-invasivo y efectivo de delinear la anatomía de un sujeto. Estas tecnologías han incrementado enormemente el conocimiento de anatomías y patologías para la investigación médica y son un componente crítico en la planificación de diagnósticos y tratamientos. Con el incremento en tamaño y número de imágenes médicas, se ha hecho necesario el uso de computadoras para facilitar el procesamiento y análisis de las mismas. En particular, los algoritmos para el delineamiento de estructuras anatómicas y otras regiones son un componente clave para asistir y automatizar ciertas tareas. Estos algoritmos, denominados de segmentación, juegan un papel importante en numerosas aplicaciones biomédicas de tratamiento de imágenes.

Segmentar una imagen es un proceso que consiste en descomponer una imagen en regiones de interés, es decir, particionarla según sus componentes estructurales más importantes siguiendo algún criterio. Dicho criterio dependerá del resultado que se desee obtener sobre la imagen. Los métodos para llevar a cabo las segmentaciones varían ampliamente dependiendo de la aplicación específica, tipo de la imagen y otros factores. El ruido, los volúmenes parciales y los movimientos en la imagen, también pueden tener consecuencias significativas en el desempeño de los algoritmos de segmentación. Actualmente

no existe un método de segmentación que alcance resultados aceptables para todo tipo de imagen médica. No existen métodos que sean generales y que puedan ser aplicados a cualquier variedad de datos. De cualquier forma, los métodos que son especializados para aplicaciones particulares pueden obtener mejores resultados tomando en cuenta conocimiento a priori. Por lo tanto, la selección de un método apropiado para un problema de segmentación puede ser muy difícil.

El problema fundamental que existe en la segmentación de imágenes médicas es la dificultad que existe a la hora de generar información válida para ser procesada. Estas imágenes poseen gran cantidad de ruido, bajo contraste y alto contenido de imprecisión. Dichas imprecisiones son inherentes a este tipo de imágenes, ya sea por la presencia de límites indefinidos entre las estructuras u objetos a segmentar debido a una adquisición ruidosa de la imagen o directamente porque son inherentes a los métodos propios de formación de estas imágenes. Es aquí donde surge la necesidad de crear algoritmos de segmentación que permitan resaltar los objetos de interés para el experto. La Morfología Matemática (MM) brinda herramientas para abordar esta problemática.

La MM es una teoría basada en conceptos de geometría, álgebra, topología y teoría de conjuntos, creada para caracterizar propiedades físicas y estructurales de diversos materiales. En la actualidad la MM se ha convertido en una sólida teoría matemática en la que se basan poderosas herramientas para el PDI. La idea central de esta teoría es examinar las estructuras geométricas de una imagen por superposición con pequeños patrones localizados, denominados elementos estructurantes, en distintas partes de la misma. La MM permite procesar imágenes con el objetivo de realzar zonas, detectar bordes, analizar estructuras y segmentar regiones, entre otras. A través de la segmentación los objetos extraídos pueden ser contados y posteriormente se pueden calcular múltiples medidas (área, perímetro, longitud, factor de forma, esbeltez, rugosidad, etc.) lo que permitirá realizar por parte de los expertos un análisis completo de la imagen bajo estudio.

A partir de fundamentos teóricos sólidos, la MM ha logrado excelentes resultados en la segmentación de estructuras y una implementación de los algoritmos rápida y sencilla. Sin embargo cuando nos enfrentamos con imágenes de ultrasonido, resonancia magnética (RM) o tomografía axial computada (TAC), con alto contenido de texturas e imprecisión en los bordes de las estructuras presentes, un nuevo enfoque se hace indispensable.

Las técnicas desarrolladas para imágenes binarias son el punto de partida para extender la Morfología Matemática a imágenes en niveles de gris. Una de las extensiones existentes se basa en la teoría de conjuntos difusos y se denomina Morfología Matemática Difusa (MMD). Los conjuntos difusos tienen varias ventajas para representar las imprecisiones de las imágenes y resultarán ser una herramienta útil en su segmentación. En particular se aplicará la MMD a imágenes texturadas con el objetivo de demostrar como las características de los conjuntos difusos resultan ser una herramienta útil en la segmentación de imágenes médicas.

Por todo lo expuesto, es fundamental realizar un análisis que permita encontrar nuevos métodos de segmentación utilizando operadores morfológicos difusos, más eficientes que los métodos tradicionales.

1.2 Objetivos de esta tesis

El objetivo de esta tesis es estudiar el comportamiento de los operadores morfológicos difusos, comparándolos con los operadores de la Morfología Matemática, y desarrollar nuevos métodos de segmentación en imágenes médicas usando los operadores de la Morfología Matemática Difusa.

En este sentido los objetivos específicos son:

- Estudiar los distintos enfoques existentes para extender, a partir de la teoría de conjuntos difusos, los operadores morfológicos binarios a imágenes en niveles de gris.
- Desarrollar los principales algoritmos correspondientes a las técnicas de Morfología Matemática Difusa.
- Aplicar las técnicas desarrolladas a imágenes de Resonancia Magnética, Tomografía Axial Computada y angiografías.
- Analizar el desempeño de las distintas técnicas estudiadas ante condiciones típicas que se presentan en el estudio de las imágenes biomédicas.

1.3 Publicaciones que sustentan esta tesis

Esta tesis se enmarca dentro de los proyectos de investigación “Clasificación y Segmentación en Imágenes Médicas” (15G166), “Clasificación y Análisis de Señales e Imágenes Biomédicas” (15G209) y “Análisis y Clasificación de Imágenes y Señales Biomédicas” (15G268) desarrollados en el Laboratorio de Procesos y Medición de Señales, dependiente del Departamento de Electrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. A continuación se listan los artículos publicados o enviados para su revisión, todos ellos con referato, resultantes del trabajo de tesis:

– **Revistas:**

- **Bouchet, A., Pastore, J., Ballarin, V. “Segmentation of Medical Images using Fuzzy Mathematical Morphology”,** Journal of Computer Science and Technology, Octubre 2007. Vol. 7, No. 3, pp. 256-262. ISSN 1666-6038.
- **Bouchet, A., Pastore, J., Moler, E. “Reconstrucción geodésica de imágenes a través de componentes conectadas”,** Revista IEEE America Latina, Septiembre de 2008, Vol. 6, Issue 5, pp. 471-476. ISSN 1548-0992.
- **Agustina Bouchet, Marcel Brun, Virginia Ballarin “Morfología Matemática Difusa aplicada a la segmentación de angiografías retinales”,** Revista Argentina de Bioingeniería. En prensa. ISSN 0329-5257.
- **Bouchet, A., Pastore, J., Espin Andreade, R., Brun, M., Ballarin, V. “Arithmetic Mean Based Compensatory Fuzzy Logic”,** enviado a la revista International Journal of Computational Intelligence and Applications para su revisión. ISSN 1757-5885 (On-Line). ISSN 1469-0268 (Print).

– **Capítulos de libros:**

- **Agustina Bouchet, Juan Ignacio Pastore, Rafael Espin, Marcel Brun, Virginia Ballarin “Compensatory Logic applied to Digital Image Processing”,** Capítulo III: Knowledge Discovery, Libro: Towards a trans-disciplinary technology of Business and Organizational Intelligence: Gathering Knowledge Discovery, Knowledge

Management and Decision. Editorial: Red Eureka. University of Oldenburg. Alemania. 2009.

– **Reuniones científicas:**

- **Bouchet, Pastore y Ballarin** *“Segmentación de Imágenes a través de Morfología Matemática Difusa”*, Reunión de Procesamiento de la Información y Control (RPIC 2005). Universidad Nacional de Río Cuarto, Córdoba. Septiembre de 2005.
- **Bouchet A., Brun M., Ballarin V.** *“Análisis comparativo de robustez entre operadores morfológicos clásicos y difusos aplicados al Procesamiento Digital de Imágenes”*, 37ª Jornadas Argentinas de Informática (JAIIO 2008). Santa Fe, Argentina. Septiembre de 2008.
- **Benalcázar Palacios F., Bouchet A., Brun M. y Ballarin V.** *“Análisis comparativo de robustez entre filtros morfológicos clásicos y difusos aplicados al Procesamiento Digital de Imágenes”*, 38ª Jornadas Argentinas de Informática (JAIIO 2009). Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Agosto de 2009.
- **A. Bouchet, M. Brun y V. Ballarin** *“Análisis comparativo de robustez entre operadores morfológicos clásicos y difusos para detección de bordes”*, Reunión de Procesamiento de la Información y Control (RPIC 2009). Rosario, Santa Fe. Septiembre de 2009.
- **E. L. Blotta, A. Bouchet y V. Ballarin** *“Caracterización de Señales de Bio-speckle Dinámico a través de herramientas de Morfología Matemática clásica y difusa”*, Reunión de Procesamiento de la Información y Control (RPIC 2009). Rosario, Santa Fe. Septiembre de 2009.
- **Agustina Bouchet, Marcel Brun y Virginia Ballarin** *“Morfología Matemática Difusa aplicada a la segmentación de angiografías retinales”*, XVII Congreso Argentino de Bioingeniería (SABI 2009). Rosario, Santa Fe, Argentina. Octubre de 2009.
- **Agustina Bouchet, Juan Ignacio Pastore, Rafael Espin, Marcel Brun, Virginia Ballarin** *“Lógica Compensatoria Aplicada al Procesamiento digital de imágenes”*, Segundo Taller de Descubrimiento de Conocimiento, Gestión del Conocimiento y Toma de Decisiones, organizado por la Red Iberoamericana de Descubrimiento de

Conocimientos (Eureka Iberoamérica) y el Proyecto Evaluación y Potenciación de Infraestructura de Datos Espaciales en Iberoamérica y el Caribe. Ciudad de Panamá. Panamá. Noviembre de 2009.

- **Agustina Bouchet**, Juan Ignacio Pastore, Rafael Espin, Marcel Brun, Virginia Ballarin *“Compensatory Logic Applied to Digital Image Processing”*, ALIO-INFORMS Joint International Meeting. Buenos Aires, Argentina. 6 al 9 de Junio de 2010.
- **Agustina Bouchet**, Juan Ignacio Pastore, Rafael Espin, Marcel Brun, Virginia Ballarin *“A Based Arithmetic Mean Compensatory Logic”*, ALIO-INFORMS Joint International Meeting. Buenos Aires, Argentina. 6 al 9 de Junio de 2010.

1.4 Estructura de la tesis

A continuación se describe la estructura y los contenidos principales de cada capítulo.

En el capítulo 2 se presentan las principales nociones de la teoría de conjuntos y la teoría de reticulados.

En el capítulo 3 se presenta las principales definiciones de la Morfología Matemática. En primer lugar se definen los operadores binarios, para luego extenderlos a imágenes en niveles de gris.

En el capítulo 4 se presentan los conceptos de la teoría de conjuntos difusos fundamentales para el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo 5 se presenta la Morfología Matemática Difusa (MMD), realizando una reseña histórica y mostrando los distintos enfoques existentes en la literatura para extender los operadores morfológicos binarios a imágenes en niveles de gris. Se muestra como todos los enfoques se unifican en las fórmulas propuestas por Bloch y Maître, las cuales son las utilizadas a lo largo de esta tesis.

En el capítulo 6 se presentan los primeros resultados. Se define la Lógica Difusa Compensatoria y se propone una nueva cuarteta de operadores definiendo, de este modo, una nueva lógica. Se demuestra que los nuevos operadores satisfacen los axiomas requeridos para generar este modelo. Se analiza la relación entre la nueva lógica y la Lógica Booleana. Se presenta una nueva morfología matemática denominada Morfología Matemática

Compensatoria (MMC) definiendo sus operadores básicos a partir de la conjunción y la disyunción de la Lógica Difusa Compensatoria. Esta nueva morfología resulta ser un caso particular de la MMD.

En el capítulo 7 se analiza y compara la robustez frente al ruido de los operadores básicos, dilatación y erosión, de la MM, MMD y MMC.

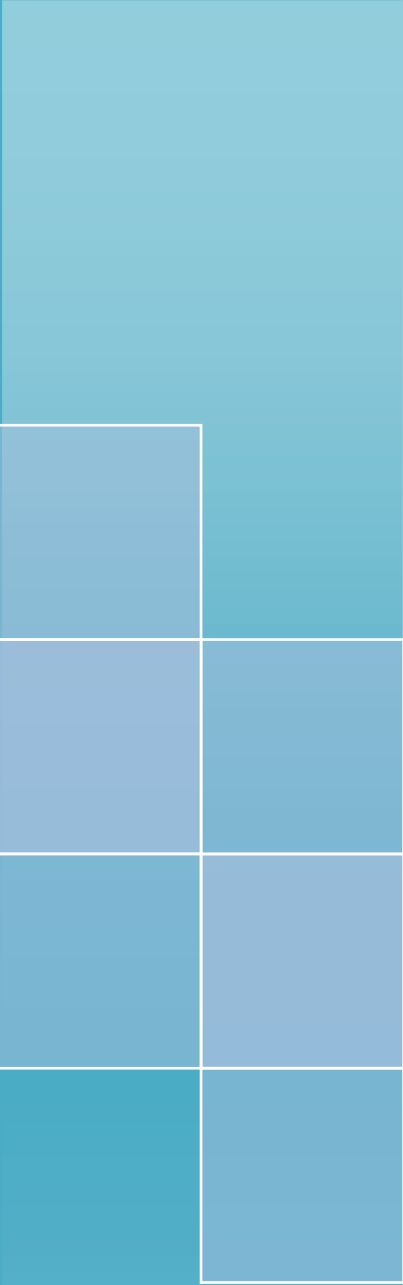
En el capítulo 8 se analiza y compara la robustez frente al ruido de los filtros básicos, apertura y cierre, de la MM y MMD.

En el capítulo 9 se analiza y compara la robustez frente al ruido de los filtros secuenciales alternados, apertura-cierre y cierre-apertura, de la MM y MMD.

En el capítulo 10 se analiza y compara la robustez frente al ruido y a la distorsión de la imagen original de los operadores de detección de bordes y la aplicación del Top-Hat de la MM y MMD.

En el capítulo 11 se muestra una aplicación de los operadores de la MMD en la segmentación de angiografías retinales.

Por último, en el capítulo 12 se presentan las conclusiones obtenidas y los trabajos futuros.



Capítulo 2

Teoría de Conjuntos Clásicos

Capítulo 2

Teoría de Conjuntos Clásicos

Dado que las imágenes se pueden modelar por medio de conjuntos, la Morfología Matemática, una técnica basada en la teoría de conjuntos, se ha utilizado desde su origen con enorme éxito en el Procesamiento Digital de Imágenes. Sin embargo, su utilidad no termina en el procesamiento de imágenes o de señales, y dado que su premisa de trabajo es la de utilizar conjuntos y sus propiedades, es de utilidad para cualquier clase de problema que se modele por medio de conjuntos y donde la forma sea la característica más relevante. En este capítulo se presentan algunas nociones de la teoría de conjuntos, las cuales se utilizarán en desarrollos posteriores y serán fundamentales para comprender lo expuesto en ellos.

2.1 Introducción

La teoría de conjuntos clásicos, la cual será denominada teoría de conjuntos para simplificar la escritura, es una rama de la matemática que estudia los conjuntos (Halmos, 1974). El primer estudio formal sobre el tema fue realizado por el matemático alemán Georg Ferdinand Lwdwig Cantor (1845-1918). El concepto de conjunto es intuitivo y se podría definir como una “colección, listado o agrupación de objetos, no repetidos y no ordenados, con características bien definidas que los hace pertenecer a un grupo determinado”. Es decir, para que exista un conjunto se deben cumplir los siguientes requisitos:

- La colección de elementos debe estar bien definida.
- Ningún elemento del conjunto se debe contar más de una vez, generalmente, estos elementos deben ser diferentes, si uno de ellos se repite se contará sólo una vez.
- El orden en que se enumeran los elementos carece de importancia.

Un conjunto está bien definido si se sabe que un determinado elemento pertenece o no al él. El conjunto de los píxeles negros en una imagen binaria está bien definido, porque a la vista de una imagen binaria se puede saber si un píxel es negro o no lo es. El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque a la vista de una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber distintas personas, que opinen si esa persona es alta o no

lo es. Este último tipo de conjuntos, modelados por la teoría de conjuntos difusos, será abordado más adelante en el capítulo 4.

La teoría de conjuntos clásicos es una de las partes de la matemática que se desarrolló desde fines del siglo XIX. Ha introducido términos como *pertenencia*, *inclusión*, *unión* y otros con significados rigurosos y su uso sin dudas ha permitido mejorar la precisión del lenguaje en áreas de conocimiento como la teoría de relaciones y funciones, la teoría de las probabilidades, entre otras.

A continuación se presentan algunas definiciones necesarias para abordar esta tesis.

2.2 Nociones sobre la teoría de conjuntos

Se utilizarán letras mayúsculas, $X, Y, Z, A, B, \dots$, para representar conjuntos y letras minúsculas, $x, y, z, a, b, \dots$, para representar sus elementos. El conjunto vacío es aquel que no contiene elementos y será denotado por $\emptyset$.

Definición 2.1: Dos conjuntos A y B son *iguales* si están formados por los mismos elementos:

$$A = B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B \quad y \quad b \in B \Rightarrow b \in A) \quad (2.1)$$

La igualdad de conjuntos es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición 2.2: A es un *subconjunto* de X si todos los elementos de A pertenecen también a X :

$$A \subseteq X \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in X) \quad (2.2)$$

La inclusión es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 2.3: El *conjunto de partes* $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A :

$$\mathcal{P}(A) = \{X / X \subseteq A\} \quad (2.3)$$

Es importante destacar que el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto A son elementos de $\mathcal{P}(A)$.

Definición 2.4: La *intersección* de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a ambos conjuntos:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\} \quad (2.4)$$

La intersección es conmutativa, asociativa e idempotente. Ésta última propiedad es sumamente importante en morfología y significa que $A \cap A = A$.

Definición 2.5: La *unión* de dos conjuntos A y B está formada por los elementos que pertenecen a cualquiera de los conjuntos o a los dos a la vez:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\} \quad (2.5)$$

Al igual que la intersección, la unión de conjuntos es conmutativa, asociativa e idempotente. Ésta última propiedad indica que $A \cup A = A$.

Definición 2.6: La *diferencia* entre el conjunto A y el conjunto B , denotada por $A \setminus B$, la componen los elementos que pertenecen a A pero no están incluidos en B :

$$A \setminus B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} \quad (2.6)$$

En general esta operación no es conmutativa.

Definición 2.7: El *complemento* de un conjunto A incluido en un conjunto X , donde X es el conjunto de referencia y se denomina conjunto universo, es aquel formado por los elementos que no pertenecen a A pero si a X :

$$A^C = \{x \setminus x \notin A \wedge x \in X\} \quad (2.7)$$

Definición 2.8: Sea A un conjunto que posee una estructura de grupo abeliano¹ (Gentile, 1984; Gentile, 1967). El conjunto *traspuesto* de A , denotado por $\overset{\vee}{A}$, también llamado reflexión de A , es el conjunto formado por los inversos aditivos de A :

¹ Se dice que la operación $*$ define sobre A una estructura de grupo abeliano si:

- $*$ es asociativa
- $*$ posee un elemento neutro en A
- $*$ es conmutativa
- todo elemento de A es inversible en A .

En esta tesis se considera que la suma es la operación que define sobre A una estructura de grupo abeliano.

$$\check{A} = \{-a / a \in A\} \quad (2.8)$$

A modo de ejemplo, sea $C = \{(0,1);(1,1);(1,2);(2,-1);(2,0);(2,1);(2,2)\}$. La reflexión de dicho conjunto está dada por:

$$\check{C} = \{(0,-1);(-1,-1);(-1,-2);(-2,1);(-2,0);(-2,-1);(-2,-2)\}$$

En la Figura 2.1 se muestra el resultado de la reflexión del conjunto C . La cruz que se observa en cada una de las imágenes representa el origen del conjunto; es decir, el punto $(0,0)$. $\check{C}$ se obtiene rotando 180° al conjunto C sobre su origen.

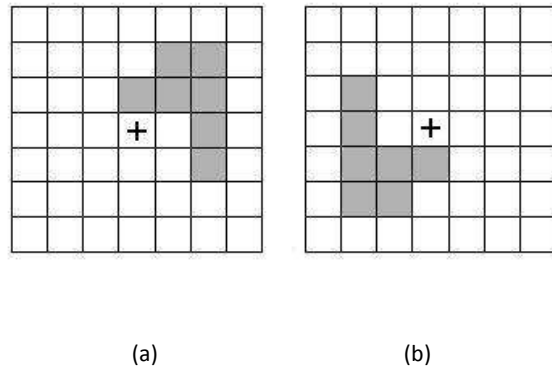


Figura 2.1: Reflexión de un conjunto.
(a) Conjunto C . (b) Reflexión del conjunto C .

Definición 2.9: La *traslación* del conjunto A por el elemento x , denotado por A_x , está dada por:

$$A_x = \{a + x / a \in A\} \quad (2.9)$$

A modo de ejemplo, la traslación del conjunto C , dado anteriormente, por el elemento $(-3,1)$ está dada por:

$$C_{(-3,1)} = \{(-3,2);(-2,2);(-2,3);(-1,0);(-1,1);(-1,2);(-1,3)\}$$

En la Figura 2.2 se muestra el resultado de la traslación por el elemento $(-3,1)$ del conjunto C .

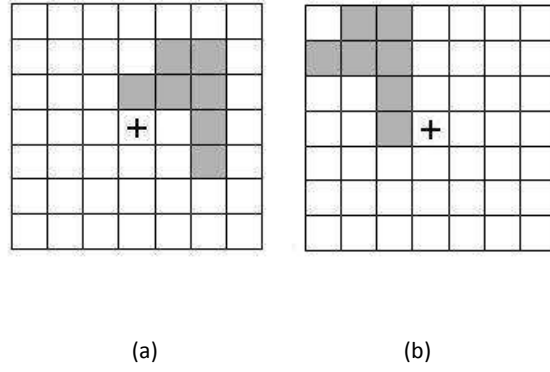


Figura 2.2: Traslación de un conjunto.

(a) Conjunto C . (b) Traslación del conjunto C por el elemento $(-3,1)$.

Definición 2.10: Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$. Para todo elemento $a \in A$ y $b \in B$, es posible hacer corresponder una suma algebraica $a + b$. De esta manera se forma un nuevo conjunto denominado *suma de Minkowski* de A por B , denotado por $A \oplus B$ (Serra, 1982):

$$A \oplus B = \{a + b / a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} A_b \quad (2.10)$$

Para comprender este concepto se presenta un ejemplo sencillo. Sean A y B dos conjuntos dados por:

$$A = \{(-3,3); (-2,3); (-1,3); (0,3); (0,2); (0,1); (0,0); (-3,-1); (-2,-1); (-1,-1); (0,-1)\}$$

$$B = \{(0,1); (-1,0); (0,0); (1,0); (0,-1)\}$$

La suma de Minkowski de A por B está formada por los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} A \oplus B = \{ & (-3,4); (-2,4); (-1,4); (0,4); (-4,3); (-3,3); (-2,3); (-1,3); (0,3); (1,3); (-3,2); \\ & (-2,2); (-1,2); (0,2); (1,2); (-1,1); (0,1); (1,1); (-3,0); (-2,0); (-1,0); (0,0); (1,0); \\ & (-4,-1); (-3,-1); (-2,-1); (-1,-1); (0,-1); (1,-1); (-3,-2); (-2,-2); (-1,-2); (0,-2) \} \end{aligned}$$

La Figura 2.3 ilustra este ejemplo. La cruz que se observa en cada una de las figuras representa el origen del conjunto; es decir, el punto $(0,0)$.

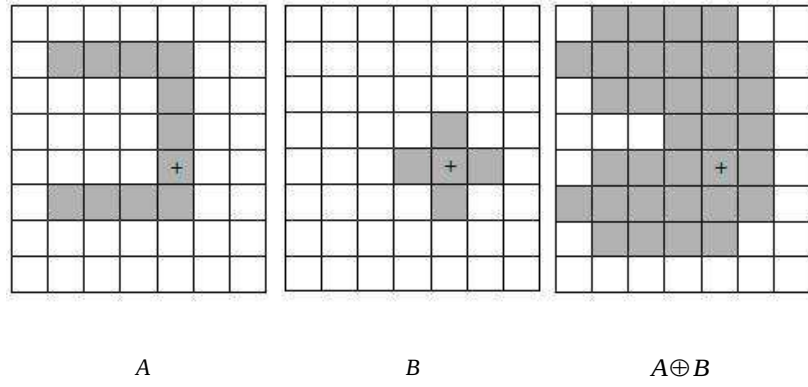


Figura 2.3: Suma de Minkowski

Un concepto muy importante es el de *dualidad* a partir del cual se definen operaciones “complementarias” a otras ya existentes.

Definición 2.11: Sean φ y ψ dos operaciones entre conjuntos. Se dice que φ es la *operación dual* de ψ si:

$$\varphi(A, B) = [\psi(A^c, B)]^c \quad (2.11)$$

La operación dual a la suma de Minkowski se denomina resta de Minkowski y se presenta a continuación.

Definición 2.12: Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$. Se define la *resta de Minkowski* $A \ominus B$ de A por B como la intersección de los conjuntos trasladados de A por los elementos de B (Serra, 1982):

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_b \quad (2.12)$$

Se puede mostrar fácilmente que $A \ominus B = [A^c \oplus B]^c$. Por lo tanto, la resta de Minkowski es la operación dual de la suma de Minkowski.

Al igual que en la suma de Minkowski, se presenta un ejemplo para visualizar esta operación. Sean A y B dos conjuntos dados por:

$$A = \{(0, 2); (-2, 1); (-1, 1); (0, 1); (-3, 0); (-2, 0); (-1, 0); (0, 0); (-3, -1); (-2, -1); (-1, -1); (0, -1)\}$$

$$B = \{(-1, 0); (0, 0)\}$$

La resta de Minkowski de A por B es:

$$A \ominus B = \{(-1,1);(0,1);(-2,0);(-1,0);(0,0);(-2,-1);(-1,-1);(0,-1)\}$$

La Figura 2.4 ilustra este ejemplo.

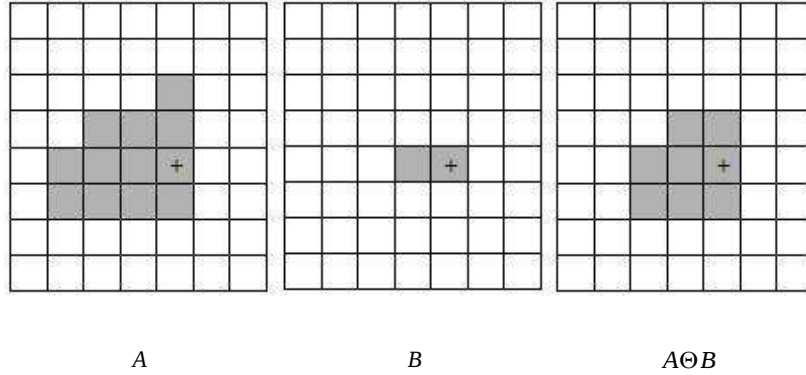


Figura 2.4: Resta de Minkowski

2.3 Relación de orden entre conjuntos

En esta sección se estudiarán las parejas de objetos que comparten algunas características o propiedades en común. La estructura matemática para agrupar estas parejas en conjuntos es la teoría de relaciones binarias.

Definición 2.13: Un *par ordenado* (x, y) es el conjunto cuyos elementos son $\{x\}$ y $\{x, y\}$ (Rojo, 1978):

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad (2.13)$$

La primera componente del par ordenado es x y la segunda componente es y .

Definición 2.14: El *producto cartesiano* de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados donde la primera componente pertenece a A y la segunda componente pertenece a B (Rojo, 1978):

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\} \quad (2.14)$$

Definición 2.15: Una *relación binaria* $\mathcal{R}$ de un conjunto A con un conjunto B es una terna ordenada $\mathcal{R} = (G, A, B)$, donde $G \subseteq A \times B$. Si $(x, y) \in G$ se dice que el elemento x está

relacionado con el elemento y por la relación $\mathcal{R}$ y se escribe $x\mathcal{R}y$. Si $(x, y) \notin G$ entonces se escribe $x\not\mathcal{R}y$. Cuando $A=B$ se dirá que $\mathcal{R}$ es una relación en A (Rojo, 1978).

Definición 2.16: Dado un conjunto no vacío X , una relación binaria " $\leq$ " en X es un *orden parcial* si cumple las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y, z \in X$ (Rojo, 1978):

- Reflexiva: $x \leq x$.
- Antisimétrica: $x \leq y, y \leq x$ implica que $x = y$.
- Transitiva: $x \leq y, y \leq z$ implica que $x \leq z$.

Un conjunto con una relación de este tipo será un conjunto parcialmente ordenado y se denotará como $(X, \leq)$. El conjunto será totalmente ordenado si todos los elementos que lo componen son comparables, es decir: $x \leq y$ o $y \leq x$, para cualesquiera $x, y \in X$.

Definición 2.17: Sea $(X, \leq)$ un *conjunto ordenado* y $A \subset X$ un conjunto no vacío de X (Rojo, 1978):

- Un elemento $x \in A$ es el menor elemento de A , el cual se denominará *mínimo* y se notará $\min$, si $x \leq y$, para todo $y \in A$.
- Un elemento $x \in A$ es el mayor elemento de A , el cual se denominará *máximo* y se notará $\max$, si $y \leq x$, para todo $y \in A$.
- Un elemento $x \in X$ es cota inferior de A si $x \leq y$, para todo $y \in A$.
- Un elemento $x \in X$ es cota superior de A si $y \leq x$, para todo $y \in A$.
- Un elemento $x \in X$ es extremo inferior o *ínfimo* de A si y sólo si es cota inferior de A y para toda cota inferior i de A se verifica que $i \leq x$. El ínfimo es la mayor de las cotas inferiores. Si este elemento existe es único y se denota por $\inf$.
- Un elemento $x \in X$ es extremo superior o *supremo* de A si y sólo si es cota superior de A y para toda cota superior s de A se verifica que $x \leq s$. El supremo es la menor de las cotas superiores. Si este elemento existe es único y se denota por $\sup$.

2.4 Funciones

Las funciones son relaciones binarias que satisfacen condiciones especiales. A continuación se presenta la definición formal.

Definición 2.18: Una *función* es una relación binaria $f = (F, A, B)$, donde $F \subseteq A \times B$, si (Gentile, 1967):

- $\forall x \in A \quad \exists y \in B$ tal que $(x, y) \in F$
- Si $(x, y_1) \in F$ y $(x, y_2) \in F$ entonces $y_1 = y_2$

Los conjuntos A y B son el *dominio* y el *codominio* de la función f , respectivamente. Una función f de A en B se escribe $f : A \rightarrow B$. El conjunto de todas las funciones de A en B se denota B^A .

Para cada elemento $x \in A$, el único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$ se denomina *imagen* de x por la función f y el valor de la función f en ese elemento x se denota $f(x)$. La *imagen de la función* f es el conjunto formado por todos los elementos que son imágenes de elementos de A .

Definición 2.19: Una función $f : A \rightarrow B$ es *inyectiva* sí y sólo si dados dos elementos distintos cualesquiera de A sus imágenes son distintas en B :

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (2.15)$$

Definición 2.20: Una función $f : A \rightarrow B$ es *suryectiva* sí y sólo si su conjunto imagen es todo el codominio:

$$\forall y \in B \Rightarrow \exists x \in A / f(x) = y \quad (2.16)$$

Definición 2.21: Una función $f : A \rightarrow B$ es *biyectiva* sí y sólo si es inyectiva y suryectiva.

2.5 Teoría de reticulados

Muchas de las estructuras que son estudiadas en teoría de orden emplean relaciones de orden con propiedades adicionales. Un ejemplo de dichas estructuras son los reticulados,

conjuntos parcialmente ordenados con ciertas características específicas, los cuales serán de gran interés en el desarrollo de esta tesis.

Definición 2.22: Un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es un *reticulado completo* si todos los subconjuntos de X poseen un ínfimo y un supremo en X (Szász, 1963; Birkhoff, 1967; Grätzer, 1978).

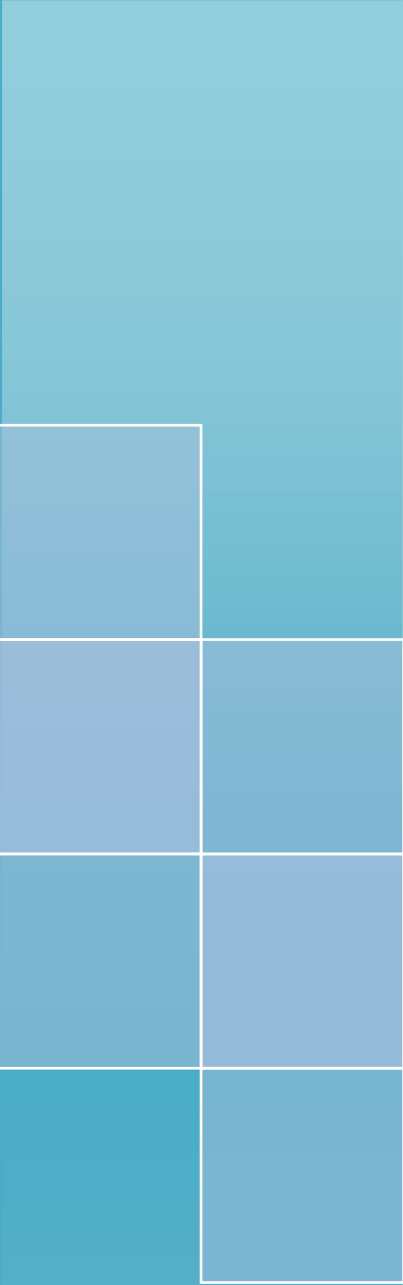
Definición 2.23: Sean X e Y dos reticulados completos. La función $f: X \rightarrow Y$ es una *anamorfosis* sí y sólo si f es una biyección que conserva el ínfimo y el supremo:

$$f\left(\inf\{x_i / i \in I\}\right) = \inf\{f(x_i) / i \in I\} \quad (2.17)$$

$$f\left(\sup\{x_i / i \in I\}\right) = \sup\{f(x_i) / i \in I\} \quad (2.18)$$

para cualquier familia $\{x_i / i \in I\}$ en X , donde I es un conjunto de índices.

El concepto de reticulado completo es la base para la formulación de la morfología matemática. Esto se debe a que los operadores morfológicos deben conservar el orden presente en la estructura de reticulado; es decir, deben ser crecientes. Una definición formal se presenta en el próximo capítulo.



Capítulo 3

Morfología Matemática

Capítulo 3

Morfología Matemática

En este capítulo se presentan las principales definiciones de la Morfología Matemática. En primer lugar, en la sección 3.1, se realiza una introducción al tema. En la sección 3.2 se presentan los tipos de imágenes con los cuales se va a trabajar, imágenes binarias e imágenes en niveles de gris. En la sección 3.3 se enumeran las propiedades que deben satisfacer las transformaciones morfológicas. En la sección 3.4 se define al elemento estructurante, noción indispensable en la definición de los operadores de la Morfología Matemática. En la sección 3.5 se definen y describen los operadores morfológicos binarios, comenzando por los operadores básicos dilatación y erosión, para luego definir los filtros morfológicos apertura y cierre; concluyendo con los distintos operadores de gradientes existentes. En la sección 3.6 se extienden estos operadores a imágenes en niveles de gris.

3.1 Introducción

La palabra Morfología tiene su origen a partir de dos palabras griegas: *morphe* (forma) y *logos* (ciencia). Desde una perspectiva científica, ésta palabra se refiere al estudio de las formas y estructuras que la materia puede tomar. En el procesamiento digital de imágenes, morfología es el nombre de una metodología específica para analizar las estructuras geométricas dentro de una imagen (Serra, 1982).

La Morfología Matemática, cuyos primeros trabajos se deben al científico alemán Hermann Minkowski (1897 y 1901) y posteriormente fue estudiada por H. Hadwiger (1957 y 1959), se fundamenta en la teoría de conjuntos. La continuación de estos trabajos de investigación con ciertas reformulaciones estuvo a cargo de dos investigadores del *Centre de Morphologie Mathématique (CMM) de l'Ecole des Mines de Paris*, en Fontainebleau, Georges Matheron y Jean Serra, los cuales en los años sesenta trabajaron en problemas de mineralogía y petrografía. Su principal objetivo era caracterizar propiedades físicas de ciertos materiales, como la permeabilidad de medios porosos, examinando su estructura geométrica. Así fue como surgió la Morfología Matemática (MM), teoría basada en conceptos de geometría, álgebra, topología y teoría de conjuntos (Serra, 1982; Ronse & Heijmans, 1991). La MM

permite procesar imágenes con propósitos de realce, filtrado, restauración, segmentación, detección de bordes, esqueletización, rellenado de regiones, engrosamiento, análisis de estructuras, etc.

En particular, la MM estudia las estructuras geométricas de las componentes presentes en las imágenes. Mediante operaciones no lineales se extraen características relativas a la geometría y topología de las componentes de las imágenes. Esta teoría permite analizar la forma, tamaño, orientación y superposición de los objetos de las imágenes digitales. La clave de esta metodología está en el “*elemento estructurante*”, un conjunto completamente definido y de geometría conocida, que es comparado con la imagen a partir de traslaciones. La forma y tamaño del elemento estructurante permiten testear y cuantificar de que manera dicho elemento “*está, o no está contenido*” en la imagen (Facon, 1996).

Una de las ventajas de la MM es su simplicidad de implementación y sus pilares son sus dos operaciones básicas, la erosión y la dilatación. A partir de ellas, por composición, es posible construir nuevos operadores, propiedad que la diferencia de otras técnicas del procesamiento de imágenes (Bangham & Marshall, 1998).

Se pueden listar tres tipos de MM: morfología matemática binaria que se aplica sobre imágenes binarias, morfología en niveles de gris que se aplica en imágenes con niveles de gris y la morfología en colores que aún está en pleno desarrollo.

3.2 Tipos de imágenes

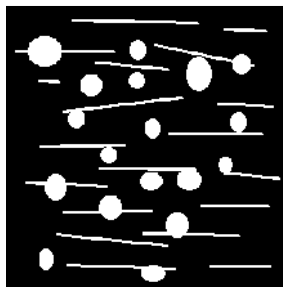
Como se mencionó anteriormente, la MM está basada en la teoría de conjuntos. Esto se debe a que una imagen puede ser representada por medio de un conjunto.

Una imagen binaria se puede representar como un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$. Si $\{0,1\}^D$ representa el conjunto de las funciones definidas de un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ en el conjunto $\{0,1\}$, se puede establecer una biyección entre este conjunto y el conjunto de imágenes binarias definidas en D . Por lo tanto, toda imagen binaria puede también representarse por medio de una función característica $\chi_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\}$ de la forma:

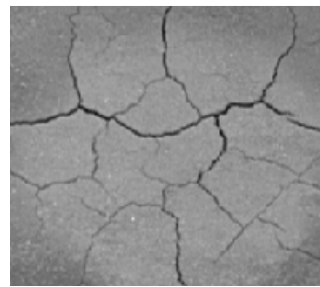
$$\chi_D(t) = \begin{cases} 1 & t \in D \\ 0 & t \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases} \quad (3.1)$$

Usualmente una imagen en niveles de gris está compuesta por valores enteros entre 0 y 255, los cuales indican la intensidad del nivel de gris en cada píxel. Se define como una función con dominio $D_I \subset \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Es decir, una imagen en niveles de gris se representa por medio de una función $f : D_I \rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x) \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}$, $\forall x \in D_I$.

Es claro que imágenes binarias son simplemente imágenes en niveles de gris que solo toman dos valores: 0 o 1, los cuales representan el negro (fondo) y el blanco (objeto), respectivamente. En la Figura 3.1 se pueden observar una imagen binaria y una imagen en niveles de gris. Con este tipo de imágenes se trabajará en esta tesis.



(a)



(b)

Figura 3.1: Tipo de imágenes.
(a) Imagen binaria. (b) Imagen en niveles de gris.

3.3 Propiedades de las transformaciones morfológicas

Toda operación morfológica binaria es el resultado de una o más operaciones de conjuntos (unión, intersección, complemento, entre otras), las cuales hacen intervenir a dos conjuntos A y B , ambos subconjuntos de un conjunto espacio X . El subconjunto B recibe el nombre de elemento estructurante que, para operar con A , se desplazará a través del espacio X .

Las operaciones morfológicas son transformaciones de conjuntos de la forma $\psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) \mid A \rightarrow \psi(A)$, donde $\mathcal{P}(X)$ representa el conjunto de partes del espacio X . Dichas transformaciones debe satisfacer, entre otras, las siguientes condiciones (Serra, 1982):

Propiedad 3.1: *Invariabilidad a traslación*

Sea $x \in X$, para todo conjunto A , $A \subseteq X$, un operador ψ es invariante por traslaciones si la transformación del conjunto A trasladado es equivalente a la traslación de la transformación de A :

$$\psi(A_x) = [\psi(A)]_x \quad (3.2)$$

donde x es el factor de traslación del conjunto.

Propiedad 3.2: *Compatibilidad con las homotecias*

Supongamos que λA es una homotecia de un conjunto de puntos $A \subseteq X$ tal que las coordenadas de cada punto del conjunto A se multiplican por alguna constante positiva λ . Esto es equivalente a cambiar de escala con respecto a algún origen. Si el operador ψ es invariante al cambio de escala entonces no depende de la escala utilizada:

$$\psi(\lambda A) = \lambda \psi(A) \quad (3.3)$$

Propiedad 3.3: *Conocimiento local*

La transformación morfológica ψ posee el principio de conocimiento local si para cualquier conjunto de puntos M , subconjunto del dominio N , la transformación del conjunto A , $A \subseteq X$, restringido al dominio de M , y después restringido al dominio N , es equivalente a aplicar la transformación $\psi(A)$ y restringir el resultado en M :

$$\psi(A \cap N) \cap M = \psi(A) \cap M \quad (3.4)$$

Propiedad 3.4: *Continuidad*

En forma resumida, este principio afirma que la transformación morfológica ψ no exhibe ningún cambio abrupto. La noción de continuidad depende de la noción de vecindad, es decir, de la topología.

Dependiendo del tipo de operación morfológica se cumplirán otra serie de propiedades como el crecimiento, la idempotencia, la extensividad y la antiextensividad, entre otras. A continuación se presentan estas propiedades.

Propiedad 3.5: Dados dos conjuntos A y B tales que $A, B \subseteq X$, un operador ψ es creciente si preserva la relación de inclusión entre conjuntos, es decir:

$$A \subseteq B \Rightarrow \psi(A) \subseteq \psi(B) \quad (3.5)$$

Propiedad 3.6: Un operador es extensivo si el resultado de aplicar dicho operador al conjunto contiene al conjunto original, es decir:

$$A \subseteq \psi(A) \quad (3.6)$$

Propiedad 3.7: Un operador es antiextensivo si el resultado de aplicar dicho operador al conjunto está contenido en el conjunto original, es decir:

$$\psi(A) \subseteq A \quad (3.7)$$

Propiedad 3.8: Un operador es idempotente si al aplicar dicho operador dos veces al conjunto, el resultado es el mismo que si sólo se aplicara el operador una sola vez, es decir:

$$\psi(\psi(A)) = \psi(A) \quad (3.8)$$

3.4 Elemento estructurante

El objetivo de las transformaciones morfológicas, idea central de la MM, es extraer y/o examinar las estructuras geométricas en los conjuntos sobre los que opera mediante la utilización de otro conjunto de forma conocida, denominado elemento estructurante.

Un elemento estructurante es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, cuyo tamaño y forma se escogen a priori de acuerdo a la morfología del conjunto sobre el que se va a interactuar y de acuerdo a la extracción de formas que se desea obtener. Posee un punto de referencia el cual se denomina origen y se nota O . Este elemento se desplaza sobre la imagen original de manera tal que el origen se sitúa sobre cada píxel de dicha imagen aplicando la intersección o inclusión sobre los puntos situados bajo el elemento estructurante.

En la Figura 3.2 se muestran ejemplos básicos de elementos estructurantes utilizados en la práctica.



Figura 3.2: Formas básicas de elementos estructurantes planos.

Para presentar las definiciones de los operadores básicos, es necesario introducir algunas definiciones preliminares las cuales serán aplicadas sobre los elementos estructurantes.

Definición 3.1: Cuando el elemento estructurante cumple la relación $A = \check{A}$, se dice que es *simétrico*. Es decir, un elemento estructurante es simétrico si éste coincide con su reflexión.

Para facilitar la escritura el elemento estructurante puede ser simbolizado por EE.

3.5 Morfología matemática binaria

3.5.1 Operadores básicos binarios

La Morfología Matemática Binaria se define a partir de dos operaciones básicas denominadas dilatación y erosión. Estas operaciones comparan los subconjuntos dentro de la imagen binaria con el EE, el cual es bidimensional. La forma y tamaño del EE son elegidos dependiendo del tipo de análisis que se desee realizar y de la forma de los objetos que componen a las imágenes. El EE es trasladado, de manera que recorre la imagen completa píxel a píxel realizando una comparación entre dicho elemento y la imagen. El resultado es una nueva imagen binaria que contiene el resultado de dicha comparación.

Las operaciones u operadores morfológicos dilatación y erosión constituyen la base de la MM, la dilatación es equivalente a la suma de Minkowski (definición 2.10) mientras que la erosión es equivalente a la resta de Minkowski (definición 2.12) (Serra, 1982; Haralick et al., 1987).

Definición 3.2: Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. La *dilatación binaria* de A por un elemento estructurante B , denotada por $D(A, B)$, es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^2$ tal que B_x tiene intersección no vacía con A :

$$D(A, B) = \{x \in \mathbb{R}^2 / B_x \cap A \neq \emptyset\} \quad (3.9)$$

Dilatar la imagen A por el elemento estructurante B consiste en eliminar del fondo todos los puntos x para los cuales el conjunto B_x no está incluido, o de forma equivalente asignar a la imagen dilatada todos los puntos x tales que B_x intercepte a la imagen. La aplicación de la dilatación añade todos los puntos del fondo que tocan el borde de un objeto, es decir, rellena contrastes en los que no quepa el EE (pequeños agujeros y bahías).

Como se mencionó anteriormente, la dilatación es equivalente a la suma de Minkowski. La relación entre la dilatación y la suma de Minkowski está dada por la siguiente igualdad:

$$D(A, B) = A \oplus \check{B} = \left\{ x + b \mid x \in A, b \in \check{B} \right\} \quad (3.10)$$

Definición 3.3: Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. La *erosión binaria* de A por un elemento estructurante B , denotada por $E(A, B)$, es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^2$ tal que el conjunto B_x está contenido en el conjunto A :

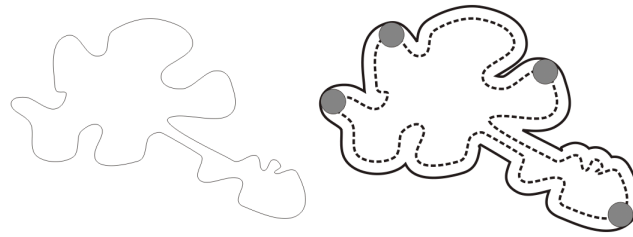
$$E(A, B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid B_x \subseteq A \right\} \quad (3.11)$$

Erosionar la imagen A por el elemento estructurante B consiste en hacer decrecer al conjunto A a través de un proceso de eliminación de elementos, tomando como referencia al elemento estructurante B . El tamaño y forma final del conjunto erosionado dependerá fuertemente del tamaño y forma del EE (Dougherty, 1993). Esto se debe a que la aplicación de la erosión elimina grupos de píxeles donde el EE no “cabe”, es decir, elimina grupos de píxeles (pequeñas islas y protuberancias) de menor tamaño que el EE.

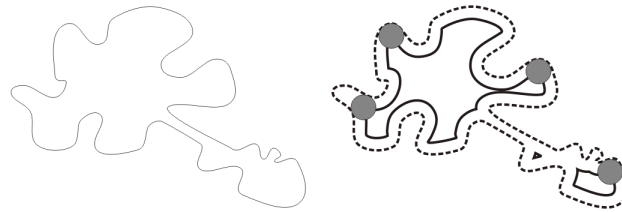
De manera análoga a la dilatación, la erosión es equivalente a la resta de Minkowski. La relación entre la erosión y la resta de Minkowski está dada por la siguiente igualdad:

$$E(A, B) = A \ominus \check{B} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall b \in \check{B}, \quad x - b \in A \right\} \quad (3.12)$$

La Figura 3.3 (a) muestra un ejemplo de la dilatación de una imagen con un elemento estructurante circular. La zona encerrada por la línea a trazo completo constituye la dilatación de A por B mientras que la línea punteada indica el conjunto original que se toma como referencia. En la Figura 3.3 (b) se presenta un ejemplo sencillo de la erosión de una imagen con un elemento estructurante circular. El área encerrada por la línea a trazo continuo constituye la erosión de A por B y la línea punteada indica el conjunto original A tomado como referencia.



(a)

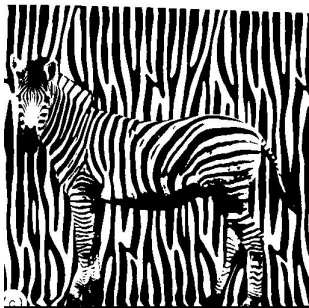


(b)

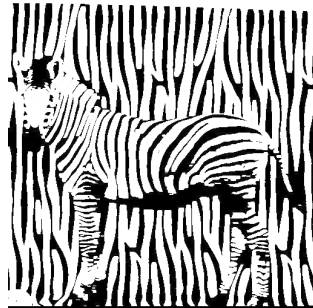
Figura 3.3: Dilatación y erosión binarias.
(a) Dilatación de una imagen binaria. (b) Erosión de una imagen binaria.

De los ejemplos de erosión y dilatación mostrados en la Figura 3.3, es claro que el operador erosión “contrae” el conjunto, mientras que la dilatación lo “expande”. A través de la dilatación, diferentes componentes de un conjunto se pueden conectar, algunos agujeros se pueden llenar, mientras que a través de la erosión, los huecos se agrandan y algunos objetos pueden desaparecer.

La Figura 3.4 muestra un ejemplo de estos operadores sobre una imagen real.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.4: Aplicación de la dilatación y erosión binarias.
(a) Imagen original. (b) Imagen dilatada. (c) Imagen erosionada.

3.5.2 Propiedades de los operadores básicos binarios

Formalmente, los operadores básicos binarios poseen las siguientes propiedades:

Propiedad 3.9: La dilatación y la erosión son operadores crecientes para el conjunto A , es decir, preservan la relación de inclusión entre conjuntos. Sean $A, A', B \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$A \subseteq A' \Rightarrow D(A, B) \subseteq D(A', B)$$

$$A \subseteq A' \Rightarrow E(A, B) \subseteq E(A', B)$$

Propiedad 3.10: La dilatación es creciente mientras que la erosión es decreciente para el EE B , es decir, sean $A, B, B' \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$B \subseteq B' \Rightarrow D(A, B) \subseteq D(A, B')$$

$$B \subseteq B' \Rightarrow E(A, B') \subseteq E(A, B)$$

Propiedad 3.11: La dilatación y la erosión no son operadores idempotentes:

$$D(D(A, B), B) \neq D(A, B) \quad \forall A \neq \emptyset, B \neq \{0\}$$

$$E(E(A, B), B) \neq E(A, B) \quad \forall A \neq \emptyset, B \neq \{0\}$$

Propiedad 3.12: La dilatación es conmutativa, mientras que la erosión no lo es:

$$D(A, B) = D(B, A) \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

Usualmente:

$$E(A, B) \neq E(B, A) \text{ con } A, B \subseteq \mathbb{R}^2, A \neq B$$

Propiedad 3.13: La dilatación es asociativa, mientras que la erosión no lo es, es decir, sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$D(D(A, B), C) = D(A, D(B, C))$$

Usualmente:

$$E(E(A, B), C) \neq E(A, E(B, C))$$

Propiedad 3.14: La dilatación y la erosión son operadores duales, esto es, $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$D(A^c, B) = [E(A, B)]^c \text{ o } E(A^c, B) = [D(A, B)]^c$$

Propiedad 3.15: Cuando el elemento estructurante contiene a su centro O , la dilatación por B es extensiva y la erosión por B es antiextensiva, es decir:

$$\text{Si } O \in B \Rightarrow A \subseteq D(A, B) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\text{Si } O \in B \Rightarrow E(A, B) \subseteq A \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Propiedad 3.16:

$$D(A, B_1 \oplus B_2) = D(D(A, B_2), B_1) = D(D(A, B_1), B_2) \quad \forall A, B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$$

Propiedad 3.17:

$$E(A, B_1 \oplus B_2) = E(E(A, B_2), B_1) = E(E(A, B_1), B_2) \quad \forall A, B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$$

Propiedad 3.18:

$$D(A, B_1 \cup B_2) = D(A, B_1) \cup D(A, B_2) = D(A, B_2) \cup D(A, B_1) \quad \forall A, B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$$

Propiedad 3.19:

$$E(A, B_1 \cup B_2) = E(A, B_1) \cup E(A, B_2) = E(A, B_2) \cup E(A, B_1) \quad \forall A, B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$$

La propiedad 3.14 es particularmente interesante en la práctica, ya que afirma que erosionar la figura es equivalente a dilatar el fondo.

De la propiedad 3.15 se deduce que si $O \in B$:

$$E(A, B) \leq A \leq D(A, B).$$

Las propiedades 3.16 y 3.17 también son de especial interés. Dado un elemento estructurante B complejo, si se puede hallar una descomposición de B como una unión y/o suma de Minkowsky de elementos simples, entonces se puede realizar la dilatación (respectivamente la erosión) por B como una combinación de dilataciones (respectivamente erosiones) por formas simples.

La dilatación y la erosión no son operaciones inversas. Al aplicar la dilatación a la erosión o la erosión a la dilatación de un determinado conjunto mediante el mismo elemento estructurante, en general, no se obtiene el conjunto original. Por lo tanto, usualmente:

$$D(E(A, B), B) \neq E(D(A, B), B)$$

De la combinación de los operadores erosión y dilatación, nuevas transformaciones morfológicas son derivadas.

3.5.3 Filtros básicos binarios

Como se mencionó anteriormente, en general, la dilatación y la erosión son operaciones que no admiten inversas. Dados dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ y considerando la dilatación $D(A, B)$ y la erosión $E(A, B)$ no hay manera de determinar el conjunto original A desde las imágenes $D(A, B)$ o $E(A, B)$. En la Figura 3.5 se ilustra gráficamente este resultado:

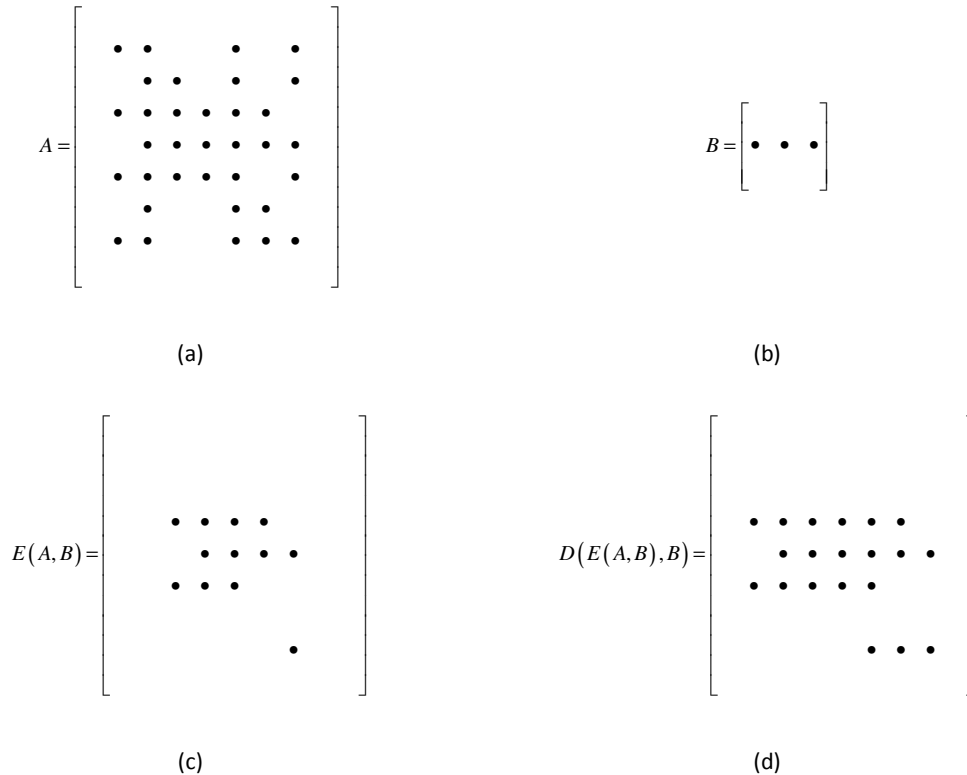


Figura 3.5: Erosión y dilatación discretas.

(a) Imagen original A . (b) Elemento estructurante B . (c) Erosión de la imagen A por el elemento estructurante B . (d) Dilatación de la erosión por el elemento estructurante B .

Esta reconstrucción reconstruye sólo una parte de A más simple y con menos detalles, pero que puede considerarse como su parte esencial (González & Woods, 1996).

A continuación se definen las operaciones de apertura y cierre, conocidas en morfología matemática como filtros básicos a partir de los cuales se pueden construir otros más complejos.

Definición 3.4: Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$, la *apertura binaria* de A por el EE B se define como la erosión de A por el EE B , seguida de la dilatación de dicho resultado a través del traspuesto del EE (Serra, 1982; Serra, 1988):

$$\gamma(A, B) = D\left(E(A, B), \check{B}\right) \quad (3.13)$$

En la Figura 3.6 se ilustra el efecto de la apertura de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ por un elemento estructurante en forma de disco.

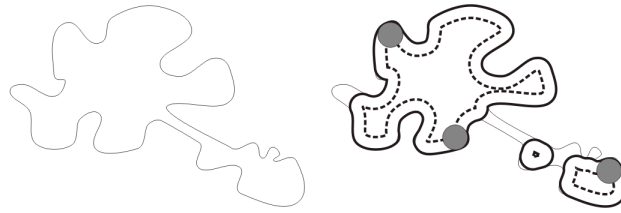


Figura 3.6: Apertura de una imagen binaria.

Esta operación suaviza contornos eliminando pequeñas protuberancias o islas así como también bordes afilados. Además elimina conexiones entre objetos de menor tamaño que el EE. La apertura mantiene en gran medida el tamaño original de los objetos debido a la aplicación de la dilatación final. El tamaño y forma del EE que se utilice tiene fundamental importancia ya que de esto dependerán las estructuras de la imagen que se lleguen a eliminar.

Definición 3.5: Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$, el *cierre binario* de A por el EE B se define como la dilatación de A por el EE B , seguida de la erosión de dicho resultado a través del traspuesto del EE (Serra, 1982; Serra, 1988):

$$\phi(A, B) = E\left(D(A, B), \check{B}\right) \quad (3.14)$$

En la Figura 3.7 se presenta un ejemplo, en el cual a una imagen se le aplica una operación de cierre con un elemento estructurante en forma de disco.

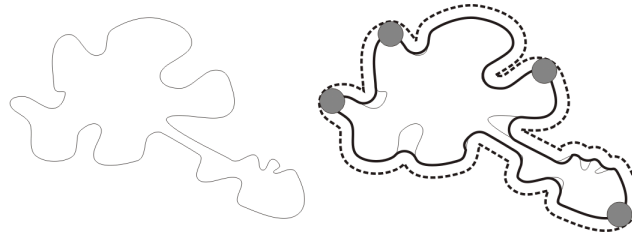


Figura 3.7: Cierre de una imagen binaria.

Esta operación tiende a alisar porciones de contornos, rellenando pequeñas protuberancias o lagos, así como también rajaduras o entrantes más pequeños que el tamaño del EE. Además funde estrechos cuyo ancho es menor que el EE y conecta objetos vecinos. El cierre mantiene en gran medida el tamaño original de los objetos de la imagen debido a la erosión final. El tamaño y forma del EE que se utilice tiene fundamental importancia ya que de esto dependerán las estructuras de la imagen que se lleguen a agregar.

La Figura 3.8 muestra un ejemplo de la aplicación de estos filtros sobre una imagen real.

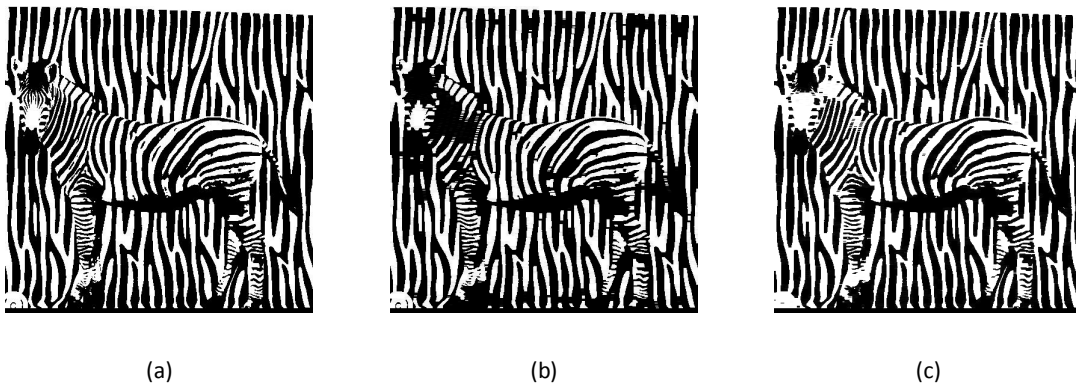


Figura 3.8: Aplicación de la apertura binaria y el cierre binario.
(a) Imagen original. (b) Apertura de la imagen original. (c) Cierre de la imagen original.

La apertura y cierre tienen un significado más fuerte que la erosión y la dilatación, pues permiten filtrar una imagen. A continuación se presentan dichos filtros morfológicos.

3.5.4 Propiedades de los filtros básicos binarios

Asumiendo un elemento estructurante simétrico los filtros básicos binarios poseen las siguientes propiedades:

Propiedad 3.20: Siendo los operadores apertura y cierre composición de operadores crecientes (erosión y dilatación), estos son también crecientes para el conjunto A , es decir, preservan la relación de inclusión entre conjuntos. Sean $A, A', B \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$A \subseteq A' \Rightarrow \gamma(A, B) \subseteq \gamma(A', B)$$

$$A \subseteq A' \Rightarrow \phi(A, B) \subseteq \phi(A', B)$$

Propiedad 3.21: La apertura y el cierre son operadores idempotentes, es decir:

$$\gamma(\gamma(A, B), B) = \gamma(A, B) \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\phi(\phi(A, B), B) = \phi(A, B) \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

Propiedad 3.22: La apertura es un operador antiextensivo, mientras que el cierre es un operador extensivo:

$$\gamma(A, B) \subseteq A \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$A \subseteq \phi(A, B) \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

Propiedad 3.23: La apertura y el cierre son operadores invariantes por traslaciones:

$$\gamma(A, B) + x = \gamma(A + x, B) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\phi(A, B) + x = \phi(A + x, B) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$$

Propiedad 3.24: La apertura y el cierre son operadores duales, esto es, $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\gamma(A^c, B) = [\phi(A, B)]^c \quad \text{o} \quad \phi(A^c, B) = [\gamma(A, B)]^c$$

De la propiedad 3.22 se deduce que para cualquier B :

$$\gamma(A, B) \subseteq A \subseteq \phi(A, B) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

La apertura y el cierre difieren de la erosión y la dilatación en la propiedad de idempotencia, propiedad sumamente importante en el proceso de filtrado.

3.5.5 Extracción de bordes

De las propiedades antiextensiva y extensiva de la erosión y dilatación respectivamente, se pueden determinar bordes en una imagen binaria examinando la diferencia entre una dilatación y una erosión de la imagen original, una dilatación y la imagen original o la diferencia entre la imagen original y su erosión. Un borde se define como la frontera entre dos regiones.

Definición 3.6: Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$, el *gradiente por dilatación* o *gradiente externo*, denotado por $\Gamma_D(A, B)$, se define como la diferencia entre la imagen binaria original A y la dilatación de dicha imagen con un EE B (Serra, 1988):

$$\Gamma_D(A, B) = D(A, B) - A \quad (3.15)$$

Definición 3.7: Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$, el *gradiente por erosión* o *gradiente interno*, denotado por $\Gamma_E(A, B)$, se define como la diferencia entre la imagen binaria original A y la erosión de dicha imagen con un EE B (Serra, 1988):

$$\Gamma_E(A, B) = A - E(A, B) \quad (3.16)$$

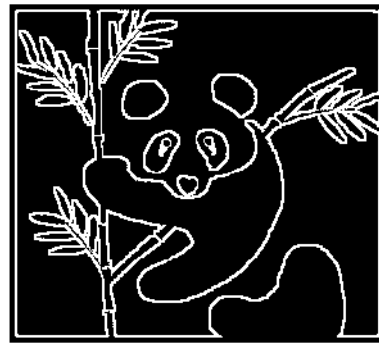
Definición 3.8: Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$, el *gradiente morfológico generalizado* o *gradiente por dilatación y erosión*, denotado por $\Gamma_{D,E}(A, B)$, se define como la diferencia entre la dilatación y la erosión de una imagen A con el mismo EE B (Serra, 1988):

$$\Gamma_{D,E}(A, B) = D(A, B) - E(A, B) \quad (3.17)$$

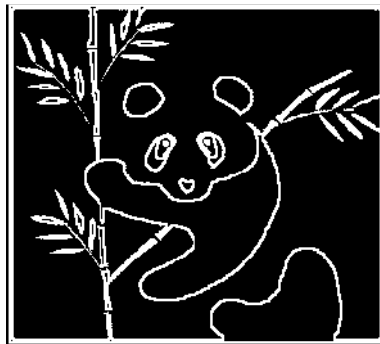
La Figura 3.9 muestra los resultados de calcular los distintos tipos de gradientes sobre una imagen binaria.



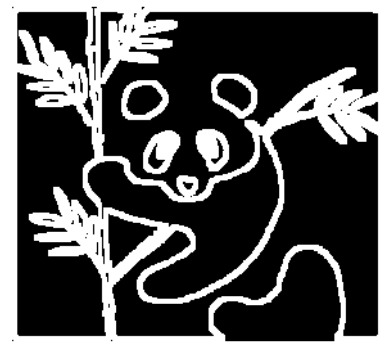
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.9: Extracción de bordes.

(a) Imagen original. (b) Gradiente por dilatación.

(c) Gradiente por erosión. (d) Gradiente morfológico generalizado.

3.6 Morfología Matemática en niveles de gris

Cuando se quieren aplicar las transformaciones morfológicas binarias a imágenes en niveles de gris, se presenta el problema que, a diferencia de las imágenes binarias, éstas no son representadas como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, sino como funciones con dominio en $\mathbb{R}^2$ y rango en $\mathbb{R}$. Sobre estas funciones no es posible utilizar directamente las herramientas desarrolladas en la Morfología Matemática Binaria. Las imágenes en niveles de gris requieren una dimensión más que las imágenes binarias para su representación debido a la intensidad que posee cada píxel, por lo que la altura es la dimensión adicional que se toma para representar dicho valor. Así una imagen en niveles de gris se define a partir de los píxeles que la conforman y de la intensidad que posee cada punto de la misma.

La solución a este problema, para poder definir la MM en función de operaciones de conjuntos, es ampliar en una dimensión el espacio de trabajo. Para esto se debe considerar la “umbra” de una imagen. Umbra significa sombra, y la umbra de un conjunto A en el espacio

tridimensional incluye al mismo tiempo al conjunto y al volumen de los puntos de su sombra. Matemáticamente la umbra de un conjunto es definida como un sólido tridimensional que se extiende continua e indefinidamente en la dirección negativa del eje z .

Formalmente, la solución adoptada es considerar el subconjunto de puntos en el espacio tridimensional:

$$U[I] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \leq f(x, y)\} \quad (3.18)$$

donde $f : D_I \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función que representa a la imagen en niveles de gris.

Así, la umbra es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado por todos los puntos que están por debajo de la superficie $S(I)$ de la imagen, donde:

$$S(I)(x, y) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\} \quad (3.19)$$

A partir del conjunto $U[I]$ es posible recuperar la función f como:

$$f(x, y) = \sup\{z \in \mathbb{R} / (x, y, z) \in U[I]\} \quad (3.20)$$

Inversamente, si $\mathfrak{U}$ denota la clase de umbras, esto es:

$$\mathfrak{U} = \{U / U \in F(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}), \forall (x, y, z) \in U, z \leq z^* \Rightarrow (x, y, z^*) \in U\} \quad (3.21)$$

A cada elemento $U \in \mathfrak{U}$ le corresponde una y solo una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para la cual U es su umbra.

La relación de orden $U[f] \subseteq U[g]$ es equivalente a $\forall (x, y) \in D_f \cap D_g, f(x, y) \leq g(x, y)$. Por lo tanto $\mathfrak{U}$ constituye un reticulado para la inclusión, por ser cerrado para la intersección y para uniones finitas.

Si interpretamos esto en términos de funciones, para toda familia (finita o no) de índices i , $i \in I$, tenemos:

$$f \leq g \Leftrightarrow U[f] \subseteq U[g] \quad \text{sii} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq g(x, y) \quad (3.22)$$

$$\inf_{i \in I} f_i = \left\{ f / U[f] = \bigcap_{i \in I} U[f_i] \right\} \quad (3.23)$$

$$\sup_{i \in I} f_i = \left\{ f / U[f] = \bigcup_{i \in I} U[f_i] \right\} \quad (3.24)$$

Bajo estas condiciones se pueden definir la erosión y la dilatación en niveles de gris.

En primer lugar se asocia una umbra a la imagen y al elemento estructurante. Luego se aplican las definiciones de erosión y dilatación definidas anteriormente en el espacio tridimensional. El resultado es una umbra, a partir de la cual se puede obtener la única función que representa la imagen en niveles de gris, que representa la imagen resultante de dicha operación.

Cuando se aplican las operaciones morfológicas a imágenes en niveles de gris el EE, además de poder adquirir diferentes tamaños y formas bidimensionales como en el caso de las imágenes binarias, también puede ser tridimensional. Puede ser caracterizado por el volumen que éste ocupa. Conos, discos, esferas, cubos, cilindros, entre otros, son algunos de los EE tridimensionales que son utilizados comúnmente.

Por consiguiente, los operadores morfológicos en niveles de gris se pueden considerar como una extensión de los operadores morfológicos binarios al espacio tridimensional.

3.6.1 Operadores básicos en niveles de gris

Sean $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D_g \subseteq D_f$ dos imágenes en niveles de gris.

Definición 3.9: La *dilatación* de f por el elemento estructurante g es definida por:

$$D(f, g) = \sup \{ D(U[f], U[g]) \} \quad (3.25)$$

La cual es equivalente a tomar el máximo sobre cada píxel de las sumas de las intensidades correspondientes de la imagen original y las intensidades del EE:

$$D(f, g)(s, t) = \max \{ f(s - x, t - y) + g(x, y) / (s - x, t - y) \in D_f; (x, y) \in D_g \} \quad (3.26)$$

Se toma el máximo y no el supremo debido a que son funciones definidas sobre conjuntos finitos, entonces los supremos locales se convierten en el máximo de los valores de tales sumas.

Definición 3.10: La *erosión* de f por el elemento estructurante g es definida por:

$$E(f, g) = \inf \{E(U[f], U[g])\} \quad (3.27)$$

La cual es equivalente a tomar el mínimo sobre cada píxel de las diferencias de las intensidades correspondientes de la imagen original y las intensidades del EE:

$$E(f, g)(s, t) = \min \{f(s+x, t+y) - g(x, y) / (s+x, t+y) \in D_f; (x, y) \in D_g\} \quad (3.28)$$

Análogamente al caso de la dilatación, se toma el mínimo y no el ínfimo debido a que son funciones definidas sobre conjuntos finitos $\{0, 1, 2, \dots, 255\}$, entonces los ínfimos locales se convierten en el mínimo de los valores de tales diferencias.

Si el elemento estructurante es plano, es decir, $g(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D_g$, las ecuaciones (26) y (28) se simplifican:

$$D(f, g)(s, t) = \max \{f(s-x, t-y) / (x, y) \in D_g\} \quad (3.29)$$

$$E(f, g)(s, t) = \min \{f(s+x, t+y) / (x, y) \in D_g\} \quad (3.30)$$

Una interpretación grafica se puede hacer sobre una señal unidimensional.

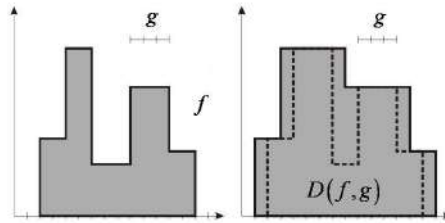


Figura 3.10: Ejemplo de dilatación en una señal unidimensional.

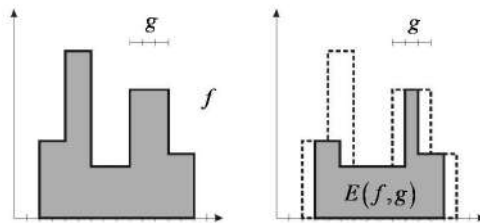


Figura 3.11: Ejemplo de erosión en una señal unidimensional.

Cuando se aplica la operación erosión a una imagen con niveles de gris se aprecian los siguientes efectos:

- Debido a que punto a punto la intensidad de cada pixel es menor o igual que la intensidad del pixel original, la imagen erosionada resulta más oscura que la imagen original.
- El área que ocupa una zona clara de la imagen rodeada por zonas oscuras, tiende a reducirse. Si el tamaño de la zona clara es menor que el tamaño del elemento estructurante desaparece, quedando sólo la zona oscura.

Cuando se aplica la operación dilatación a una imagen con niveles de gris se aprecian los siguientes efectos:

- Debido a que punto a punto la intensidad de cada pixel es mayor o igual que la intensidad del pixel original, la imagen dilatada resulta más clara que la imagen original.
- El área que ocupa una zona clara de la imagen rodeada por zonas oscuras, tiende a ampliarse. Si el tamaño de la zona oscura es menor que el tamaño del elemento estructurante, la zona oscura desaparece, quedando sólo la zona clara.

Estos efectos se pueden observar en la Figura 3.12, donde a modo de ejemplo se muestra la erosión y la dilatación de una imagen en niveles de gris.

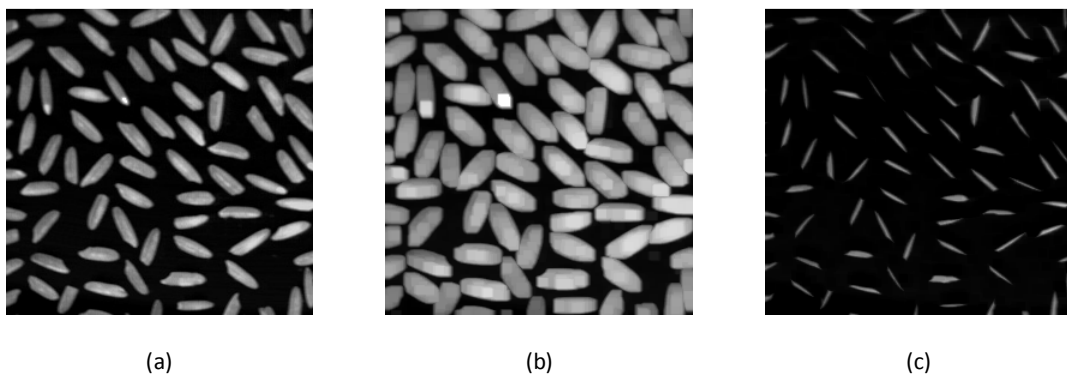


Figura 3.12: Aplicación de la dilatación y erosión en imágenes en niveles de gris.
(a) Imagen original. (b) Imagen dilatada. (c) Imagen erosionada.

3.6.2 Filtros básicos en niveles de gris

Al igual que en el caso binario, a partir de las definiciones de erosión y dilatación se definen la apertura y el cierre morfológico como se muestra a continuación.

Definición 3.11: La *apertura morfológica* de una imagen en niveles de gris f por el elemento estructurante g es definida por:

$$\gamma(f, g) = D(E(f, g), g) \quad (3.31)$$

Definición 3.12: El *cierre morfológico* de una imagen en niveles de gris f por el elemento estructurante g es definido por:

$$\phi(f, g) = E(D(f, g), g) \quad (3.32)$$

La apertura generalmente suaviza el contorno de la imagen, elimina las partes angostas y las salientes delgadas. Es de utilidad para eliminar detalles luminosos pequeños en relación al elemento estructurante, quedando el resto de la imagen relativamente sin modificaciones.

Desde el punto de vista de filtrado, cuando se erosiona una imagen, el área de una zona clara rodeada de zonas oscuras, se ve reducida. En particular, si el tamaño del elemento estructurante es mayor que el área de la zona clara, ésta desaparece, se reducen los detalles luminosos pequeños y sólo queda la zona oscura. Luego, al dilatar la imagen resultante, el área de una zona clara rodeada de zonas más oscuras, tiende a ampliarse y por lo tanto la imagen recupera su intensidad o tamaño anterior, excepto que los detalles eliminados por la erosión previa, no vuelven a aparecer.

El cierre también tiende a suavizar secciones de los contornos, pero a diferencia de la apertura fusiona espacios angostos, y entradas largas y delgadas, elimina huecos pequeños y rellena espacios en el contorno. Es de utilidad para eliminar detalles oscuros pequeños en relación al elemento estructurante, quedando el resto de la imagen relativamente sin modificaciones.

Cuando se dilata una imagen, el área de una zona clara rodeada de zonas más oscuras, se ve ampliada. En particular, si el tamaño del elemento estructurante es mayor que el área de la zona oscura, ésta desaparece, se reducen los detalles oscuros pequeños. Luego, al erosionar la imagen resultante, el área de una zona clara rodeada de zonas más oscuras, tiende a reducirse

y por lo tanto la imagen recupera su intensidad o tamaño anterior, excepto que los detalles eliminados por la dilatación previa, no vuelven a aparecer.

La forma, tamaño e intensidad en niveles de gris del elemento estructurante determinan la estructura de la imagen transformada.

En las Figuras 3.13 y 3.14 se muestran los resultados de una apertura y un cierre morfológico a una señal unidimensional con un elemento estructurante lineal.

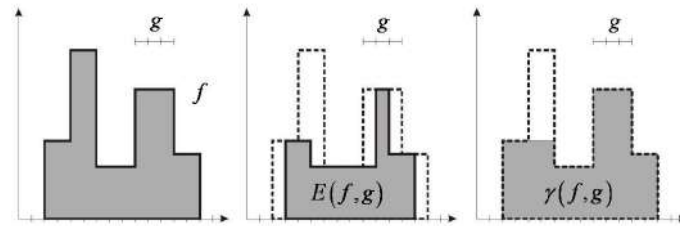


Figura 3.13: Apertura de una señal unidimensional con un elemento estructurante lineal.

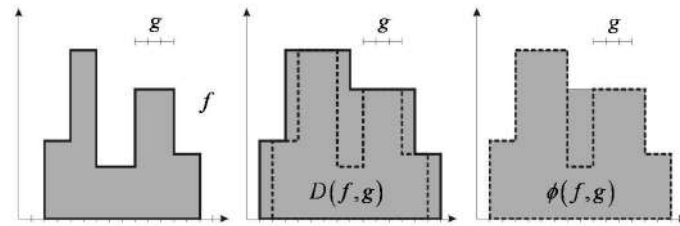


Figura 3.14: Cierre de una señal unidimensional con un elemento estructurante lineal.

En la Figura 3.15 se muestra el resultado de la apertura y el cierre en una imagen en niveles de gris.

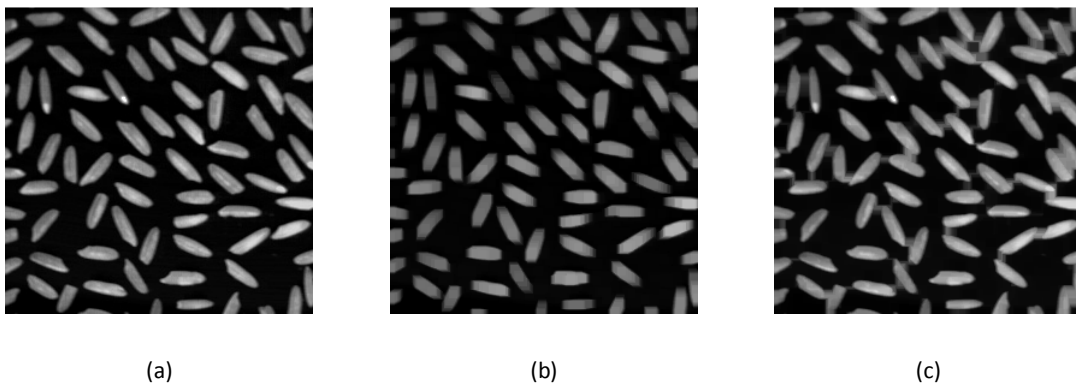


Figura 3.15: Aplicación de la apertura y del cierre en imágenes en niveles de gris.
(a) Imagen original. (b) Apertura de la imagen original. (c) Cierre de la imagen original.

3.6.3 Filtros secuenciales alternados

Un filtro morfológico es un operador creciente e idempotente. La apertura es un filtro morfológico antiextensivo, mientras que el cierre es un filtro morfológico extensivo.

De las propiedades de crecimiento, idempotencia, extensividad y antiextensividad, la apertura y el cierre morfológico constituyen filtros de gran importancia dentro de esta teoría. Estos filtros no representan los únicos filtros con estas propiedades, más aún constituyen una buena base.

A partir de una apertura, se puede definir una familia de aperturas de parámetro nb de la siguiente manera:

$$\gamma^{nb}(f) = \gamma^{nb}(\gamma^{(n-1)b}(\dots \gamma^b(f))) \quad (3.33)$$

donde $nb = D(D(\dots(D(b,b)),b),b)$, es decir, significa dilatar n veces el elemento b con si mismo.

Dicha familia tiene la siguiente propiedad:

$$\forall f, \lambda \geq \mu \Rightarrow \gamma^\lambda(f) \leq \gamma^\mu(f) \quad (3.34)$$

De la misma manera podemos definir una familia de cierres de parámetro nb de la siguiente manera:

$$\phi^{nb}(f) = \phi^{nb}(\phi^{(n-1)b}(\dots \phi^b(f))) \quad (3.35)$$

que verifica la siguiente propiedad:

$$\forall f, \lambda \geq \mu \Rightarrow \phi^\lambda(f) \leq \phi^\mu(f) \quad (3.36)$$

De forma similar se pueden definir los filtros secuenciales alternados, los cuales se simbolizan ASF debido a sus siglas en inglés (Jackway & Deriche, 1996):

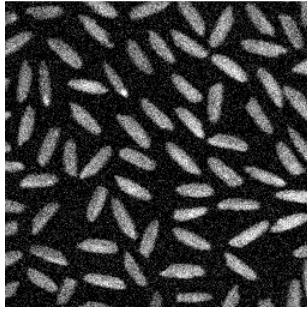
Definición 3.13: El *filtro secuencial alternado* $\gamma\phi^{nb}$ está definido por:

$$\gamma\phi^{nb}(f) = \gamma^{nb}(\phi^{nb}(\gamma^{(n-1)b}(\phi^{(n-1)b}(\dots \gamma^b(\phi^b(f))))) \quad (3.37)$$

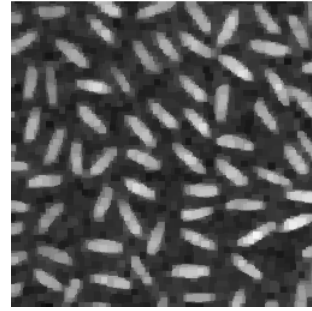
Definición 3.14: El *filtro secuencial alternado* $\phi\gamma^{nb}$ está definido por:

$$\phi \gamma^{nb}(f) = \phi^{nb} \left(\gamma^{nb} \left(\phi^{(n-1)b} \left(\gamma^{(n-1)b} \left(\dots \phi^b \left(\gamma^b(f) \right) \right) \right) \right) \right) \quad (3.38)$$

Los filtros secuenciales alternados tienen la potencialidad de filtrar componentes irrelevantes de pequeño tamaño sin afectar en gran medida la forma y tamaño original de los demás objetos. La Figura 3.16 muestra el resultado de la aplicación del filtro secuencial alternado cierre-apertura, en el cual en primer lugar aplica un cierre a la imagen original con el fin de eliminar el ruido existente en ella y luego aplica una apertura para recuperar la información perdida en la aplicación del cierre. La Figura 3.17 muestra el resultado de aplicar un filtro secuencial alternado de la forma apertura-cierre. En este caso se puede observar como a partir de la aplicación del filtro se logran eliminar pequeñas componentes de la imagen sin modificar la estructura de los demás objetos presentes.

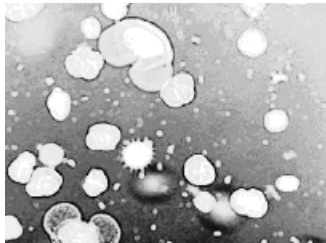


(a)



(b)

Figura 3.16: Aplicación del filtro cierre-apertura.
(a) Imagen inmersa en ruido. (b) Resultado de la aplicación del filtro cierre-apertura.



(a)



(b)

Figura 3.17: Aplicación del filtro apertura-cierre.
(a) Imagen original. (b) Resultado de la aplicación del filtro apertura-cierre.

3.6.4 Gradiente morfológico

La información del gradiente es muy usada en el procesamiento de imágenes para detectar bordes. En morfología matemática, existen varias implementaciones digitales del gradiente. Las más usadas son el gradiente morfológico por erosión, el gradiente morfológico por dilatación y el gradiente morfológico por erosión y dilatación.

Definición 3.15: El *gradiente por dilatación* $grad_D(f, g)$ de una imagen f por un elemento estructurante g a partir de la dilatación es:

$$grad_D(f, g) = D(f, g) - f \quad (3.39)$$

El gradiente por dilatación en niveles de gris detecta bordes en las posiciones de los niveles de gris más bajos en los bordes.

Definición 3.16: El *gradiente por erosión* $grad_E(f, g)$ de una imagen f por un elemento estructurante g a partir de la erosión es:

$$grad_E(f, g) = f - E(f, g) \quad (3.40)$$

El gradiente por erosión en niveles de gris detecta bordes en las posiciones de los niveles de gris más elevados en los bordes.

El tercer tipo de gradiente morfológico mencionado, consiste en usar en forma simultánea los operadores de erosión y dilatación.

Definición 3.17: El *gradiente morfológico* $grad_{D,E}(f, g)$ de una imagen f por un elemento estructurante g a partir de los operadores dilatación y erosión es:

$$grad_{D,E}(f, g) = D(f, g) - E(f, g) \quad (3.41)$$

El gradiente por dilatación y erosión en niveles de gris agrupa los resultados de los gradientes por erosión y dilatación. Por lo tanto, podemos observar que los operadores del gradiente $grad_D(f, g)$ y $grad_E(f, g)$ presentan contornos más finos que el operador $grad_{D,E}(f, g)$.

La Figura 3.18 muestra el resultado de calcular los distintos tipos de gradientes sobre una imagen en niveles de gris.

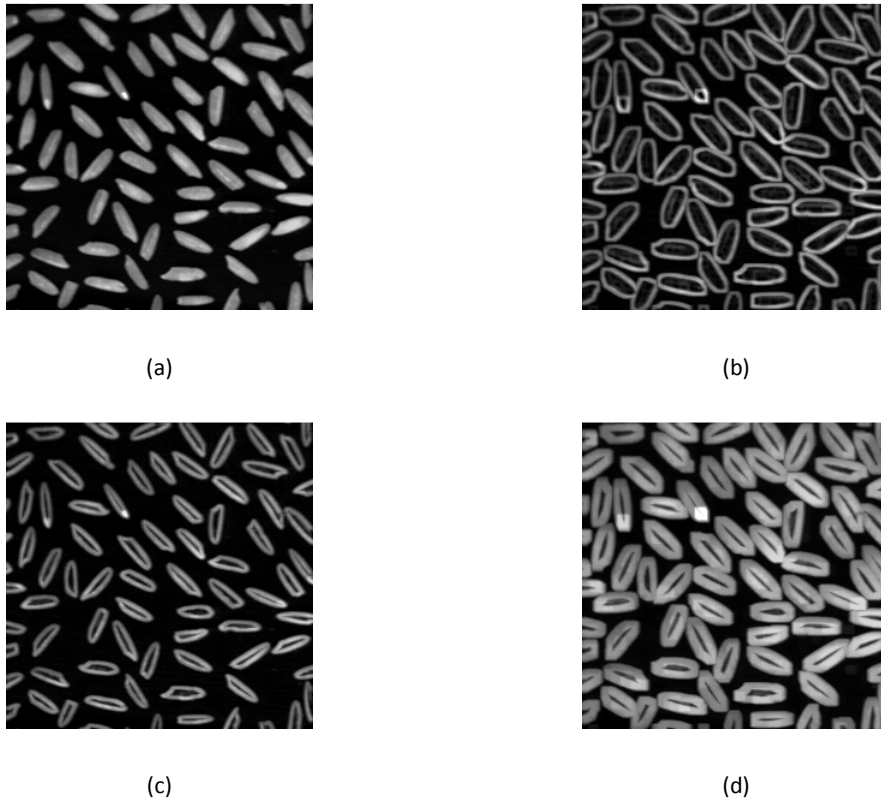


Figura 3.18: Gradientes en imágenes en niveles de gris.
 (a) Imagen original. (b) Gradiente por dilatación. (c) Gradiente por erosión. (d) Gradiente morfológico.

3.6.5 Transformada Top-Hat

Dentro de la MM una técnica de segmentación de imágenes sumamente útil es la transformada Top-Hat. La segmentación de imágenes es el proceso de dividir a la imagen en varias partes, grupos de píxeles u objetos. Su objetivo es simplificar y/o cambiar la representación de una imagen en otra más significativa y más fácil de analizar. La segmentación se utiliza tanto para localizar objetos de interés como para determinar los límites de éstos dentro de una imagen.

Al aplicar la transformada Top-Hat se logra descubrir aquellas estructuras de la imagen que han sido eliminadas en el filtrado de apertura o cierre. Con la elección de un EE de forma, tamaño y orientación adecuados es posible filtrar la imagen y eliminar determinados elementos de la imagen original, despreciando las regiones que no son de interés en el análisis a realizar. Para esto se utiliza un EE de mayor tamaño que las estructuras de la imagen a detectar. Una operación de diferencia entre la imagen original y la imagen filtrada aumenta considerablemente el contraste de las zonas eliminadas.

Definición 3.18: La transformada *Top-Hat por apertura* se define como el residuo entre la identidad y la apertura morfológica:

$$\rho_{\text{apert}}(f, g) = f - \gamma(f, g) \quad (3.42)$$

Esta transformada resalta objetos localmente brillantes que han sido eliminados en el filtrado de apertura en una imagen en niveles de gris. Este resultado se puede observar en la Figura 3.19.

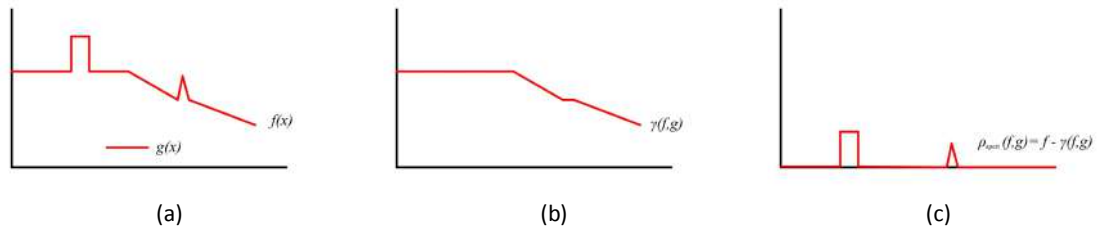


Figura 3.19: Top-Hat por apertura.

(a) Señal original. (b) Apertura de la señal. (d) Resultado de aplicar el Top-Hat por apertura.

Definición 3.19: La transformada *Top-Hat por cierre* se define como el residuo entre el cierre morfológico y la identidad:

$$\rho_{\text{cierre}}(f, g) = \phi(f, g) - f \quad (3.43)$$

Esta transformada resalta objetos localmente oscuros que han sido eliminados en la aplicación del cierre morfológico. Este resultado se puede observar en la Figura 3.20.

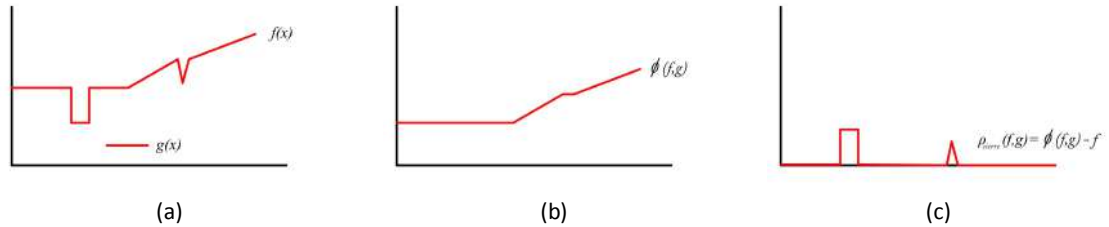


Figura 3.20: Top-Hat por cierre.

(a) Señal original. (b) Cierre de la señal. (d) Resultado de aplicar el Top-Hat por cierre.

En la Figura 3.21 se muestra los resultados de las transformadas Top-Hat por apertura y por cierre en imágenes reales.

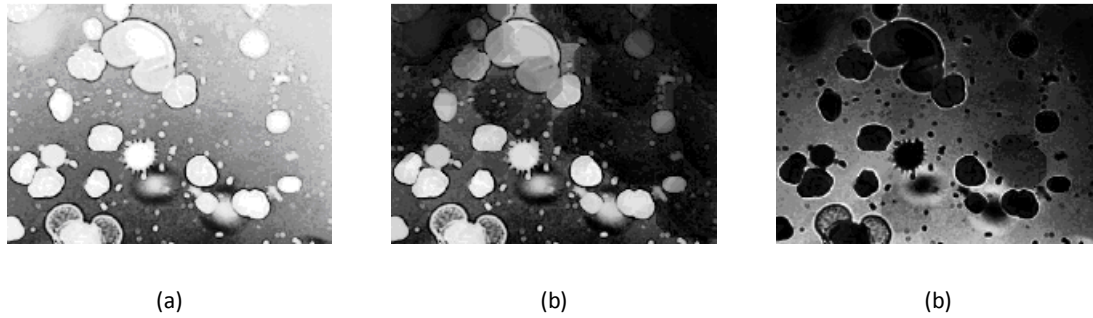


Figura 3.21: Aplicación de la transformada Top-Hat.
(a) Imagen original. (b) Top-Hat por apertura. (c) Top-Hat por cierre.

3.6.6 Umbralamiento

El umbralamiento, conocido como “thresholding” en inglés, consiste en tomar una imagen en niveles de gris y definir un valor (tono de gris) conocido como umbral, a través del cual a los píxeles con un nivel de gris por debajo del umbral se les asigna una única intensidad de gris y a los píxeles con un nivel de gris por encima del umbral se les asigna otra única intensidad de gris, distinta a la asignada para el primer grupo de píxeles. Cuando el problema consiste en distinguir dos objetos diferentes en la imagen original constituidos por el objeto de interés y el fondo, el umbralamiento se conoce como binarización, transformación que permite aprovechar todas las operaciones y propiedades que se pueden realizar con una imagen binaria (Glasbey & Horgan, 1995).

El valor del umbral debe ser escogido de acuerdo a un criterio particular no sólo para cada problema sino también para cada imagen debido a las variaciones en la iluminación o en el nivel de gris de la imagen original; por lo que es bastante útil la información que pueda proporcionar el histograma de la imagen.

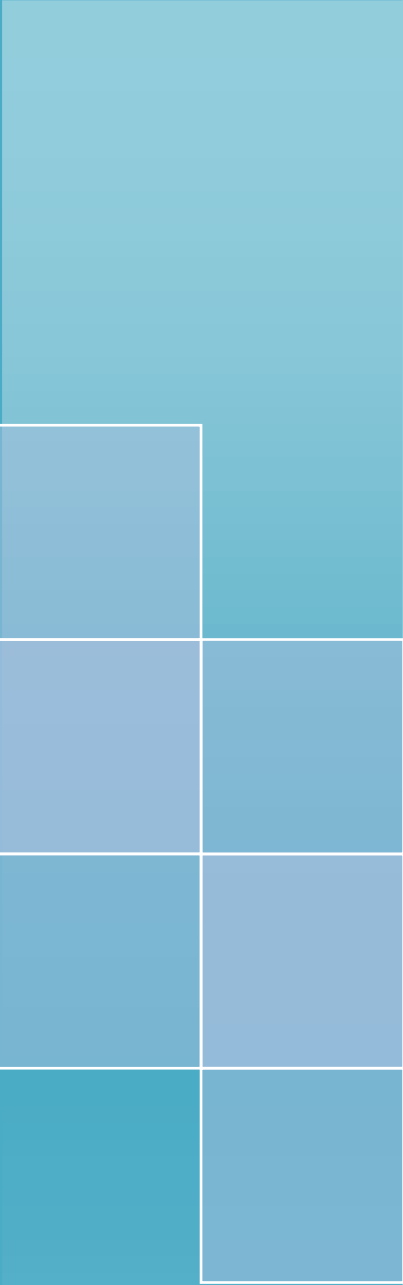
Los métodos de umbralamiento pueden dividirse en seis categorías (Sahoo et al., 1988; Otsu, 1979; Weszka et al., 1974; Kwon, 2004; Kapur et al., 1985; Sezgin & Sankur, 2004):

1. Método basado en la forma del histograma: Este método tiene presente los máximos y los mínimos, la curvatura, o cualquier otra característica especial del histograma de la imagen original.
2. Método basado en clustering: Consiste en buscar como clasificar los distintos niveles de intensidad en dos o más grupos diferentes.

3. Método basado en la entropía: Se basa en tomar como referencia la entropía del frente y el fondo de la imagen, o la entropía cruzada entre la imagen original y la umbralada.
4. Método basado en atributos del objeto: Este método se fundamenta en medidas como la coincidencia de bordes, similitud de formas, entre otras características destacables de una imagen.
5. Métodos espaciales: Se basa en distribuciones de probabilidad o en la correlación entre los píxeles de la imagen.
6. Método local: Adopta el umbral de acuerdo a las características de la región que se desea analizar.

Una dificultad que presentan las técnicas de umbralamiento es la variación de la iluminación sobre distintas zonas de la misma imagen. Es importante destacar que entre los métodos enunciados anteriormente el único que tiene en cuenta este problema es el método local. Para los demás métodos una alternativa que elimina este problema es el umbralamiento por regiones, en donde se fija el umbral para cada región de acuerdo a lo que se desee destacar.

En este capítulo se presentaron los operadores morfológicos que se utilizaran en el desarrollo de esta tesis. A continuación se presentan los principales conceptos de la teoría de conjuntos difusos para luego definir los operadores matemáticos difusos.



Capítulo 4

Teoría de Conjuntos Difusos

Capítulo 4

Teoría de Conjuntos Difusos

En este capítulo se presentan los principales conceptos de la teoría de conjuntos difusos con el objeto de lograr definir los operadores de la Morfología Matemática Difusa en el capítulo posterior. En primer lugar se realiza una introducción a la lógica difusa para luego, en la sección 4.2 definir los conjuntos difusos y en la sección 4.3 sus principales conceptos. En la sección 4.4 se introducen las operaciones entre este tipo de conjuntos. En la sección 4.5 se definen las normas y conormas triangulares y en la sección 4.6 se define el complemento difuso, conceptos que tendrán un papel fundamental de aquí en adelante en el desarrollo de esta tesis. Por último, en la sección 4.7 se presenta el principio de extensión de Zadeh, principio de gran importancia que servirá de soporte para la definición de la suma y resta de Minkowski difusas que se presentarán en el próximo capítulo.

4.1 Introducción

Cuando decimos “*lógica*” normalmente nos estamos refiriendo a la lógica de Aristóteles, la cual será llamada lógica clásica, y se remonta al año 300 A.C. Esta lógica basada sobre el argumento: “Una declaración es verdadera o falsa” ha sido estudiada y explorada por miles de científicos y filósofos desde su comienzo. Es una lógica binaria que permite sólo dos valores, es verdadera o no lo es, no hay posición intermedia entre dos extremos.

La lógica difusa, como su nombre lo indica, es una lógica alternativa a la lógica clásica que pretende introducir un grado de vaguedad en las cosas que califica. En el mundo real existe mucho conocimiento no-perfecto, es decir, conocimiento vago, impreciso, incierto, ambiguo, inexacto, o probabilístico por naturaleza. El razonamiento y pensamiento humano frecuentemente conlleva información de este tipo, probablemente originada de la inexactitud inherente de los conceptos humanos y del razonamiento basado en experiencias similares pero no idénticas a experiencias anteriores.

El problema principal surge de la poca capacidad de expresión de la lógica clásica. A modo de ejemplo, se tiene un grupo de personas que se quiere agrupar según su altura, calificándolas como *altas* o *bajas*. La solución que propone la lógica clásica es definir un umbral

de pertenencia. Por ejemplo, un valor que de ser alcanzado o superado, la persona en cuestión puede llamarse *alta*. Si dicho umbral es 1.80 metros, todas las personas que midan 1.80 metros o más serán consideradas *altas*, mientras que las otras serán *bajas*. Según esta manera de pensar, alguien que mida 1.79 metros será tratado igual que otra persona que mida 1.50 metros, ya que ambos han sido calificados como *bajos*. Si se tuviese una herramienta para caracterizar las alturas de forma que las transiciones fueran suaves, se estaría representando la realidad de una forma más fiel. Esta herramienta es brindada por la lógica difusa, la cual considera que el conjunto de personas *altas* es un conjunto que no tiene una frontera clara para pertenecer o no pertenecer a él. Mediante una función que define la transición de “alto” a “no alto” se asigna a cada valor de altura un grado de pertenencia al conjunto, entre 0 y 1. Así por ejemplo, un hombre que mida 1.79 metros podría pertenecer al conjunto difuso de personas *altas* con un grado 0.8 de pertenencia, uno que mida 1.85 con un grado 0.85 y uno que mida 1.50 metros de altura con un grado 0.1. Visto desde esta perspectiva se puede considerar que la lógica clásica es un caso límite de la lógica difusa en el que se asigna un grado de pertenencia 1 a los hombres con una altura mayor o igual a 1.80 y un grado de pertenencia 0 a los que tienen una altura menor.

La lógica difusa fue investigada, por primera vez, a mediados de los años setenta por el ingeniero Lotfy Zadeh en la Universidad de Berkeley (California). Surge a partir de lo que él llamo principio de incompatibilidad: “Conforme la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta el umbral más allá del cual, la precisión y el significado son características excluyentes”. De esta forma, introdujo el concepto de conjuntos difusos bajo el que reside la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento humano no son números sino etiquetas lingüísticas. La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos. Permite trabajar a la vez con datos numéricos y términos lingüísticos, estos últimos inherentemente menos precisos que los primeros pero en muchas ocasiones aportan una información más útil para el razonamiento humano.

Aunque la lógica difusa es conocida con este nombre por Zadeh desde 1965, la idea que se esconde tras ella y sus orígenes se remontan hasta 2500 años atrás. Los filósofos griegos, Aristóteles entre ellos, consideraban que existían ciertos grados de veracidad y falsedad y Platón ya trabajó con grados de pertenencia (Lombraña, 1978; Öffenberger, 2008; Aranguren & Muzachiodi, 2003).

La idea de que la lógica produce contradicciones fue popularizada por el filósofo y matemático británico Bertrand Russell, a principios del siglo XX. Estudió las vaguedades del lenguaje, concluyendo con precisión que la vaguedad es un grado de pertenencia. El filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein estudió las formas en las que una palabra puede ser empleada para muchas cosas que tiene algo en común. La primera lógica de vaguedades fue desarrollada en 1920 por el filósofo Jan Lukasiewicz, quién visualizó los conjuntos con un posible grado de pertenencia con valores de 0 y 1, después los extendió a un número infinito de valores entre 0 y 1. En los años sesenta, Lofti Zadeh inventó la lógica difusa, que combina los conceptos de la lógica y de los conjuntos de Lukasiewicz mediante la definición de grados de pertenencia (Aranguren & Muzachiodi, 2003).

El aspecto central de los sistemas basados en la teoría de la lógica difusa es que, a diferencia de los que se basan en la lógica clásica, tienen la capacidad de reproducir aceptablemente los modos usuales del razonamiento, considerando que la certeza de una proposición es una cuestión de grado. Más formalmente se puede decir que si la lógica es la ciencia de los principios formales y normativos del razonamiento, la lógica difusa se refiere a los principios formales del razonamiento aproximado, considerando el razonamiento preciso (lógica clásica) como caso límite. Así pues, las características más atractivas de la lógica difusa son su flexibilidad, su tolerancia con la imprecisión, su capacidad para modelar problemas no-lineales, y su base en el lenguaje natural.

4.2 Conjuntos difusos y funciones de pertenencia

Los conjuntos difusos pueden ser considerados como una generalización de los conjuntos clásicos. La teoría de conjuntos sólo contempla la pertenencia o no pertenencia de un elemento a un conjunto, mientras que la teoría de conjuntos difusos contempla la pertenencia parcial de un elemento a un conjunto, es decir, cada elemento presenta un grado de pertenencia a un conjunto difuso el cual es un valor entre 0 y 1. Este grado de pertenencia se define mediante la función de pertenencia asociada al conjunto difuso, para cada valor que pueda tomar un elemento x del universo, la función de pertenencia $\mu_A(x)$ proporciona el grado de pertenencia de dicho valor al conjunto difuso A .

Formalmente, un conjunto clásico A , en un universo U , se puede definir de varias formas: enumerando los elementos que pertenecen al conjunto (extensión), especificando las

propiedades que deben cumplir los elementos que pertenecen a ese conjunto (comprensión), o en términos de la función de pertenencia $\mu_A(x)$ (Dubois & Prade, 1980; Jantzen, 1999):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (4.1)$$

Podemos además decir que el conjunto A es matemáticamente equivalente a su función de pertenencia $\mu_A(x)$, ya que conocer $\mu_A(x)$ es lo mismo que conocer A .

Un conjunto difuso en el universo U se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que toma valores en el intervalo $[0,1]$ y puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento x y su valor de pertenencia al conjunto:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\} \quad (4.2)$$

La función de pertenencia proporciona una medida del grado de pertenencia de un elemento de U con el conjunto difuso, es decir, indica en qué medida el elemento de U forma parte del conjunto difuso. Un elemento $x \in U$ puede pertenecer a un conjunto difuso A de manera total o parcial, como también puede no pertenecer a dicho conjunto. Esto será indicado por el valor que se obtenga al especializar la función de pertenencia en el elemento x . Cuando se tiene que $\mu_A(x) = 0$ significa que x no pertenece al conjunto A , mientras que si $\mu_A(x) = 1$ indica que el elemento x pertenece totalmente al conjunto A y cuando $0 < \mu_A(x) < 1$, x pertenece al conjunto difuso A de una manera parcial.

La forma de la función de pertenencia utilizada, depende del criterio aplicado en la resolución de cada problema y varía en función del punto de vista del usuario. La única condición que debe cumplir una función de pertenencia es que tome valores entre 0 y 1, con continuidad. Conceptualmente existen dos aproximaciones para determinar la función de pertenencia asociada a un conjunto: la primera aproximación está basada en el conocimiento humano de los expertos, y la segunda aproximación es utilizar una colección de datos para diseñar la función. El número de funciones características asociadas a una misma variable es elegido por el experto, a mayor número de funciones características tendremos mayor resolución pero también mayor complejidad computacional. Además estas funciones pueden estar solapadas o no, el hecho de estar solapadas pone de manifiesto un aspecto clave de la lógica difusa, una variable puede pertenecer con diferentes grados a varios conjuntos difusos a la vez.

4.3 Conceptos de la teoría de conjuntos difusos

Muchos conceptos de la teoría clásica de conjuntos pueden hacerse extensivos a los conjuntos difusos, otros son exclusivos e inherentes a esta última teoría. Algunos de los más utilizados son los que se presentan a continuación (Dubois & Prade, 1980; Jantzen, 1999).

Definición 4.1: El *soporte* de un conjunto difuso A en el universo U es un conjunto clásico que contiene todos los elementos de U que tienen un valor de pertenencia distinto de cero en A :

$$sop(A) = \{x \in U / \mu_A(x) > 0\} \quad (4.3)$$

Si el soporte de un conjunto difuso no contiene ningún elemento tendremos un conjunto difuso vacío. Si el soporte de un conjunto difuso es un solo punto tendremos lo que se conoce como “singleton” difuso.

Definición 4.2: El *núcleo* de un conjunto difuso A es el conjunto de los elementos de U que pertenecen totalmente al conjunto A :

$$Nu(A) = \{x \in U / \mu_A(x) = 1\} \quad (4.4)$$

Definición 4.3: La *altura* de un conjunto difuso A representa el mayor grado de pertenencia de los elementos del conjunto:

$$h_A = \sup\{\mu_A(x) / x \in U\} \quad (4.5)$$

Definición 4.4: Un *conjunto difuso normalizado* es un conjunto difuso cuya altura es igual a 1, es decir, que todo conjunto difuso que posea un núcleo distinto del conjunto vacío es normalizado:

$$A \text{ es normalizado sii } \exists x \in U / \mu_A(x) = 1 \quad (4.6)$$

Si un conjunto difuso no es normalizado se lo puede normalizar dividiendo los valores que toma la función de pertenencia en cada elemento del universo por la altura de dicho conjunto.

Definición 4.5: El *conjunto vacío difuso* $\emptyset$ está definido como aquel conjunto en el cual la función de pertenencia para todos los puntos de dicho conjunto es 0:

$$\forall x \in U \quad \mu_{\emptyset}(x) = 0 \quad (4.7)$$

Definición 4.6: El *conjunto universo difuso* está definido como aquel conjunto en el cual la función de pertenencia es igual a 1 para todo elemento de dicho conjunto:

$$\forall x \in U \quad \mu_U(x) = 1 \quad (4.8)$$

Definición 4.7: El α -corte de un conjunto difuso A se define como el conjunto clásico A_α de todos los elementos $x \in U$ cuyo grado de pertenencia es mayor o igual a α :

$$A_\alpha = \{x \in U / \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.9)$$

En la Figura 4.1 se muestran gráficamente los conceptos presentados anteriormente.

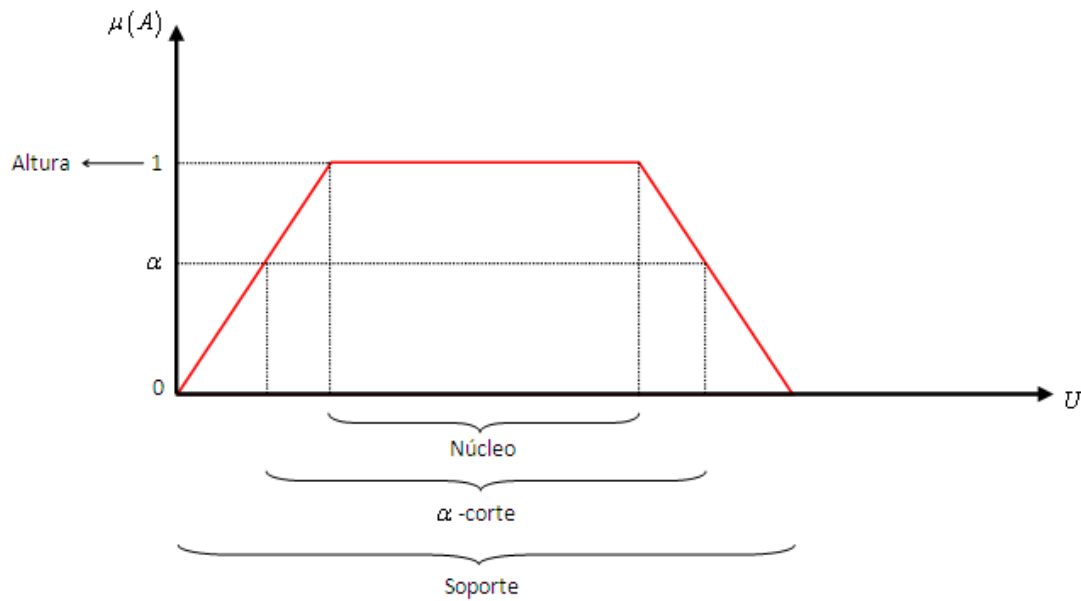


Figura 4.1: Visualización de los conceptos de la teoría de conjuntos difusos.

4.4 Operaciones entre conjuntos difusos

Con los conjuntos difusos se puede operar de modo similar al que se lo hace con los conjuntos clásicos. Dado que los conjuntos difusos son una generalización de los conjuntos clásicos, es posible definir las operaciones intersección, unión, complemento, entre otras; y dado que la función de pertenencia es la que caracteriza a los conjuntos difusos, las operaciones con tales conjuntos se definen a través de dichas funciones.

A continuación se definen algunas de las operaciones necesarias en el desarrollo de esta tesis.

Definición 4.8: Dos conjuntos difusos A y B son *iguales* si y sólo si sus funciones de pertenencia $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$ son iguales:

$$\forall x \in U \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad (4.10)$$

Definición 4.9: El conjunto difuso B *contiene* al conjunto difuso A , esto es $A \subset B$, si y sólo si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ para todo $x \in U$.

Definición 4.10: La *intersección* de dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso $A \cap B$ en U cuya función de pertenencia es (Dubois & Prade, 1980):

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (4.11)$$

donde $\mu_{A \cap B}$ es la función de pertenencia de $A \cap B$.

Definición 4.11: La *unión* de dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso $A \cup B$ en U cuya función de pertenencia es (Dubois & Prade, 1980):

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (4.12)$$

donde $\mu_{A \cup B}$ es la función de pertenencia de $A \cup B$.

Definición 4.12: Sean dos conjuntos difusos A y B . La *diferencia acotada* entre A y B es el conjunto difuso $A \setminus B$ formado por los elementos cuyo grado de pertenencia al conjunto A es mayor que el grado de pertenencia al conjunto B , y cuyo grado de pertenencia está dado por (Dubois & Prade, 1980):

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \max[0, \mu_A(x) - \mu_B(x)] \quad (4.13)$$

Esta operación extiende la diferencia entre conjuntos clásicos.

Definición 4.13: El conjunto *complementario* $\bar{A}$ de un conjunto difuso A es aquel cuya función de pertenencia está definida por (Dubois & Prade, 1980):

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (4.14)$$

Las operaciones intersección, unión y complemento definidas para conjuntos difusos cumplen, al igual que en la teoría clásica de conjuntos, las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva así como también la Leyes de De Morgan (Dubois & Prade, 1980).

Es importante destacar que existen dos leyes fundamentales de la teoría clásica de conjuntos como son el Principio de Contradicción ($A \cup \bar{A} = U$) y el Principio de Exclusión ($A \cap \bar{A} = \emptyset$) que no se cumplen en la teoría de conjuntos difusos. De hecho una de las formas para describir en que se diferencian la teoría clásica de conjuntos de la teoría difusa es explicar que estas dos leyes no se cumplen en términos de la lógica difusa. En consecuencia, algunas de las teorías derivadas de la teoría de conjuntos, como por ejemplo la de la probabilidad, serán muy diferente planteadas en términos difusos.

4.5 Normas y conormas triangulares

Las funciones que definen la intersección y la unión de conjuntos difusos pueden generalizarse, a condición de cumplir ciertas restricciones. Las funciones que cumplen estas condiciones se conocen como norma triangular y conorma triangular (Ver Apéndice A). A continuación se presentan dichos conceptos.

Definición 4.14: Una función $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una *norma triangular* (t-norma) si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $a, b, c \in [0,1]$ (Dubois & Prade, 1980):

- i. Condición de frontera: $t(a, 1) = a$
- ii. Simetría: $t(a, b) = t(b, a)$
- iii. Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $t(a, b) \leq t(c, d)$
- iv. Asociatividad: $t(t(a, b), c) = t(a, t(b, c))$

Este tipo de funciones permiten generalizar la operación de intersección entre dos conjuntos difusos A y B de la siguiente manera:

$$\mu_{A \cap B}(x) = t[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (4.15)$$

Los principales operadores que cumplen las condiciones para ser t-normas son el operador mínimo y el producto algebraico, pero también existen otros operadores que cumplen tales condiciones y se presentan a continuación:

$$\text{Estándar:} \quad t(a, b) = \min(a, b) \quad (4.16)$$

$$\text{Producto algebraico:} \quad t(a, b) = a.b \quad (4.17)$$

$$\text{Producto acotado:} \quad t(a, b) = \max(0, a + b - 1) \quad (4.18)$$

$$\text{Producto drástico:} \quad t(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\text{Dubois and Prade:} \quad t(a, b) = \frac{a.b}{\max(a, b, \gamma)} \quad (4.20)$$

$$\text{Producto de Hamacher:} \quad t(a, b) = \frac{a.b}{\gamma + (1 - \gamma).(a + b - a.b)} \quad (4.21)$$

En la Figura 4.2 se muestra el gráfico de la t-norma estándar. La zona roja muestra la condición de frontera.

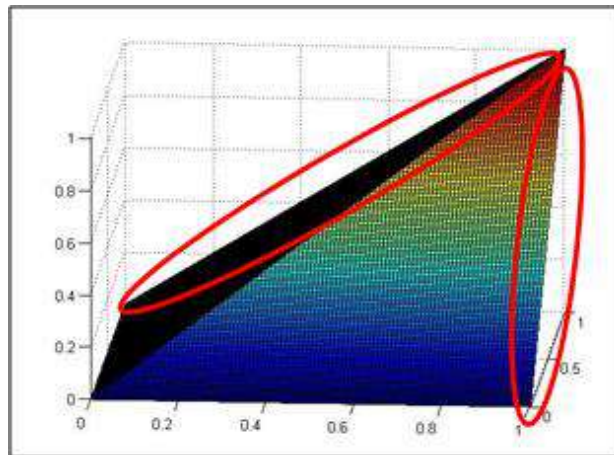


Figura 4.2: Gráfico de la t-norma estándar.

De forma similar se presenta la definición de las conormas triangulares.

Definición 4.15: Una función $s : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una *conorma triangular* (t-conorma o s-norma) si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $a, b, c \in [0,1]$ (Batyrsin et al., 1998):

i. Condición de frontera: $s(a, 0) = a$

ii. Simetría: $s(a, b) = s(b, a)$

iii. Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $s(a, b) \leq s(c, d)$

iv. Asociatividad: $s(s(a, b), c) = s(a, s(b, c))$

Este tipo de funciones permiten generalizar la operación de unión entre dos conjuntos difusos A y B de la siguiente manera:

$$\mu_{A \cup B}(x) = s[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (4.22)$$

Los principales operadores que cumplen las condiciones para ser s-normas son el operador máximo y la suma algebraica, pero también existen otros operadores que cumplen tales condiciones y se presentan a continuación:

Estándar: $s(a, b) = \max(a, b)$ (4.23)

Suma algebraica: $s(a, b) = a + b - a.b$ (4.24)

Producto acotado: $s(a, b) = \min(1, a + b)$ (4.25)

Producto drástico: $s(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ (4.26)

Dubois and Prade: $s(a, b) = 1 - \frac{(1-a).(1-b)}{\max(1-a, 1-b, \gamma)}$ (4.27)

Producto de Hamacher: $s(a, b) = \frac{a + b + (\gamma - 2).a.b}{1 + (\gamma - 1).a.b}$ (4.28)

En la Figura 4.3 se muestra el gráfico de la s-norma estándar. La zona roja muestra la condición de frontera.

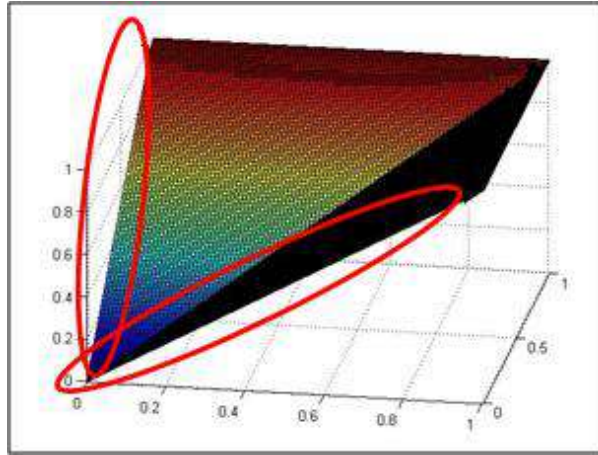


Figura 4.3: Gráfico de la s-norma estándar.

Es importante destacar que cuando se mencionen t-normas o s-normas particulares se podrá utilizar el término norma a modo de facilitar la lectura.

4.6 Complemento difuso

Las funciones que definen el complemento de un conjunto difuso también pueden generalizarse como se hizo con la intersección y la unión en la sección anterior. Las funciones que cumplen estas condiciones se conocen como complemento difuso. A continuación se define dicho concepto.

Definición 4.16: Una función $c:[0,1] \rightarrow [0,1]$ es un *complemento difuso* si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $a, b \in [0,1]$ (Batyrshtin et al., 1998):

- i. Condición de frontera: $c(0)=1$ y $c(1)=0$
- ii. Monotonicidad: Si $a \leq b$ entonces $c(a) \geq c(b)$
- iii. Propiedad Involutiva: $c(c(a))=a$

Estas funciones permiten generalizar la operación de complemento de un conjunto difuso A de la siguiente manera:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = c[\mu_A(x)] \quad (4.29)$$

Existen muchos operadores que satisfacen estas propiedades entre los que se destacan:

$$\text{Estándar:} \quad c(a) = 1 - a \quad (4.30)$$

$$\text{Sugeno:} \quad c(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \text{ donde } \lambda > -1 \quad (4.31)$$

$$\text{Yager:} \quad c(a) = (1-a^\omega)^\frac{1}{\omega} \text{ donde } \omega > 0 \quad (4.32)$$

4.7 Principio de extensión de Zadeh

Muchas aplicaciones de la lógica difusa tienen como fundamento al principio básico de extensión de Zadeh. Se trata del principio fundamental en que se sustentan aquellas aplicaciones de los subconjuntos difusos basadas en la extensión de conceptos matemáticos no difusos cuando los datos de partida son difusos.

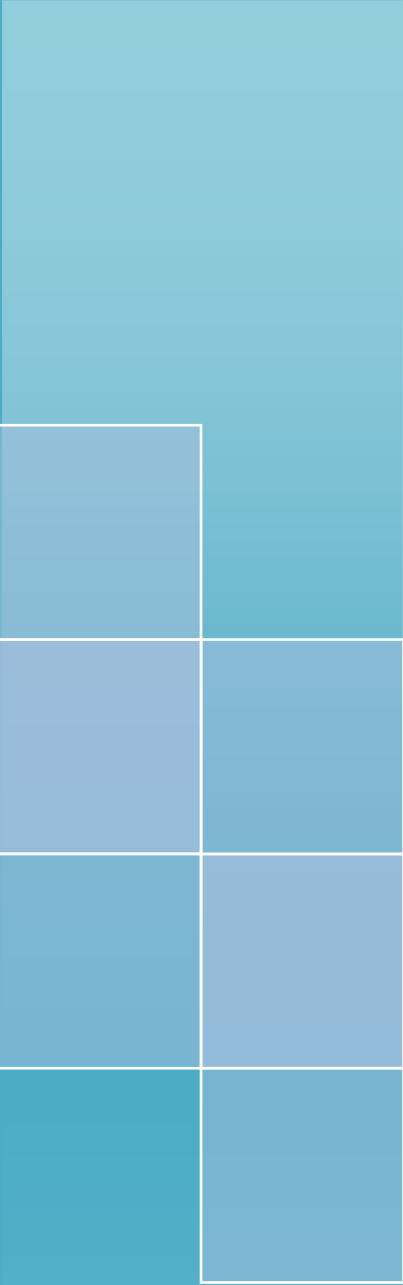
El principio de extensión afirma que dado un subconjunto difuso A en X cuya función de pertenencia es $\mu_A(x)$ y dada la aplicación $f: X \rightarrow Y$, esta aplicación define un conjunto difuso $B = f(A)$ en Y cuya función de pertenencia es (Zadeh, 1965; Zadeh, 1996; Dubois & Prade, 1980):

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \\ \sup_{x=f^{-1}(y)} [\mu_A(x)] & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \end{cases} \quad (4.33)$$

Este principio será utilizado en el siguiente capítulo para definir la suma y resta de Minkowski difusas.

De aquí en adelante, en el desarrollo de esta tesis al conjunto difuso $A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$ se lo notará μ por abuso de notación.

A partir de los conceptos presentados en estas secciones se está en condiciones de definir los operadores de la Morfología Matemática Difusa.



Capítulo 5

Morfología Matemática Difusa

Capítulo 5

Morfología Matemática Difusa

La teoría de conjuntos difusos ha encontrado un promisorio campo de aplicación en el Procesamiento Digital de Imágenes (PDI) a través de la Morfología Matemática Difusa (MMD). La MMD proporciona una alternativa para extender las operaciones básicas binarias, dilatación y erosión, a imágenes en niveles de gris basándose en la teoría de conjuntos difusos. Dicha técnica ha sido estudiada por varios autores a lo largo de los últimos años, entre los cuales se destacan Di Gesù, De Baets, Kerre, Bloch, Maître y Nachtegaele (De Baets et al., 1995a; De Baets et al., 1995b; De Baets, 1995; Kerre & Nachtegaele, 2000; Bloch & Maitre, 1995; Bloch, 2006; Bloch, 2009; Di Gesu, 1988; Di Gesu et al., 1993; Di Gesu et al., 1991).

En este capítulo se presentan los distintos enfoques existentes en la literatura para abordar dicha extensión. En primer lugar se da una reseña histórica, para luego analizar los distintos tipos de extensiones. En la sección 5.2 se presenta la suma y resta de Minkowski para conjuntos difusos, la cual es el punto de partida de varios autores para definir los operadores básicos difusos. En la sección 5.3 se muestran distintas extensiones de los operadores básicos de la Morfología Matemática para llegar a las definiciones de los operadores básicos de la Morfología Matemática Difusa. Se abordan los enfoques de De Baets, Bloch y Maître, y Sinha y Dougherty. En la sección 5.4, se muestra como se logran unificar todos los enfoques presentados en una única fórmula, una para la dilatación difusa y otra para la erosión difusa, las cuales fueron propuestas por Bloch y Maître (Bloch & Maitre, 1995). Por último, en la sección 5.5, se definen los operadores y filtros de la MMD que surgen de combinar la dilatación y la erosión difusas.

5.1 Reseña histórica

Para comprender los inicios de la MMD se realizará una breve reseña histórica:

- En 1965, los conjuntos difusos fueron introducidos por Lotfi A. Zadeh definiendo las operaciones elementales tales como la intersección, la unión, el complemento y la inclusión (Zadeh, 1965).

- En 1980, las operaciones básicas de la MM (erosión y dilatación) fueron aplicadas en imágenes en niveles de gris interpretándose como conjuntos difusos utilizando los operadores max y min (definiciones 4.10 y 4.11), y utilizando sólo elementos estructurantes binarios (Goetcherian, 1980).
- En 1988, Arnold Kaufmann y Madan Gupta proporcionaron una definición de la suma de Minkowski para dos conjuntos difusos. Este fue realmente el primer enfoque difuso por medio de los α -cortes de dos conjuntos difusos (Kaufmann & Gupta, 1988).
- Desde 1989, varios intentos se han hecho para utilizar directamente la morfología en niveles de gris en imágenes en niveles de gris interpretadas como conjuntos difusos, en lugar de desarrollar un enfoque difuso (Giardina & Sinha, 1990; Laplante & Giardina, 1991; Nakatsuyama, 1993).
- Vito Di Gesù desarrolla en 1988 y 1991 un enfoque en el cuál transforma una imagen en niveles de gris en un conjunto difuso a través de una función de pertenencia o por reajuste, es decir, realiza un cambio de escala en los valores de los niveles de gris, llevándolos al rango $[0,1]$. Introduce las operaciones difusas a partir de la extensión de la erosión binaria y sugiere cuatro posibles definiciones de la erosión difusa llamadas *exacta*, *promedio*, *delta* y *min*. Sin embargo, ninguna de estas definiciones es una correcta extensión de la erosión binaria. Di Gesù realizó un estudio teórico limitado e incompleto de las propiedades de las operaciones difusas (Di Gesu, 1988; Di Gesu et al., 1991).
- En 1992, Hans Bandemer y Wolfgang Näther sugieren tres posibles maneras de ampliar las operaciones morfológicas binarias. La primera basada en la suma de Minkowski, la segunda basada en la intersección y la inclusión, y la última basada en la convolución. Con respecto al primer enfoque, estos autores ilustran el comportamiento de la dilatación y la erosión difusas en conjuntos difusos, pero sin realizar un estudio teórico de las propiedades de dichas operaciones (Bandemer & Näther, 1992).
- En 1995, Bernard De Baets, Etienne Kerre y Madan Gupta toman el primer enfoque dado por Bandemer y Näther demostrando que los operadores básicos definidos de esta manera satisfacen las mismas propiedades que los operadores de la MM. Estos autores interpretan a las imágenes en niveles de gris como conjuntos difusos, a fin de poder aplicar las operaciones de la teoría de conjuntos difusos. Como tal, afirman que el adjetivo “difuso” no está relacionado con la naturaleza de las imágenes; es decir, no hay falta de claridad ni incertidumbre involucrados (De Baets et al., 1995a; De Baets et al., 1995b).

- En ese mismo año, Isabelle Bloch y Henri Maître desarrollan un estudio comparativo de las morfologías matemáticas difusas. Para estos autores, la difusidad es una característica intrínseca de las imágenes, justificándolo con la siguiente afirmación (Bloch & Maitre, 1995):

“En cualquier imagen médica, los tejidos patológicos aparecen sin fronteras de corte claras, como manchas difusas sutilmente incrustadas en los tejidos sanos. De manera similar, en las imágenes satelitales los límites entre distintos tipos de topografías no se encuentran perfectamente delimitados.”

De esta forma afirman que los conjuntos difusos son capaces de modelar la incertidumbre y la imprecisión presente en este tipo de imágenes.

A continuación se muestran algunos de estos enfoques para extender la morfología binaria a imágenes en niveles de gris usando la teoría de conjuntos difusos. Para poder lograr estas extensiones en primer lugar se deben presentar algunos conceptos importantes como por ejemplo la suma y la resta de Minkowski, las cuales se definen en la siguiente sección.

5.2 Suma y Resta de Minkowski para conjuntos difusos

Como se mencionó anteriormente, los primeros intentos para combinar la lógica difusa y la MM fueron realizados por Arnold Kaufmann y Madan Gupta en 1988. Estos autores proporcionaron la definición de suma y resta de Minkowski para conjuntos difusos (Kaufmann & Gupta, 1988).

En primera instancia se debe introducir el concepto de α -cortes, los cuales resultan convenientes para vincular los conceptos de conjuntos difusos con los conceptos de conjuntos clásicos. Dado un conjunto difuso $\mu: X \rightarrow [0,1]$, $\mu(x)$ asigna un grado de pertenencia para cada elemento x del universo X , y dado un valor $\alpha \in [0,1]$, el α -corte de μ es el conjunto de todos los $x \in X$ cuyo grado de pertenencia es mayor o igual a α (Dubois & Prade, 1980):

$$X_\alpha = \{x \in X / \mu(x) \geq \alpha\} \quad (5.1)$$

A este conjunto se le asocia una función indicadora (Bloch & Maitre, 1995):

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin X_\alpha \end{cases} \quad (5.2)$$

Un conjunto difuso puede ser considerado como una colección de conjuntos binarios y ser reconstruido a partir de ellos. Un conjunto difuso se puede caracterizar completamente por sus α -cortes (Bloch & Maitre, 1995):

$$\mu(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot \mu_\alpha(x)] \quad (5.3)$$

$$\mu(x) = \sup_{\substack{\alpha \in (0,1] \\ x \in X_\alpha}} [\alpha] \quad (5.4)$$

$$\mu(x) = \int_0^1 \mu_\alpha(x) d\alpha \quad (5.5)$$

A continuación se muestra que la ecuación (5.5) es una fórmula válida para representar un conjunto difuso a partir de sus α -cortes. Sea $x \in X$, $\forall \alpha \in (0,1]$ $\mu_\alpha(x) \in \{0,1\}$. Por lo tanto,

$$\exists \alpha_0 \in (0,1]: \mu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq \alpha_0 \\ 0 & \text{si } \alpha > \alpha_0 \end{cases}. \text{ En particular: } \mu_{\alpha_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_0 \leq \alpha_0 \\ 0 & \text{si } \alpha_0 > \alpha_0 \end{cases} \Rightarrow \mu_{\alpha_0}(x) = 1.$$

Desarrollando el segundo miembro de la ecuación (5.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu_\alpha(x) d\alpha &= \int_0^{\alpha_0} \mu_\alpha(x) d\alpha + \int_{\alpha_0}^1 \mu_\alpha(x) d\alpha \\ &= \int_0^{\alpha_0} 1 d\alpha + \int_{\alpha_0}^1 0 d\alpha \\ &= \alpha_0 \end{aligned}$$

Suponiendo que $\alpha_0 \neq \mu(x)$:

- Si $\alpha_0 < \mu(x)$ entonces $\exists \alpha > \alpha_0$: $\mu_\alpha(x) = \alpha$. Por lo tanto, $\mu_\alpha(x) = 1$ lo cual es una contradicción ya que $\forall \alpha > \alpha_0$, $\mu_\alpha(x) = 0$.
- Si $\alpha_0 > \mu(x)$ entonces $\mu_{\alpha_0}(x) = 0$, lo cual contradice el hecho de que $\mu_{\alpha_0}(x) = 1$.

Se deduce, entonces, que $\alpha_0 = \mu(x)$. Con lo cual se concluye:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu_\alpha(x) d\alpha &= \alpha_0 \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$

Luego, la ecuación (5.5) es una fórmula válida para representar un conjunto difuso a partir de sus α -cortes.

Las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.5) son equivalentes. En primer lugar se muestra la equivalencia de las fórmulas (5.3) y (5.4). Sea $\alpha \in (0,1]$:

$$\mu_\alpha : [0,1] \rightarrow \{0,1\} \text{ está dada por } \mu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin X_\alpha \end{cases} \quad (5.6)$$

entonces:

$$\alpha . \mu_\alpha : [0,1] \rightarrow \{0,\alpha\} \text{ está dada por } \alpha . \mu_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in X_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin X_\alpha \end{cases} \quad (5.7)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha . \mu_\alpha(x)] &= \sup_{\{\alpha : x \in X_\alpha\}} [\alpha . \mu_\alpha(x)] \\ &= \sup_{\{\alpha : x \in X_\alpha\}} [\alpha] \\ &= \sup_{\substack{\alpha \in (0,1] \\ x \in X_\alpha}} [\alpha] \end{aligned}$$

En segundo lugar se muestra que las fórmulas (5.4) y (5.5) son análogas. Sea la función

$$F_x : [0,1] \rightarrow \{0,1\} \text{ dada por } F_x(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin X_\alpha \end{cases}. \text{ Dicha función es equivalente a la función}$$

$$\text{dada por la ecuación (5.5). De esta forma: } \mu(x) = \int_0^1 \mu_\alpha(x) d\alpha = \int_0^1 F_x(\alpha) d\alpha = \int_R F_x(\alpha) d\alpha$$

donde $R = \{\alpha : F_x(\alpha) = 1\} = [0, I]$ e $I = \sup_{\substack{\alpha \in [0,1] \\ x \in X_\alpha}} [\alpha]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \int_R F_x(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^I 1 d\alpha = \alpha \Big|_0^I \\ &= I \\ &= \sup_{\substack{\alpha \in [0,1] \\ x \in X_\alpha}} [\alpha] \end{aligned}$$

De esta forma queda demostrada la equivalencia entre las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.5), las cuales son fórmulas válidas. Por lo tanto, hay tres formas equivalentes de construir o representar un conjunto difuso a partir de sus α -cortes. Con el objeto de simplificar la

notación, se utilizará la representación dada por la ecuación (5.4) en el desarrollo de este capítulo.

Para comprender como queda definido un conjunto difuso a partir de sus α -cortes se presenta el siguiente ejemplo. Sea μ un conjunto difuso sobre $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ definido de la siguiente forma:

Tabla 5.1: Función de pertenencia $\mu(x)$.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mu(x)$	0.2	0.3	0.6	0.8	1

Para esta función se pueden definir cinco α -cortes ($\mu_{0.2}, \mu_{0.3}, \mu_{0.6}, \mu_{0.8}$ y μ_1) para los cuales las pertenencias a los elementos del dominio X son:

Tabla 5.2: Pertenencia de los elementos $x \in X$ a los α -cortes.

	$X_{0.2}$	$X_{0.3}$	$X_{0.6}$	$X_{0.8}$	X_1		$\mu_{0.2}$	$\mu_{0.3}$	$\mu_{0.6}$	$\mu_{0.8}$	μ_1
x_1	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	x_1	1	0	0	0	0
x_2	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	x_2	1	1	0	0	0
x_3	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	x_3	1	1	1	0	0
x_4	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	x_4	1	1	1	1	0
x_5	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	x_5	1	1	1	1	1

A partir de la Tabla 5.2, para cada valor de x se calcula $\sup_{\substack{\alpha \in (0,1] \\ x \in X_\alpha}} [\alpha]$ obteniendo:

Tabla 5.3: Cálculo del supremo sobre los $\alpha \in (0,1]$ para cada elemento del dominio X .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\sup_{\substack{\alpha \in (0,1] \\ x \in X_\alpha}} [\alpha]$	0.2	0.3	0.6	0.8	1

A partir de lo cual se observa la equivalencia $\mu(x) = \sup_{\substack{\alpha \in (0,1] \\ x \in X_\alpha}} [\alpha]$ para $x \in X$.

Mediante el uso de los α -cortes, todas las operaciones entre conjuntos difusos se pueden expresar a partir de operaciones entre conjuntos clásicos, siempre que cumplan con la propiedad que se enuncia a continuación.

Para poder construir un conjunto difuso a partir de una serie de α -cortes, $\Omega = \{X_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$, dichos cortes deben satisfacer la siguiente propiedad:

Propiedad 5.1: Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, tales que $\alpha_1 > \alpha_2$, entonces $X_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_2}$ para todo $x \in X$.

Esta familia de α -cortes define un conjunto difuso dado por la fórmula $\mu_\Omega(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha : x \in \mu_\alpha\}$. Por lo tanto, cualquier operador de conjuntos $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$

que quiera ser extendido debe cumplir: $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Por ejemplo, la unión $\mu \cup \nu$ de dos conjuntos difusos μ y ν , es un conjunto difuso que se define como (definición 4.11):

$$[\mu \cup \nu](x) = \max[\mu(x), \nu(x)] \quad (5.8)$$

y se puede definir a partir de los α -corte utilizando la ecuación (5.4) como:

$$(\mu \cup \nu)(x) = \sup_{\substack{\alpha \in (0,1] \\ x \in Y_\alpha}} [\alpha] \quad (5.9)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 Y_\alpha &= \{x \in X / (\mu \cup \nu)(x) \geq \alpha\} \\
 &= \{x \in X / \max[\mu(x), \nu(x)] \geq \alpha\} \\
 &= \{x \in X / \mu(x) \geq \alpha \vee \nu(x) \geq \alpha\} \\
 &= \{x \in X / \mu(x) \geq \alpha\} \cup \{x \in X / \nu(x) \geq \alpha\}
 \end{aligned}$$

siendo: $X_\alpha = \{x \in X / \mu(x) \geq \alpha\}$ y $X'_\alpha = \{x \in X / \nu(x) \geq \alpha\}$, y las funciones indicadoras:

$$(\mu \cup \nu)_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin Y_\alpha \end{cases}, \quad \mu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin X_\alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad \nu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X'_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin X'_\alpha \end{cases}. \text{ Es decir, los}$$

α -cortes de $\mu \cup \nu$ se pueden obtener directamente de los α -cortes de μ y ν :

$$(\mu \cup \nu)_\alpha(x) = \max\{\mu_\alpha(x), \nu_\alpha(x)\} \quad \forall x \in X \quad (5.10)$$

La expresión (5.10) es verdadera dado que:

$$\begin{aligned}
 (\mu \cup \nu)_\alpha(x) &= 1 \quad \text{sii} \quad x \in Y_\alpha \\
 &\quad \text{sii} \quad x \in X_\alpha \vee x \in X'_\alpha \\
 &\quad \text{sii} \quad \mu_\alpha(x) = 1 \vee \nu_\alpha(x) = 1 \\
 &\quad \text{sii} \quad \max\{\mu_\alpha(x), \nu_\alpha(x)\} = 1
 \end{aligned}$$

En caso contrario:

$$(\mu \cup \nu)_\alpha(x) = 0 \quad \text{sii} \quad \max\{\mu_\alpha(x), \nu_\alpha(x)\} = 0$$

Por lo tanto, un punto x pertenece a un α -corte de $\mu \cup \nu$ si el grado de pertenencia al conjunto $\mu(x)$ o $\nu(x)$ es mayor o igual a α .

De forma similar, la intersección $\mu \cap \nu$ de dos conjuntos difusos μ y ν , es un conjunto difuso que se define como (definición 4.10):

$$[\mu \cap \nu](x) = \min[\mu(x), \nu(x)] \quad (5.11)$$

y se puede definir a partir de los α -corte utilizando la ecuación (5.4) como:

$$(\mu \cap \nu)(x) = \sup_{\substack{\alpha \in [0,1] \\ x \in Y_\alpha}} [\alpha] \quad (5.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} Y_\alpha &= \{x \in X / (\mu \cap \nu)(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X / \min[\mu(x), \nu(x)] \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X / \mu(x) \geq \alpha \wedge \nu(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X / \mu(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in X / \nu(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

siendo: $X_\alpha = \{x \in X / \mu(x) \geq \alpha\}$ y $X'_\alpha = \{x \in X / \nu(x) \geq \alpha\}$, y las funciones indicadoras:

$$(\mu \cup \nu)_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin Y_\alpha \end{cases}, \quad \mu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin X_\alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad \nu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X'_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin X'_\alpha \end{cases}. \text{ Es decir, los}$$

α -cortes de $\mu \cap \nu$ se pueden obtener directamente de los α -cortes de μ y ν :

$$(\mu \cap \nu)_\alpha(x) = \min\{\mu_\alpha(x), \nu_\alpha(x)\} \quad \forall x \in X \quad (5.13)$$

La expresión (5.13) es verdadera dado que:

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)_\alpha(x) &= 1 \quad \text{sii} \quad x \in Y_\alpha \\ &\quad \text{sii} \quad x \in X_\alpha \wedge x \in X'_\alpha \\ &\quad \text{sii} \quad \mu_\alpha(x) = 1 \wedge \nu_\alpha(x) = 1 \\ &\quad \text{sii} \quad \min\{\mu_\alpha(x), \nu_\alpha(x)\} = 1 \end{aligned}$$

En caso contrario:

$$(\mu \cap \nu)_\alpha(x) = 0 \quad \text{sii} \quad \min\{\mu_\alpha(x), \nu_\alpha(x)\} = 0$$

Por lo tanto, un punto x pertenece a un α -corte de $\mu \cap \nu$ si el grado de pertenencia al conjunto $\mu(x)$ y $\nu(x)$ es mayor o igual a α .

Hasta aquí se ha mostrado como caracterizar a un conjunto difuso a partir de sus α -cortes. Ahora se mostrará la definición de la suma y resta de Minkowski para conjuntos difusos.

Para poder definir la suma de Minkowski (definición 2.10) para dos conjuntos clásicos A y B , $A, B \subseteq U$, se debe definir una operación de traslación $\tau_a(B)$ de un conjunto por un elemento a , la cual se define de la siguiente manera (definición 2.9):

$$\tau_a(B) = \{y / y = a + x, x \in B\} \quad (5.14)$$

Dada dicha traslación, la suma de Minkowski $\oplus$ entre dos conjuntos A y B , $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, está definida por (Serra, 1982):

$$A \oplus B = \{a \in U / \tau_a(B) \cap A \neq \emptyset\} \quad (5.15)$$

La operación dual de este conjunto, es la denominada resta de Minkowski y se nota $\ominus$ (definición 2.12). En este caso los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto resultado si su correspondiente traslación de B está completamente incluida en A (Serra, 1982):

$$A \ominus B = \{a \in U / \tau_a(B) \subseteq A\} \quad (5.16)$$

La idea de Kaufmann fue extender estas operaciones a conjuntos difusos descomponiendo ambos conjuntos en sus α -cortes, realizando la suma o resta de Minkowski en cada corte individualmente y luego combinando los resultados de los cortes procesados para obtener un conjunto difuso resultado. Esto es posible dado que la suma y resta de Minkowski cumplen la propiedad 5.1, ya que:

$$A_1 \subseteq A_2 \text{ entonces } A_1 \oplus B \subseteq A_2 \oplus B$$

$$A_1 \subseteq A_2 \text{ entonces } A_1 \ominus B \subseteq A_2 \ominus B$$

y, por lo tanto, puede utilizarse para definir los operadores difusos.

La suma de Minkowski $\mu \oplus_D \nu$ de dos conjuntos difusos μ y ν se define a partir de sus α -cortes como:

$$[\mu \oplus_D \nu]_\alpha = \mu_\alpha \oplus \nu_\alpha \quad (5.17)$$

De forma análoga, la resta de Minkowski $\mu \ominus_D \nu$ entre dos conjuntos difusos μ y ν se define por:

$$[\mu \ominus_D \nu]_\alpha = \mu_\alpha \ominus \nu_\alpha \quad (5.18)$$

Por abuso de notación se denotará $\mu \oplus \nu$ a la suma de Minkowski difusa y $\mu \ominus \nu$ a la resta de Minkowski difusa. Hasta aquí se presentó una definición de estas operaciones. A continuación se muestran las definiciones presentadas por De Baets.

De Baets propone definir la suma y resta de Minkowski difusas utilizando el principio de extensión dado por Zadeh (sección 4.7) (Zadeh, 1965). De la misma manera como la suma de

Minkowski es una extensión de la suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ a los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, se define la suma de Minkowski difusa como la extensión de la suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ a conjuntos difusos en $\mathbb{R}^n$ como se muestra en la siguiente definición (De Baets et al., 1995a).

Definición 5.1: Sean μ y ν dos conjuntos difusos en $\mathbb{R}^n$, la *suma de Minkowski difusa* $\mu \oplus \nu$ es el conjunto difuso en $\mathbb{R}^n$ que se define por (De Baets et al., 1995a):

$$\mu \oplus \nu(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(x-y), \nu(y)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.19)$$

Esta definición, debido al principio de extensión de Zadeh (sección 4.7), es una genuina extensión de la suma de Minkowski de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ a $F(\mathbb{R}^n)$, la clase de todos los conjuntos difusos en $\mathbb{R}^n$.

La suma de Minkowski para conjuntos difusos, así definida, satisface la propiedad de ser conmutativa, es decir, $\mu \oplus \nu = \nu \oplus \mu$. Por lo tanto, se utilizará la fórmula dada por:

$$\mu \oplus \nu(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \nu(x-y)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.20)$$

para facilitar, en secciones posteriores, la definición de los operadores básicos de la MMD.

Se han presentado dos definiciones para la suma de Minkowski difusa dadas por las ecuaciones (5.17) y (5.20). A continuación se muestra que estas ecuaciones son equivalentes si ν es simétrico, definición que se presenta aquí.

Definición 5.2: Sea ν un conjunto difuso en $\mathbb{R}^n$, ν es *simétrico* si satisface:

$$\nu(x) = \nu(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.21)$$

Es importante destacar que si ν es simétrico entonces $\nu(x-y) = \nu(y-x)$.

Otra definición fundamental, para demostrar la equivalencia entre las ecuaciones (5.17) y (5.20), es la de traslación de un conjunto difuso.

Definición 5.3: Sea ν un conjunto difuso en $\mathbb{R}^n$. La *traslación* $\tau_x(\nu)$ del conjunto difuso ν por un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ está dada por:

$$\tau_x(\nu)(y) = \nu(y-x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (5.22)$$

Para demostrar la equivalencia entre las ecuaciones (5.17) y (5.20), sea $x \in \mathbb{R}^n$, por De Baets:

$$\begin{aligned}\mu \oplus \nu(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \nu(x-y)] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \nu(y-x)]\end{aligned}$$

por la propiedad de simetría de ν ,

$$\begin{aligned}\mu \oplus \nu(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \nu(y-x)] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \tau_x(\nu)(y)]\end{aligned}$$

por definición de traslación,

$$\begin{aligned}\mu \oplus \nu(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \tau_x(\nu)(y)] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [(\mu \cap \tau_x(\nu))(y)]\end{aligned}$$

por definición de intersección entre conjuntos difusos,

$$\begin{aligned}\mu \oplus \nu(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [(\mu \cap \tau_x(\nu))(y)] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot (\mu \cap \tau_x(\nu))_\alpha(y)]\end{aligned}$$

por la representación de un conjunto difuso a partir de sus α -cortes,

$$\begin{aligned}\mu \oplus \nu(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot (\mu \cap \tau_x(\nu))_\alpha(y)] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot (\mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha))(y)]\end{aligned}$$

dado que $(\mu \cap \nu)_\alpha = \mu_\alpha \cap \nu_\alpha$,

$$\begin{aligned}\mu \oplus \nu(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot (\mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha))(y)] \\ &= \sup_{\alpha \in (0,1]} \left[\alpha \cdot \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [(\mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha))(y)] \right] \quad (5.23)\end{aligned}$$

Por otro lado, Kaufmann definió la suma de Minkowski como:

$$[\mu \oplus \nu]_\alpha = \mu_\alpha \oplus \nu_\alpha$$

De esta definición, utilizando la representación de conjuntos difusos a partir de sus α -cortes, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu \oplus \nu(x) &= \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot (\mu \oplus \nu)_\alpha(x)] \\ &= \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot (\mu_\alpha \oplus \nu_\alpha)(x)] \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} (\mu_\alpha \oplus \nu_\alpha)(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha) = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \exists y \in X : y \in \mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha) \\ 0 & \text{si } \mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha) = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

La proposición $y \in \mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha)$ es equivalente a $[\mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha)](y) = 1$ como función indicadora del conjunto. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (\mu_\alpha \oplus \nu_\alpha)(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \exists y \in X : y \in \mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha) \\ 0 & \text{si } \mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha) = \emptyset \end{cases} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [(\mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha))(y)] \end{aligned}$$

A partir de lo cual se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mu \oplus \nu(x) &= \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot (\mu_\alpha \oplus \nu_\alpha)(x)] \\ &= \sup_{\alpha \in (0,1]} \left[\alpha \cdot \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [(\mu_\alpha \cap \tau_x(\nu_\alpha))(y)] \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

Como consecuencia, siendo (5.23) igual a (5.24), se obtiene que ambas definiciones son equivalentes.

Muchos autores han utilizado estas operaciones como base para definir los operadores básicos de la MMD.

5.3 Definición de los operadores básicos de la MMD

5.3.1 Enfoque de De Baets

Bernard De Baets, Etienne Kerre y Madan Gupta publican dos importantes artículos en 1995 denominados “*The fundamentals of fuzzy mathematical morphology. Part 1: Basic Concepts*” y “*The fundamentals of fuzzy mathematical morphology. Part 2: Idempotence, convexity and decomposition*” en los cuales abordan un primer desarrollo teórico de los operadores de la MMD. En dichos trabajos proponen una nueva alternativa para extender los operadores binarios a imágenes en niveles de gris basado en la teoría de conjuntos difusos fundamentando dicha extensión con un profundo desarrollo teórico que hasta el momento autores como Di Gesù, Bandemer y Nather no habían analizado.

En primer lugar, De Baets supone que los niveles de gris de una imagen pertenecen al intervalo $[0,1]$. De no ser así, define una función mediante la cual realiza un cambio de escala, definida de $\mathbb{R}$ en $[0,1]$. Dicha función soluciona este inconveniente proporcionando a cada píxel de la imagen un valor entre 0 y 1. De esta forma modela una imagen en niveles de gris como un conjunto difuso con el fin de poder aplicar la teoría de conjuntos difusos en la definición de los operadores morfológicos que serán aplicados sobre este tipo de imágenes.

Las operaciones morfológicas que surgen de la extensión de las operaciones morfológicas binarias, que se presentan a continuación, se denominan *operaciones morfológicas difusas*. De Baets afirma que el adjetivo *difuso* no está relacionado con la naturaleza de las imágenes. Las imágenes en niveles de gris no son "difusas" (en el sentido formal) aunque pueden ser borrosas, es decir no hay falta de claridad ni incertidumbre involucrados. Sólo son modeladas como conjuntos difusos, a fin de poder aplicar las operaciones de la teoría de conjuntos difusos.

Dos operaciones importantes sobre conjuntos difusos deben ser presentadas: complemento (definición 4.13) y reflexión.

Definición 5.4: Dado un conjunto difuso μ en $\mathbb{R}^n$, el *complemento* μ^c de μ se define como:

$$\mu^c(x) = 1 - \mu(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.25)$$

Definición 5.5: Dado un conjunto difuso μ en $\mathbb{R}^n$, la *reflexión* $-\mu$ de μ sobre el origen se define como:

$$-\mu(x) = \mu(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.26)$$

Con estas definiciones, se está en condiciones de definir la dilatación difusa de la siguiente manera: sean μ y ν dos conjuntos difusos, la dilatación difusa $D(\mu, \nu)$ de μ por ν es un conjunto difuso dado por $D(\mu, \nu) = \mu \oplus (-\nu)$, donde $\oplus$ representa la suma de Minkowski definida en la ecuación (5.20), es decir:

$$\begin{aligned} D(\mu, \nu)(x) &= \mu \oplus (-\nu)(x) \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), -\nu(x-y)] \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \nu(y-x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Por lo tanto, la dilatación está dada por la siguiente fórmula:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \nu(y-x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.27)$$

La erosión difusa se define por dualidad, es decir, este operador y la dilatación difusa son operaciones duales (De Baets et al., 1995a), como lo son la dilatación y la erosión en el caso binario. Sean μ y ν dos conjuntos difusos, la erosión difusa $E(\mu, \nu)$ de μ por ν es un conjunto difuso dado por:

$$\begin{aligned} E(\mu, \nu)(x) &= [D(\mu^c, \nu)(x)]^c \\ &= 1 - \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[1 - \mu(y), \nu(y-x)] \right] \\ &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \max[1 - (1 - \mu(y)), 1 - \nu(y-x)] \\ &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \max[\mu(y), 1 - \nu(y-x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Por lo tanto, la erosión está dada por la siguiente fórmula:

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \max[\mu(y), 1 - \nu(y-x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.28)$$

De esta forma quedan definidas la dilatación difusa y la erosión difusa por De Baets, Kerre y Gupta. A continuación se presentan las definiciones de estos operadores dadas por Bloch y Maître.

5.3.2 Enfoque de Bloch y Maître

Isabelle Bloch y Henri Maître en 1995 publicaron un trabajo denominado “Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study” en el cual definen los operadores morfológicos difusos a partir de fórmulas distintas a las dadas en la sección 5.3.1. Estos autores realizan un análisis riguroso de dichas fórmulas, las cuales se presentan en esta sección.

Para definir los operadores morfológicos básicos difusos Bloch y Maître utilizan la representación de los conjuntos difusos a partir de sus α -cortes, dadas por las ecuaciones (5.3) y (5.5):

$$\mu(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot \mu_\alpha(x)] \quad \text{o} \quad \mu(x) = \int_0^1 \mu_\alpha(x) d\alpha$$

Dicho desarrollo se muestra a continuación.

De una manera similar a la reconstrucción de un conjunto difuso a partir de sus α -cortes, un operador binario Φ induce un operador difuso Φ de la siguiente manera:

$$\Phi(\mu) = \int_0^1 \Phi(\mu_\alpha) d\alpha \quad (5.29)$$

$$\Phi(\mu) = \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \cdot \Phi(\mu_\alpha)] \quad (5.30)$$

El operador binario Φ debe satisfacer la propiedad 5.1, es decir, dados dos conjuntos A, B tales que $A \subset B$ entonces $\Phi(A) \subset \Phi(B)$.

A partir de estas ecuaciones, denominadas ecuaciones de fuzzificación, los autores definen la dilatación difusa y la erosión difusa a partir de sus definiciones binarias.

En primer lugar, se analizará la primera ecuación de fuzzificación (Ec. 5.29). Para dos conjuntos difusos μ y ν , la dilatación difusa de μ por ν se obtiene fuzzificando primero sobre μ y luego sobre ν , o viceversa. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el operador binario que induce al operador difuso $\Phi(\mu, \nu) = \int_0^1 \int_0^1 \Phi(\mu_\alpha, \nu_\beta) d\beta d\alpha$ entonces la dilatación difusa se define:

$$D(\mu, \nu)(x) = \int_0^1 \int_0^1 D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x) d\beta d\alpha$$

donde $D(\mu_\beta, \nu_\alpha)$ es un operador binario.

Para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo y un $\alpha \in [0,1]$ fijo, existe un $\beta_0 \in [0,1]$ tal que:

$$D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > \beta_0 \\ 1 & \text{si } \beta \leq \beta_0 \end{cases}.$$

Por lo tanto, sea β_0 un valor que cumple esta propiedad:

$$\begin{aligned} \int_0^1 D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x) d\beta &= \int_0^{\beta_0} D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x) d\beta + \int_{\beta_0}^1 D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x) d\beta \\ &= \int_0^{\beta_0} 1 d\beta + \int_{\beta_0}^1 0 d\beta \\ &= \beta_0 \end{aligned}$$

donde β_0 es el máximo valor que puede tomar β tal que $x \in D(\mu_\beta, \nu_\alpha)$; es decir,

$$\beta_0 = \sup_{y \in (\nu_\alpha)_x} \mu(y).$$

Por lo tanto, la dilatación difusa queda expresada de la siguiente manera:

$$D(\mu, \nu)(x) = \int_0^1 \sup_{y \in (\nu_\alpha)_x} (\mu(y)) d\alpha \quad (5.31)$$

Para definir la erosión difusa de dos conjuntos difusos μ y ν se parte de la dualidad de los operadores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E(\mu, \nu)(x) &= [D(\mu^c, \nu)]^c \\ &= 1 - \int_0^1 \sup_{y \in (\nu_\alpha)_x} (1 - \mu(y)) d\alpha \\ &= \int_0^1 1 d\alpha - \int_0^1 \sup_{y \in (\nu_\alpha)_x} (1 - \mu(y)) d\alpha \\ &= \int_0^1 \left[1 - \sup_{y \in (\nu_\alpha)_x} (1 - \mu(y)) \right] d\alpha \\ &= \int_0^1 \inf_{y \in (\nu_\alpha)_x} [1 - (1 - \mu(y))] d\alpha \end{aligned}$$

La erosión difusa de μ por ν está dada, entonces, por la ecuación:

$$E(\mu, \nu)(x) = \int_0^1 \inf_{y \in (\nu_\alpha)_x} (\mu(y)) d\alpha \quad (5.32)$$

Estas definiciones garantizan que $D(\mu, \nu)$ y $E(\mu, \nu)$ toman valores en el intervalo $[0,1]$.

Si se utiliza la segunda ecuación de fuzificación presentada anteriormente (Ec. 5.30), la dilatación difusa de μ por ν se obtiene fuzzificando sobre dichos conjuntos de la siguiente

manera. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el operador binario que induce al operador difuso

$\Phi(\mu, \nu) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \left\{ \alpha \cdot \sup_{\alpha \in (0,1]} [\beta \cdot \Phi(\mu_\alpha, \nu_\beta)] \right\}$ entonces la dilatación difusa se define:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \left\{ \alpha \cdot \sup_{\beta \in (0,1]} [\beta \cdot D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x)] \right\}$$

donde $D(\mu_\beta, \nu_\alpha)$ es un operador binario.

Para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo y un $\alpha \in [0,1]$ fijo, existe un $\beta_0 \in [0,1]$ tal que:

$$D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > \beta_0 \\ 1 & \text{si } \beta \leq \beta_0 \end{cases}.$$

Por lo tanto, sea β_0 un valor que cumple esta propiedad:

$$\begin{aligned} \sup_{\beta \in (0,1]} [\beta \cdot D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x)] &= \max \left\{ \sup_{\beta \in (0, \beta_0]} [\beta \cdot D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x)], \sup_{\beta \in (\beta_0, 1]} [\beta \cdot D(\mu_\beta, \nu_\alpha)(x)] \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{\beta \in (0, \beta_0]} [\beta \cdot 1], \sup_{\beta \in (\beta_0, 1]} [\beta \cdot 0] \right\} \\ &= \sup_{\beta \in (0, \beta_0]} \beta \\ &= \beta_0 \end{aligned}$$

donde β_0 es el máximo valor que puede tomar β tal que $x \in D(\mu_\beta, \nu_\alpha)$; es decir,

$$\beta_0 = \sup_{y \in (\nu_\alpha)_x} \mu(y).$$

Por lo tanto:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \left[\alpha \cdot \sup_{y \in (\nu_\alpha)_x} (\mu(y)) \right]$$

Sea $y \in (\nu_\alpha)_x$ entonces $\nu(y-x) \geq \alpha$. Como consecuencia, existe un $\alpha_0 \in [0,1]$ tal que $\nu(y-x) = \alpha_0$, donde α_0 es el máximo valor que puede tomar α tal que $y \in (\nu_\alpha)_x$, con $x \in \mathbb{R}^n$. A partir de lo cual se puede concluir que:

$$\begin{aligned}
 D(\mu, \nu)(x) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left[\alpha \cdot \sup_{y \in (v_\alpha)_x} (\mu(y)) \right] \\
 &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\nu(y-x) \mu(y)]
 \end{aligned}$$

Es decir, la dilatación difusa de μ por ν está dada por la ecuación:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\nu(y-x) \mu(y)] \quad (5.33)$$

La erosión difusa de μ por ν se obtiene a partir de su dualidad con la dilatación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 E(\mu, \nu)(x) &= [D(\mu^c, \nu)(x)]^c \\
 &= 1 - \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\nu(y-x)(1-\mu(y))] \\
 &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{1 - [\nu(y-x)(1-\mu(y))]\} \\
 &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{1 - [\nu(y-x) - \nu(y-x)\mu(y)]\} \\
 &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} [1 - \nu(y-x) + \nu(y-x)\mu(y)]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la erosión difusa de μ por ν queda expresada por la siguiente ecuación:

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} [\nu(y-x) \mu(y) + 1 - \nu(y-x)] \quad (5.34)$$

Las ecuaciones (5.31) y (5.33) definen la dilatación difusa y las ecuaciones (5.32) y (5.34) definen la erosión difusa según el enfoque de Bloch y Maître. En secciones posteriores se mostrará que estas ecuaciones se pueden reducir a una única fórmula, tanto para la dilatación difusa como para la erosión difusa.

5.3.3 Enfoque de Sinha y Dougherty

Sinha y Dougherty propusieron un grupo de morfologías basadas en la traslación τ_x de un conjunto difuso ν y el grado en el que cubre al conjunto difuso μ , de forma análoga a la definición de la morfología clásica (Bloch & Maitre, 1995).

Como se mostró anteriormente, la resta de Minkowski afirma que $x \in A \ominus B$ si y sólo si $\tau_x(B) \subset A$, $\forall x \in U$ (Ec. 5.16). Los autores se preguntaron si se puede suavizar este requisito.

Es decir, utilizar una medida más flexible para indicar el grado de inclusión, el cual será 1 para la inclusión de conjuntos clásicos, pero puede tener valores intermedios. Sinha y Dougherty presentaron el llamado “*indicador de inclusión*” como un medio para tal medida. El indicador de inclusión, tal como lo dice su nombre, indica el grado en el que un conjunto difuso es un subconjunto de otro conjunto difuso.

Definición 5.6: Si I es una función sobre pares de conjuntos difusos en el intervalo $[0,1]$, I es un *indicador de inclusión* si satisface (Bloch & Maitre, 1995; Cornelis et al., 2003):

1. $I(\mu, \nu) = 1$ sii $\mu \subseteq \nu$
2. $I(\mu, \nu) = 0$ sii $\{x / \mu(x) = 1\} \cap \{x / \nu(x) = 0\} \neq \emptyset$
3. Si $\nu \subseteq \nu'$ entonces $I(\mu, \nu) \leq I(\mu, \nu')$
4. Si $\mu \subseteq \mu'$ entonces $I(\mu, \nu) \geq I(\mu', \nu)$
5. I es invariante por traslaciones, es decir: $I(\mu, \nu) = I(\tau_t(\mu), \tau_t(\nu))$ con $t \in \mathbb{R}^n$
6. $I(\mu, \nu) = I(\nu^c, \mu^c)$
7. $I\left(\bigcup_{i \in \Omega} \mu^i, \nu\right) = \inf_{i \in \Omega} I(\mu^i, \nu)$
8. $I\left(\mu, \bigcap_{i \in \Omega} \nu^i\right) = \inf_{i \in \Omega} I(\mu, \nu^i)$
9. $I\left(\mu, \bigcup_{i \in \Omega} \nu^i\right) \geq \sup_{i \in \Omega} I(\mu, \nu^i)$

donde Ω es un conjunto de índices.

Las notaciones μ^i y ν^i en las propiedades 7, 8 y 9 se refieren a una familia de conjuntos difusos. Se utiliza esta notación para diferenciarla con respecto a la notación de los α -cortes.

Es importante destacar que Sinha y Dougherty generalizan la inclusión binaria usando este indicador de inclusión.

La erosión difusa se construye, a partir del indicador de inclusión, de la siguiente manera:

$$E(\mu, \nu)(x) = I(\tau_x(\nu), \mu) \quad (5.35)$$

Su dual, la dilatación difusa, se define como:

$$D(\mu, \nu) = \left[I(\tau_x(\nu), \mu^c) \right]^c \quad (5.36)$$

Existen muchos indicadores de inclusión que satisfacen las condiciones 1 a 9. Cada uno de estos indicadores genera una morfología difusa a partir de las ecuaciones (5.35) y (5.36). En particular, Sinha y Dougherty propusieron el siguiente indicador de inclusión, en el cual basaron la definición de los operadores básicos difusos:

$$I_\lambda(\mu, \nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \min(1, \lambda[\mu(x)] + \lambda[1 - \nu(x)]) \quad (5.37)$$

donde λ es una función, $\lambda: [0,1] \rightarrow [0,1]$, que satisface:

1. λ es decreciente
2. $\lambda(0) = 1$
3. $\lambda(1) = 0$
4. La ecuación $\lambda(x) = 0$ tiene una única solución
5. $\forall \alpha \in [0.5, 1]$, $\lambda(x) = \alpha$ tiene una única solución
6. $\forall x \in [0, 1]$, $\lambda(x) + \lambda(1-x) \geq 1$

De acuerdo a estos indicadores de inclusión la fórmula propuesta por estos autores para la erosión difusa queda dada por:

$$\begin{aligned} E(\mu, \nu)(x) &= I(\tau_x(\nu), \mu) \\ &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \min(1, \lambda[\nu(y-x)] + \lambda[1 - \mu(y)]) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Utilizando la propiedad de dualidad entre la erosión y la dilatación se obtiene la fórmula para la dilatación difusa:

$$\begin{aligned}
 D(\mu, \nu)(x) &= \left[E(\mu^c, \nu) \right]^c(x) \\
 &= \left[I(\tau_x(\nu), \mu^c) \right]^c \\
 &= 1 - I(\tau_x(\nu), \mu^c) \\
 &= 1 - \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \min(1, \lambda[\nu(y-x)] + \lambda[1 - (1 - \mu(y))]) \\
 &= 1 - \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \min(1, \lambda[\nu(y-x)] + \lambda[\mu(y)]) \\
 &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \max(0, 1 - \lambda[\nu(y-x)] - \lambda[\mu(y)])
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la dilatación difusa queda definida por la ecuación:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \max(0, 1 - \lambda[\nu(y-x)] - \lambda[\mu(y)]) \quad (5.39)$$

A modo de ejemplo, sea la función $\lambda: [0,1] \rightarrow [0,1]$ definida por $\lambda(x) = 1 - x$, la cual satisface las condiciones 1 a 6 pedidas anteriormente. A partir de esta función el indicador de inclusión queda definido como:

$$\begin{aligned}
 I_\lambda(\mu, \nu) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \min(1, \lambda[\mu(x)] + \lambda[1 - \nu(x)]) \\
 &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \min(1, 1 - \mu(x) + \nu(x))
 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.38) se obtiene la expresión para la erosión difusa y sustituyendo en la ecuación (5.39) se obtiene la expresión para la dilatación difusa, las cuales son (para $\lambda(x) = 1 - x$):

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \min(1, \mu(y) - \nu(y-x) + 1) \quad (5.41)$$

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \max(0, \mu(y) + \nu(y-x) - 1) \quad (5.42)$$

Es importante notar que dependiendo de la función λ definida, se obtendrán distintas expresiones para los operadores.

5.3.4 Enfoque basado en la traducción de las fórmulas de Serra en términos de la lógica difusa

Otro enfoque para construir la MMD presentado por Block y Maître (Bloch & Maitre, 1995), se basa en realizar una traducción término a término, sustituyendo todas las expresiones clásicas en expresiones difusas equivalentes. Esto permite expresar la erosión como un grado de inclusión y la dilatación como un grado de intersección (Bloch, 2009). En este modelo el adjetivo *difuso* se refiere al método utilizado para desarrollar dicha extensión y no a la representación de una imagen en niveles de gris como un conjunto difuso.

Para lograr esta extensión se parte de las definiciones de la erosión y la dilatación binarias dadas por Serra, las cuales surgen a partir de la resta y suma de Minkowski respectivamente (Serra, 1982).

La erosión morfológica binaria de un conjunto A por otro conjunto B , donde $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, se definió en la ecuación (5.16) como:

$$A \ominus B = \{x \in A / \tau_x(B) \subseteq A\}$$

La función característica asociada a la erosión se define:

$$\chi_{(A \ominus B)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } B_x \subseteq A \\ 0 & \text{si } B_x \not\subseteq A \end{cases} \quad (5.43)$$

El conjunto B_x está contenido en A sí y sólo si el ínfimo de la función característica de A sobre todos los elementos del conjunto B_x es igual a 1, es decir:

$$B_x \subseteq A \quad \text{sii} \quad \chi_{B_x}(y) \leq \chi_A(y) \quad \forall y \in U$$

$$\text{Por lo tanto, } y \in B_x \quad \text{sii} \quad \chi_{B_x}(y) = 1 \quad \wedge \quad \chi_A(y) = 1$$

$$\text{Entonces } B_x \subseteq A \quad \text{sii} \quad \inf_{y \in B_x} [\chi_A(y)] = 1$$

El conjunto B_x no está contenido en A sí y sólo si el ínfimo de la función característica de A sobre todos los elementos del conjunto B_x es igual a 0, es decir:

$$B_x \not\subseteq A \quad \text{sii} \quad \inf_{y \in B_x} [\chi_A(y)] = 0$$

Estas dos últimas expresiones se pueden reescribir sustituyendo $y \in B_x$ por $y \in U$ cuando se calcula el ínfimo, de la siguiente manera:

- $B_x \subseteq A$ sii $\inf_{y \in U} [\chi_A(y) \vee y \notin B_x] = 1$
- $B_x \subsetneq A$ sii $\inf_{y \in U} [\chi_A(y) \vee y \notin B_x] = 0$

De esta manera, la función característica de la erosión se puede expresar:

$$\chi_{(A \ominus B)}(x) = \inf_{y \in U} [\chi_A(y) \vee y \notin B_x] \quad (5.44)$$

donde la expresión $y \notin B_x$, equivalente a $y \in B_x^c$, se puede reemplazar por la función característica asociada:

$$\chi_{B_x^c}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in B_x^c \\ 0 & \text{si } y \notin B_x^c \end{cases} \quad (5.45)$$

obteniendo la siguiente expresión:

$$\chi_{(A \ominus B)}(x) = \inf_{y \in U} [\chi_A(y) \vee \chi_{B_x^c}(y)] \quad (5.46)$$

La ecuación (5.46) representa la dilatación binaria como un operador sobre las funciones características de los conjuntos. El paso natural para generalizar la dilatación a la MMD es extender las operaciones sobre funciones características, cuyo rango es el conjunto $\{0,1\}$, a operaciones sobre conjuntos difusos, con rango en el intervalo $[0,1]$.

Para obtener la expresión de la erosión difusa se reemplaza χ_A por μ_A , $\chi_{B_x^c}$ por $\mu_{B_x^c}$ y la disyunción booleana $\vee$ por una s-norma s (Ver Apéndice A) obteniendo de esta forma la siguiente fórmula:

$$\mu_{(A \ominus B)}(x) = \inf_{y \in U} [s(\mu_A(y), \mu_{B_x^c}(y))] \quad (5.47)$$

la cual ya no toma valores en $\{0,1\}$, sino que toma valores en todo el rango $[0,1]$.

Para concluir, se sabe que:

- $\mu_{B_x^c}(y) = 1 - \mu_{B_x}(y) = c(\mu_{B_x}(y))$ donde c es el complemento difuso estándar

$$\bullet \quad \mu_{X-x}(y) = \mu_X(y-x)$$

Por lo tanto, la expresión de la erosión difusa de la ecuación (5.47) queda dada por:

$$\mu_{(A \ominus B)}(x) = \inf_{y \in U} \left[s(\mu_A(y), c(\mu_B(y-x))) \right] \quad (5.48)$$

Cambiando la notación se obtiene:

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in U} \left[s(\mu(y), c(\nu(y-x))) \right] \quad (5.49)$$

De forma análoga se logra extender la dilatación morfológica binaria a la lógica difusa, obteniendo la dilatación difusa. Este procedimiento se muestra a continuación.

La dilatación morfológica binaria de un conjunto A por otro conjunto B , donde $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, queda definida a partir de la suma de Minkowski como se mostró en la ecuación (5.15) de la siguiente manera:

$$A \oplus B = \{x \in U / \tau_x(B) \cap A \neq \emptyset\}$$

La función característica asociada a la dilatación se define:

$$\chi_{(A \oplus B)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } B_x \cap A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } B_x \cap A = \emptyset \end{cases} \quad (5.50)$$

La intersección entre los conjuntos B_x y A es igual al conjunto vacío sí y sólo si el supremo de la función característica de A sobre todos los elementos del conjunto B_x es igual a 0, es decir:

$$B_x \cap A = \emptyset \quad \text{sii} \quad y \in B_x \Rightarrow y \notin A \quad \forall y \in U$$

$$\text{Por lo tanto, } y \in B_x \quad \text{sii} \quad \chi_{B_x}(y) = 1 \quad \wedge \quad \chi_A(y) = 0$$

$$\text{Entonces } B_x \cap A = \emptyset \quad \text{sii} \quad \sup_{y \in B_x} [\chi_A(y)] = 0$$

La intersección entre los conjuntos B_x y A es distinta del conjunto vacío sí y sólo si el supremo de la función característica de A sobre todos los elementos del conjunto B_x es igual a 1, es decir:

$$B_x \cap A \neq \emptyset \quad \text{sii} \quad \sup_{y \in B_x} [\chi_A(y)] = 1$$

Estas dos últimas expresiones se pueden reescribir sustituyendo $y \in B_x$ por $y \in U$ cuando se calcula el supremo, de la siguiente manera:

- $B_x \cap A = \emptyset \quad \text{sii} \quad \sup_{y \in U} [\chi_A(y) \wedge y \in B_x] = 0$
- $B_x \cap A \neq \emptyset \quad \text{sii} \quad \sup_{y \in U} [\chi_A(y) \wedge y \in B_x] = 1$

De esta manera, la función característica de la dilatación se puede expresar:

$$\chi_{(A \oplus B)}(x) = \sup_{y \in U} [\chi_A(y) \wedge y \in B_x] \quad (5.51)$$

donde la expresión $y \in B_x$ se puede reemplazar por la función característica asociada:

$$\chi_{B_x}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in B_x \\ 0 & \text{si } y \notin B_x \end{cases} \quad (5.52)$$

obteniendo la siguiente expresión:

$$\chi_{(A \oplus B)}(x) = \sup_{y \in U} [\chi_A(y) \wedge \chi_{B_x}(y)] \quad (5.53)$$

Similarmente a lo realizado para la erosión difusa, esta última expresión sobre funciones características se extiende a conjuntos difusos. Para obtener la expresión de la dilatación difusa se reemplaza χ_A por μ_A , χ_{B_x} por μ_{B_x} y la conjunción booleana $\wedge$ por una t-norma t (Ver Apéndice A) obteniendo de esta forma la siguiente fórmula:

$$\mu_{(A \oplus B)}(x) = \sup_{y \in U} [t(\mu_A(y), \mu_{B_x}(y))] \quad (5.54)$$

Por lo tanto, la expresión de la dilatación difusa es:

$$\mu_{(A \oplus B)}(x) = \sup_{y \in U} [t(\mu_A(y), \mu_B(y - x))] \quad (5.55)$$

Cambiando la notación se obtiene:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y - x))] \quad (5.56)$$

Es importante notar que se obtienen diferentes operadores si se utilizan diferentes t-normas, s-normas y complementos difusos. Esto ofrece gran flexibilidad a la construcción de la Morfología Matemática Difusa. Un estudio y comparación de diferentes variantes será realizado en capítulos posteriores.

5.4 Unificación de las definiciones de los operadores básicos

Bloch y Maître fueron quienes destacaron la similitud de todas estas propuestas para definir los operadores básicos de la MMD (Bloch & Maitre, 1995). Fueron capaces de unificar todas las definiciones dadas anteriormente, tanto para la dilatación difusa como para la erosión difusa, en una sola expresión. Es decir, los distintos enfoques desarrollados hasta este momento son equivalentes y se logran definir los operadores básicos de la MMD a partir de fórmulas generales.

Las fórmulas presentadas anteriormente fueron las siguientes:

- Según el enfoque de De Baets (Sección 5.3.1 _ Ec. (5.27-5.28)):

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \nu(y-x)]$$

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \max[\mu(y), 1 - \nu(y-x)]$$

- Según el enfoque de Bloch y Maître (Sección 5.3.2 _ Ec. (5.31-5.32-5.33-5.34)):

$$D(\mu, \nu)(x) = \int_0^1 \sup_{y \in (v_\alpha)_x} (\mu(y)) d\alpha$$

$$E(\mu, \nu)(x) = \int_0^1 \inf_{y \in (v_\alpha)_x} (\mu(y)) d\alpha$$

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\nu(y-x) \cdot \mu(y)]$$

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} [\nu(y-x) \cdot \mu(y) + 1 - \nu(y-x)]$$

- Según el enfoque de Sinha y Dougherty (Sección 5.3.3 _ Ec. (5.38-5.39)):

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \min(1, \lambda[\nu(y-x)] + \lambda[1 - \mu(y)])$$

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \max(0, 1 - \lambda[\nu(y-x)] - \lambda[\mu(y)])$$

- Según el enfoque basado en la traducción de las fórmulas de Serra en términos de la lógica difusa (Sección 5.3.4 _ Ec. (5.49-5.56)):

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in U} [s(\mu(y), c(\nu(y-x)))]$$

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y-x))]$$

Bloch y Maître proponen unificar los operadores básicos de la MMD a partir de la última ecuación (Bloch & Maitre, 1995):

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y-x))] \quad (5.57)$$

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in U} [s(\mu(y), c(\nu(y-x)))] \quad (5.58)$$

donde $t[a, b]$ es una t-norma, $s[a, b]$ es una s-norma y $c(a)$ es el complemento difuso.

A partir de estas expresiones se pueden obtener fácilmente las ecuaciones dadas en las secciones anteriores, mediante una simple especialización de la t-norma, la s-norma y el complemento difuso.

Si se utiliza la t-norma estándar dada por $t(a, b) = \min(a, b)$, su respectiva s-norma dada por $s(a, b) = \max(a, b)$ y el complemento difuso estándar dado por $c(a) = 1 - a$, se obtienen las fórmulas presentadas en la sección 5.3.1 (De Baets):

$$\begin{aligned} D(\mu, \nu)(x) &= \sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y-x))] \\ &= \sup_{y \in U} [\min(\mu(y), \nu(y-x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\mu, \nu)(x) &= \inf_{y \in U} [s(\mu(y), c(\nu(y-x)))] \\ &= \inf_{y \in U} [\max(\mu(y), 1 - \nu(y-x))] \end{aligned}$$

Si se utiliza la t-norma producto algebraico dada por $t(a,b) = ab$, su respectiva s-norma dada por $s(a,b) = a + b - ab$ y el complemento difuso estándar, se obtienen las fórmulas dadas por las ecuaciones (5.33) y (5.34), presentadas en la sección 5.3.2 (Bloch y Maître):

$$\begin{aligned} D(\mu, \nu)(x) &= \sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y-x))] \\ &= \sup_{y \in U} [\mu(y) \cdot \nu(y-x)] \\ E(\mu, \nu)(x) &= \inf_{y \in U} [s(\mu(y), c(\nu(y-x)))] \\ &= \inf_{y \in U} [\mu(y) + 1 - \nu(y-x) - \mu(y) \cdot (1 - \nu(y-x))] \\ &= \inf_{y \in U} [\mu(y) + 1 - \nu(y-x) - \mu(y) + \mu(y) \cdot \nu(y-x)] \\ &= \inf_{y \in U} [\mu(y) \cdot \nu(y-x) + 1 - \nu(y-x)] \end{aligned}$$

Si se utiliza la t-norma dada por la ecuación $t(a,b) = \max[0, 1 - \lambda(x) - \lambda(y)]$, su respectiva s-norma dada por $s(a,b) = \min[1, \lambda(1-x) + \lambda(1-y)]$ y el complemento difuso estándar, se obtienen las fórmulas dadas por las ecuaciones (5.38) y (5.39), presentadas en la sección 5.3.4 (Sinha y Dougherty):

$$\begin{aligned} D(\mu, \nu)(x) &= \sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y-x))] \\ &= \sup_{y \in U} \max[0, 1 - \lambda(\mu(y)) - \lambda(\nu(y-x))] \\ E(\mu, \nu)(x) &= \inf_{y \in U} [s(\mu(y), c(\nu(y-x)))] \\ &= \inf_{y \in U} \min[1, \lambda(1 - \mu(y)) + \lambda(\nu(y-x))] \end{aligned}$$

Resta analizar si las ecuaciones (5.31) y (5.32), dadas en la sección 5.3.2, se pueden relacionar con alguna de las fórmulas mencionadas anteriormente. Con este objetivo, se define la función:

$$I(\nu, \mu) = \int_0^1 \inf_{y \in \nu_\alpha} (\mu(y)) d\alpha \quad (5.59)$$

Dicha función es un indicador de inclusión que satisface las propiedades 2, 3, 4, 5, 6 y 9 de la definición 5.1, la propiedad 1 la satisface de una manera débil y, por último, con respecto a las propiedades 7 y 8 sólo cumple una desigualdad (Bloch & Maitre, 1995).

Mediante este indicador de inclusión se logran representar estas últimas ecuaciones, usando las definiciones dadas por Sinha y Dougherty, de la siguiente manera:

$$E(\mu, \nu)(x) = I(\tau_x(\nu), \mu) \\ = \int_0^1 \inf_{y \in (\nu_x)_x} (\mu(y)) d\alpha$$

$$D(\mu, \nu) = [I(\tau_x(\nu), \mu^c)]^c \\ = \int_0^1 \sup_{y \in (\nu_x)_x} (\mu(y)) d\alpha$$

Las siguientes tablas, Tabla 5.4 y 5.5, resumen las fórmulas presentadas hasta este momento.

Tabla 5.4: t-normas y s-normas

t-norma: $t(a, b)$		s-norma: $s(a, b)$	
Estándar	$\min(a, b)$	Estándar	$\max(a, b)$
Algebraica	ab	Algebraica	$a + b - ab$
t_λ	$\max[0, 1 - \lambda(x) - \lambda(y)]$	s_λ	$\min[1, \lambda(1-x) + \lambda(1-y)]$

Tabla 5.5: Fórmulas para la dilatación difusa y la erosión difusa.

Autor	Dilatación Difusa: $D(\mu, \nu)(x)$		Erosión Difusa: $E(\mu, \nu)(x)$	
	t	Fórmula	s	Fórmula
De Baets	Estándar	$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min[\mu(y), \nu(y-x)]$	Estándar	$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \max[\mu(y), 1 - \nu(y-x)]$
Bloch y Maître	---	$\int_0^1 \sup_{y \in (\nu_x)_x} (\mu(y)) d\alpha$	---	$\int_0^1 \inf_{y \in (\nu_x)_x} (\mu(y)) d\alpha$
	Algebraica	$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\nu(y-x) \cdot \mu(y)]$	Algebraica	$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} [\nu(y-x) \cdot \mu(y) + 1 - \nu(y-x)]$
	---	$\sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y-x))]$	---	$\inf_{y \in U} [s(\mu(y), c(\nu(y-x)))]$
Sinha y Dougherty	---	$[I(\tau_x(\nu), \mu^c)]^c$	---	$I(\tau_x(\nu), \mu)$
	t_λ	$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \max(0, 1 - \lambda[\nu(y-x)] - \lambda[\mu(y)])$	s_λ	$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \min(1, \lambda[\nu(y-x)] + \lambda[1 - \mu(y)])$

Por lo tanto, todas las fórmulas desarrolladas en las secciones anteriores, tanto para la dilatación difusa como para la erosión difusa, quedan resumidas en las ecuaciones (5.57) y (5.58) dadas por Bloch y Maître variando la t-norma, su respectiva s-norma y el complemento

difuso. Esta forma de definir los operadores básicos difusos dio un importante cambio en el paradigma de la MMD, la cual en parte se ha convertido en un problema de diseño.

Las fórmulas (5.57) y (5.58) definen la forma más general de la MMD, y las formas específicas se obtienen bajo diferentes elecciones para la t-norma, la s-norma y el complemento difuso. Estas ecuaciones serán las utilizadas en los próximos capítulos.

5.5 Operadores y filtros de la MMD

Los operadores y filtros de la MMD se definen de manera análoga a como se definieron los operadores y filtros de la MM, cambiando la dilatación y la erosión de la MM por la dilatación y la erosión difusa.

Para las siguientes definiciones sean μ y ν dos conjuntos difusos, donde el primero corresponde a una imagen en niveles de gris y el segundo corresponde al elemento estructurante. Es importante destacar que en la sección 3.2 del capítulo 3 se definieron las imágenes en niveles de gris de forma tal que la intensidad del nivel de gris en cada píxel es un valor entero entre 0 y 255. Por lo tanto, es necesario generar una función que cambie la escala de estas imágenes, llevándolas al rango $[0,1]$, para estar en condiciones de aplicar los operadores de la MMD. A este proceso de cambio de escala se lo denomina “fuzzificación”, mientras que al proceso inverso se lo denomina “defuzzificación”. En el desarrollo de esta tesis la función de fuzzificación $g : \{0,1,2,\dots,255\} \rightarrow [0,1]$ utilizada es:

$$g(x) = \frac{x}{255} \quad (5.60)$$

Es importante destacar que este proceso no convierte a la imagen en una representación difusa de un objeto, sino que modela a una imagen en niveles de gris como un conjunto difuso con el fin de poder aplicar la teoría de conjuntos difusos.

El proceso inverso mediante el cual las intensidades de los niveles de gris de una imagen, pertenecientes al intervalo $[0,1]$, son llevados al conjunto $\{0,1,2,\dots,255\}$ se define a partir de la función $h : [0,1] \rightarrow \{0,1,2,\dots,255\}$ dada por:

$$h(x) = \lceil 255 \cdot x \rceil \quad (5.61)$$

donde $[.]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ representa la función parte entera, es decir, $[a]$ es el número entero más cercano a a con $a \in \mathbb{R}$.

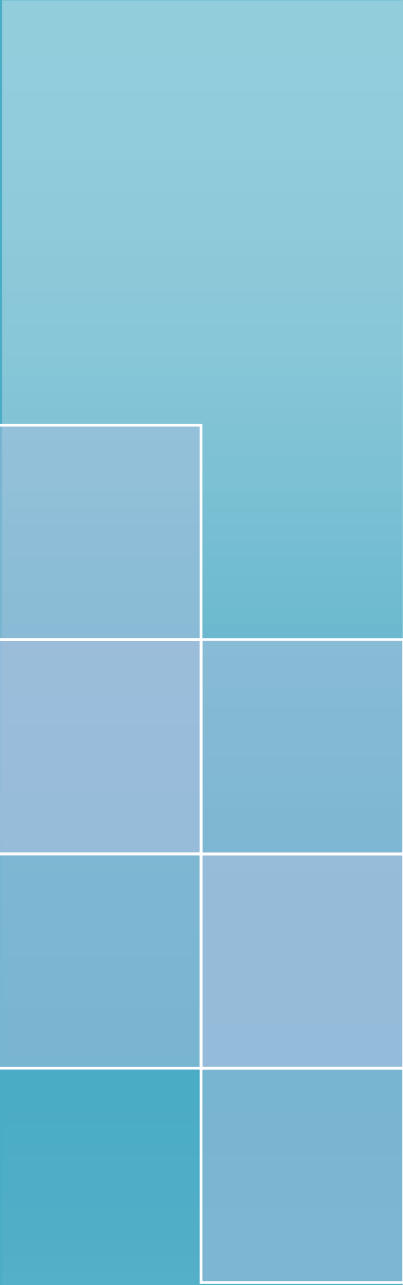
A modo de ejemplo se presenta la definición de la apertura morfológica difusa.

Definición 5.7: La *apertura morfológica difusa* de μ por ν está dada por la siguiente ecuación:

$$\gamma(\mu, \nu) = D(E(\mu, \nu), \nu) \quad (5.62)$$

Como se puede observar esta definición es equivalente a la definición de la apertura morfológica clásica dada por la ecuación (3.31) de la sección 3.6.2 del capítulo 3, con la diferencia de que en este caso se utilizan los operadores básicos difusos.

De forma análoga se pueden definir el cierre difuso, los filtros secuenciales alternados difusos, los gradientes difusos y la transformada Top-Hat difusa.



Capítulo 6

Resultados: Morfología Matemática Compensatoria

Capítulo 6

Resultados: Morfología Matemática Compensatoria

La Lógica Difusa es un modelo lógico multivalente basado en la teoría de conjuntos difusos, considerada una extensión de la Lógica Booleana. Dentro de esta teoría se encuentra la Lógica Difusa Compensatoria la cual renuncia a varios axiomas clásicos para lograr un sistema multivalente idempotente y sensible. Se la caracteriza como “*sensible*” dado que permite la compensación de los predicados. Esta lógica está formada por medio de una cuarteta de operadores continuos llamados conjunción, disyunción, orden y negación.

El esquema de este capítulo se detalla a continuación. En la sección 6.1 se introduce la Lógica Difusa Compensatoria para luego, en la sección 6.2, presentar su definición. En la sección 6.3 se presenta una nueva Lógica Compensatoria basada en nuevos operadores conjunción y disyunción distintos a los conocidos en la bibliografía hasta el momento, y se demuestra que satisfacen los axiomas requeridos para generar este modelo. En la sección 6.4, se realiza una comparación gráfica entre dichos operadores. En la sección 6.5 se analiza la relación entre esta nueva lógica y la Lógica Booleana. A modo de ejemplo, en la sección 6.6, se presenta una aplicación a la toma de decisiones. Se comparan los resultados obtenidos con aquellos que surgen de la aplicación de los operadores definidos a partir de la media geométrica y su dual, que son los existentes en la literatura. En la sección 6.7 se presenta una nueva morfología matemática denominada Morfología Matemática Compensatoria, definiendo los operadores básicos a partir de los operadores conjunción y disyunción de la Lógica Difusa Compensatoria. Por último, en la sección 6.8, se realiza una discusión de los resultados obtenidos.

6.1 Introducción

La vaguedad y la incertidumbre son los objetos del modelado de la Lógica Difusa (LD). Una propiedad esencial de esta lógica es el “principio de gradualidad” el cual afirma que una proposición puede ser verdadera y falsa a la vez, siempre que se le asigne un grado de verdad y de falsedad.

Una manera de implementar este principio es definiendo una lógica donde los operadores de conjunción, disyunción, orden y negación son funciones definidas sobre un conjunto X , conjunto de valores de verdad de los predicados, en el intervalo $[0,1]$, tales que al restringirlos al dominio $\{0,1\}$ se obtienen los predicados de la Lógica Booleana (LB). Es decir, la LD se considera una extensión de la LB y las distintas formas en las que se extienden los operadores y sus propiedades determinan distintas lógicas que forman parte del paradigma de la LD. (Dubois & Prade, 1985; Dubois & Prade, 1980; Zadeh, 1988; Zadeh, 1965; Buckley & Eslami, 2002)

La Lógica Difusa Compensatoria (LDC) es un modelo lógico multivalente que renuncia a varios axiomas clásicos para lograr un sistema idempotente y “*sensible*”, al permitir la “compensación” de los predicados. En la LD el valor de verdad de la conjunción es menor o igual a todas las componentes, mientras que el valor de verdad de la disyunción es mayor o igual a todas las componentes. La renuncia de estas restricciones constituye la idea básica de la LDC. Un crecimiento o decrecimiento en el valor de verdad de la conjunción o disyunción como resultado de un cambio en el valor de verdad de alguna componente, puede ser compensado por el crecimiento o decrecimiento en otra componente. Esta noción hace que sea una lógica *sensible*. Existen casos en los que la compensación no es posible. Esto ocurre cuando son violados ciertos umbrales y existe un veto que impide la compensación (Espín Andrade & Mazcorro Téllez, 2007; Espín Andrade et al., 2004). Todos estos conceptos se analizan en detalle en las siguientes secciones.

A continuación se define la cuarteta de operadores que generan a la LDC (Espín Andrade & Fernández González, 2009; Espín Andrade et al., 2006).

6.2 Lógica Difusa Compensatoria

Una Lógica Difusa Compensatoria está formada por una cuarteta de operadores continuos (C, D, O, N) que satisfacen el grupo de axiomas que se muestran a continuación (Espín Andrade & Fernández González, 2009). Los operadores reciben los nombres de conjunción, disyunción, orden estricto difuso y negación respectivamente y se definen de la siguiente manera: $C:[0,1]^n \rightarrow [0,1]$, $D:[0,1]^n \rightarrow [0,1]$, $O:[0,1]^n \times [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ y $N:[0,1] \rightarrow [0,1]$. Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ elementos cualesquiera del

producto cartesiano $[0,1]^n$, los operadores que forman la cuarteta cumplen los siguientes axiomas:

- a. Axioma de compensación: $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq C(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- b. Axioma de conmutatividad: $C(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = C(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$
- c. Axioma de crecimiento estricto: Si $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_{i+1} = y_{i+1}, \dots, x_n = y_n$ son distintos de cero y $x_i > y_i$ entonces $C(x_1, x_2, \dots, x_n) > C(y_1, y_2, \dots, y_n)$
- d. Axioma de veto: Si $x_i = 0$ para algún $i, 1 \leq i \leq n$ entonces $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
- e. Axioma de reciprocidad difusa: $O(x, y) = N[O(y, x)]$
- f. Axioma de transitividad difusa: Si $O(x, y) \geq 0.5$ y $O(y, z) \geq 0.5$ entonces $O(x, z) \geq \max\{O(x, y), O(y, z)\}$
- g. Leyes de De Morgan: $N[C(x_1, x_2, \dots, x_n)] = D(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n))$

$$N[D(x_1, x_2, \dots, x_n)] = C(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n))$$

El axioma de compensación es el más importante y es el que da nombre a esta estructura diferenciándolo de la forma general de la LD (Espin Andrade & Fernández González, 2009). La definición original de la LDC, denominada Lógica Difusa Compensatoria basada en la media geométrica (LDCMG), se basa en la utilización de la media geométrica y su dual en la definición de los operadores conjunción y disyunción. Las ecuaciones (6.1) a (6.4) que se presentan a continuación definen dicha lógica.

La cuarteta (C_1, D_1, O_1, N_1) es definida por medio de la media geométrica y su dual como operadores conjuntivo y disyuntivo (Espin Andrade & Fernández González, 2009):

$$C_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \quad (6.1)$$

$$D_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \left[(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot \dots \cdot (1 - x_n) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (6.2)$$

junto al orden:

$$O_1[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = 0.5[C_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - C_1(y_1, y_2, \dots, y_n)] + 0.5 \quad (6.3)$$

y la negación:

$$N_1(x_i) = 1 - x_i \quad (6.4)$$

constituyen una LDC.

Hasta este momento ésta era la única cuarteta, presentada en la bibliografía, que satisfacía los axiomas requeridos para definir este tipo de lógica. En la siguiente sección se presenta una nueva cuarteta y se muestra que los axiomas se cumplen para estos nuevos operadores creando de esta forma una nueva LDC.

6.3 Lógica Difusa Compensatoria basada en la media aritmética

Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ elementos cualesquiera del producto cartesiano $[0,1]^n$. Se define una cuarteta de operadores continuos (C_2, D_2, O_2, N_2) de la siguiente manera:

El operador conjunción C_2 se define como $C_2 : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$:

$$C_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

El operador disyunción D_2 se define como $D_2 : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$:

$$D_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \left[\min(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (1 - x_i)}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

El operador orden O_2 se define como $O_2 : [0,1]^n \times [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ (Espin Andrade & Fernández González, 2009):

$$O_2[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = 0.5[C_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - C_2(y_1, y_2, \dots, y_n)] + 0.5 \quad (6.7)$$

El operador negación N_2 se define como $N_2 : [0,1] \rightarrow [0,1]$ (Espin Andrade & Fernández González, 2009):

$$N_2(x_i) = 1 - x_i \quad (6.8)$$

Cabe destacar que los operadores definidos en las ecuaciones (6.7) y (6.8) son los mismos que los utilizados en las ecuaciones (6.3) y (6.4) de la LDCMG.

A continuación se demuestra que los operadores enunciados anteriormente satisfacen los axiomas requeridos para formar una nueva LDC.

a. *Axioma de compensación*: Se sabe que $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$. Multiplicando ambos miembros por $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se obtiene:

$$[\min(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 \leq \min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Dado que la raíz cuadrada es una función monótonamente creciente:

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \left[\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}} = C_2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

De forma análoga, se sabe que $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Multiplicando ambos miembros por $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se obtiene:

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq [\max(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2.$$

Por lo tanto: $C_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n).$

De esta manera queda demostrado el axioma de compensación.

b. *Axioma de conmutatividad*: Trivial.

c. *Axioma de crecimiento estricto*: Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in [0, 1]^n$ tales que $x_i, y_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, $x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, h-1, h+1, \dots, n$ y $x_h > y_h$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n x_i > \sum_{i=1}^n y_i, \quad \min(x) > \min(y) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} > 0. \quad \text{Como consecuencia, se tiene que:}$$

$$\min(x) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} > \min(x) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} > \min(y) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}. \quad \text{Dado que la raíz cuadrada es una función}$$

monótonamente creciente, se obtiene que: $\left[\min(x) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}} > \left[\min(y) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}}.$ Luego,

$$C_2(x_1, x_2, \dots, x_n) > C_2(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

d. *Axioma de veto*: Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$. Si $x_i = 0$ para algún i , $1 \leq i \leq n$ entonces $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, luego:

$$C_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[0 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

e. *Axioma de reciprocidad difusa*: Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in [0, 1]^n$:

$$\begin{aligned}
 N_2 [O_2 (y, x)] &= N_2 [0.5 (C_2 (y) - C_2 (x)) + 0.5] \\
 &= 1 - [0.5 (C_2 (y) - C_2 (x)) + 0.5] \\
 &= 1 - 0.5 C_2 (y) + 0.5 C_2 (x) - 0.5 \\
 &= 0.5 (C_2 (x) - C_2 (y)) + 0.5 \\
 &= O_2 (x, y)
 \end{aligned}$$

f. *Axioma de transitividad difusa*: Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in [0, 1]^n$. Por hipótesis:

$$O_2 (x, y) = 0.5 [C_2 (x) - C_2 (y)] + 0.5 \geq 0.5 \Rightarrow 0.5 [C_2 (x) - C_2 (y)] \geq 0$$

$$O_2 (y, z) = 0.5 [C_2 (y) - C_2 (z)] + 0.5 \geq 0.5 \Rightarrow 0.5 [C_2 (y) - C_2 (z)] \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 O_2 (x, z) &= 0.5 [C_2 (x) - C_2 (z)] + 0.5 \\
 &= 0.5 [C_2 (x) - C_2 (y) + C_2 (y) - C_2 (z)] + 0.5 \\
 &= 0.5 [C_2 (x) - C_2 (y)] + 0.5 [C_2 (y) - C_2 (z)] + 0.5
 \end{aligned}$$

Si $\max \{O_2 (x, y), O_2 (y, z)\} = O_2 (x, y)$ entonces:

$$O_2 (x, z) = \underbrace{0.5 [C_2 (x) - C_2 (y)] + 0.5}_{=O_2 (x, y)} + \underbrace{0.5 [C_2 (y) - C_2 (z)]}_{\geq 0} \geq O_2 (x, y)$$

Si $\max \{O_2 (x, y), O_2 (y, z)\} = O_2 (y, z)$ entonces:

$$O_2 (x, z) = \underbrace{0.5 [C_2 (x) - C_2 (y)]}_{\geq 0} + \underbrace{0.5 [C_2 (y) - C_2 (z)] + 0.5}_{=O_2 (y, z)} \geq O_2 (y, z)$$

g. Leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned}
 D_2(N_2(x_1), N_2(x_2), \dots, N_2(x_n)) &= 1 - \left[\min(1 - (1 - x_1), 1 - (1 - x_2), \dots, 1 - (1 - x_n)) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n 1 - (1 - x_i)}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 1 - \left[\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= N_2[C_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2[D_2(x_1, x_2, \dots, x_n)] &= 1 - \left\{ 1 - \left[\min((1 - x_1), (1 - x_2), \dots, (1 - x_n)) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (1 - x_i)}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 &= \left[\min((1 - x_1), (1 - x_2), \dots, (1 - x_n)) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (1 - x_i)}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= C_2(N_2(x_1), N_2(x_2), \dots, N_2(x_n))
 \end{aligned}$$

Queda demostrado que la cuarteta de operadores formada por la conjunción y la disyunción propuestas junto al orden y la negación constituyen una nueva LDC, la cual será denominada Lógica Difusa Compensatoria basada en la media aritmética (LDCMA). Es importante destacar que la media aritmética satisface todos los axiomas excepto el de veto. Es por esto que surge la necesidad de incorporar el mínimo en las fórmulas de conjunción y disyunción, ya que combinando la media aritmética con el mínimo se logra, entonces, que se satisfaga dicho axioma sin que se pierdan las otras propiedades.

A partir de estas demostraciones se puede afirmar que los axiomas de reciprocidad difusa y de transitividad difusa son independientes de la conjunción utilizada, dependiendo únicamente de las fórmulas del orden y negación.

La implicación puede ser definida de dos maneras distintas (Espin Andrade et al., 2002; Zadeh, 1974):

$$I_1(x, y) = D(N(x), y) \quad (6.9)$$

$$I_2(x, y) = D(N(x), C(x, y)) \quad (6.10)$$

De este modo se generalizan las tablas de verdad de la lógica booleana de dos maneras diferentes (Espin Andrade & Fernández González, 2009).

Los cuantificadores universal y existencial deben ser introducidos de manera natural a partir de los operadores conjunción y disyunción dados anteriormente obteniendo las siguientes expresiones para el caso de U numerable (Espin Andrade & Fernández González, 2009; Valdés et al., 2010):

$$\forall_{x \in U} p(x) = C_2 \{p(x) : x \in U\} = \left[\min_{x \in U} (p(x)) \cdot \frac{\sum_{x \in U} p(x)}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.11)$$

$$\exists_{x \in U} p(x) = D_2 \{p(x) : x \in U\} = 1 - \left[\min_{x \in U} (1 - p(x)) \cdot \frac{\sum_{x \in U} (1 - p(x))}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.12)$$

donde $p: U \rightarrow [0,1]$ es la función que le asigna a cada predicado x en el dominio U un valor de verdad.

A través del cálculo integral se pueden definir los cuantificadores para el caso continuo. Para valores de $p(x)$ distintos de cero se tiene que:

$$\forall_{x \in U} p(x) = \left[\min_{x \in U} (p(x)) \cdot \frac{\int_{x \in U} p(x) dx}{\int_{x \in U} dx} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.13)$$

$$\exists_{x \in U} p(x) = 1 - \left[\min_{x \in U} (1 - p(x)) \cdot \frac{\int_{x \in U} [1 - p(x)] dx}{\int_{x \in U} dx} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.14)$$

En caso contrario, cuando $p(x) = 0$ las ecuaciones (6.13) y (6.14) son iguales a 0.

6.4 Comparación gráfica de los operadores

En esta sección se presentan gráficamente las operaciones conjunción y disyunción de ambas lógicas, la LDCMG y la LDCMA.

En las Figuras 6.1 y 6.2 se muestran las graficas de las conjunciones de la LDCMG y de la LDCMA, respectivamente, en distintas perspectivas con el fin de visualizar las diferencias. Se puede observar que la conjunción de la LDCMA muestra un pliegue, es decir, un pico que comienza en el punto $(0,0,0)$ y culmina en el punto $(1,1,1)$; mientras que la conjunción de la LDCMG presenta una curvatura más suave. En la Figura 6.3 se muestra la gráfica de la diferencia entre dichas conjunciones.

En las Figuras 6.4 y 6.5 se muestran las graficas de las disyunciones de la LDCMG y de la LDCMA, respectivamente, en distintas perspectivas. Al igual que ocurre con la conjunción, la disyunción de la LDCMA muestra un pliegue que comienza en el punto $(1,1,1)$ y termina en el punto $(0,0,0)$. En cambio la disyunción de la LDCMG muestra una curvatura suave, sin cambios bruscos. En la Figura 6.6 se muestra la gráfica de la diferencia entre dichas disyunciones.

Los pliegues o picos que presentan tanto la conjunción como la disyunción de la LDCMA son consecuencia de la incorporación del mínimo en sus respectivas fórmulas. Cabe recordar que surge la necesidad de añadir el mínimo en dichas ecuaciones para que el axioma de veto se satisfaga.

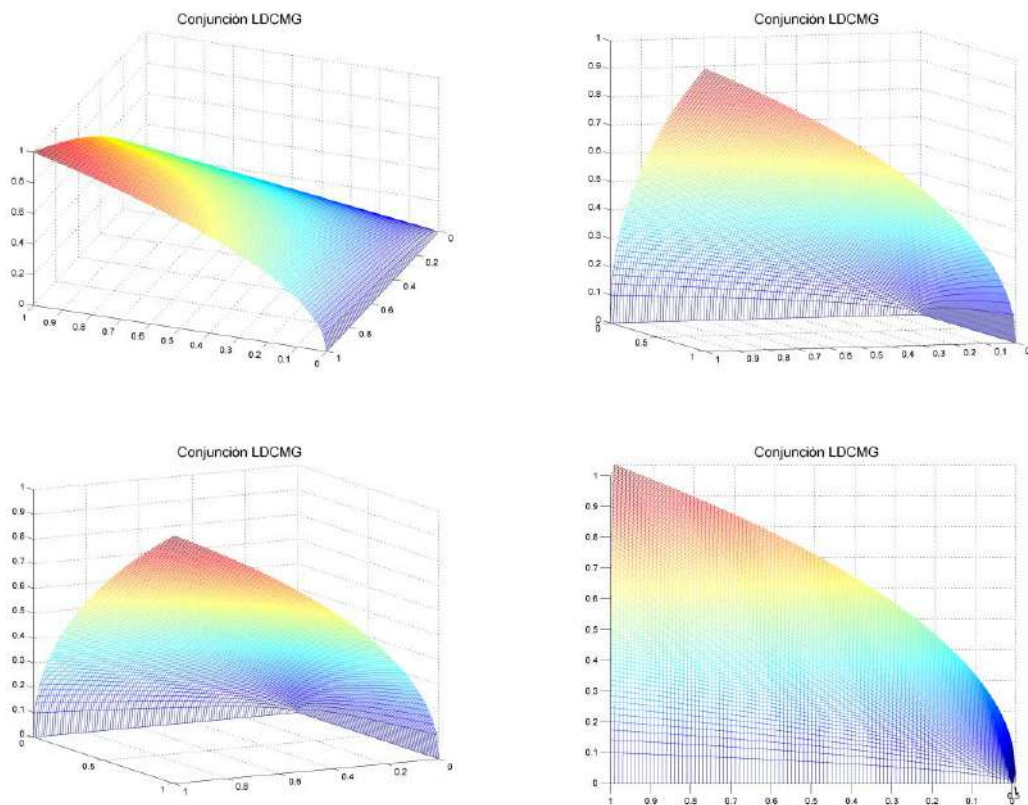


Figura 6.1: Gráfico de la conjunción de la LDCMG en distintas perspectivas.

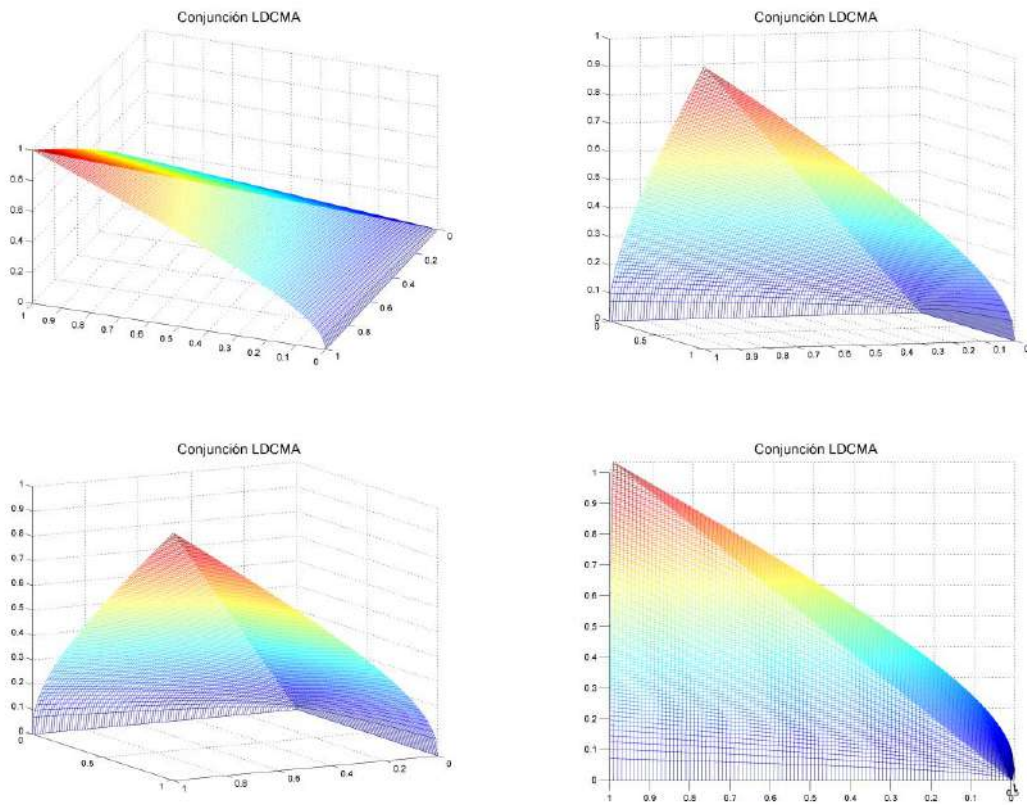


Figura 6.2: Gráfico de la conjunción de la LDCMA en distintas perspectivas.

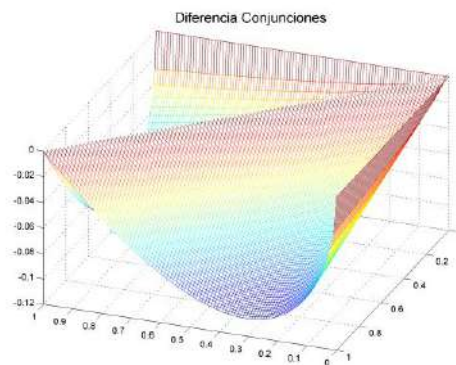


Figura 6.3: Gráfico de la diferencia entre las conjunciones de la LDCMG y la LDCMA.

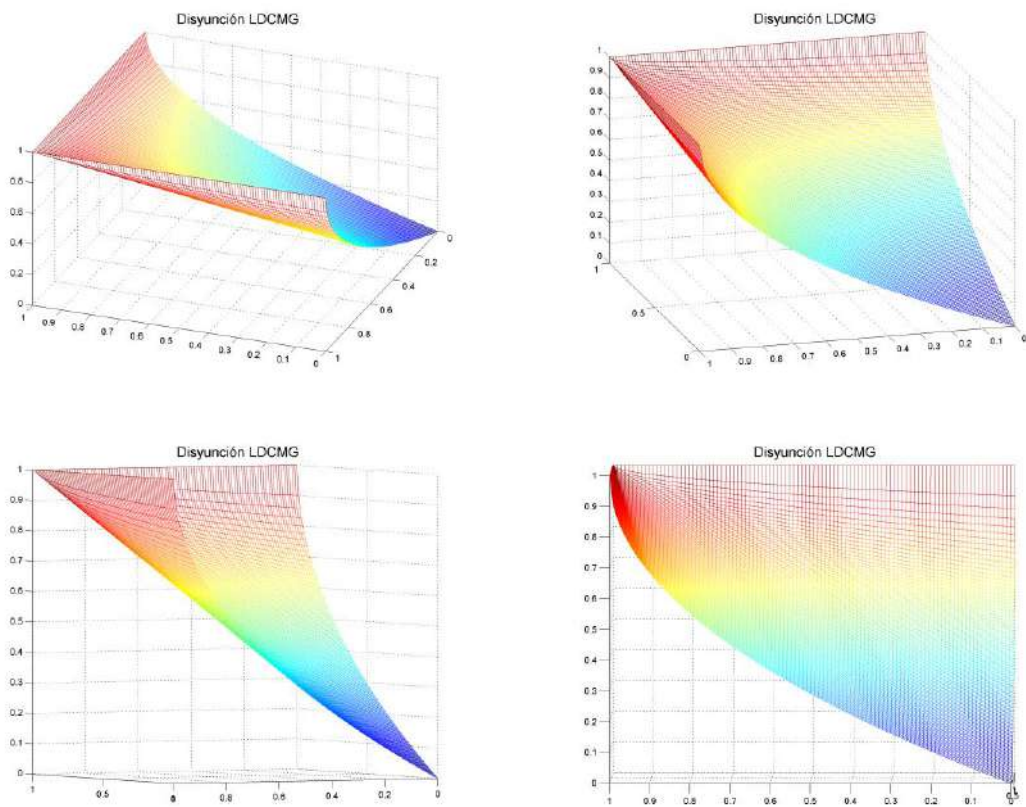


Figura 6.4: Gráfico de la disyunción de la LDCMG en distintas perspectivas.

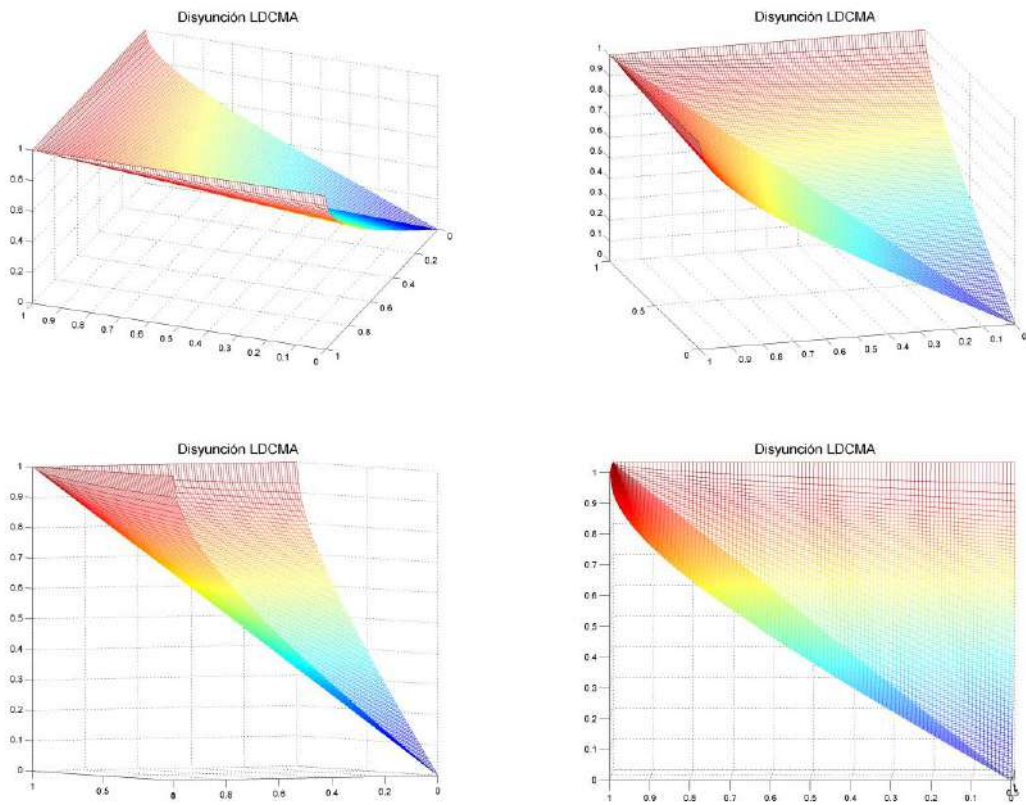


Figura 6.5: Gráfico de la conjunción de la LDCMA en distintas perspectivas.

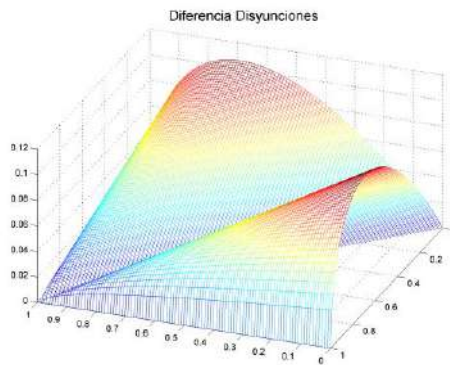


Figura 6.6: Gráfico de la diferencia entre las disyunciones de la LDCMG y la LDCMA.

6.5 Relación entre la Lógica Difusa Compensatoria propuesta y la Lógica Booleana

Las fórmulas del Cálculo Proposicional de la Lógica Difusa Compensatoria (CPLDC) son funciones de los operadores C , D , O y N . Consecuentemente con la definición dada por la expresión (6.13), cualquier función $f : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ del CPLDC se considera válida si $f(x) > 0$

$$\text{para cualquier elemento del dominio y } \left[\min_{x \in U} (p(x)) \cdot \frac{\int_{x \in U} p(x) dx}{\int_{x \in U} dx} \right]^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}.$$

De acuerdo con el Cálculo de Predicados introducido a través de las definiciones de los cuantificadores, se satisface el Teorema de Compatibilidad con la Lógica Booleana. Dicho teorema afirma que las fórmulas válidas del CPLDC son exactamente las del Cálculo Proposicional Booleano (CPB) para cualesquiera de las dos selecciones del operador implicación (I_1 o I_2).

Para demostrarlo se escogió el sistema de Kleene (Kleene, 1952) y fueron calculados los valores de verdad de los axiomas para ambas implicaciones.

Los axiomas del sistema de Kleene se presentan a continuación:

Axioma 1: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Axioma 2: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

Axioma 3: $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

Axioma 4: $\vdash A \wedge B \rightarrow A \quad A \wedge B \rightarrow B$

Axioma 5: $\vdash A \rightarrow A \vee B \quad B \rightarrow A \vee B$

Axioma 6: $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)]$

Axioma 7: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$

Axioma 8: $\vdash \neg(\neg A) \rightarrow A$

Los valores obtenidos para la implicación I_1 se presentan en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Valores obtenidos para la implicación I_1

Axioma 1	Axioma 2	Axioma 3	Axioma 4	Axioma 5	Axioma 6	Axioma 7	Axioma 8
0.5469	0.4865	0.5316	0.5475	0.5466	0.5085	0.5141	0.5774

El valor hallado para el axioma 2 es menor a 0.5. Como consecuencia, no se satisface el teorema. Sin embargo, esta implicación I_1 no es recomendable porque sus propiedades limitan su sensibilidad, lo cual no depende de los operadores seleccionados (Espin Andrade et al., 2006; Zadeh, 1974). Es aconsejable trabajar con la segunda implicación, la generalización de Zadeh, para la cual se obtuvieron los valores que se muestran en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2: Valores obtenidos para la implicación I_2

Axioma 1	Axioma 2	Axioma 3	Axioma 4	Axioma 5	Axioma 6	Axioma 7	Axioma 8
0.5552	0.5185	0.5540	0.5361	0.5471	0.5136	0.5152	0.5774

Todos los valores de verdad obtenidos al utilizar la implicación I_2 son mayores que 0.5, por lo tanto las fórmulas válidas del CPB son fórmulas válidas del CPLDC.

Para completar la demostración basta probar que las fórmulas que no son válidas en el CPB tampoco lo son en el CPLDC. Esto es cierto dado que si una fórmula no es válida en el CPB existirá un $x \in [0,1]^n$ que cumple $f(x) = 0$, lo cual es cero por definición.

6.6 Ejemplo ilustrativo: Competitividad de empresas

La LDC ha sido utilizada en diversos problemas de toma de decisiones. Espín Andrade y Fernández González en su trabajo denominado “La Lógica Difusa Compensatoria: Una plataforma para el razonamiento del conocimiento en un ambiente de decisión multicriterio” (Espin Andrade & Fernández González, 2009) desarrollan un ejemplo de competitividad de empresas, el cual se ha tomado en este trabajo y desarrollado utilizando los operadores presentados anteriormente para realizar un estudio comparativo entre ambas LDC.

El modelo ordena un conjunto de empresas con respecto a una línea de productos en un mercado competitivo. A continuación aparecen las formulaciones verbales y su traducción al lenguaje del Cálculo de Predicados:

Una empresa es competitiva en una línea de productos en un mercado dado si 1) la economía de la empresa es sólida, 2) su posición tecnológica es de avanzada y 3) es muy fuerte en la línea de productos en el mercado de referencia.

- 1) Una empresa es económicamente sólida si tiene un buen estado financiero y buenas ventas. Si el estado financiero fuera algo malo debe ser compensado con muy buenas ventas.
- 2) Una empresa tiene una posición tecnológica de avanzada si su tecnología actual es buena y además es dueña de patentes, o tiene productos en investigación desarrollo, o dedica cantidades importantes de dinero a esta actividad. Si su tecnología es algo atrasada, entonces debe tener muchas patentes, o muchos productos en investigación desarrollo, o dedica cantidades muy importantes de recursos a esta actividad.
- 3) Una empresa es fuerte en una línea de productos si tiene fortaleza en el mercado, tiene una línea variada de productos y es independiente del proveedor.

El modelo que representa esta situación es el siguiente predicado compuesto:

$$C(x) = s(x) \wedge T(x) \wedge I^2(x)$$

donde:

$$s(x) = f(x) \wedge v(x) \wedge \left(\neg(f(x))^{0.5} \rightarrow v^2(x) \right)$$

$$T(x) = t(x) \wedge (p(x) \vee i(x) \vee d(x)) \wedge \left(\neg t^{0.5}(x) \rightarrow (p^2(x) \vee i^2(x) \vee d^2(x)) \right)$$

$$I(x) = m(x) \wedge vl(x) \wedge ip(x)$$

Los significados de los predicados se muestran en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3: Significado de los predicados

$C(x)$:	La empresa x es competitiva
$s(x)$:	La empresa x tiene una economía sólida
$T(x)$:	La empresa x tiene una posición tecnológica de avanzada
$l(x)$:	La empresa x es fuerte en la línea de productos
$f(x)$:	La empresa x tiene un buen estado financiero
$v(x)$:	La empresa x tiene buenas ventas
$t(x)$:	La empresa x tiene actualmente una buena tecnología
$p(x)$:	La empresa x es dueña de patentes
$i(x)$:	La empresa x tiene productos en investigación desarrollo
$d(x)$:	La empresa x dedica importantes cantidades de dinero a la investigación desarrollo
$m(x)$:	La empresa x tiene fortaleza en el mercado
$vl(x)$:	La empresa x tiene una línea variada de productos
$ip(x)$:	La empresa x es independiente del proveedor

A continuación se presentan las evaluaciones de cuatro empresas (A_1 , A_2 , A_3 y A_4) en un mercado de adhesivos tisulares de un país de América Latina. La implicación utilizada en los cálculos fue I_2 dado que tiene un mejor comportamiento.

En la Tabla 6.4 se presentan los valores obtenidos a partir de los operadores compensatorios definidos a partir de la media geométrica y su dual. En la Tabla 6.5 se presentan los valores obtenidos a partir de los operadores propuestos en este trabajo.

Tabla 6.4: Valores obtenidos a partir de la LDCBMG.

	f	v	t	p	i	d	ip	vl	m	s	T	l	l^2	C
A_1	0.5	0.47	0.3	0.93	0.81	0.61	0.6	0.23	0.1	0.5002	0.5159	0.2399	0.0575	0.2458
A_2	0.6	0.63	0.5	0.41	1	0.95	0.8	0.77	0.4	0.6107	0.6816	0.6269	0.3930	0.5469
A_3	0.9	0.75	0.7	0.62	0.55	0	1	0.92	0.8	0.8122	0.5837	0.9029	0.8152	0.7284
A_4	0	0.99	0.8	0.81	0.79	0.7	0.5	0.39	1	0	0.7626	0.5799	0.3363	0

Tabla 6.5: Valores obtenidos a partir de la LDCBMA.

	f	v	t	p	i	d	ip	vl	m	s	T	l	l^2	C
A_1	0.5	0.47	0.3	0.93	0.81	0.61	0.6	0.23	0.1	0.6545	0.5672	0.3141	0.0987	0.3515
A_2	0.6	0.63	0.5	0.41	1	0.95	0.8	0.77	0.4	0.7481	0.7311	0.6404	0.4101	0.6369
A_3	0.9	0.75	0.7	0.62	0.55	0	1	0.92	0.8	0.8680	0.6339	0.8985	0.8073	0.7873
A_4	0	0.99	0.8	0.81	0.79	0.7	0.5	0.39	1	0	0.8001	0.6263	0.3923	0

A partir de estos resultados se puede concluir para ambas tablas que:

- Todos los valores del predicado C se encuentran entre el mínimo y el máximo de los valores de verdad de los predicados s , T y l^2 de acuerdo con el cumplimiento del axioma de compensación.
- El valor del predicado C para la empresa A_4 es cero debido al valor del predicado s , el cual se obtiene del predicado básico f . Esto es debido al axioma de veto.
- En la empresa A_3 el predicado d es cero, pero el valor del predicado C no lo es. Esto se debe a que d forma parte de una disyunción dentro del predicado T .

Tanto para los operadores compensatorios definidos a partir de la media geométrica y su dual, como para los operadores propuestos en este trabajo, la conclusión es la misma. El orden de las empresas en función de la competitividad es A_3 , A_2 , A_1 y A_4 . Además se puede concluir que las empresas A_3 y A_2 son competitivas debido a que su valor de competitividad es mayor a 0.5; mientras que las empresas A_1 y A_4 no lo son dado que su competitividad es menor a 0.5.

Por lo tanto, si bien los valores obtenidos para los nuevos operadores son mayores, las conclusiones a las que se arriba son las mismas que las obtenidas utilizando los operadores conocidos en la bibliografía hasta este momento.

Es importante destacar que en este ejemplo no se analiza si la aplicación de la nueva LDCMA tiene un desempeño superior a la aplicación de la LDCMG. Otros estudios se han realizado para comparar dichas lógicas en el campo de la Morfología Matemática Difusa, los cuales se presentan en el siguiente capítulo.

6.7 Morfología Matemática Compensatoria

En esta sección se presenta una nueva Morfología Matemática denominada Morfología Matemática Compensatoria (MMC). Dicha morfología es un caso particular de la MMD ya que surge de reemplazar la t-norma y la s-norma usadas en las definiciones de dilatación y erosión difusas por la conjunción y la disyunción de la LDC. Esto es posible dado que la t-norma y la s-norma son una conjunción y una disyunción, respectivamente, con restricciones adicionales y dado que la conjunción y la disyunción de la LDC son conmutativas (ver Apéndice A).

En la sección 5.4 del capítulo 5 los operadores básicos de la MMD quedaron definidos por las ecuaciones (5.57) y (5.58) de la siguiente manera:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y-x))]$$

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in U} [s(\mu(y), c(\nu(y-x)))]$$

Sustituyendo la t-norma y la s-norma por la conjunción y la disyunción de la LDC, respectivamente, se obtienen los operadores dilatación y erosión de la nueva morfología matemática llamada MMC:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in U} [C(\mu(y), \nu(y-x))] \quad (6.15)$$

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in U} [D(\mu(y), c(\nu(y-x)))] \quad (6.16)$$

Dichos operadores serán denominados dilatación compensatoria y erosión compensatoria, respectivamente.

A partir de estos operadores se pueden definir otros más complejos como, por ejemplo, la apertura y el cierre compensatorios como así también los distintos gradientes al igual que se realizó en la sección 5.5 del capítulo 5.

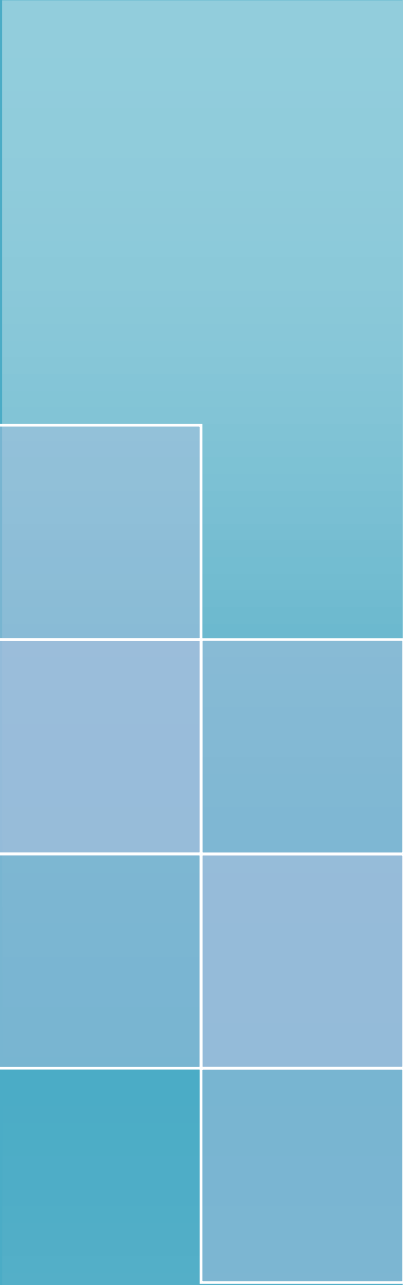
6.8 Discusión

Se presentó una nueva cuarteta de operadores formada por la conjunción y la disyunción propuestas, que junto al orden y la negación, satisface los axiomas de compensación, de conmutatividad, de crecimiento estricto, de veto, de reciprocidad difusa, de transitividad difusa y las leyes de De Morgan constituyendo de esta forma una nueva Lógica Difusa Compensatoria.

Se concluyó que los axiomas de reciprocidad difusa y de transitividad difusa son independientes de la conjunción utilizada, dependiendo únicamente de las fórmulas del orden y negación.

Esta Lógica satisface el teorema de compatibilidad con la Lógica Booleana, siendo de esta forma una extensión de esta última.

A partir de las operaciones de la LDC se definieron los operadores básicos de la Morfología Matemática Compensatoria, dando origen a una nueva morfología matemática la cual es un caso particular de la MMD. Estos operadores serán analizados en el siguiente capítulo.



Capítulo 7

Resultados: Robustez de los operadores básicos

Capítulo 7

Resultados: Robustez de los operadores básicos

En este capítulo se muestran los resultados del análisis de la robustez de los operadores básicos, dilatación y erosión. Es importante destacar que no se evaluó el desempeño de los operadores sino como éstos se comportan frente al ruido inmerso en las imágenes.

Se analizan los operadores de la Morfología Matemática Clásica, la Morfología Matemática Difusa y la Morfología Matemática Compensatoria. Se dice que un operador es robusto frente al ruido si el resultado de aplicarlo a una imagen es similar al resultado de aplicarlo a la misma imagen inmersa en ruido. El grado de similitud indicará el grado de robustez. De esta manera se podrán determinar las ventajas y limitaciones que presentan cada uno de los operadores definidos en los distintos enfoques (MM, MMD y MMC).

Se utilizaron imágenes de resonancia magnética debido a que las imágenes médicas son un campo de aplicación ideal para las técnicas de morfología difusa. Los mecanismos de formación de este tipo de imágenes, RM, TAC, etc., dan como resultado imágenes sumamente texturadas donde la imprecisión en la definición de los bordes, entre las diferentes estructuras o tejidos, es grande.

En la sección 7.1 se detallan los experimentos realizados, para luego, en la sección 7.2, presentar los resultados obtenidos. Por último, en la sección 7.3, se realiza una discusión de dichos resultados.

7.1 Materiales y métodos

Se desarrolló una comparación entre los operadores básicos de la Morfología Matemática Clásica, de la Morfología Matemática Difusa y de la Morfología Matemática Compensatoria, con el objetivo de comparar la robustez frente al ruido de estas técnicas. Un operador morfológico se dice robusto al ruido si el resultado de aplicar dicho operador a una imagen con ruido es “similar” al resultado de aplicarlo a la imagen sin ruido. Como medida de “similitud”

se usó la diferencia cuadrática entre las dos imágenes resultantes de aplicar el operador a ambas imágenes, original y ruidosa.

En la Figura 7.1 se muestra un esquema del diseño de los experimentos que se detallarán a continuación.

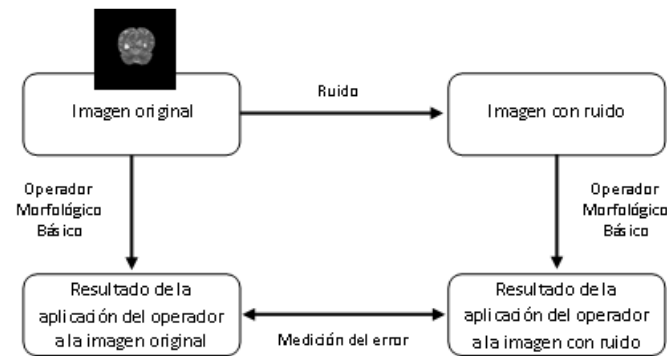


Figura 7.1: Esquema del diseño de los experimentos

En cada experimento se comparó la diferencia entre el resultado de aplicar el operador sobre la imagen original y la imagen ruidosa, para la dilatación morfológica clásica contra las seis dilataciones difusas y las dos dilataciones compensatorias, para seis distintas intensidades (niveles) de ruido. La medida de error usada fue el error cuadrático medio, sobre los valores de intensidad de los píxeles. Cada experimento se repitió 100 veces donde la diferencia entre las distintas iteraciones reside en la aleatoriedad del ruido generado. Finalmente, diez imágenes diferentes fueron usadas, como imágenes originales, para promediar sus resultados.

A continuación sigue un detalle de los experimentos:

- **Imágenes:** Las diez imágenes utilizadas fueron imágenes de RM adquiridas con un equipo de 1.5 Tesla. El protocolo utilizado incluyó imágenes coronales y axiales pesadas en T2 ($TR/TE_1/TE_2 = 3,500/32/96$ ms). En la Figura 7.2 se muestran algunos ejemplos de estos tipos de imágenes.
- **MMD:** Para los operadores de la MMD se utilizaron las seis t-normas mencionadas en la Tabla 7.1.
- **MMC:** Se implementaron las dos conjunciones mencionadas en la Tabla 7.2.

- Ruido: Se generó ruido Gaussiano $N(0, \sigma^2)$ que se adicionó a las imágenes. Se utilizaron seis valores de varianza: $\sigma^2 = 50$, $\sigma^2 = 100$, $\sigma^2 = 150$, $\sigma^2 = 200$, $\sigma^2 = 250$ y $\sigma^2 = 300$.
- Iteraciones: Todos los cálculos se repitieron 100 veces. La diferencia entre distintas iteraciones reside en la aleatoriedad del ruido generado.

En primer lugar se analizó la dilatación. Se dilató la imagen original utilizando las distintas definiciones de dilatación. Para la dilatación difusa se utilizaron las t-normas mencionadas en la Tabla 7.1, mientras que para la dilatación difusa compensatoria se utilizaron las conjunciones mencionadas en la Tabla 7.2. Luego, se generó ruido Gaussiano y se le agregó a la imagen original. A esta nueva imagen se la dilató utilizando las dilataciones nombradas anteriormente.

Para comparar la robustez de la erosión se trabajó de manera análoga a la mencionada para la dilatación implementando las seis s-normas mencionadas en la Tabla 7.1 y las dos disyunciones mencionadas en la Tabla 7.2.

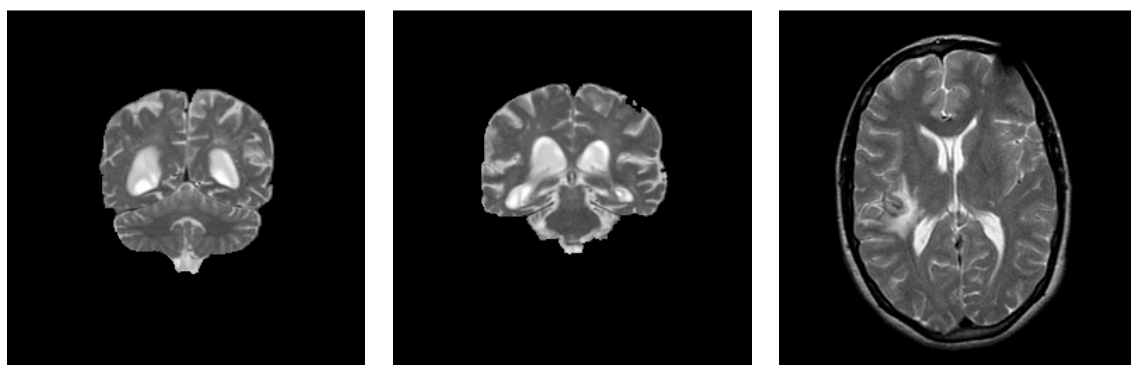


Figura 7.2: Imágenes utilizadas para desarrollar los experimentos.

Tabla 7.1: t-normas y s-normas.

Nombre	Fórmula de la t-norma		Fórmula de la s-norma	
Algebraica	T1:	$t(a,b) = ab$	S1:	$s(a,b) = a + b - ab$
Estándar	T2:	$t(a,b) = \min(a,b)$	S2:	$s(a,b) = \max(a,b)$
Acotada	T3:	$t(a,b) = \max(0, a + b - 1)$	S3:	$s(a,b) = \min(1, a + b)$
Drástica	T4:	$t(a,b) = \begin{cases} a & \text{para } b = 1 \\ b & \text{para } a = 1 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$	S4:	$s(a,b) = \begin{cases} a & \text{para } b = 0 \\ b & \text{para } a = 0 \\ 1 & \text{cc} \end{cases}$
Dubois and Prade	T5:	$t(a,b) = \frac{ab}{\max(a,b,\gamma)}$	S5:	$s(a,b) = 1 - \frac{(1-a)(1-b)}{\max(1-a, 1-b, \gamma)}$
Hamacher	T6:	$t(a,b) = \frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)}$	S6:	$s(a,b) = \frac{a+b+(\gamma-2)ab}{1+(\gamma-1)ab}$

Tabla 7.2: Conjunciones y disyunciones de la LDC.

	LDC basada en la media geométrica		LDC basada en la media aritmética	
Conjunción $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$	C1:	$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$	C2:	$\left[\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]^{\frac{1}{2}}$
Disyunción $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$	D1:	$1 - \left[(1-x_1) \cdot (1-x_2) \cdot \dots \cdot (1-x_n) \right]^{\frac{1}{n}}$	D2:	$1 - \left[\min(1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_n) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (1-x_i)}{n} \right]^{\frac{1}{2}}$

Para analizar los resultados frente a diferentes condiciones, se varió la dimensión del elemento estructurante y se eligió un valor del parámetro γ asociado a algunas t-normas y s-normas. En total se diseñaron cinco experimentos, incluyendo cinco elementos estructurantes y un valor de γ , de la siguiente manera:

- **Dimensión del elemento estructurante:** Se utilizaron EE difusos de distintas dimensiones: 3×3 , 5×5 , 7×7 , 11×11 y 15×15 . Estos elementos son simétricos con forma de campana generados por una función gaussiana y se muestran en la Figura 7.3 (Ver Apéndice B). En la MM se utilizó un EE plano de la misma dimensión que el usado en la MMD y MMC. El EE utilizado ayuda a la mayor demarcación de ciertas estructuras en la imagen procesada respecto de lo que se observa en la imagen original. Además permite determinar las ventajas computacionales que presentan los operadores respecto de los resultados obtenidos.
- **Parámetro de las normas:** Como se puede observar en la Tabla 7.1, las t-normas y s-normas “Hamacher” y “Dubois and Prade” requieren un parámetro. Se utilizó $\gamma = 0.2$, el cual se determinó de forma heurística.

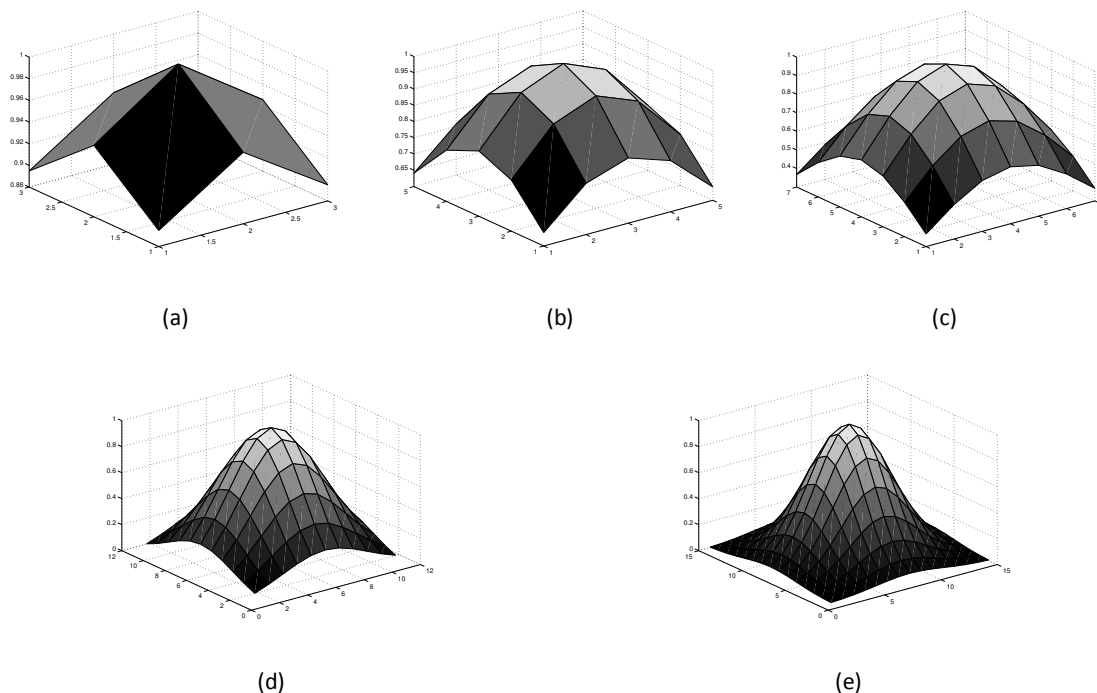


Figura 7.3: Visualización de los elementos estructurantes difusos. (a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 5×5 . (c) EE de dimensión 7×7 . (d) EE de dimensión 11×11 . (e) EE de dimensión 15×15 .

7.2 Resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos a partir de los experimentos desarrollados. A modo de ejemplo en la Figura 7.4 se muestran una imagen original y su respectiva imagen inmersa en ruido la cual fue generada utilizando una varianza igual a 300. En la Figura 7.5 se muestran algunas imágenes procesadas bajo la dilatación usando un EE de tamaño 7×7 . Sobre la columna de la izquierda se pueden observar las dilataciones de la imagen original utilizando cada una de las teorías bajo estudio. Sobre la columna de la derecha se pueden observar las dilataciones de la imagen inmersa en ruido. En la Figura 7.8 se muestran algunas imágenes procesadas bajo la erosión. Se muestran los mismos operadores y el mismo nivel de ruido que los expuestos en el caso de la dilatación.

En las Tablas 7.3 a 7.12, se muestran las matrices de errores, en primer lugar para la dilatación y en segundo lugar para la erosión. Estas matrices se generaron de la siguiente manera:

- Se calculó la media aritmética de los errores de las 100 iteraciones para cada imagen y cada varianza, obteniéndose un valor medio de error para cada t-norma (o s-norma). Con esto se obtuvo un error medio para cada imagen, varianza y t-norma (o s-norma).
- Para obtener un error medio para cada varianza y t-norma (o s-norma), se calculó la media aritmética de los errores sobre todas las imágenes para cada varianza y t-norma (o s-norma).
- Los errores medios obtenidos se presentan en las matrices de errores, con las varianzas utilizadas para generar el ruido como columnas y en las seis primeras filas las t-normas (o s-normas), en la séptima fila la matriz contiene los errores del operador morfológico clásico y en las últimas dos filas los errores del operador morfológico compensatorio para cada lógica compensatoria. Los números resaltados con sombra oscura muestran los mejores valores obtenidos (mínimo error), mientras que los números resaltados con sombra clara muestran los peores valores obtenidos (máximo error).

Se muestran gráficamente los resultados en las Figuras 7.6 y 7.9. Los segmentos verticales sobre las curvas de error corresponden a las medias de las dispersiones de los errores.

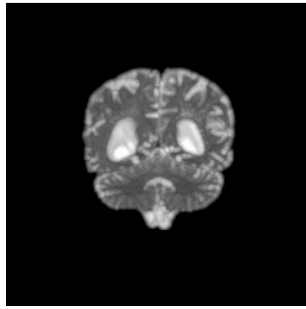
En las Figuras 7.7 y 7.10 se muestran los diagramas de cajas realizados para cada nivel de ruido generado, es decir, para cada valor de varianza utilizado. Estos diagramas muestran gráficamente los errores comparando la MM, la MMD basada en la t-norma (o s-norma) acotada y la MMC que utiliza la conjunción de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la media geométrica. Cada diagrama incluye todos los tamaños del EE utilizados.



Figura 7.4: Imágenes que se utilizan para visualizar los resultados.

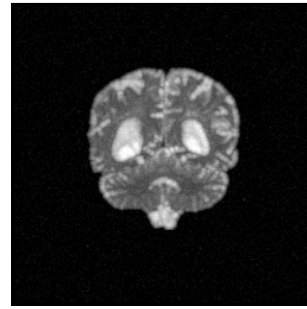
(a) Imagen original. (b) Imagen inmersa en ruido utilizando una varianza igual a 300.

Dilatación de la imagen original

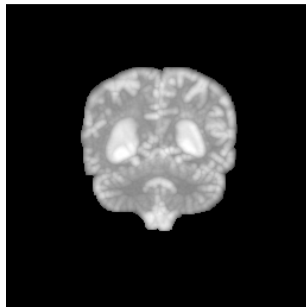


(a)

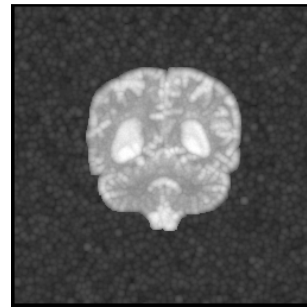
Dilatación de la imagen inmersa en ruido



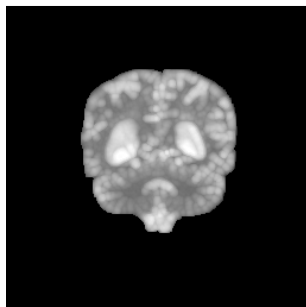
(b)



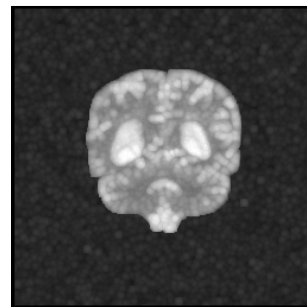
(c)



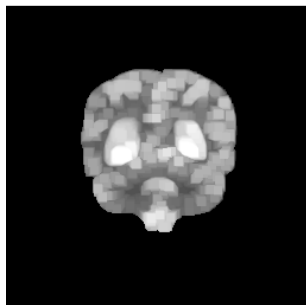
(d)



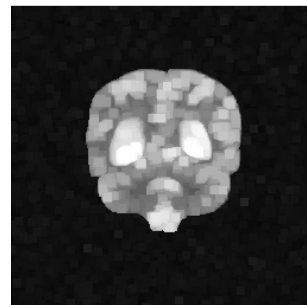
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 7.5: Visualización de los resultados para la dilatación. (a)-(b) Dilatación difusa usando la t-norma "Acotada". (c)-(d) Dilatación compensatoria usando la conjunción de la LDCMG. (e)-(f) Dilatación compensatoria usando la conjunción de la LDCMA. (g)-(h) Dilatación morfológica clásica.

Tabla 7.3: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 3×3 .

	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
T1	0.0032168	0.0069396	0.01102	0.015337	0.0199	0.024625
T2	0.0037875	0.0081404	0.01284	0.01775	0.022905	0.028197
T3	0.0031053	0.0062194	0.0096875	0.013466	0.01755	0.021868
T4	0.0039898	0.0078668	0.011741	0.015589	0.019464	0.023364
T5	0.0037874	0.0081406	0.012841	0.017752	0.022909	0.0282
T6	0.0033126	0.0071495	0.011324	0.015712	0.020328	0.025091
MM	0.0038279	0.0082588	0.013068	0.018124	0.023445	0.028927
C1	0.0017772	0.0038045	0.0059891	0.0082576	0.010623	0.013032
C2	0.0025095	0.005421	0.0085611	0.011832	0.015255	0.018758

Tabla 7.4: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 5×5 .

	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
T1	0.0030509	0.006681	0.010729	0.01512	0.01976	0.02456
T2	0.0035832	0.0079105	0.01269	0.017836	0.023226	0.02873
T3	0.0030966	0.0062483	0.0097887	0.013699	0.017908	0.022336
T4	0.0044384	0.0084955	0.012512	0.01652	0.020549	0.024533
T5	0.0035796	0.0078916	0.012649	0.017769	0.023132	0.028608
T6	0.0030212	0.0067006	0.010802	0.015242	0.019915	0.024722
MM	0.0039582	0.0088694	0.014377	0.020379	0.026723	0.033236
C1	0.0016542	0.0036029	0.0057433	0.0080276	0.01041	0.012841
C2	0.0023531	0.0052548	0.0084746	0.011949	0.01559	0.01931

Tabla 7.5: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 7×7 .

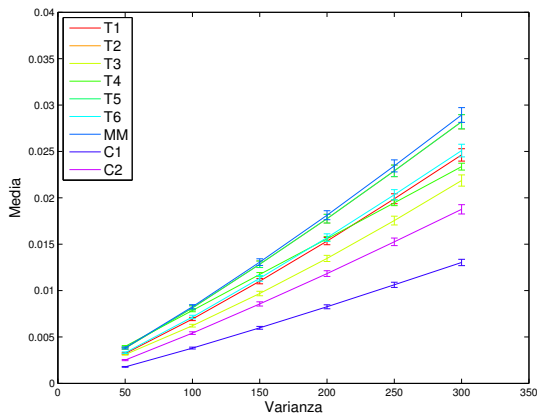
	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
T1	0.0030269	0.0066132	0.010648	0.014997	0.019561	0.024392
T2	0.003082	0.0067585	0.010844	0.015188	0.019671	0.024344
T3	0.003101	0.0062458	0.0098053	0.013722	0.017895	0.022401
T4	0.0044487	0.0084959	0.012545	0.01658	0.020576	0.024645
T5	0.0030906	0.0067714	0.010854	0.015187	0.019657	0.024315
T6	0.0029588	0.0065486	0.010594	0.014944	0.019497	0.024286
MM	0.0038889	0.0087848	0.014401	0.020541	0.026988	0.033874
C1	0.0016301	0.0035441	0.0056658	0.0079208	0.010256	0.012691
C2	0.0022101	0.0049247	0.0079855	0.011271	0.014696	0.018273

Tabla 7.6: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 11×11 .

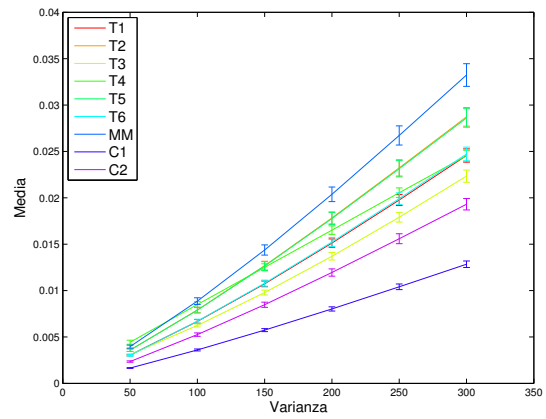
	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
T1	0.0030247	0.0066139	0.010631	0.014956	0.019586	0.024426
T2	0.0029408	0.006453	0.01039	0.014574	0.019038	0.023627
T3	0.0030996	0.0062512	0.0097986	0.013696	0.017933	0.022444
T4	0.0044098	0.0084514	0.012492	0.016453	0.020467	0.02452
T5	0.0029467	0.0064608	0.010391	0.014564	0.019012	0.023587
T6	0.0029544	0.0065455	0.010574	0.014899	0.019515	0.024314
MM	0.003652	0.0083117	0.013639	0.019647	0.026094	0.032852
C1	0.0016262	0.0035398	0.0056506	0.0078868	0.010251	0.012685
C2	0.0022052	0.0049184	0.0079641	0.011218	0.014696	0.018282

Tabla 7.7: Matriz de errores para la dilatación con un EE de dimensión 15×15 .

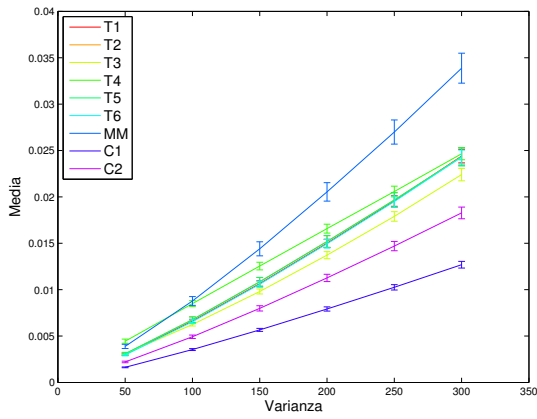
	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
T1	0.0030178	0.0066136	0.010628	0.014988	0.019596	0.024368
T2	0.0029254	0.0064575	0.010381	0.014604	0.01906	0.023609
T3	0.0030953	0.0062519	0.0098003	0.013721	0.017943	0.022387
T4	0.0043956	0.0084501	0.012462	0.016472	0.0205	0.024461
T5	0.0029309	0.0064649	0.010382	0.014593	0.019036	0.023569
T6	0.0029469	0.0065465	0.010567	0.014932	0.019528	0.024265
MM	0.0034554	0.0079933	0.013276	0.019092	0.025316	0.0317
C1	0.0016227	0.0035384	0.0056469	0.0079012	0.010253	0.012656
C2	0.0021982	0.0049203	0.0079561	0.01125	0.014711	0.018255



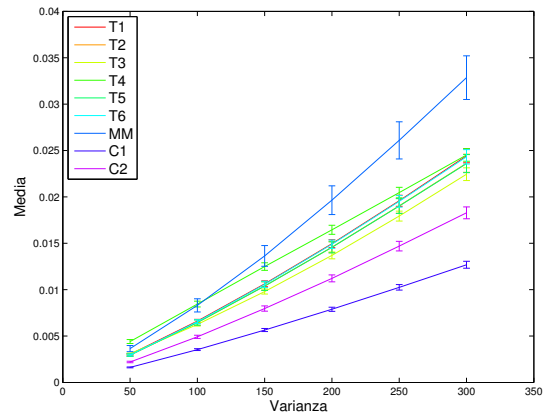
(a)



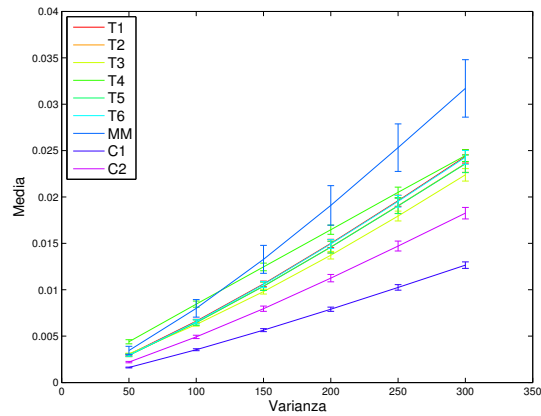
(b)



(c)

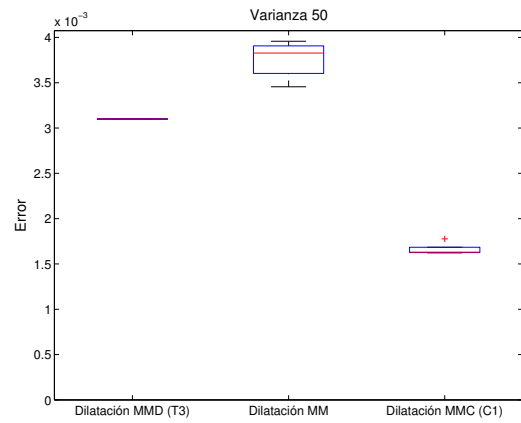


(d)

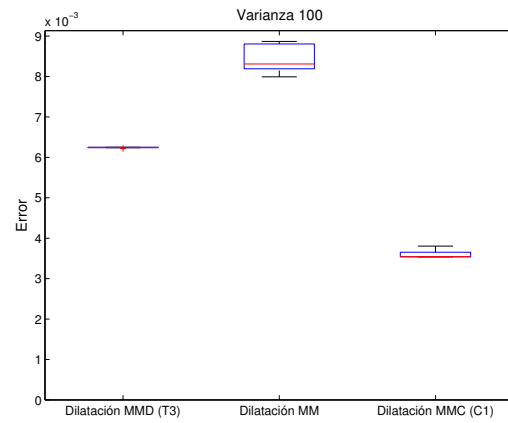


(e)

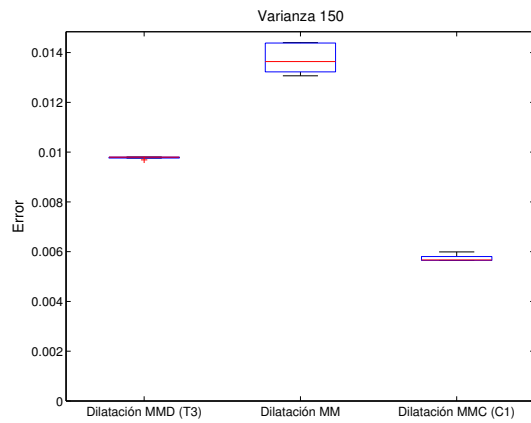
Figura 7.6: Gráficos de los errores para la dilatación.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 5×5 . (c) EE de dimensión 7×7 .
(d) EE de dimensión 11×11 . (e) EE de dimensión 15×15 .



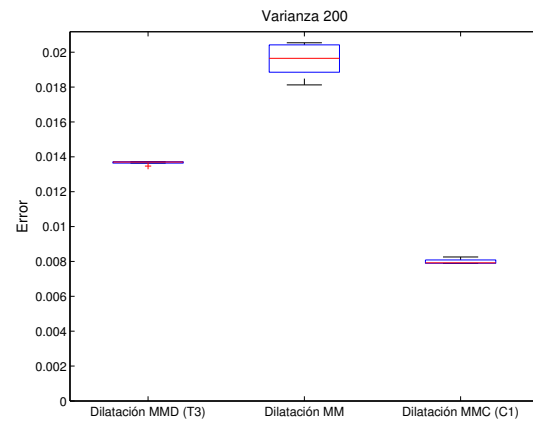
(a)



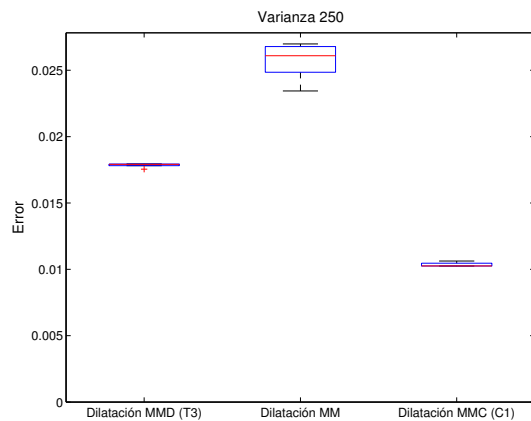
(b)



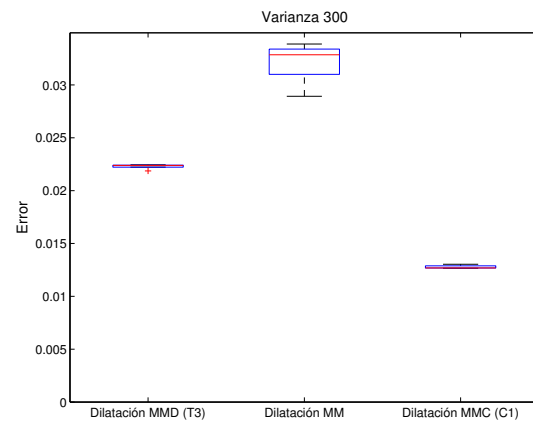
(c)



(d)



(e)

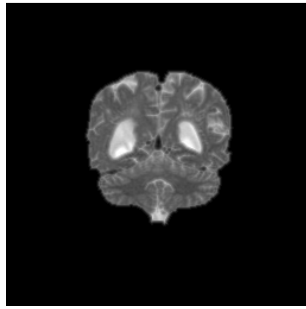


(f)

Figura 7.7: Diagramas de cajas para la dilatación.

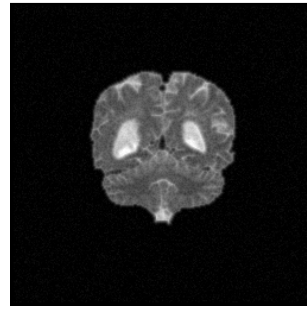
(a) Varianza: 50. (b) Varianza: 100. (c) Varianza: 150. (d) Varianza: 200. (e) Varianza: 250. (f) Varianza: 300.

Erosión de la imagen original

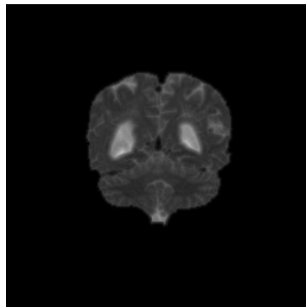


(a)

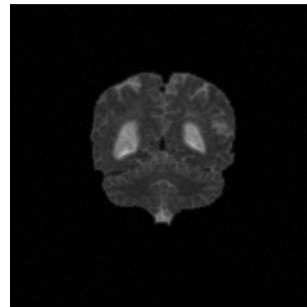
Erosión de la imagen inmersa en ruido



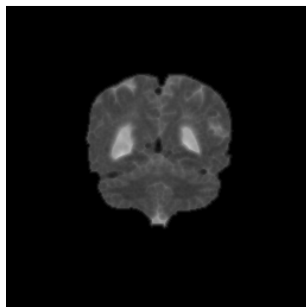
(b)



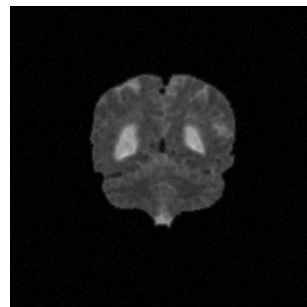
(c)



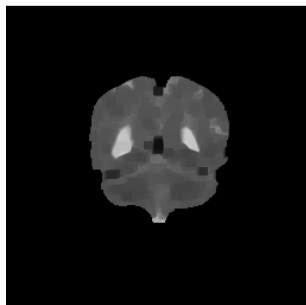
(d)



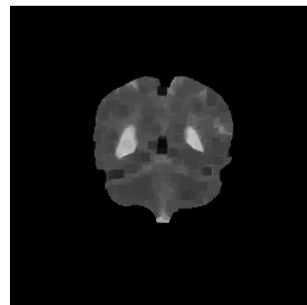
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 7.8: Visualización de los resultados para la erosión. (a)-(b) Erosión difusa usando la t-norma "Acotada".

(c)-(d) Erosión compensatoria usando la conjunción de la LDCMG. (e)-(f) Erosión compensatoria usando la conjunción de la LDCMA. (g)-(h) Erosión morfológica clásica.

Tabla 7.8: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 3×3 .

	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
S1	0.0028908	0.006114	0.0097279	0.013658	0.017822	0.022213
S2	0.003918	0.0086391	0.013759	0.019164	0.024754	0.030556
S3	0.0030206	0.0059916	0.0093138	0.012987	0.016944	0.021173
S4	0.011203	0.01512	0.018936	0.022648	0.026432	0.030152
S5	0.0039362	0.0086466	0.013744	0.019117	0.024673	0.03044
S6	0.0029596	0.0064085	0.010231	0.014335	0.018639	0.023143
MM	0.0039572	0.0087146	0.013869	0.019316	0.024957	0.030834
D1	0.0014794	0.0030355	0.0047169	0.0064855	0.0083369	0.010246
D2	0.0023923	0.005249	0.0083547	0.011629	0.015027	0.018546

Tabla 7.9: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 5×5 .

	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
S1	0.0027285	0.0058081	0.009322	0.013166	0.017266	0.021586
S2	0.0042544	0.009571	0.015157	0.020746	0.026302	0.031815
S3	0.0029439	0.0058404	0.009112	0.012737	0.016668	0.020865
S4	0.008249	0.011907	0.015487	0.019103	0.022706	0.026168
S5	0.0042566	0.009565	0.015133	0.020704	0.026236	0.031731
S6	0.0027562	0.0060409	0.0097549	0.013768	0.018004	0.022426
MM	0.0046697	0.010911	0.017953	0.025458	0.033345	0.041555
D1	0.001244	0.0026287	0.0041756	0.0058342	0.0075743	0.0093762
D2	0.0022678	0.0051902	0.0084611	0.011908	0.015462	0.019086

Tabla 7.10: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 7×7 .

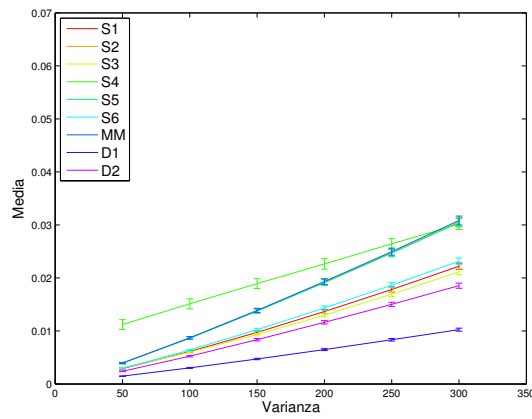
	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
S1	0.0026818	0.005718	0.0091891	0.012969	0.017037	0.021303
S2	0.0040848	0.0092316	0.014653	0.020032	0.025421	0.030775
S3	0.0029111	0.0057767	0.0090191	0.012592	0.016498	0.020651
S4	0.0063565	0.0098793	0.013378	0.016772	0.020232	0.023608
S5	0.0040865	0.009223	0.014625	0.019985	0.025355	0.030686
S6	0.0026945	0.0059222	0.0095832	0.013518	0.01771	0.022077
MM	0.0051153	0.012329	0.020602	0.029405	0.038787	0.048472
D1	0.0011941	0.0025298	0.0040244	0.005632	0.0073282	0.0090908
D2	0.0021862	0.0050267	0.0082174	0.011563	0.015048	0.018596

Tabla 7.11: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 11×11 .

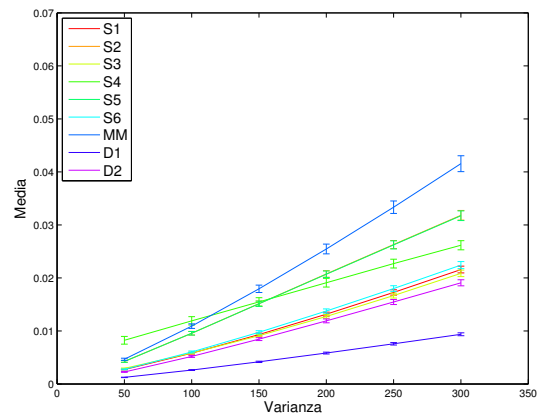
	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
S1	0.0026796	0.0057114	0.0091569	0.012944	0.016989	0.021274
S2	0.0040428	0.0091591	0.014473	0.01983	0.025153	0.030461
S3	0.0029118	0.0057711	0.0089892	0.012579	0.016467	0.020646
S4	0.0061401	0.0096696	0.013103	0.016486	0.019897	0.023285
S5	0.004044	0.0091498	0.014447	0.019782	0.025085	0.030372
S6	0.002689	0.0059101	0.0095401	0.013478	0.017645	0.022021
MM	0.0054502	0.013587	0.022853	0.033004	0.043657	0.055145
D1	0.0011873	0.0025171	0.0039983	0.0055937	0.0072856	0.0090432
D2	0.0021741	0.0050063	0.0081554	0.011494	0.014954	0.018495

Tabla 7.12: Matriz de errores para la erosión con un EE de dimensión 15×15 .

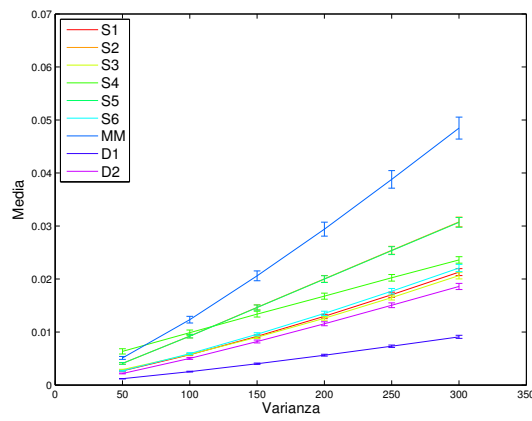
	σ^2					
	50	100	150	200	250	300
S1	0.0026803	0.0057058	0.0091617	0.012949	0.016992	0.021255
S2	0.0040443	0.0091341	0.014486	0.019849	0.025158	0.030439
S3	0.0029108	0.0057681	0.0089953	0.012578	0.01647	0.020627
S4	0.0061705	0.009646	0.013076	0.016499	0.019908	0.023256
S5	0.0040454	0.0091261	0.014459	0.019803	0.02509	0.030351
S6	0.0026907	0.005904	0.0095449	0.013486	0.01765	0.022
MM	0.0053498	0.01358	0.023069	0.033375	0.044506	0.056196
D1	0.0011879	0.0025133	0.0039998	0.0055988	0.0072828	0.0090285
D2	0.0021762	0.004996	0.0081613	0.011507	0.014954	0.018478



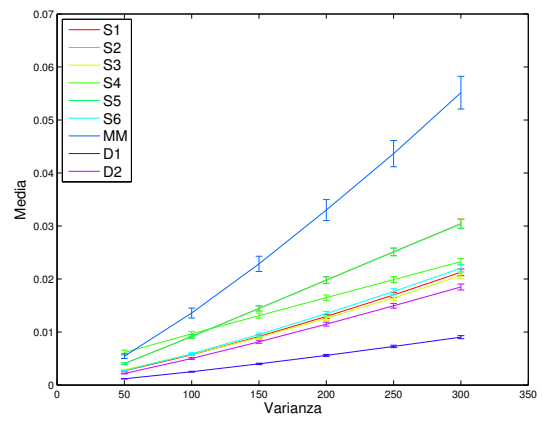
(a)



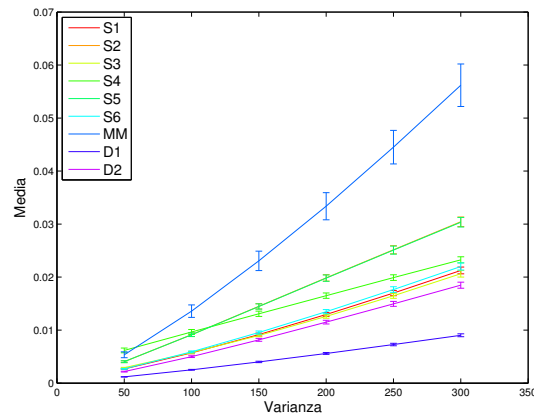
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 7.9: Gráficos de los errores para la erosión.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 5×5 . (c) EE de dimensión 7×7 .
(d) EE de dimensión 11×11 . (e) EE de dimensión 15×15 .

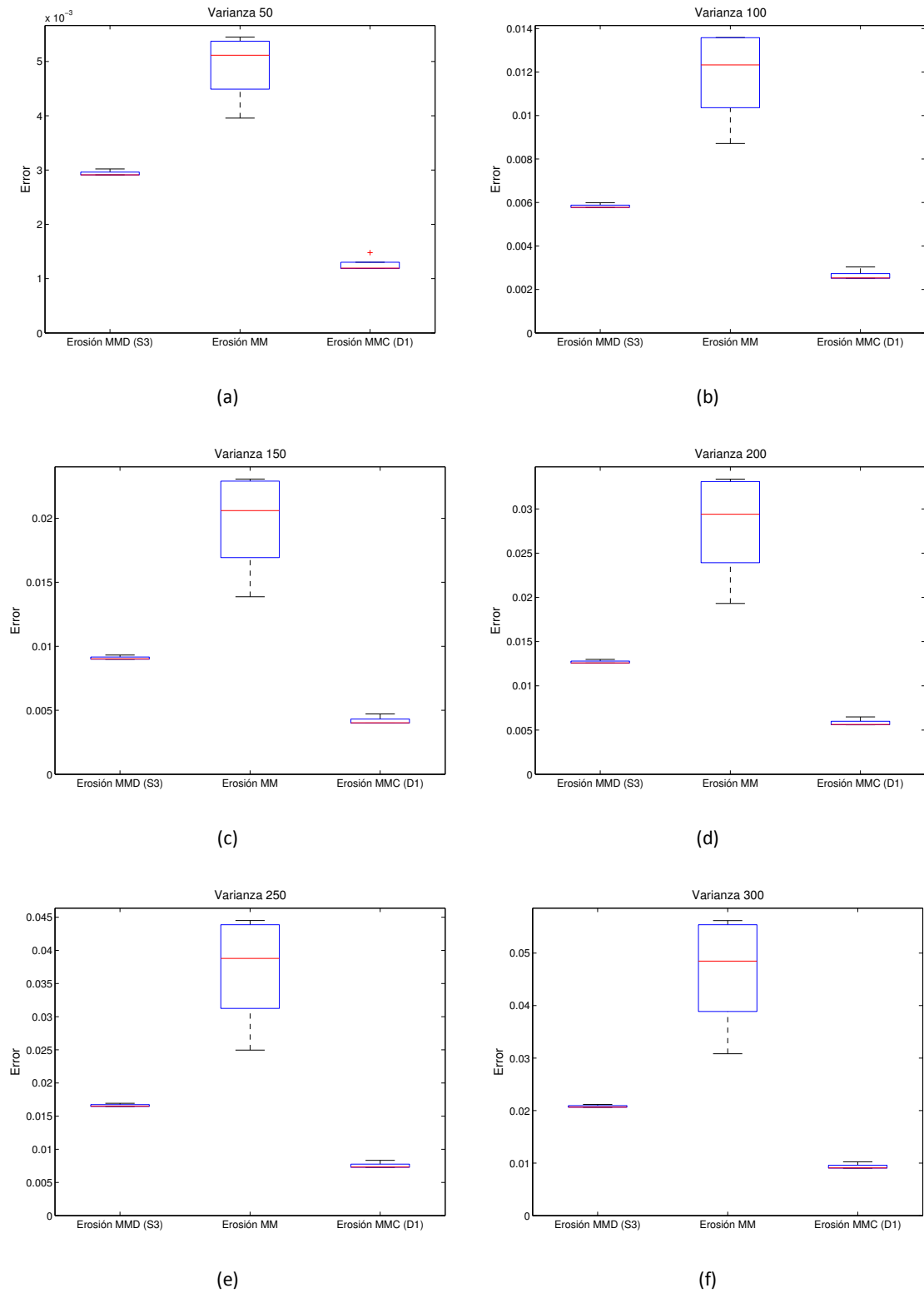


Figura 7.10: Diagramas de cajas para la erosión.

(a) Varianza: 50. (b) Varianza: 100. (c) Varianza: 150. (d) Varianza: 200. (e) Varianza: 250. (f) Varianza: 300.

7.3 Discusión

De los resultados obtenidos en los experimentos desarrollados para analizar la robustez de la dilatación se puede observar que en la mayoría de los casos los operadores de la MM tienen mayor error que los de la MMD y la MMC a medida que se incrementa la varianza utilizada para generar el ruido Gaussiano. Es decir, para todas las t-normas analizadas en la MMD y para las dos conjunciones utilizadas en la MMC, el error obtenido al comparar la dilatación de la imagen original y la dilatación de la imagen inmersa en ruido es, en casi la totalidad de los casos, un 76,67% mayor en la MM. Para el 23,33% restante el error fue mayor en la MMD utilizando la t-norma “*Drástica*”.

Los operadores que menor error presentan para la dilatación, en la totalidad de los casos analizados, son los de la MMC utilizando la conjunción definida en la LDCBMG. Es importante destacar que para la dilatación de la MMC utilizando la conjunción propuesta en esta tesis, LDCBMA, se obtiene un error menor al conseguido con la MMD y la MM.

Los experimentos diseñados para la erosión muestran resultados similares a los de la dilatación, la MM posee mayor error que la MMD y la MMC a medida que se incrementa la varianza. Sin embargo, algunos operadores de la MMD presentan una mala performance con respecto a la erosión de la MM. Por lo tanto, el porcentaje es menor que para la dilatación, siendo en este caso un 63,33%. Para el 36,67% restante el error fue mayor en la MMD utilizando la s-norma “*Drástica*”.

Al igual que ocurrió en la dilatación, el error obtenido con la erosión de la MMC basada en la disyunción de la LDCBMG fue menor en todos los casos. Con la disyunción de la LDCBMA, propuesta en esta tesis, se obtuvo un error menor al arrojado por la MMD y la MM.

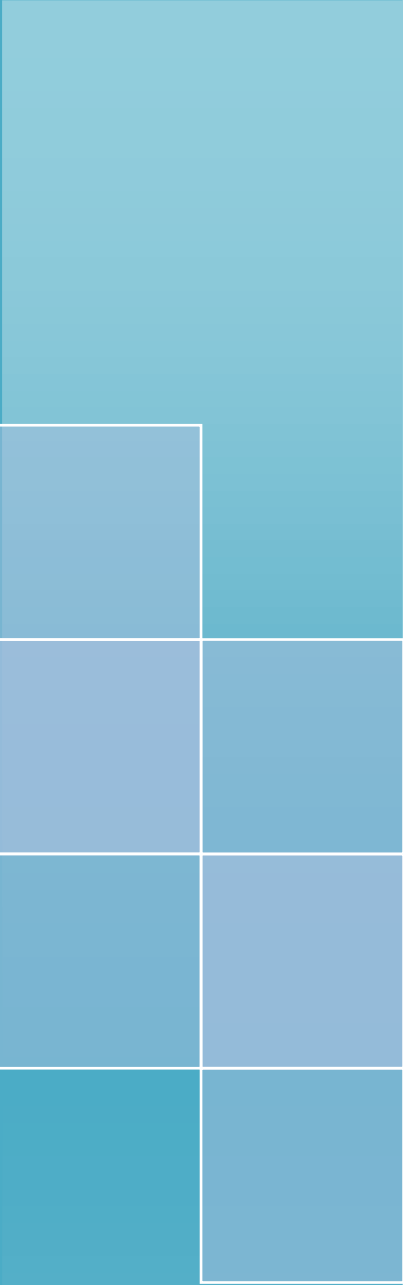
Los operadores de la MMD definidos a partir de las normas “*Estándar*” y “*Dubois and Prade*” manifiestan un comportamiento similar. Esto se debe a que la definición de dichas normas son parecidas, presentando un comportamiento casi idéntico para la mayoría de los píxeles.

Los operadores de la MMD definidos a partir de la norma “*Acotada*” tienen, en general, el mejor desempeño. Exhiben el menor error para las imágenes bajo estudio y las condiciones experimentales diseñadas en un 86,67% de los casos para la dilatación y en un 70% de los casos para la erosión.

Para la erosión se puede observar que el error del operador de la MM se incrementa a medida que aumenta el tamaño del EE, comportamiento que no se observó para la dilatación. Esta característica de la erosión indica un problema de sensibilidad, cuanto mayor es la dimensión del EE, el operador es más sensible al ruido.

Con respecto a los segmentos verticales sobre las curvas de error, las cuales corresponden a las medias de las dispersiones de los errores, se puede observar que a medida que aumenta el valor de la varianza que genera el ruido Gaussiano, aumenta la dispersión de los errores. Esto se observa en la longitud de dichos segmentos los cuales aumentan su longitud.

De los resultados obtenidos en los experimentos, se puede concluir que los operadores analizados de la MMC tienen, en general, mayor robustez frente al ruido que los operadores de la MMD y la MM para el tipo de imágenes y ruido utilizados. Esto significa que la presencia de ruido en la imagen original afecta menos a las operaciones morfológicas básicas compensatorias que las operaciones morfológicas básicas clásicas y difusas.



Capítulo 8

Resultados: Robustez de los filtros básicos

Capítulo 8

Resultados: Robustez de los filtros básicos

En este capítulo se amplían los resultados del capítulo anterior a los filtros morfológicos básicos mostrando los resultados del análisis de la robustez de la apertura y el cierre utilizando otro tipo de imágenes. Se analizan los filtros de la Morfología Matemática Clásica y la Morfología Matemática Difusa. En la sección 8.1 se detallan los experimentos realizados, para luego, en la sección 8.2, presentar los resultados obtenidos. Por último, en la sección 8.3, se realiza una discusión de dichos resultados.

8.1 Materiales y métodos

El objetivo de este capítulo es la comparación de los filtros básicos de la morfología clásica y la morfología difusa, analizando la robustez frente al ruido de ambas técnicas.

En la Figura 8.1 se esquematiza el diseño experimental desarrollado para la aplicación de los filtros morfológicos básicos. El experimento se divide en dos partes. En primer lugar se filtra la imagen original obteniendo una primer imagen resultado. En segundo lugar se agrega ruido Gaussiano a la imagen original generando una nueva imagen (ruidosa) a la cual se le aplica el filtro morfológico, obteniendo de esta manera una segunda imagen filtrada. Una vez concluidos estos pasos se calcula la diferencia (error) entre ambos resultados.

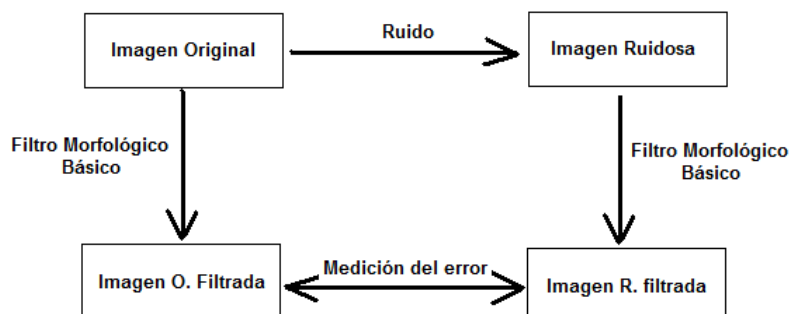


Figura 8.1: Esquema del diseño de los experimentos

En cada experimento se comparó la diferencia entre las imágenes originales filtradas y las imágenes ruidosas filtradas, para seis filtros difusos contra el filtro morfológico clásico. Cada filtro difuso queda definido dependiendo de la t-norma y s-norma empleada (ver Tabla 7.1). Se utilizaron 149 imágenes y se trabajó con tres niveles de ruido. La medida de error usada fue el error cuadrático medio sobre los valores de intensidad de los píxeles.

A continuación sigue un detalle de los experimentos:

- **Imágenes:** Las 149 imágenes utilizadas fueron imágenes de resonancia magnética (RM) simuladas, las cuales son resultado del trabajo de científicos de la Universidad de McGill, quienes construyeron una base de datos de imágenes simuladas (BrainWeb: Simulated Brain Database) que contiene un conjunto de datos de RM producidos por un simulador. Estos datos están disponibles de manera libre en la web, y en esta tesis, sirven para evaluar el comportamiento de las técnicas aplicadas para el procesamiento de las mismas, dado que en este tipo de imágenes es conocida la ubicación de los tejidos (píxel a píxel) (Montreal Neurological Institute 2006).

Dicha base de datos consta de imágenes, pesadas en T1, originales e inmersas en ruido. Los niveles de ruido que se utilizan son del 3%, 7% y 9%. Estos niveles representan el porcentaje de la desviación estándar, del ruido blanco Gaussiano, con respecto a la señal de tejido (referencia). Los estudios consisten de 181 cortes de tamaño 217×181 tomados cada 1 mm y con un volumen de vóxel de 1 mm^3 , de los cuales se trabajaron con los cortes comprendidos entre el 11 y 160. Los restantes se desecharon ya que sólo contienen hueso. A modo de ejemplo, en la Figura 8.2 se muestran las imágenes bajo estudio.

- **MMD:** Para los operadores de la MMD se utilizaron las seis t-normas y s-normas mencionadas en la Tabla 7.1.

Para analizar los resultados frente a diferentes condiciones, se varió la dimensión del elemento estructurante y se eligió un valor del parámetro γ asociado a algunas normas. En total se diseñaron cuatro experimentos, incluyendo cuatro elementos estructurantes y un valor de γ , de la siguiente manera:

- Dimensión del elemento estructurante: Se utilizaron elementos estructurantes difusos de distintas dimensiones: 3×3 , 7×7 , 11×11 y 15×15 . Estos elementos son simétricos con forma de campana generados por una función gaussiana (ver Apéndice B). En la MM se utilizó el elemento estructurante anterior con sus valores reducidos por el factor $1/10$.
- Parámetro de las normas: Como se puede observar en la Tabla 1, las normas “Hamacher” y “Dubois and Prade” requieren un parámetro. Se utilizó $\gamma = 0.2$ el cual se determinó de forma heurística.

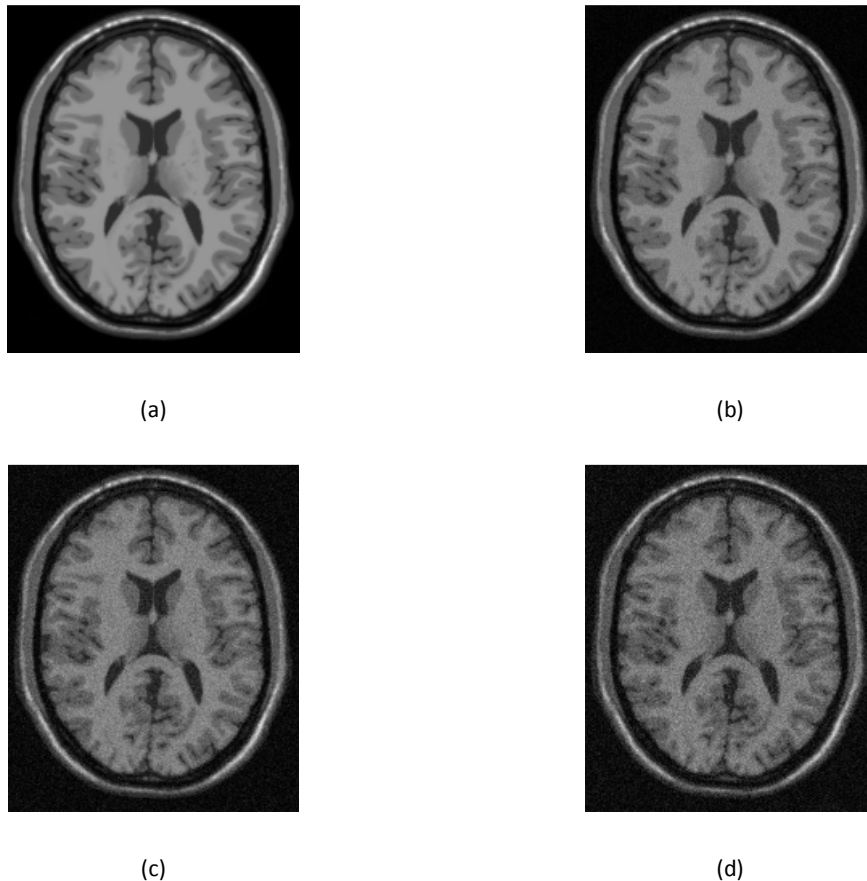


Figura 8.2: Imágenes utilizadas para desarrollar los experimentos.

(a) Imagen original. (b) Imagen con 3% de ruido. (c) Imagen con 7% de ruido. (d) Imagen con 9% de ruido.

8.2 Resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos. A modo de ejemplo en la Figura 8.3 se muestran algunas imágenes procesadas por el filtro apertura usando un EE de tamaño

7×7 . En la primera fila se pueden observar la imagen original y las imágenes inmersas en ruido, para tres niveles de ruido, sin procesar. En la segunda fila se pueden observar cada una de las imágenes anteriores procesadas con el filtro apertura de la MMD utilizando la norma “Hamacher”. Por último, en la última fila, se pueden observar las imágenes procesadas con el filtro apertura de la MM. En la Figura 8.6 se muestran algunas imágenes procesadas con el filtro cierre usando un EE de tamaño 7×7 . Para el caso de la MMD, se muestran los resultados de aplicar el filtro cierre usando la norma “Hamacher”.

Como medida cuantitativa, para determinar la calidad de los operadores en base de los resultados obtenidos en este experimento, se midió el error cuadrático medio. Este error es calculado, para cada una de las definiciones utilizadas, de la siguiente manera:

- Se determina el error cuadrático medio entre los valores de cada uno de los píxeles de la imagen original y de la imagen ruidosa, después de la aplicación del filtro.
- Se promedian los valores obtenidos para cada corte (imagen) utilizado.
- Se calcula el promedio y la desviación estándar de los errores obtenidos para cada corte, obteniendo un valor para cada nivel de ruido analizado.

Las Tablas 8.1 a 8.8 muestran los resultados de aplicar los diferentes filtros, basados en diferentes definiciones (MM y MMD) y para diferentes niveles de ruido. Cada tabla muestra los resultados para un tamaño de elemento estructurante. Las primeras cuatro tablas muestran los resultados para el filtro apertura, y las siguientes cuatro muestran los resultados para el filtro cierre. Los números resaltados con sombra oscura muestran los mejores valores obtenidos (mínimo error), mientras que los números resaltados con sombra clara muestran los peores valores obtenidos (máximo error).

Las Figuras 8.4 y 8.7 muestran gráficamente los mismos resultados, para apertura y cierre respectivamente, agregando las líneas verticales que indican la varianza del error (sobre las 149 imágenes).

En las Figuras 8.5 y 8.8 se exponen los diagramas de cajas realizados para cada nivel de ruido. Estos diagramas muestran los errores comparando los filtros de la MM y de la MMD. Para el caso de la apertura (Figura 8.5) se incluyeron los filtros de la MMD basados en las normas “Hamacher” y “Drástica”, mientras que para el cierre (Figura 8.8) se incluyeron los filtros basados en las normas “Estándar” y “Drástica”. Estos diagramas incluyen todos los tamaños del EE propuestos.

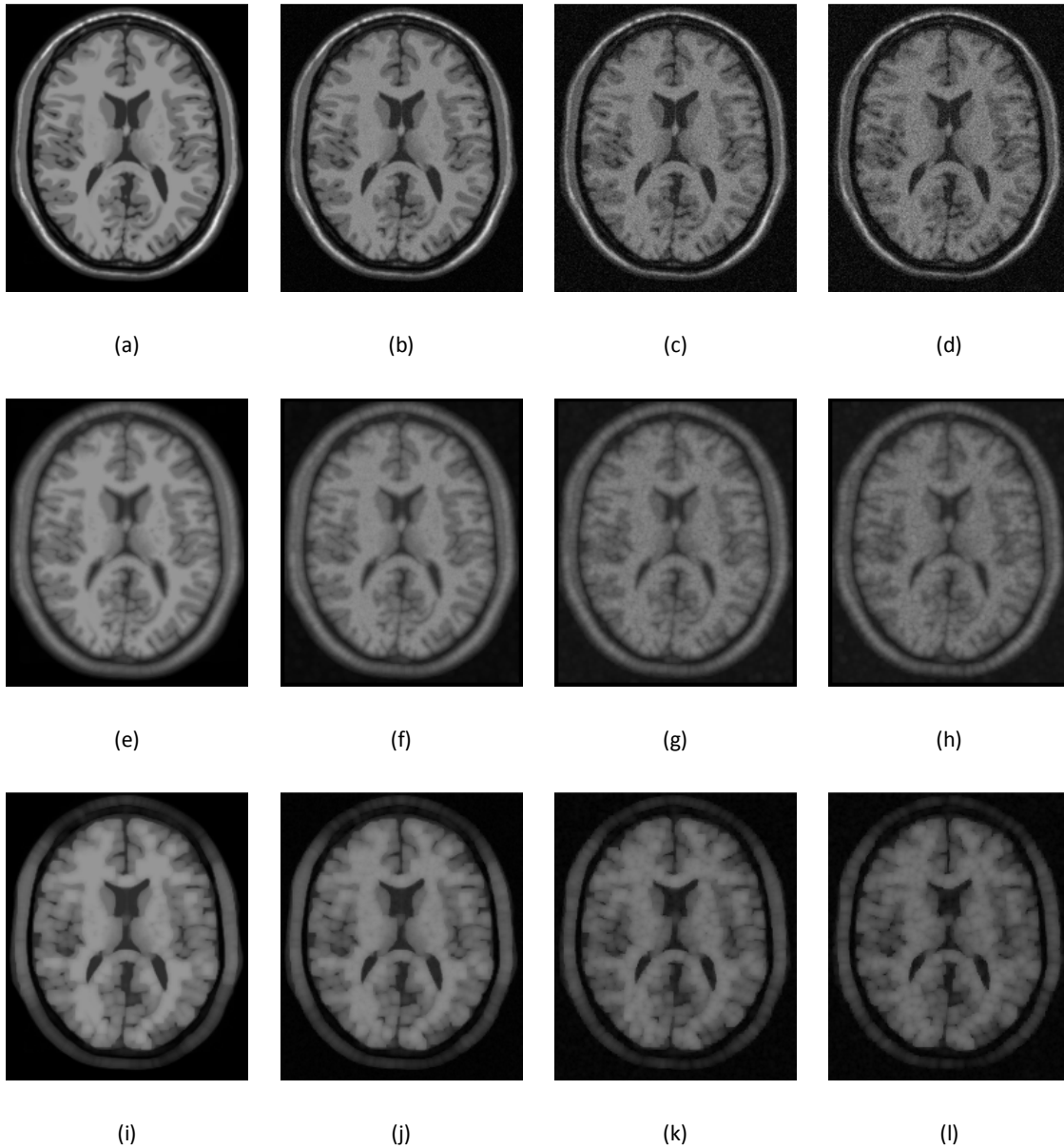


Figura 8.3: Visualización de los resultados para la apertura. (a) Imagen original. (b)-(c)-(d) Imágenes inmersas en ruido. Nivel de ruido del 3%, 7% y 9% respectivamente. (e)-(f)-(g)-(h) Apertura morfológica difusa usando la norma "Hamacher" de la imagen original y las imágenes inmersas en ruido. (i)-(j)-(k)-(l) Apertura morfológica clásica de la imagen original y las imágenes inmersas en ruido.

Tabla 8.1: Matriz de errores para la apertura usando un EE de 3×3

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.004089	0.002825	0.004066	0.003506	0.003417	0.004131	0.002870
7	0.016168	0.011179	0.015851	0.013438	0.011981	0.015825	0.011367
9	0.025897	0.018196	0.025283	0.021987	0.018663	0.025292	0.018309

Tabla 8.2: Matriz de errores para la apertura usando un EE de 7×7

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.003734	0.002381	0.002992	0.003319	0.003417	0.003049	0.002226
7	0.016914	0.009734	0.012052	0.012975	0.011975	0.012012	0.009193
9	0.027706	0.015978	0.019249	0.021339	0.018654	0.019145	0.014941

Tabla 8.3: Matriz de errores para la apertura usando un EE de 11×11

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.002962	0.002370	0.002779	0.003302	0.003412	0.002824	0.002211
7	0.013900	0.009697	0.011148	0.012919	0.011953	0.011133	0.009136
9	0.022943	0.015921	0.017757	0.021257	0.018620	0.017704	0.014853

Tabla 8.4: Matriz de errores para la apertura usando un EE de 15×15

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.002475	0.002364	0.002768	0.003289	0.003395	0.002813	0.002205
7	0.011845	0.009670	0.011103	0.012870	0.011900	0.011092	0.009114
9	0.019272	0.015877	0.017682	0.021178	0.018539	0.017639	0.014816

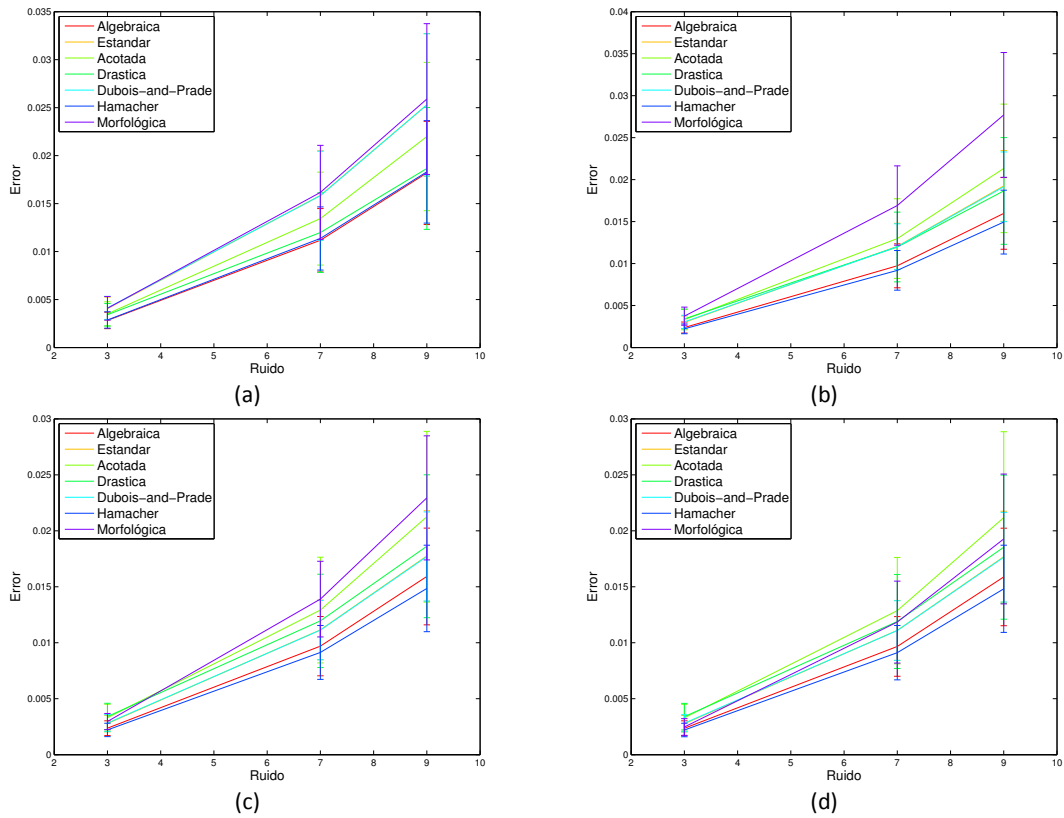


Figura 8.4 Gráficos de los errores para la apertura. (a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 . (d) EE de dimensión 15×15 .

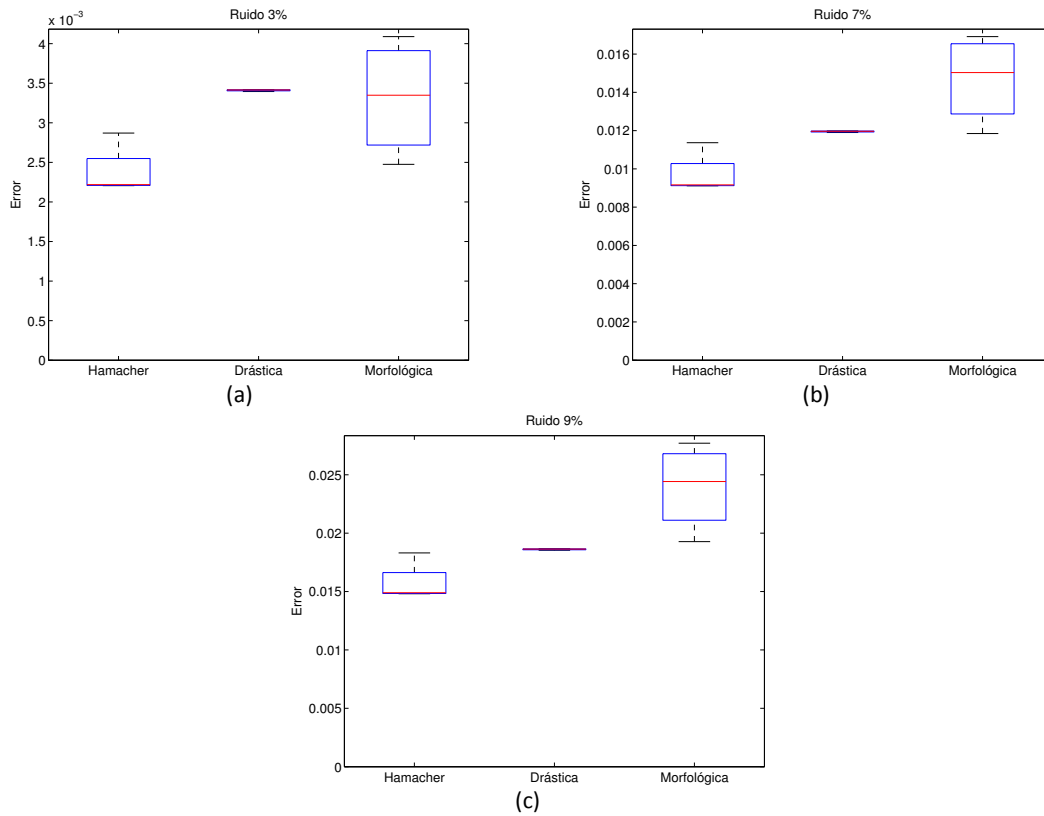


Figura 8.5: Diagramas de cajas para la apertura. (a) Ruido: 3%. (b) Ruido: 7%. (c) Ruido: 9%.

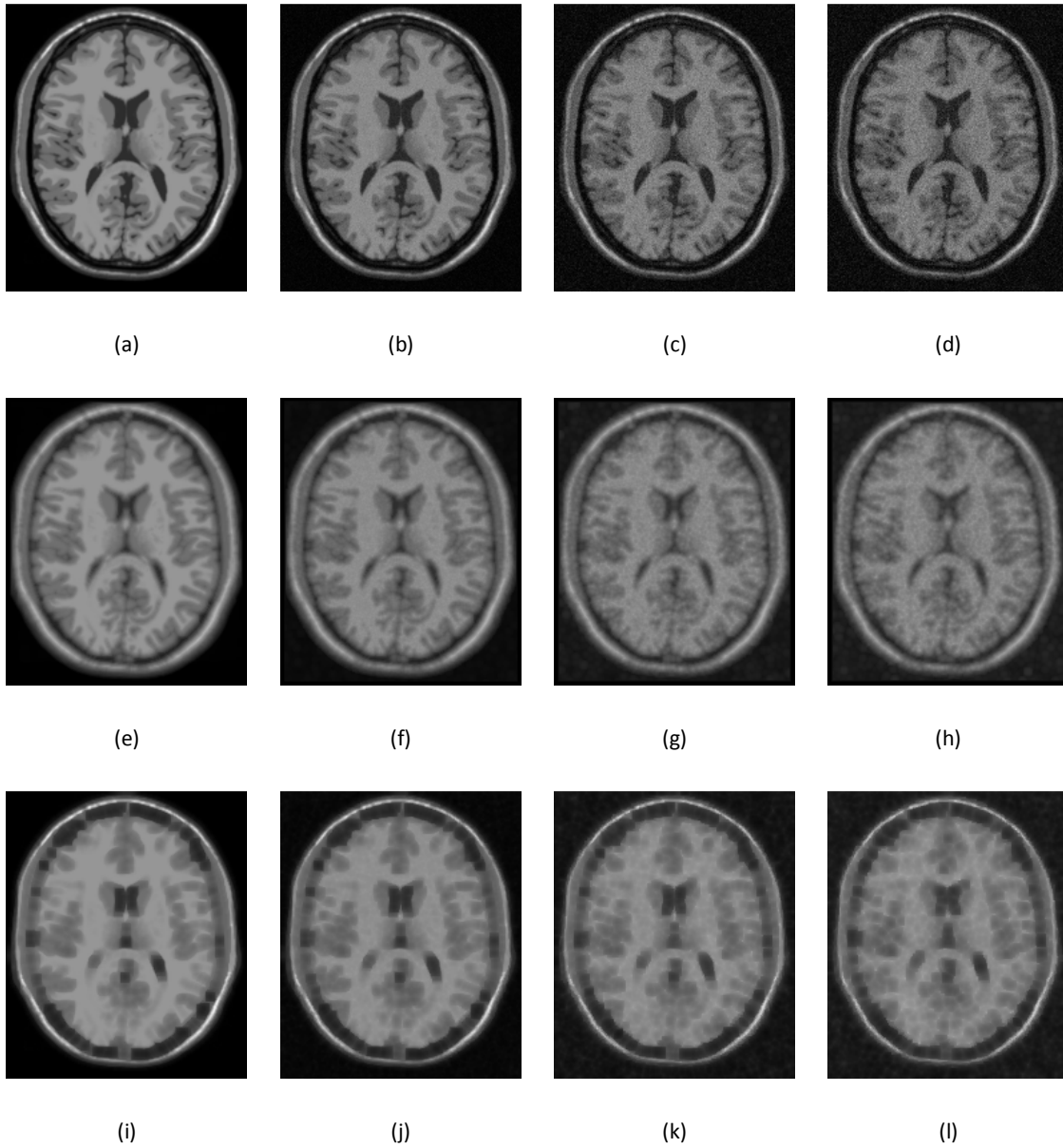


Figure 8.6: Visualización de los resultados para el cierre. (a) Imagen original. (b)-(c)-(d) Imágenes inmersas en ruido. Nivel de ruido del 3%, 7% y 9% respectivamente. (e)-(f)-(g)-(h) Cierre morfológica difusa usando la norma "Hamacher" de la imagen original y las imágenes inmersas en ruido. (i)-(j)-(k)-(l) Cierre morfológica clásica de la imagen original y las imágenes inmersas en ruido.

Tabla 8.5: Matriz de errores para el cierre usando un EE de 3×3

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.002352	0.002237	0.002349	0.003175	0.003416	0.002386	0.002015
7	0.006362	0.005484	0.006341	0.008096	0.011977	0.006362	0.005020
9	0.009430	0.007921	0.009369	0.011495	0.018657	0.009382	0.007324

Tabla 8.6: Matriz de errores para el cierre usando un EE de 7×7

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.002101	0.001926	0.001326	0.003269	0.003411	0.001337	0.001516
7	0.005007	0.004335	0.002911	0.008144	0.011953	0.002903	0.003289
9	0.007291	0.006189	0.004100	0.011496	0.018619	0.004080	0.004703

Tabla 8.7: Matriz de errores para el cierre usando un EE de 11×11

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.002173	0.001912	0.001173	0.003379	0.003384	0.001183	0.001495
7	0.004876	0.004290	0.002443	0.008342	0.011862	0.002444	0.003213
9	0.007026	0.006121	0.003418	0.011735	0.018478	0.003411	0.004591

Tabla 8.8: Matriz de errores para el cierre usando un EE de 15×15

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.002325	0.001891	0.001161	0.003331	0.003338	0.001171	0.001481
7	0.005011	0.004236	0.002413	0.008218	0.011709	0.002414	0.003177
9	0.007183	0.006042	0.003375	0.011557	0.018243	0.003370	0.004537

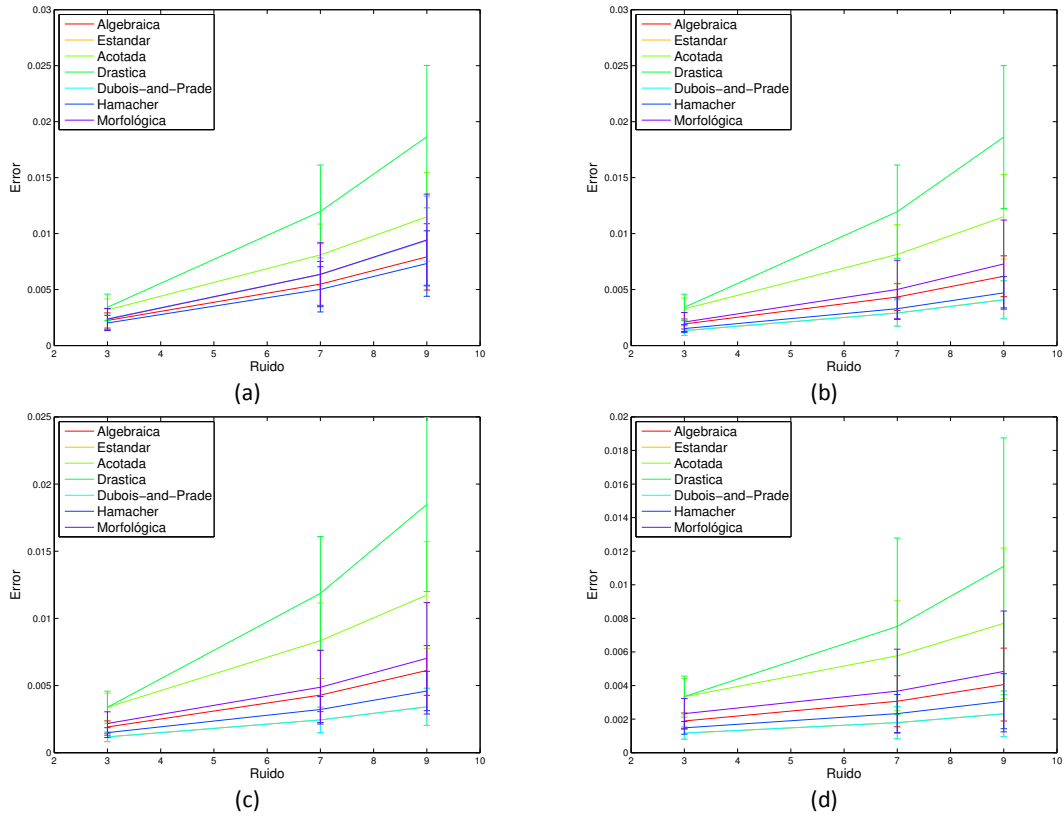


Figura 8.7: Gráficos de los errores para el cierre. (a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 . (d) EE de dimensión 15×15 .

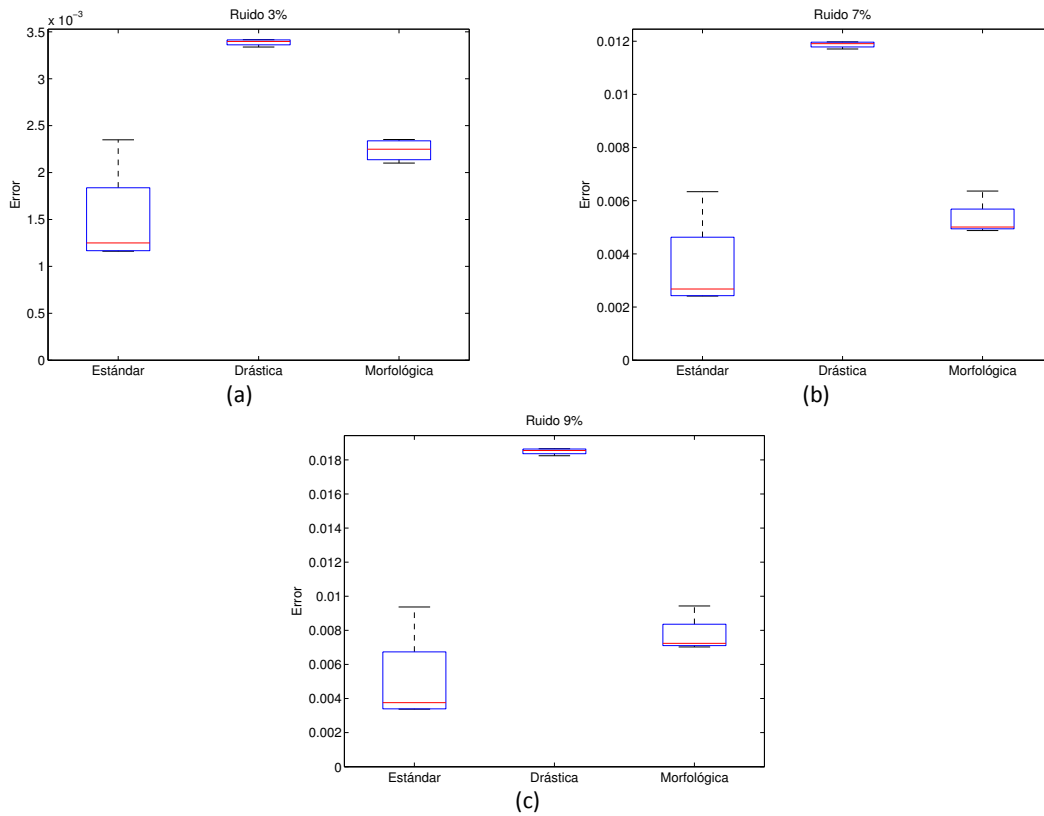


Figura 8.8: Diagramas de cajas para el cierre. (a) Ruido: 3%. (b) Ruido: 7%. (c) Ruido: 9%.

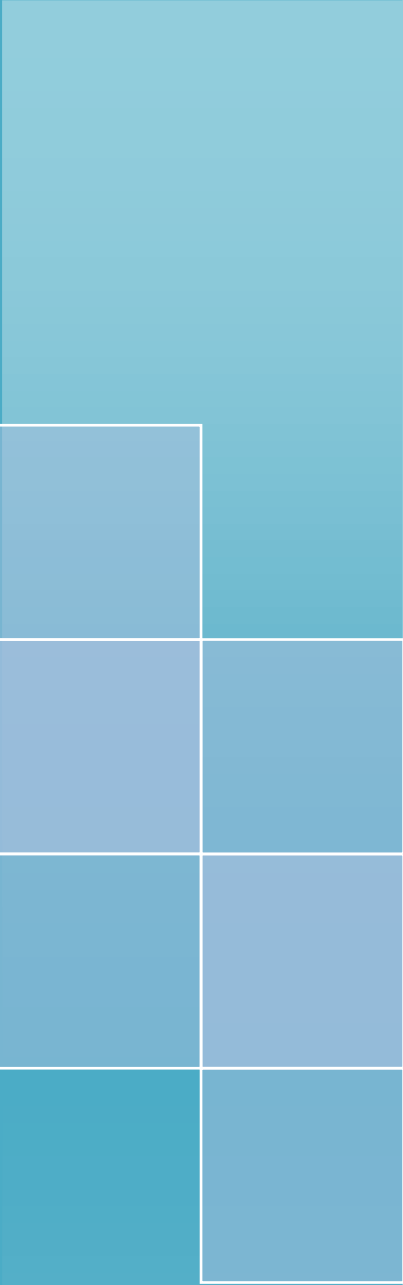
8.3 Discusión

De los resultados obtenidos en los experimentos desarrollados para analizar la robustez de la apertura se puede observar que la MMD posee menor error que la MM para los EE de dimensión 3×3 y 7×7 , con alguna excepción. Cuando la dimensión del EE es de 11×11 , los operadores de la MMD siguen presentado errores menores, salvo para el nivel de ruido del 3%. En este último caso, las normas “Acotada” y “Drástica” muestran un error mayor al de la MM. Cuando la dimensión del EE es de 15×15 , sólo las normas “Algebraica” y “Hamacher” presentan errores menores que la MM para todos los niveles de ruido trabajados, mientras que las normas “Estándar” y “Dubois and Prade” lo hacen para los niveles de ruido mayores al 3%.

A partir de estos resultados se puede concluir que, para el tipo de imagen y ruido analizados, las normas “Algebraica” y “Hamacher” son las que presentan el mejor comportamiento cuando la dimensión del EE es de 3×3 y sólo la norma “Hamacher” es la que muestra el mejor desempeño para las demás dimensiones del EE estudiadas. Es importante destacar que los valores de error obtenidos en la MM no siempre resultaron ser los mayores. Fueron mayores en un 66,67% de los casos, mientras que en el 33,33% restante los mayores errores fueron obtenidos con las normas “Drástica” y “Dubois and Prade”.

En los resultados obtenidos para el cierre se encontraron, en la MMD, algunas normas para la cuales el error cometido fue menor y otras para la cuales el error fue mayor al de la MM. Cuando se utilizó un EE de dimensión 3×3 , la norma “Hamacher” tuvo un mejor rendimiento dado que el error obtenido por dicha norma fue el menor. Las normas “Acotada” y “Drástica” presentaron un error mayor al de la MM. El comportamiento de los errores obtenido para los EE de dimensión 7×7 , 11×11 y 15×15 fueron similares al anterior para las normas que presentaron mayor error. Sin embargo, las normas que menor error arrojaron fueron la “Estándar” y “Dubois and Prade”. Cabe destacar que para estos experimentos la MM no fue la que presentó el mayor error en la totalidad de los casos analizados.

La conclusión de este capítulo es que, bajo las condiciones experimentales planteadas, existen filtros morfológicos de la MMD que presentan mayor robustez frente al ruido que los filtros de la MM para el tipo de imágenes y ruido utilizados. Esto significa que la presencia de ruido en la imagen original afecta menos a algunos filtros morfológicos difusos que a los filtros morfológicos clásicos.



Capítulo 9

**Resultados:
Eliminación de ruido
por medio de filtros
secuenciales alternados**

Capítulo 9

Resultados: Eliminación de ruido por medio de filtros secuenciales alternados

El objetivo de este capítulo es determinar la capacidad de filtrado de ruido y de la conservación de las estructuras de la imagen bajo estudio a través de la aplicación de los filtros morfológicos secuenciales alternados de la MM y la MMD. Dichos filtros tienen la potencialidad de filtrar componentes irrelevantes de pequeño tamaño sin afectar en gran medida la forma y tamaño original de los demás objetos de la imagen. Teniendo presente las características propias de los filtros, se espera que la aplicación de éstos permita eliminar el ruido y mantener las estructuras de la imagen lo más parecidas a la imagen original. Además, debido a que los filtros dependen del EE utilizado tanto en forma como en tamaño, se diseñaron distintos experimentos variando la dimensión del mismo.

En la sección 9.1 se detallan los experimentos realizados, para luego, en la sección 9.2, presentar los resultados obtenidos. Por último, en la sección 9.3, se realiza una discusión de dichos resultados.

9.1 Materiales y métodos

Para satisfacer el objetivo mencionado anteriormente, se comparan las imágenes originales (imágenes sin ruido agregado) con las imágenes ruidosas procesadas mediante estos filtros. En estos experimentos se aplicaron los operadores de apertura-cierre y cierre-apertura, manteniendo el tamaño del EE utilizado en la aplicación sucesiva de los filtros básicos. En la Figura 9.1 se presenta el esquema del diseño experimental desarrollado para la aplicación de los filtros secuenciales alternados.

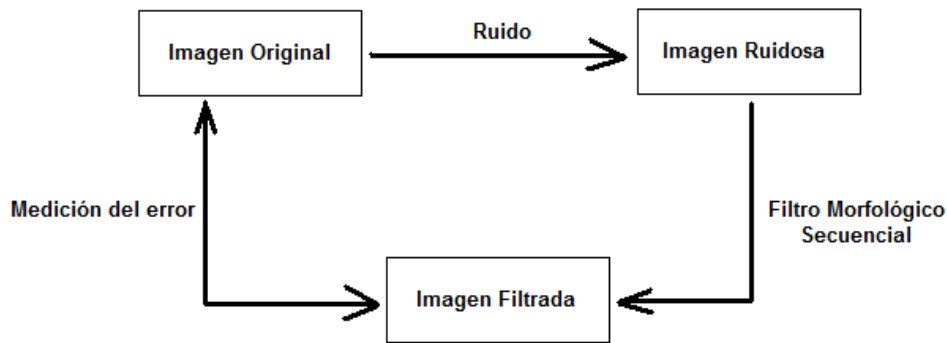


Figura 9.1: Esquema del diseño de los experimentos.

En estos experimentos se utilizan EE de dimensión 3×3 , 7×7 y 11×11 . Como medida cuantitativa, para determinar la calidad de los filtros en base a los resultados obtenidos en cada experimento, se midió el error cuadrático medio y su desviación estándar entre los valores de la imagen original y los valores de la imagen ruidosa filtrada. A diferencia de los experimentos de los capítulos anteriores, el objetivo de los filtros que se aplican en estos experimentos es la eliminación del ruido.

Ambos experimentos, usando apertura-cierre y cierre-apertura, se diseñaron de manera tal de poder comparar los operadores de la MM y de la MMD. De esta manera, se pueden determinar cuál de las teorías presenta mejores resultados, así también, se puede comparar entre las diferentes alternativas, t-normas y s-normas, utilizadas en la MMD.

Las imágenes utilizadas fueron las mismas que se utilizaron en el capítulo 8, imágenes de RM simuladas obtenidas de la base de datos “*Simulated Brain Database*”. Las t-normas y s-normas usadas son las mencionadas en la tabla 7.1. El parámetro γ , que requieren las normas “*Hamacher*” y “*Dubois and Prade*”, que se utilizó es 0.2 el cual se determinó de forma heurística.

9.2 Resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos. A modo de ejemplo en la Figura 9.2 se muestran algunas imágenes procesadas por el filtro apertura-cierre usando un EE de tamaño 3×3 . En la primera fila se muestra la imagen original. En la segunda fila se muestran las imágenes procesadas por el filtro apertura-cierre difuso, usando la norma “*Hamacher*”, de las imágenes inmersas en ruido utilizando un nivel de ruido del 3%, 7% y 9% respectivamente.

En la tercera fila se muestran las imágenes procesadas por el filtro apertura-cierre clásico de las imágenes ruidosas. En la Figura 9.5 se muestran algunas imágenes procesadas por el filtro cierre-apertura usando un EE de tamaño 3×3 . Para el caso de la MMD, se muestran los resultados de aplicar el filtro cierre-apertura usando la norma “*Hamacher*”.

Las Tablas 9.1 a 9.6 muestran los resultados de aplicar los diferentes filtros secuenciales alternados, basados en las diferentes definiciones (MM y MMD) y para diferentes niveles de ruido. Cada tabla muestra los resultados para un tamaño del EE utilizado. Las primeras tres tablas muestran los resultados para el filtro secuencial alternado apertura-cierre, y las siguientes tres muestran los resultados para el filtro secuencial alternado cierre-apertura. Los números resaltados con sombra oscura muestran los mejores valores obtenidos (mínimo error), mientras que los números resaltados con sombra clara muestran los peores valores obtenidos (máximo error).

Las Figuras 9.3 y 9.6 muestran gráficamente los mismos resultados, para los filtros apertura-cierre y cierre-apertura respectivamente, agregando las líneas verticales que indican la varianza del error (sobre las 149 imágenes).

En las Figuras 9.4 y 9.7 se exponen los diagramas de cajas realizados para cada nivel de ruido. Estos diagramas muestran los errores comparando los filtros secuenciales alternados de la MM y de la MMD. En el caso del filtro apertura-cierre (Figura 9.4) las normas graficadas para la MMD son “*Estándar*” y “*Drástica*”, mientras que en el caso del filtro cierre-apertura (Figura 9.7) se graficaron las normas “*Acotada*” y “*Dubois and Prade*”. Estos diagramas incluyen todos los tamaños del EE utilizados.

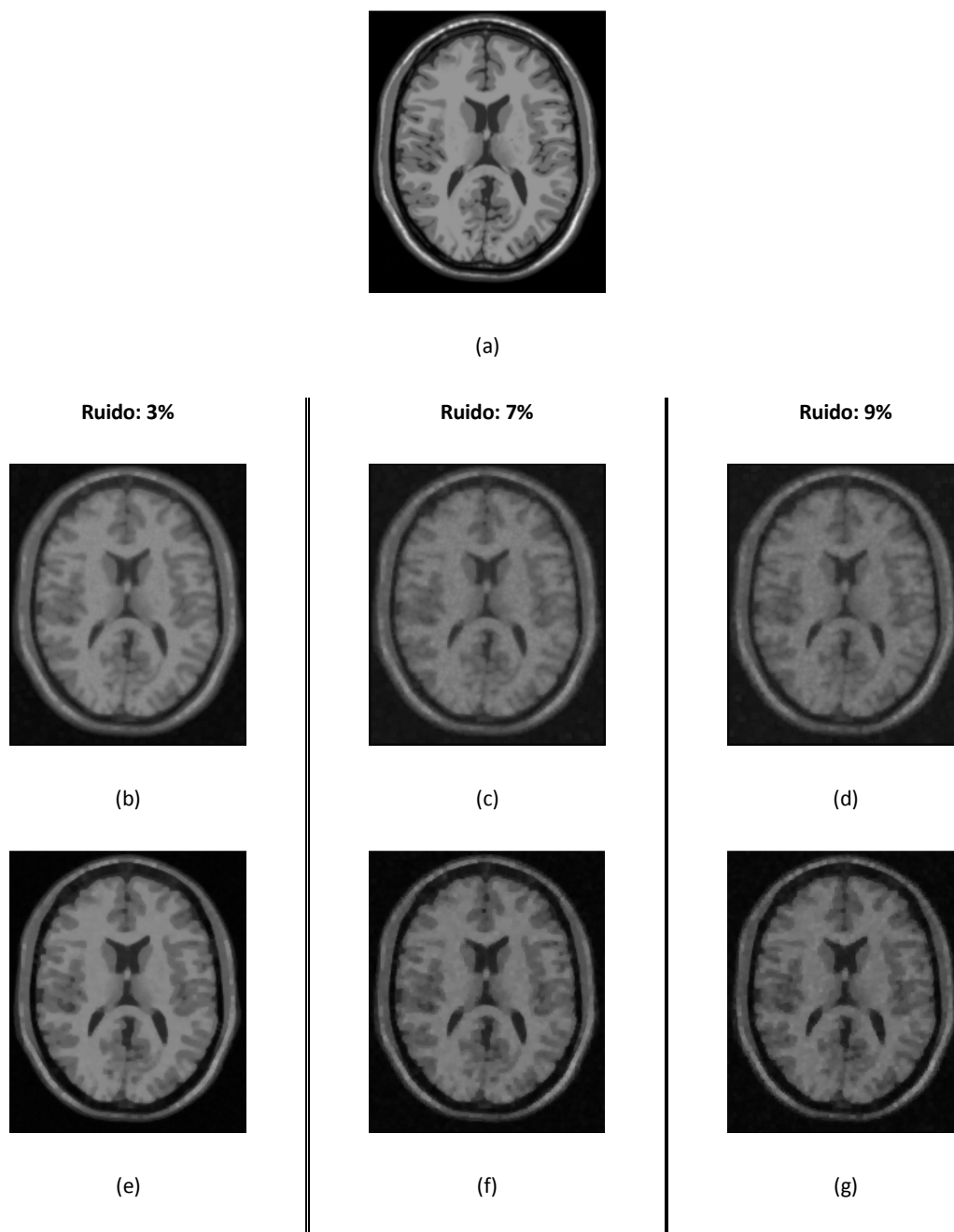


Figura 9.2: Visualización de los resultados del filtro apertura-cierre. (a) Imagen original. (b)-(c)-(d) Resultado de la aplicación del filtro apertura-cierre difuso usando la norma "Hamacher" de las imágenes inmersas en ruido (3%, 7% y 9% respectivamente). (e)-(f)-(g) Resultado de la aplicación del filtro apertura- cierre clásico de las imágenes inmersas en ruido (3%, 7% y 9% respectivamente).

Tabla 9.1: Matriz de errores para el filtro apertura-cierre usando un EE de 3×3

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.009333	0.013334	0.010233	0.0059461	0.0034989	0.0099782	0.015602
7	0.02148	0.019655	0.022612	0.015542	0.01206	0.021839	0.021128
9	0.031221	0.025347	0.032397	0.023802	0.01874	0.031544	0.026159

Tabla 9.2: Matriz de errores para el filtro apertura-cierre usando un EE de 7×7

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.048276	0.02346	0.054128	0.0085829	0.0038917	0.054124	0.034772
7	0.068856	0.02896	0.059627	0.018597	0.012435	0.059082	0.038448
9	0.084076	0.034094	0.06463	0.027109	0.019102	0.063746	0.042225

Tabla 9.3: Matriz de errores para el filtro apertura-cierre usando un EE de 11×11

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.099866	0.024478	0.061889	0.0098545	0.0052201	0.061898	0.035618
7	0.12416	0.029973	0.066381	0.019797	0.013702	0.065882	0.039308
9	0.14114	0.035098	0.070429	0.028258	0.020325	0.06961	0.043088

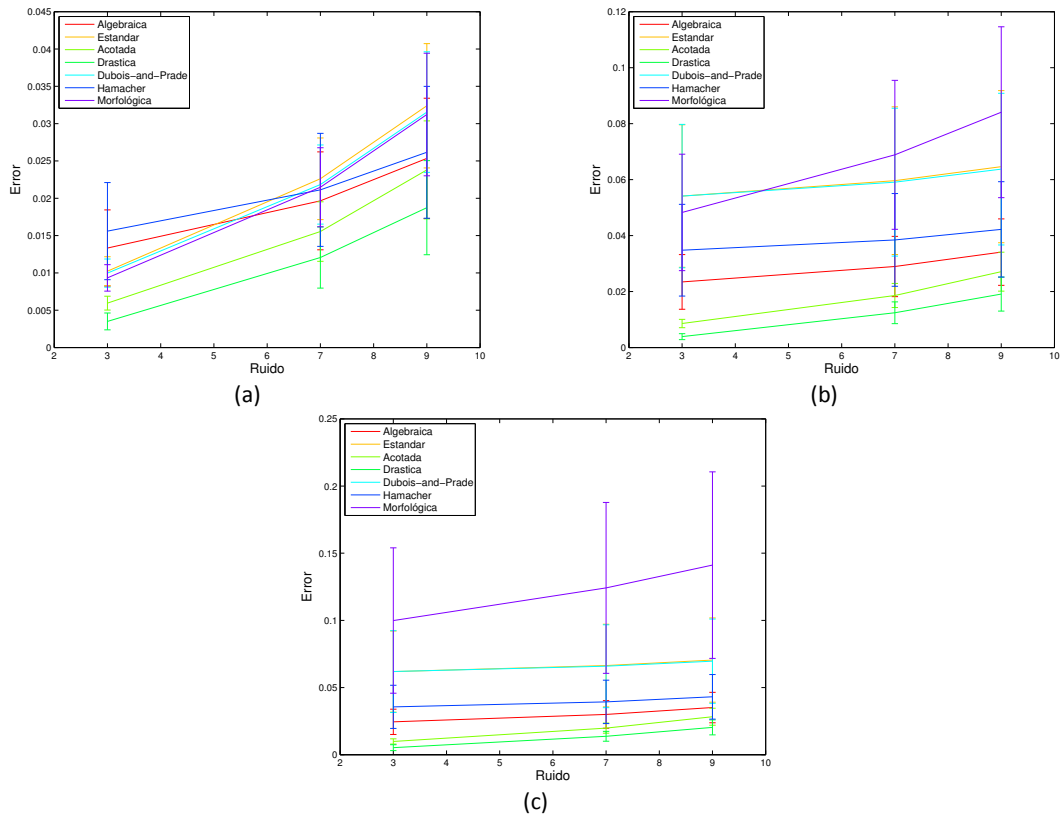


Figura 9.3: Gráficos de los errores para el filtro apertura-cierre. (a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

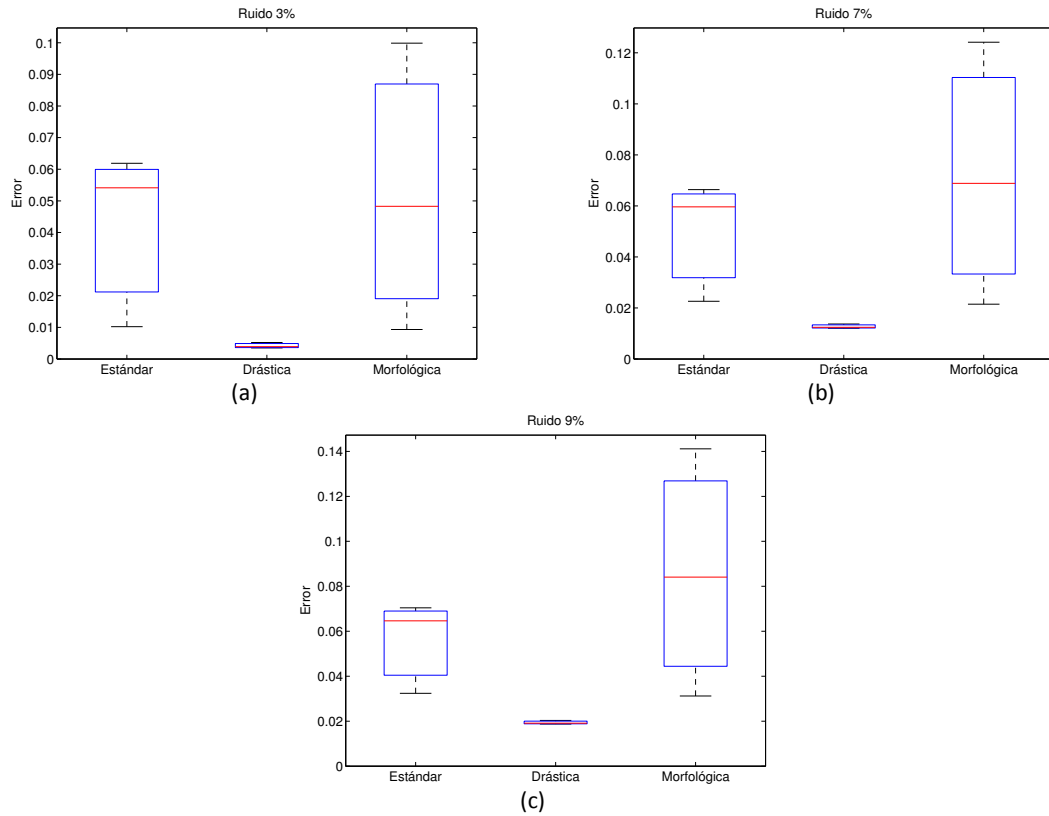


Figura 9.4: Diagramas de cajas para el filtro apertura-cierre. (a) Ruido: 3%. (b) Ruido: 7%. (c) Ruido: 9%.

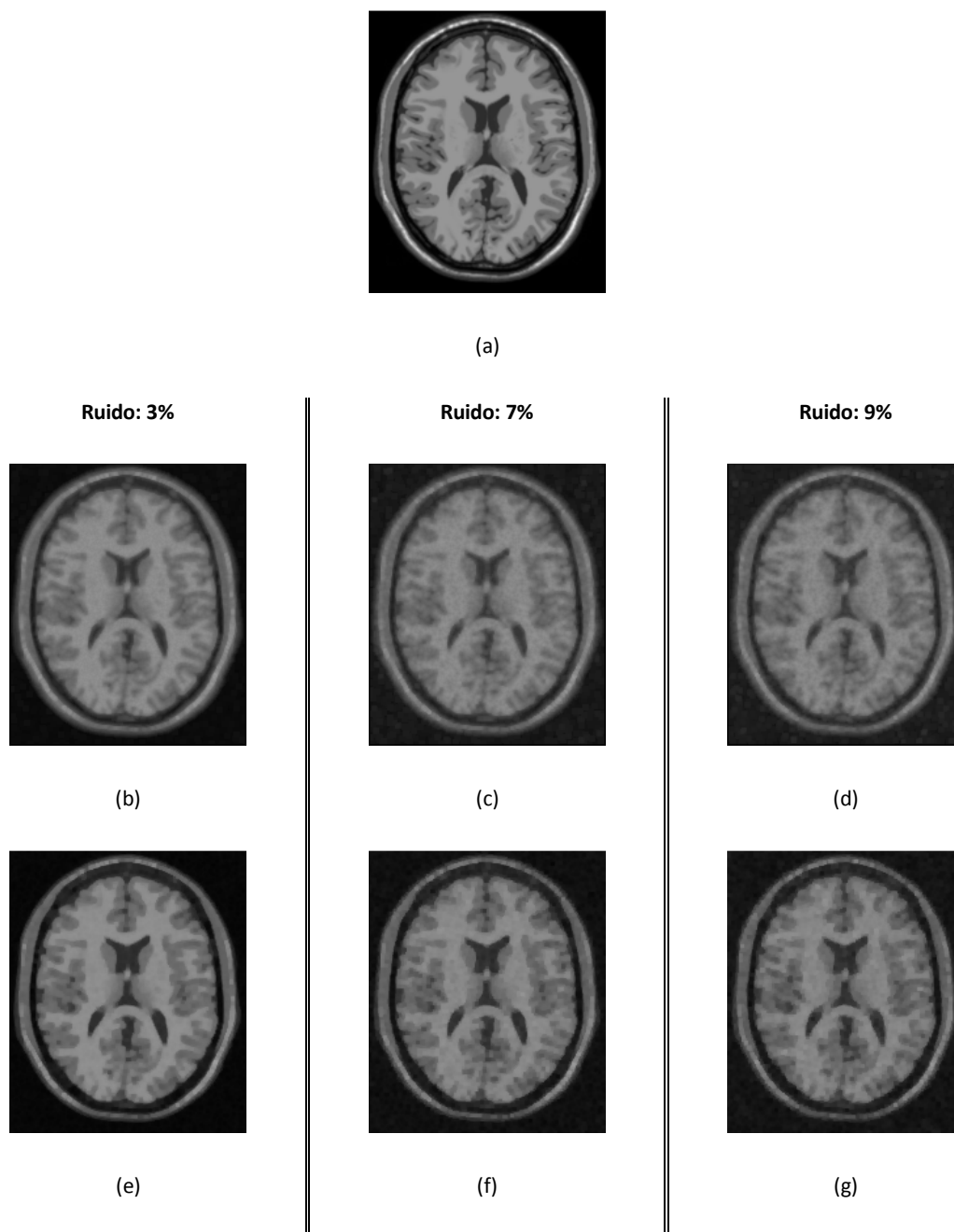


Figura 9.5: Visualización de los resultados del filtro cierre-apertura. (a) Imagen original. (b)-(c)-(d) Resultado de la aplicación del filtro cierre-apertura difuso usando la norma "Hamacher" de las imágenes inmersas en ruido (3%, 7% y 9% respectivamente). (e)-(f)-(g) Resultado de la aplicación del filtro cierre-apertura clásico de las imágenes inmersas en ruido (3%, 7% y 9% respectivamente).

Tabla 9.4: Matriz de errores para el filtro cierre-apertura usando un EE de 3×3

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.0070863	0.013027	0.007821	0.0051102	0.0034989	0.00772	0.015408
7	0.011419	0.016323	0.012234	0.0099145	0.01206	0.01205	0.01851
9	0.014667	0.01875	0.015517	0.013218	0.01874	0.015273	0.020848

Tabla 9.5: Matriz de errores para el filtro cierre-apertura usando un EE de 7×7

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.0334	0.024381	0.053533	0.0060369	0.0038917	0.053974	0.037509
7	0.035177	0.026265	0.054525	0.010191	0.012435	0.054943	0.038857
9	0.036502	0.027735	0.055199	0.013127	0.019102	0.055558	0.039847

Tabla 9.6: Matriz de errores para el filtro cierre-apertura usando un EE de 11×11

% R	MM	MMD: t-norma y s-norma utilizada					
		Algebraica	Estándar	Acotada	Drástica	D&P	Hamacher
3	0.054246	0.025397	0.062889	0.0074885	0.0052201	0.063394	0.038436
7	0.054909	0.027226	0.063798	0.011528	0.013702	0.06423	0.039718
9	0.055439	0.028663	0.064452	0.014427	0.020325	0.064807	0.040674

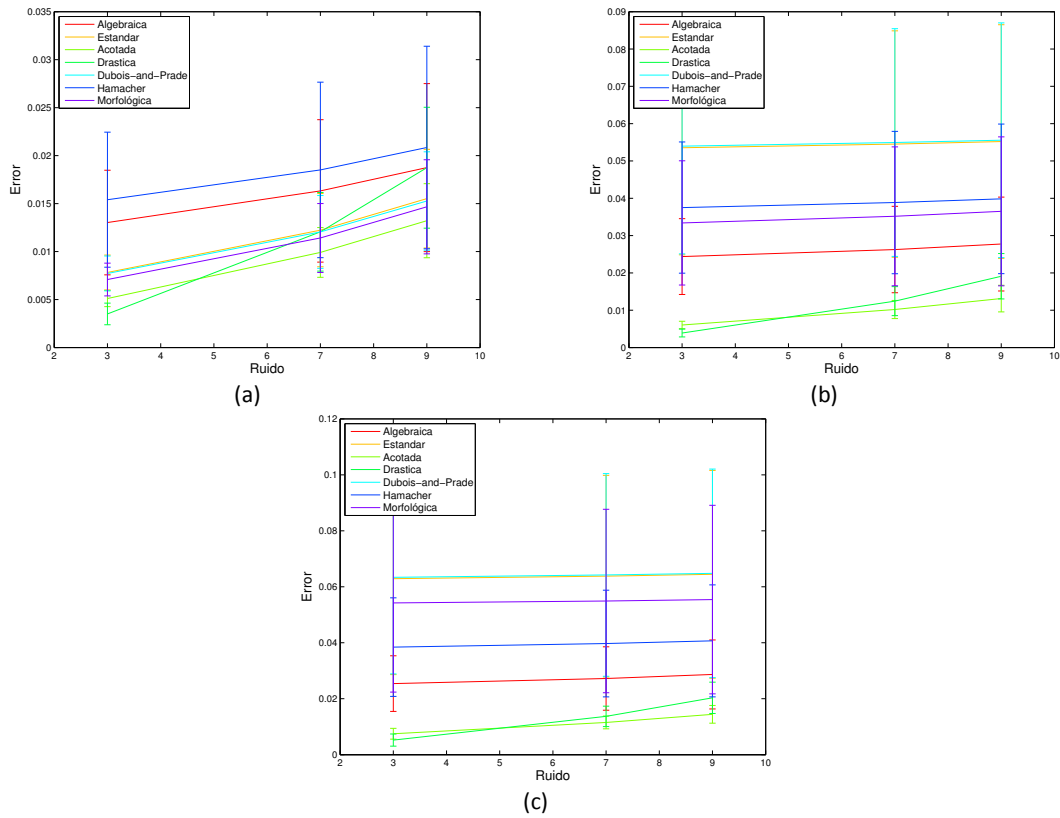


Figura 9.6: Gráficos de los errores para el filtro cierre-apertura.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

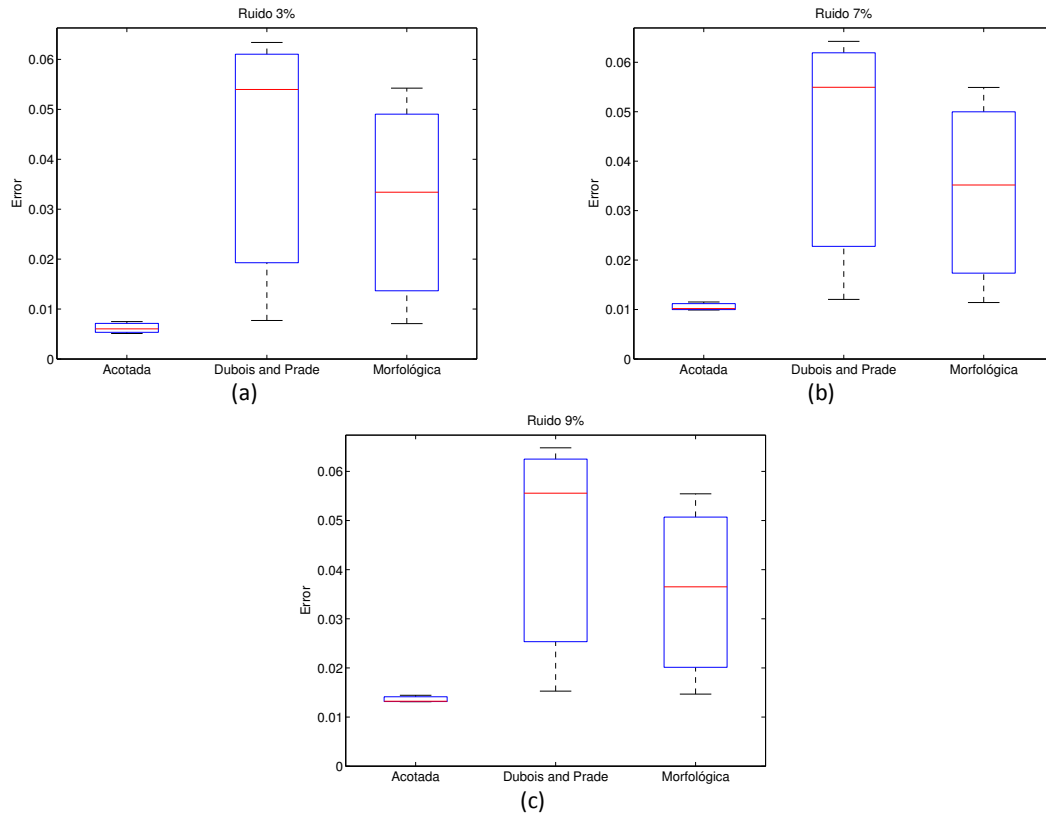


Figura 9.7: Diagramas de cajas para el filtro cierre- apertura. (a) Ruido: 3%. (b) Ruido: 7%. (c) Ruido: 9%.

9.3 Discusión

9.3.1 Filtro apertura-cierre

De los resultados obtenidos en los experimentos, analizando la eliminación del ruido a través del filtro secuencial alternado apertura-cierre, se puede observar que la aplicación del filtro de la MMD usando las normas “*Drástica*” y “*Acotada*” poseen menor error que la aplicación del filtro de la MM cuando se utiliza un EE de 3×3 . Cuando el EE es de 7×7 los errores obtenidos para la MMD usando las normas “*Algebraica*”, “*Hamacher*” y las nombradas anteriormente son menores a los obtenidos con el filtro de la MM. Cuando la dimensión del EE es de 11×11 los resultados obtenidos con todas las normas en la MMD son mejores que los de la MM.

En las imágenes filtradas, cuando se utiliza un EE de tamaño 3×3 , se visualiza una aparente eliminación total del ruido por parte del filtro de la MM. Cuando el tamaño del EE utilizado es mayor, la MM presenta una degradación de las estructuras presentes en la imagen, por lo que se obtienen imágenes totalmente distorsionadas. La gran ventaja de la MMD es que en las imágenes filtradas por cualquier tamaño del EE se mantienen distinguibles las estructuras que conforman la imagen, por lo que se hace notoria la superioridad del filtro definido en esta morfología respecto del aquel de la morfología clásica (Ver Figura 9.8 para un EE de 11×11).

En todas las condiciones experimentales, es decir, para todos los tamaños del EE usados y las imágenes analizadas, el filtro apertura-cierre que mejor desempeño mostró es el de la MMD utilizando la norma “*Drástica*”. Es importante destacar que los valores de error obtenidos en la MM no siempre resultaron ser los mayores. Fueron mayores en un 55,56% de los casos, mientras que en un 33,33% de los casos los mayores errores fueron obtenidos por la norma “*Estándar*” y el 11,11% restante por la norma “*Hamacher*”. En la Tabla 9.7 se muestran los porcentajes de error del filtro apertura-cierre de la MMD usando la norma “*Drástica*” y de la MM con el objeto de mostrar la notoria superioridad de este filtro difuso.



Figura 9.8: Visualización de los resultados del filtro apertura-cierre con un EE de 11×11 . (a) Resultado de la aplicación del filtro apertura-cierre difuso usando la norma "Hamacher". (b) Resultado de la aplicación del filtro apertura-cierre clásico.

Tabla 9.7: Porcentaje de error del filtro apertura-cierre Drástica vs MM

		% Ruido		
		3	7	9
EE	3×3	Drástica		
		0.35 %	1.21 %	1.87 %
		MM		
		0.93 %	2.15 %	3.12 %
	7×7	Drástica		
		0.39 %	1.24 %	1.91 %
		MM		
		4.83 %	6.89 %	8.41 %
	11×11	Drástica		
		0.52 %	1.37 %	2.03 %
		MM		
		9.99 %	12.42 %	14.11 %

9.3.2 Filtro cierre-apertura

En los resultados obtenidos para analizar la eliminación del ruido a través del filtro secuencial alternado cierre-apertura se puede observar que la aplicación del filtro de la MMD usando la norma "Acotada" posee menor error que la aplicación del filtro de la MM cuando se utiliza un EE de 3×3 . Cuando el EE es de 7×7 los errores obtenidos para la MMD usando las normas "Drástica", "Algebraica" y la nombrada anteriormente son menores a los obtenidos con el filtro de la MM. Cuando la dimensión del EE es de 11×11 los resultados obtenidos con todas las normas en la MMD, salvo para las normas "Estándar" y "Dubois and Prade", son mejores que los de la MM.

En las imágenes filtradas, cuando el EE es de 3×3 , se visualiza una aparente eliminación del ruido por parte del filtro de la MM. Cuando el tamaño del EE utilizado es mayor la MM presenta una degradación de las estructuras presentes en la imagen por lo que se obtienen

imágenes distorsionadas. A medida que el nivel de ruido aumenta se observa que las imágenes filtradas son más oscuras, tanto para la MM como para la MMD, haciéndose menos distinguibles las estructuras presentes en las mismas. Este comportamiento se evidencia para todos los tamaños del EE utilizados (Ver Figura 9.9 para un EE de 11×11).

La norma “*Drástica*” muestra el mejor desempeño cuando el nivel de ruido es del 3% para todas las dimensiones del EE estudiadas. Para los niveles de ruido del 7% y 9% la norma que mejor comportamiento presenta es la norma “*Acotada*”. En estos experimentos los valores de error obtenidos en la MM nunca fueron los mayores, siendo la norma “*Hamacher*” la que mostró el peor desempeño para todos los niveles de ruido cuando se usó un EE de 3×3 y la norma “*Dubois and Prade*” cuando se utilizaron EE de tamaño 7×7 y 11×11 . En la Tabla 9.8 se muestran los porcentajes de error del filtro cierre-apertura de la MMD usando la norma “*Acotada*” y de la MM con el objeto de mostrar la notoria superioridad de este filtro difuso.



Figura 9.9: Visualización de los resultados del filtro cierre- apertura con un EE de 11×11 . (a) Resultado de la aplicación del filtro cierre- apertura difuso usando la norma “*Hamacher*”. (b) Resultado de la aplicación del filtro cierre- apertura clásico.

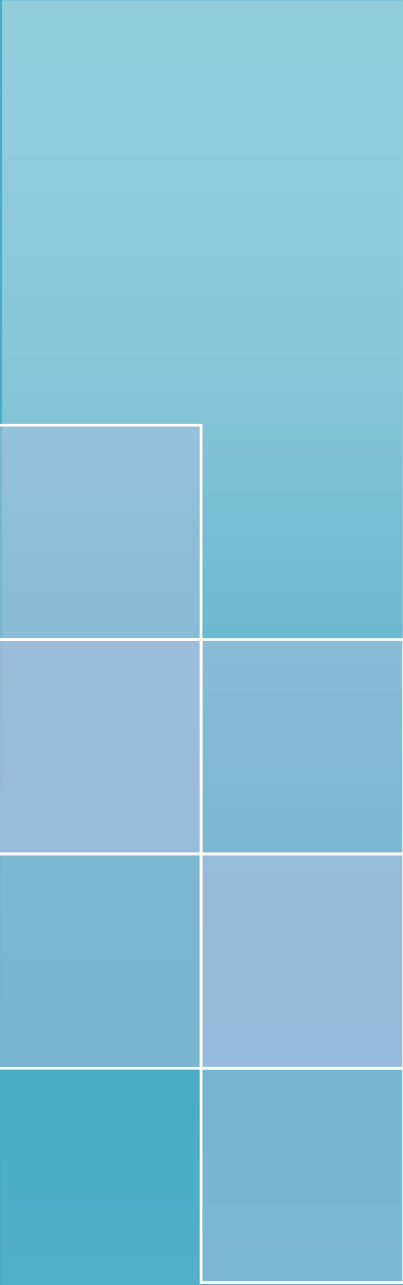
Tabla 9.8: Porcentaje de error del filtro cierre-apertura Acotada vs MM

		% Ruido		
		3	7	9
EE	3×3	Acotada		
		0.51 %	0.99 %	1.32 %
		MM		
		0.71 %	1.14 %	1.47 %
	7×7	Acotada		
		0.6 %	1.02 %	1.31 %
		MM		
		3.34 %	3.52 %	3.65 %
	11×11	Acotada		
		0.75 %	1.15 %	1.44 %
		MM		
		5.42 %	5.49 %	5.54 %

9.3.3 Conclusiones

La conclusión de este capítulo es que, bajo las condiciones experimentales planteadas, existen filtros secuenciales alternados de la MMD que presentan mayor robustez frente al ruido que los filtros secuenciales alternados de la MM para el tipo de imágenes y ruido utilizados. Esto significa que algunos filtros secuenciales alternados difusos eliminan el ruido, conservando las estructuras de la imagen bajo estudio, con una notoria superioridad al desempeño de los filtros secuenciales alternados clásicos.

Es importante resaltar que no resulta conveniente utilizar un EE de dimensión mayor a 3×3 ya que no se logra mejoría alguna en los resultados obtenidos tanto para los filtros secuenciales alternados de la MMD como los de la MM. Además el costo computacional se incrementa notablemente a medida que aumenta la dimensión del EE.



Capítulo 10

**Resultados:
Robustez de
operadores para la
detección de bordes y
la aplicación del
Top-Hat**

Capítulo 10

Resultados: Robustez de operadores para la detección de bordes y la aplicación del Top-Hat

En este capítulo se muestran los resultados del análisis de robustez de los operadores para la detección de bordes y la aplicación del Top-Hat. Se analizan los distintos tipos de gradientes (gradiente por dilatación, gradiente por cierre y gradiente morfológico) y los distintos tipos de Top-Hat (Top-Hat por apertura y Top-Hat por cierre) de la Morfología Matemática Clásica y la Morfología Matemática Difusa.

En la sección 10.1 se detallan los experimentos realizados, para luego, en la sección 10.2, presentar los resultados obtenidos. Por último, en la sección 10.3, se realiza una discusión de dichos resultados.

10.1 Materiales y métodos

El objetivo de este capítulo es realizar un análisis comparativo de robustez entre los operadores de detección de bordes y la aplicación de la transformada Top-Hat de la MM y la MMD.

En las Figuras 10.1 y 10.2 se esquematizan los diseños experimentales desarrollados. Se diseñaron dos tipos de experimentos los cuales se dividen en dos partes. Para el primer tipo de experimentos, en primer lugar se aplica un operador morfológico a la imagen original obteniendo una primer imagen resultado. En segundo lugar se agrega ruido Gaussiano a la imagen original generando una nueva imagen (ruidosa) a la cual se le aplica el mismo operador morfológico, obteniendo de esta manera una segunda imagen resultado. Una vez concluidos estos pasos se calcula la diferencia (error) entre ambos resultados. El segundo tipo de experimentos se desarrolla de forma análoga con la diferencia de que no se agrega ruido Gaussiano a la imagen original sino que se la distorsiona mediante un filtro de convolución, el cual realiza un suavizado de la imagen (González & Woods, 1996).

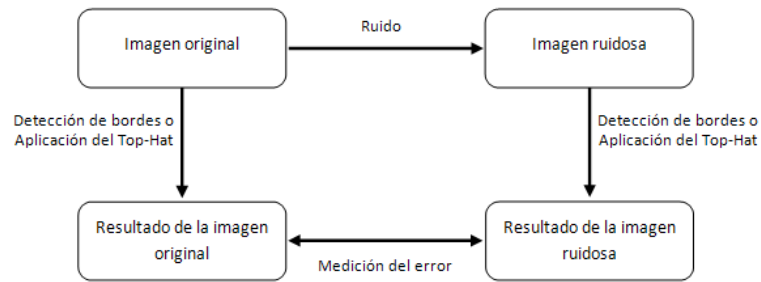


Figura 10.1: Esquema del diseño de los experimentos en los cuales se utilizó ruido.

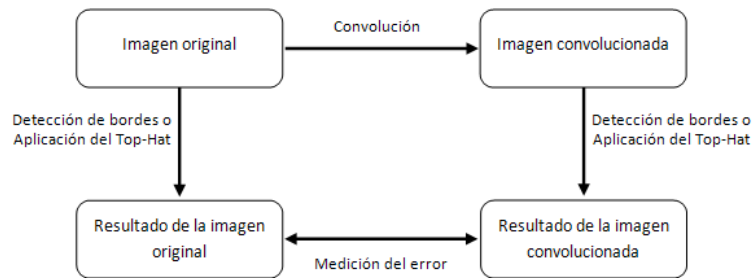


Figura 10.2: Esquema del diseño de los experimentos en los cuales se utilizó la convolución.

El objetivo es el de determinar o cuantificar, comparativamente, cuanto se deteriora la detección de bordes ante la presencia de ruido o distorsión para los operadores de la MM y MMD.

En cada experimento se comparó la diferencia entre los bordes detectados o la aplicación del Top-Hat en las imágenes originales y en las imágenes ruidosas o distorsionadas, para cinco operadores difusos y el operador morfológico clásico. Cada operador difuso queda definido por la t-norma y s-norma empleada. Se utilizaron doce imágenes y la medida de error usada fue el error cuadrático medio, sobre los valores de intensidad de los píxeles.

A continuación sigue un detalle de los experimentos:

- **Imágenes:** Se utilizaron doce imágenes, las cuales corresponden a distintos tipos de imágenes biomédicas, en las cuales es de interés determinar los bordes de los objetos que las componen y/o detectar objetos localmente brillantes u oscuros mediante la aplicación del operador Top-Hat para un posterior análisis. En la Figura 10.3 se muestran algunas de las imágenes empleadas las cuales se detallan a continuación:

- Imagen (a): imagen de metalurgia, está compuesta por acero con inclusiones de perlita.
 - Imagen (b): colonia de bacterias, caracterizadas por poseer forma esférica.
 - Imagen (c): polímeros.
 - Imágenes (d) a (g): cerámicos con inclusiones de almidón de maíz para la primera, almidón de papa para las dos siguientes y almidón modificado para la última.
 - Imágenes (h) e (i): resonancia magnética de cerebros.
 - Imágenes (j) y (k): polímeros con inclusiones de aserrín.
 - Imagen (l): células tomadas por medio de un microscopio.
- MMD: Para los operadores de la MMD se usaron cinco t-normas y s-normas. Las normas utilizadas fueron la “Algebraica”, “Estándar”, “Acotada”, “Dubois and Prade” y “Hamacher”, mencionadas en la Tabla 7.1. La norma “Drástica” fue removida debido a su bajo desempeño en la detección de bordes (Ver Apéndice C).
 - Operadores: Se aplicaron los siguientes operadores:
 - Gradiente por dilatación: $grad_D(f, g) = D(f, g) - f$
 - Gradiente por erosión: $grad_E(f, g) = f - E(f, g)$
 - Gradiente morfológico: $grad_{E,D}(f, g) = D(f, g) - E(f, g)$
 - Top-Hat por apertura: $\rho_{apert}(f, g) = f - D(E(f, g), g)$
 - Top-Hat por cierre: $\rho_{cierre}(f, g) = E(D(f, g), g) - f$

Para el primer tipo de experimentos, que consisten en agregar ruido a la imagen original, se generó ruido Gaussiano $N(0, \sigma^2)$ que se adicionó a las imágenes utilizando los siguientes valores de varianza: $\sigma^2 = 50$, $\sigma^2 = 100$ y $\sigma^2 = 150$. Todos los cálculos se repitieron 100 veces donde la diferencia entre las distintas iteraciones reside en la aleatoriedad del ruido generado.

Para el segundo tipo de experimentos, que consisten en convolucionar la imagen original creando una imagen distorsionada, se utilizaron máscaras planas de convolución de dimensión 3×3 , 5×5 y 9×9 .

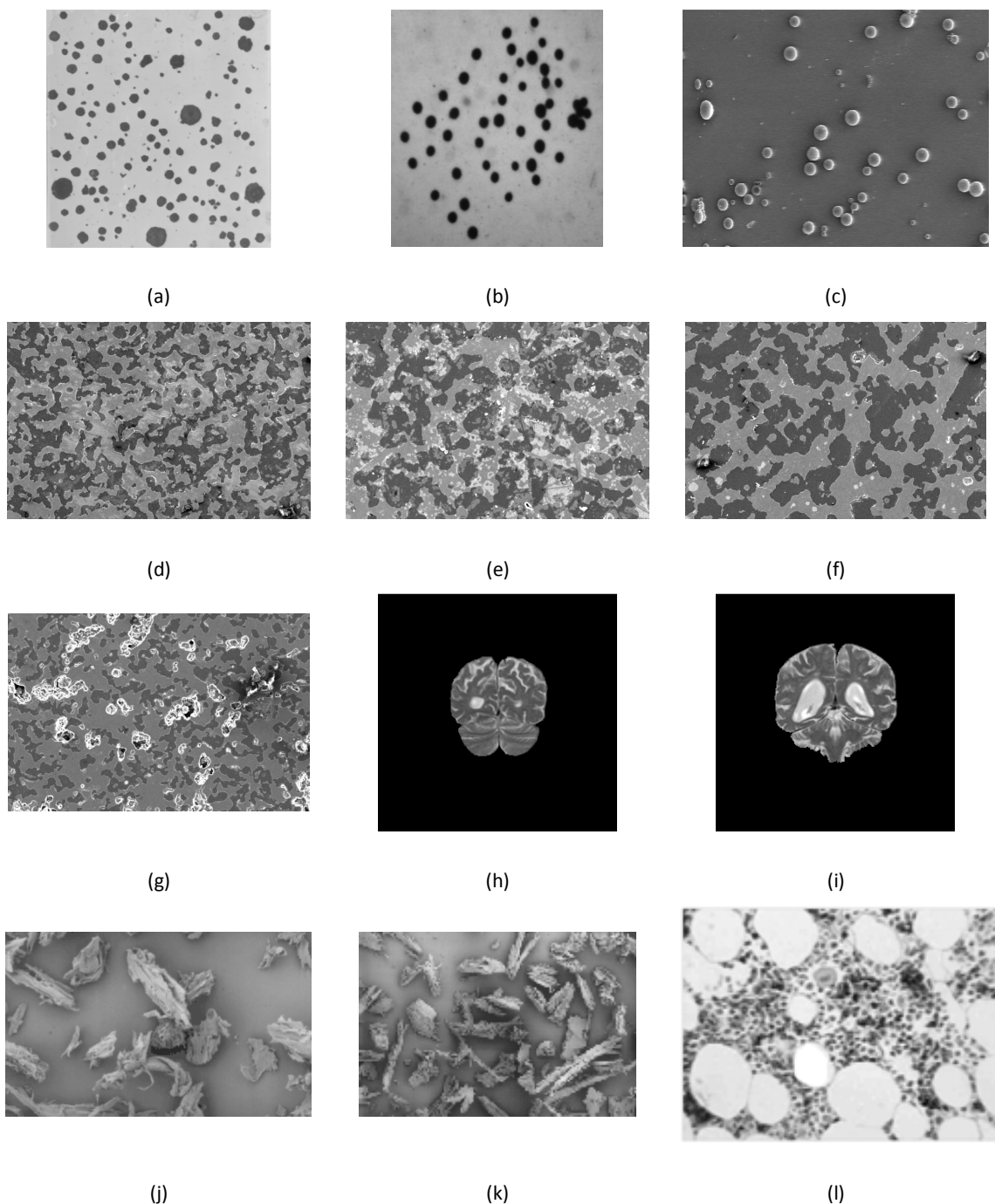


Figura 10.3: Imágenes utilizadas para desarrollar los experimentos.

- (a) Acero con inclusiones de perlita. (b) Colonia de bacterias con forma esférica. (c) Polímeros.
- (d) Cerámico con inclusiones de almidón de maíz. (e)-(f) Cerámicos con inclusiones de almidón de papa.
- (g) Cerámico con inclusiones de almidón modificado. (h)-(i) Resonancias magnéticas de cerebros.
- (j)-(k) Polímeros con inclusiones de aserrín. (l) Células tomadas con un microscopio.

Para analizar los resultados frente a diferentes condiciones, se varió la dimensión del elemento estructurante y se eligió un valor del parámetro γ asociado a algunas t-normas y s-normas. En total se diseñaron tres experimentos de la siguiente manera:

- **Dimensión del elemento estructurante:** En la MMD se utilizaron elementos estructurantes difusos de dimensiones 3×3 , 5×5 y 7×7 . Estos elementos son simétricos con forma de campana generados por una función Gausiana (ver Apéndice B). En la MM se utilizó un elemento estructurante plano de igual dimensión al utilizado en la MMD.
- **Parámetros de las normas:** Como se puede observar en las Tabla 1, las normas “Hamacher” y “Dubois and Prade” requieren un parámetro. Se utilizó $\gamma = 0.2$ el cual se determinó de forma heurística.

10.2 Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos. En la sección 10.2.1 se muestran los resultados de los experimentos en los cuales a la imagen original se le adicionó ruido Gaussiano, los cuales serán denominados “Experimentos utilizando ruido”. En la sección 10.2.2 se muestran los resultados de los experimentos en los cuales se distorsiono la imagen original, los cuales serán denominados “Experimentos utilizando la convolución”.

10.2.1 Resultados de los experimentos utilizando ruido

En primer lugar, a modo de ejemplo, en la Figura 10.4 se muestran algunas imágenes procesadas por los operadores bajo estudio utilizando un EE de dimensión 3×3 .

En las Tablas 10.1 a 10.15, se muestran las matrices de errores para los distintos operadores de detección de bordes y para los operadores Top-Hat. Estas matrices se generaron de la siguiente manera:

- Se calculó la media aritmética de los errores de las 100 iteraciones para cada imagen y cada varianza, obteniéndose un valor medio de error para cada norma. Con esto se obtuvo un error medio para cada imagen, varianza y norma.

- Para obtener un error medio para cada varianza y cada norma, se calculó la media aritmética de los errores sobre todas las imágenes para cada varianza y cada norma.
- Los errores medios obtenidos se presentan en las matrices de errores, con las varianzas como filas y las normas usadas como columnas. La última columna contiene los errores del operador morfológico clásico, para los tres valores de varianza. Los números resaltados con sombra oscura muestran los mejores valores obtenidos (mínimo error), mientras que los números resaltados con sombra clara muestran los peores valores obtenidos (máximo error).

En las Figuras 10.5, 10.7, 10.9, 10.11 y 10.13 se muestran gráficamente los resultados obtenidos. Las líneas representan el error cuadrático medio en función de la cantidad de ruido (varianza), para la MM y las distintas normas para los operadores de la MMD. Los segmentos verticales sobre las curvas de error, que se observan en las figuras, corresponden a las medias de las dispersiones de los errores.

En las Figuras 10.6, 10.8, 10.10, 10.12 y 10.14 se muestran los diagramas de cajas realizados para cada nivel de ruido generado, es decir, para cada valor de varianza utilizado. Estos diagramas visualizan gráficamente los errores comparando los operadores de la MM y dos operadores de la MMD, el de mayor y el de menor error. Cada diagrama incluye todos los tamaños del EE usados.

10.2.2 Resultados de los experimentos utilizando la convolución

En primer lugar, a modo de ejemplo, en la Figura 10.15 se muestran algunas imágenes procesadas por los operadores bajo estudio utilizando un EE de dimensión 3×3 .

En las Tablas 10.16 a 10.30, se muestran las matrices de errores para los distintos operadores de detección de bordes y para los operadores Top-Hat. Estas matrices se generaron de manera similar a las generadas en la sección anterior.

En las Figuras 10.16, 10.18, 10.20, 10.22 y 10.24 se muestran gráficamente los resultados obtenidos. Las líneas representan el error cuadrático medio en función de la dimensión de la

máscara de convolución, para la MM y las distintas normas para los operadores de la MMD. Los segmentos verticales sobre las curvas de error, que se observan en las figuras, corresponden a las medias de las dispersiones de los errores.

En las Figuras 10.17, 10.19, 10.21, 10.23 y 10.25 se muestran los diagramas de cajas realizados para cada dimensión de la máscara de convolución utilizada. Estos diagramas visualizan gráficamente los errores comparando los operadores de la MM y dos operadores de la MMD, el de mayor y el de menor error. Cada diagrama incluye todos los tamaños del EE usados.

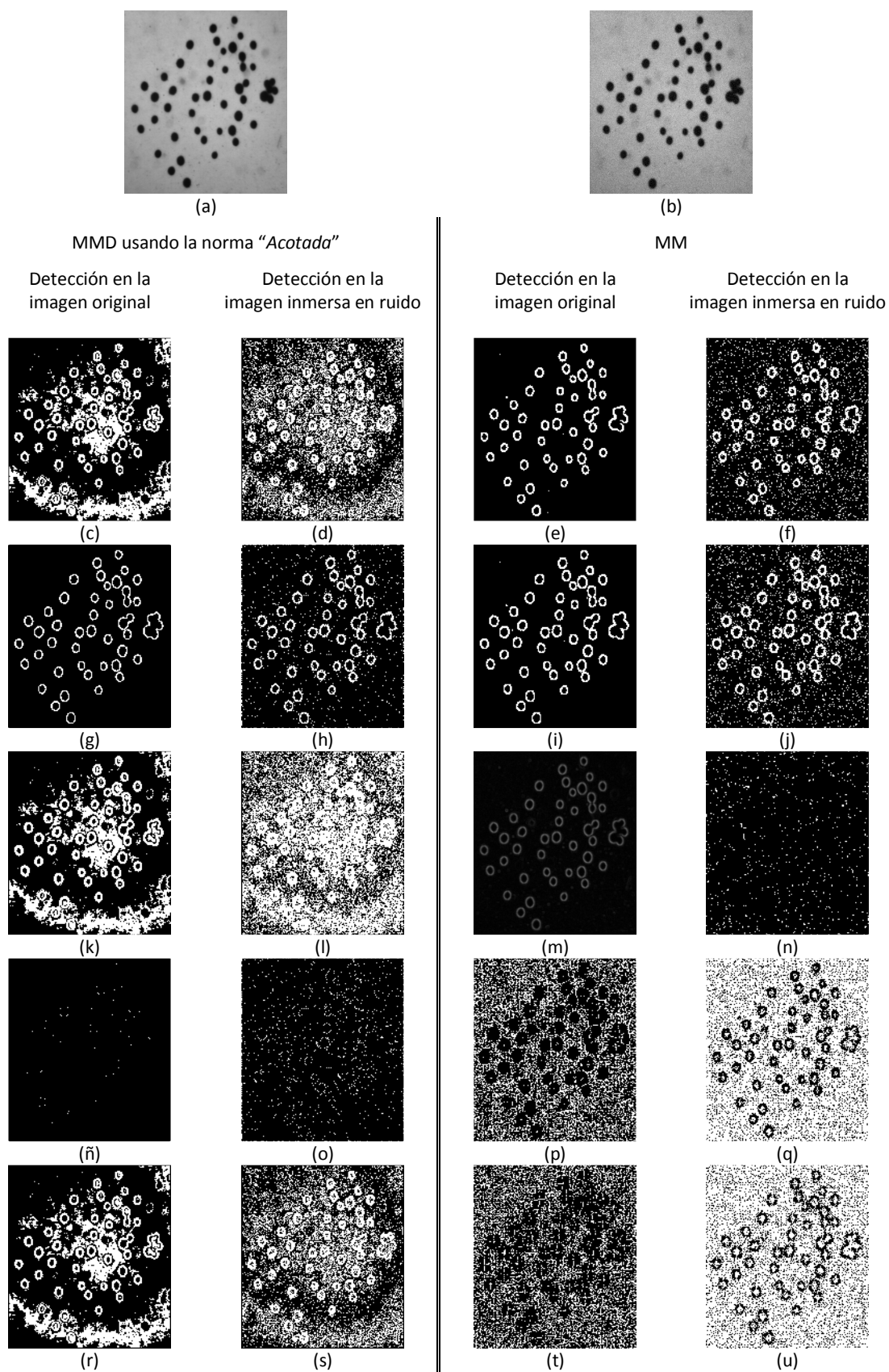


Figura 10.4: Visualización de los resultados de los experimentos utilizando ruido.
 (a) Imagen original. (b) Imagen inmersa en ruido utilizando una varianza igual a 50.
 (c)-(f) Gradiente por dilatación. (g)-(j) Gradiente por erosión. (k)-(n) Gradiente morfológico.
 (ñ)-(q) Top-Hat por apertura. (r)-(u) Top-Hat por cierre.

Tabla 10.1: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 3×3

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.00097137	0.002838	0.0009969	0.0028472	0.0011381	3.1725e-006
	100	0.0020707	0.0047205	0.0016289	0.0047321	0.0024342	5.0222e-006
	150	0.0032668	0.0065807	0.0024151	0.0065948	0.0037989	6.0549e-006

Tabla 10.2: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 7×7

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.0010797	0.0059647	0.0016734	0.0059884	0.0012165	3.6629e-006
	100	0.0021735	0.0083676	0.002201	0.0083974	0.0025854	5.5925e-006
	150	0.0033652	0.010731	0.0028915	0.010766	0.004023	6.4107e-006

Tabla 10.3: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 11×11

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.001096	0.0069757	0.0018092	0.0069982	0.0012379	3.8122e-006
	100	0.002176	0.0094224	0.0023238	0.0094512	0.002615	5.5268e-006
	150	0.0033533	0.011826	0.0029988	0.011861	0.0040555	6.0731e-006

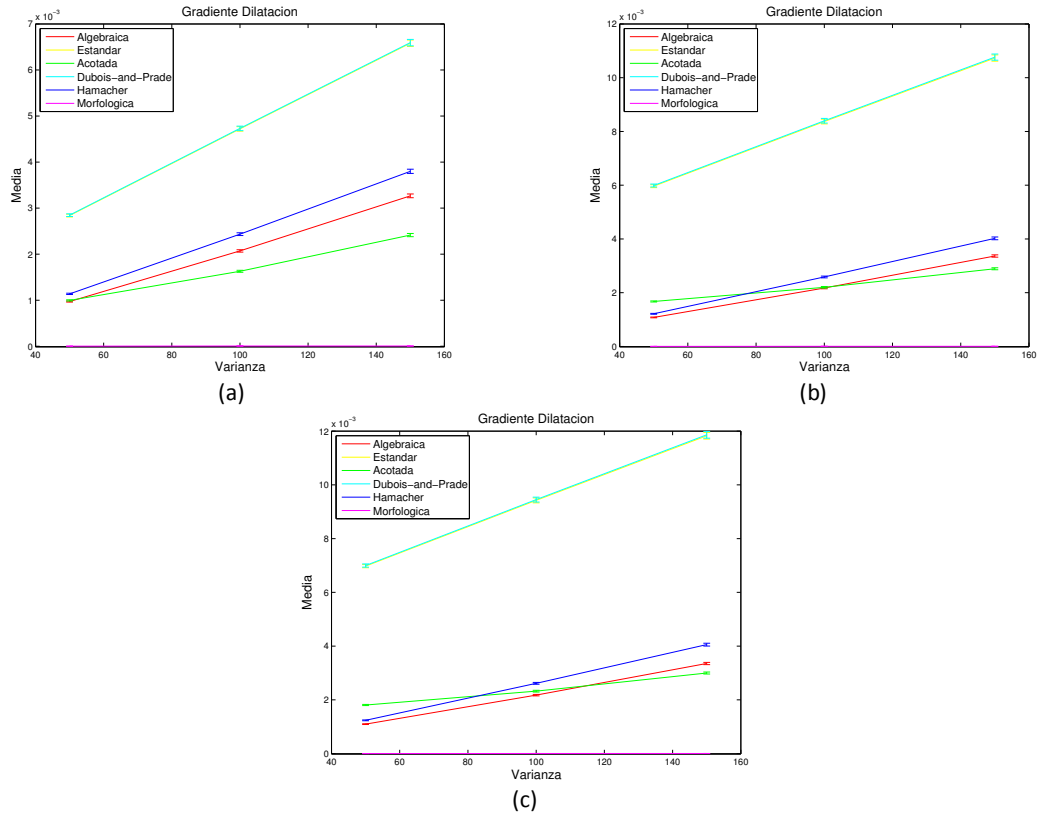


Figura 10.5: Gráficos de los errores del gradiente por dilatación.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

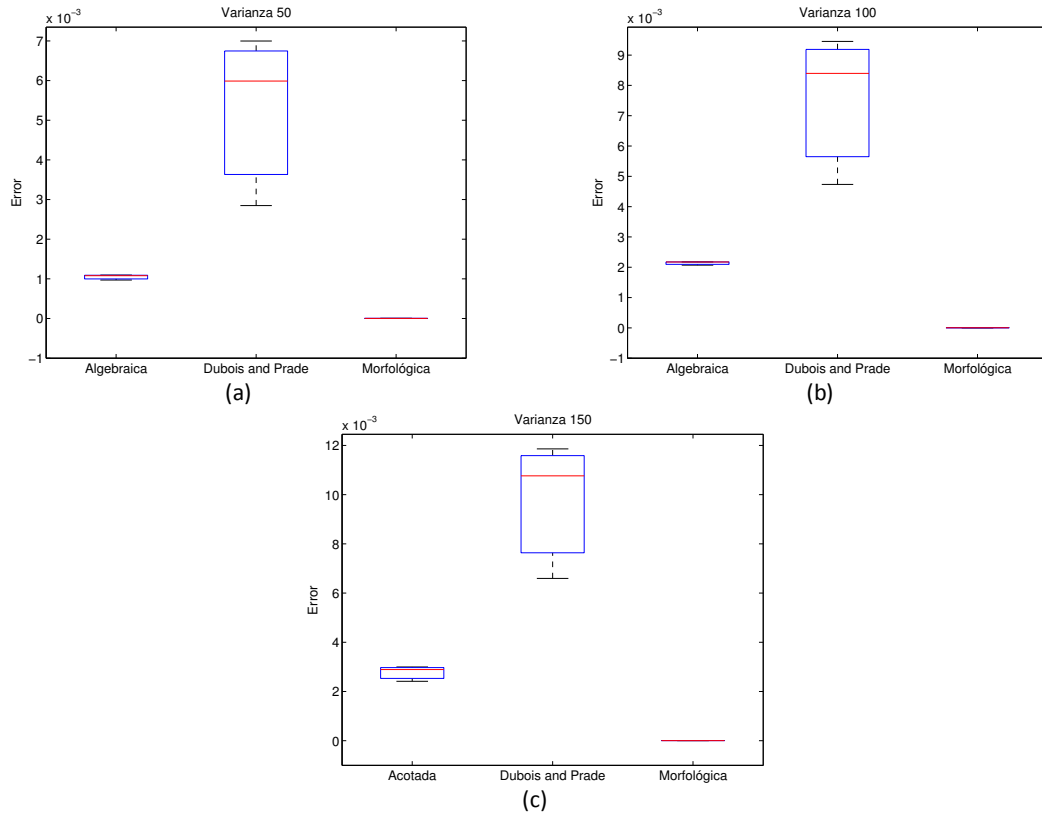


Figura 10.6: Diagramas de cajas para el gradiente por dilatación.
(a) Varianza: 50. (b) Varianza: 100. (c) Varianza: 150.

Tabla 10.4: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 3×3

σ^2		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	50	0.00092689	0.0027964	0.0012553	0.0027324	0.0011048	3.0539e-006
	100	0.0019897	0.0047527	0.0018379	0.0046699	0.0023751	4.582e-006
	150	0.0031483	0.0067012	0.0025813	0.006602	0.0037085	5.4161e-006

Tabla 10.5: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 7×7

σ^2		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	50	0.0010224	0.0066911	0.0027148	0.0065838	0.0010915	3.3227e-006
	100	0.0020223	0.0091856	0.0031518	0.0090603	0.0023677	4.5661e-006
	150	0.0031306	0.011637	0.0037485	0.011495	0.0037208	5.1627e-006

Tabla 10.6: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 11×11

σ^2		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	50	0.0010758	0.008016	0.0033175	0.0079098	0.0010589	3.0368e-006
	100	0.0020375	0.010499	0.0037107	0.010376	0.0022957	3.986e-006
	150	0.0031064	0.012931	0.0042625	0.012792	0.0036085	4.4225e-006

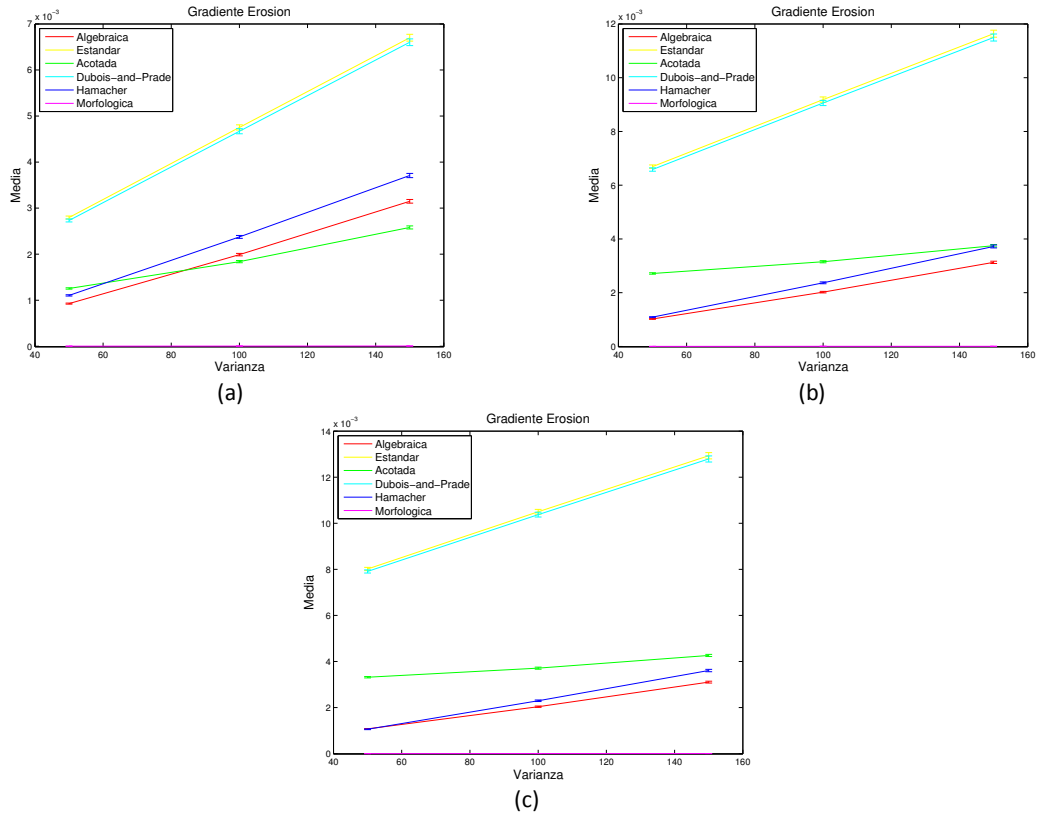


Figura 10.7: Gráficos de los errores del gradiente por erosión.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

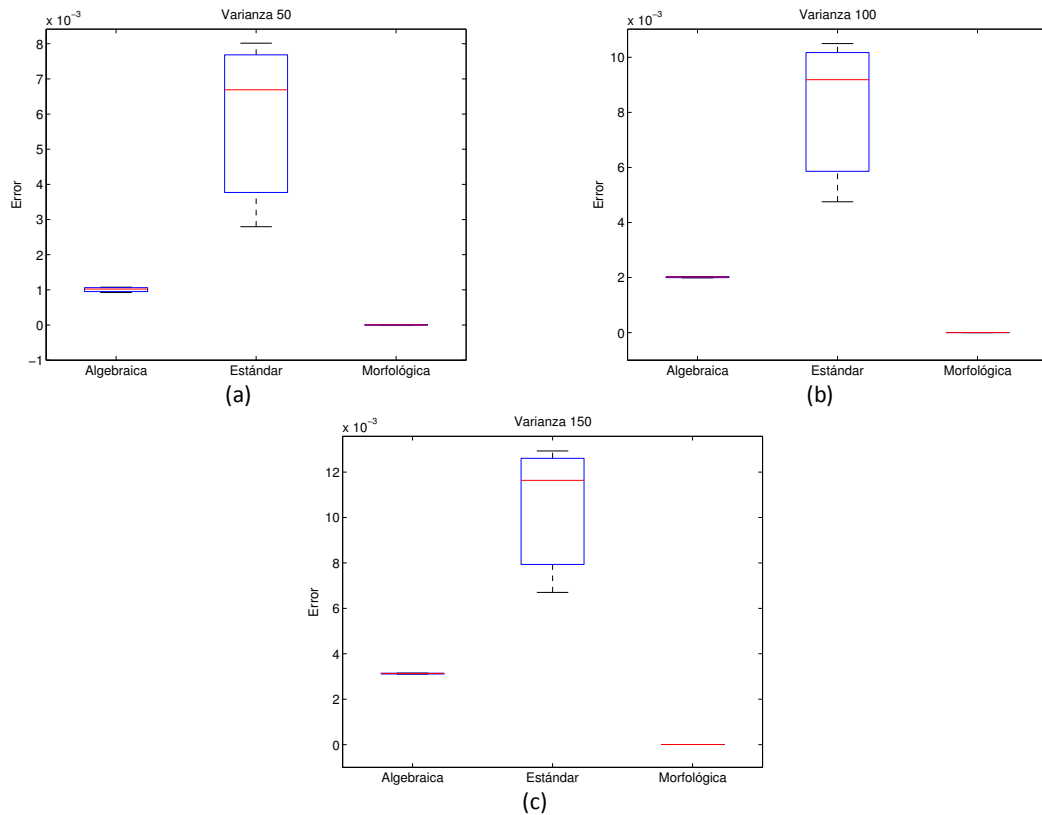


Figura 10.8: Diagramas de cajas para el gradiente por erosión.
(a) Varianza: 50. (b) Varianza: 100. (c) Varianza: 150.

Tabla 10.7: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 3×3

σ^2		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	50	0.0013192	0.0073694	0.0019333	0.0072623	0.0017569	5.0787e-006
	100	0.0029974	0.01176	0.0023957	0.011621	0.004049	6.1804e-006
	150	0.0050088	0.01616	0.0032691	0.015992	0.0066023	6.6197e-006

Tabla 10.8: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 7×7

σ^2		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	50	0.0013893	0.019553	0.0039567	0.01938	0.0017575	3.9383e-006
	100	0.0028243	0.026132	0.0038774	0.025931	0.0040612	4.8898e-006
	150	0.0046373	0.032518	0.0042612	0.032292	0.0066635	5.116e-006

Tabla 10.9: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 11×11

σ^2		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	50	0.001407	0.023089	0.0046263	0.022903	0.0017066	3.4357e-006
	100	0.0027227	0.029788	0.0044105	0.029577	0.0039226	4.1581e-006
	150	0.0044134	0.036216	0.0046596	0.035983	0.0064265	4.208e-006

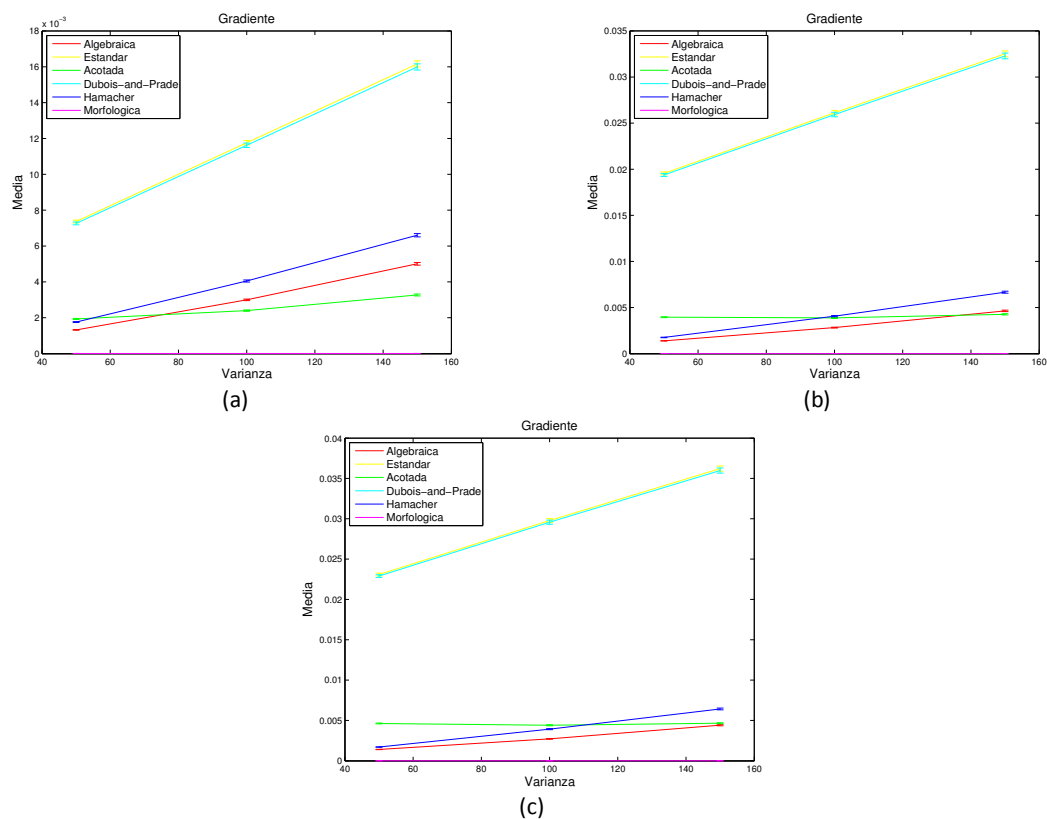


Figura 10.9: Gráficos de los errores del gradiente morfológico.
 (a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

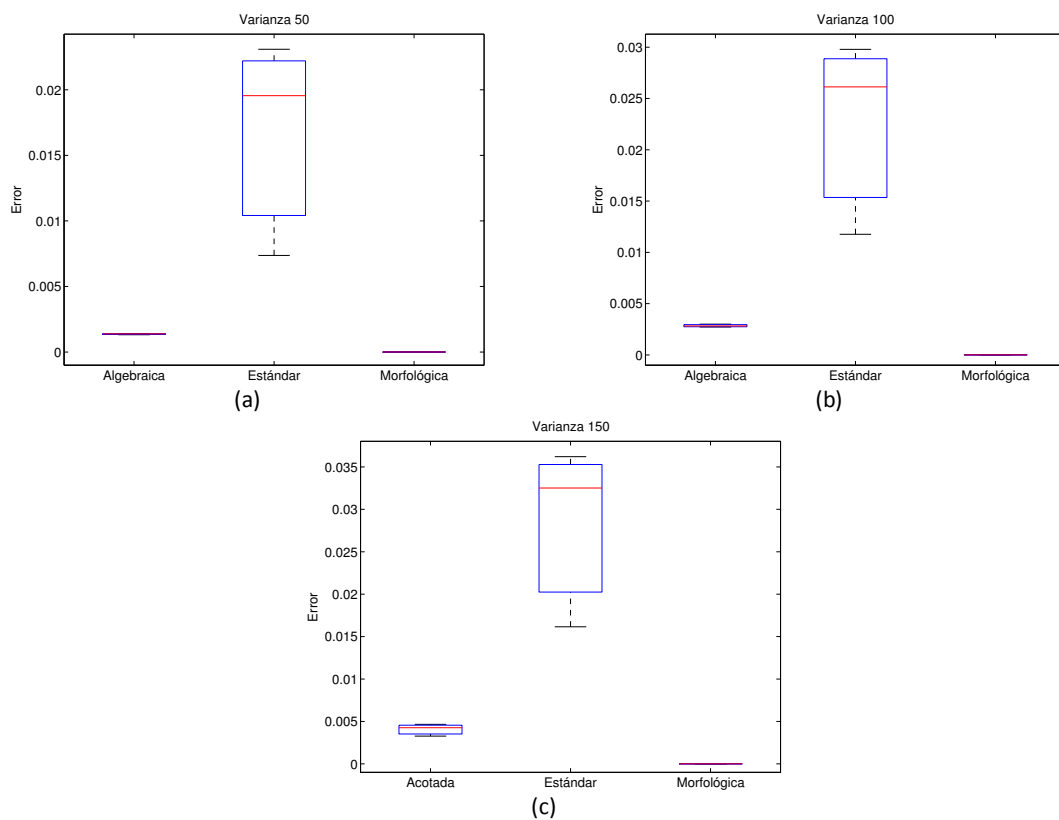


Figura 10.10: Diagramas de cajas para el gradiente morfológico.
 (a) Varianza: 50. (b) Varianza: 100. (c) Varianza: 150.

Tabla 10.10: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 3×3

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.00066775	0.0011221	0.00073581	0.001096	0.00075711	0.00092816
	100	0.0014369	0.0019884	0.0012207	0.0019494	0.0015824	0.0018892
	150	0.0022443	0.0028816	0.0018259	0.0028317	0.002422	0.0028608

Tabla 10.11: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 7×7

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.00074033	0.0026437	0.0018914	0.0025663	0.00081347	0.0013114
	100	0.0015237	0.00396	0.0022712	0.0038593	0.0017431	0.0027335
	150	0.0023717	0.0052839	0.0027856	0.0051639	0.0027078	0.0041939

Tabla 10.12: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 11×11

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.00079186	0.0024952	0.0027842	0.0024358	0.00079066	0.0015104
	100	0.0015408	0.0038228	0.0031128	0.0037461	0.0016932	0.0031974
	150	0.0023544	0.0051468	0.0035736	0.0050555	0.0026343	0.0049563

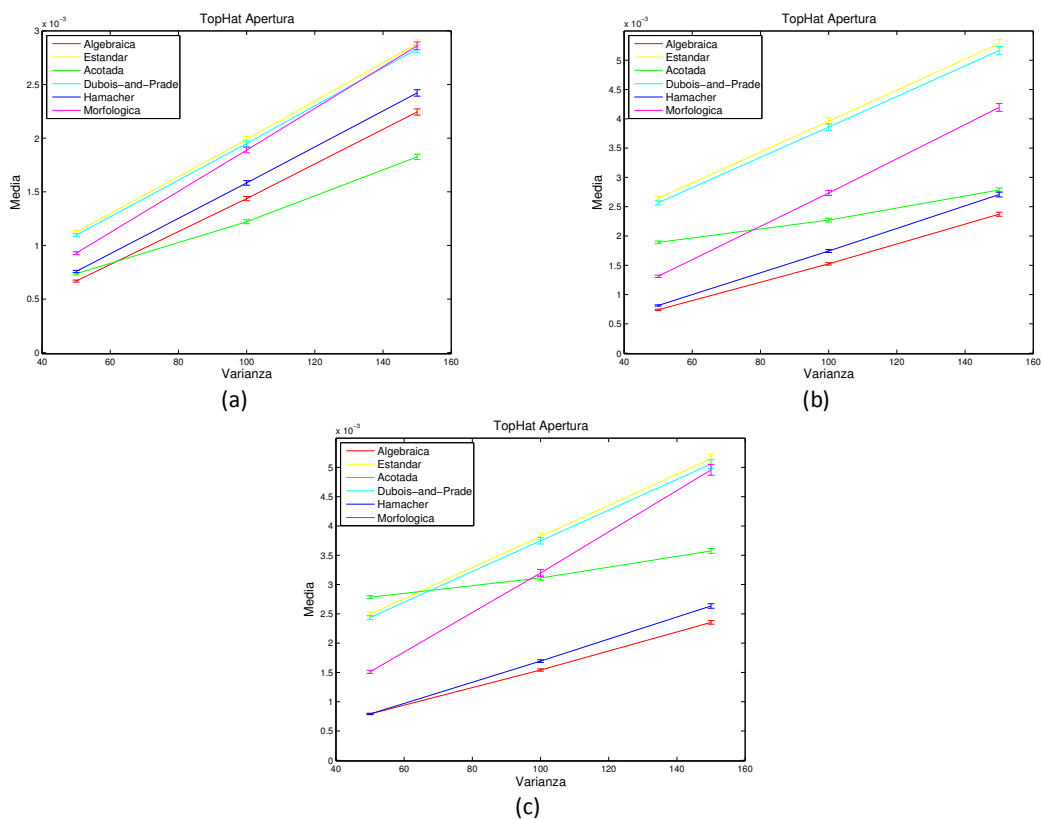


Figura 10.11: Gráfico de los errores del Top-Hat por apertura.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

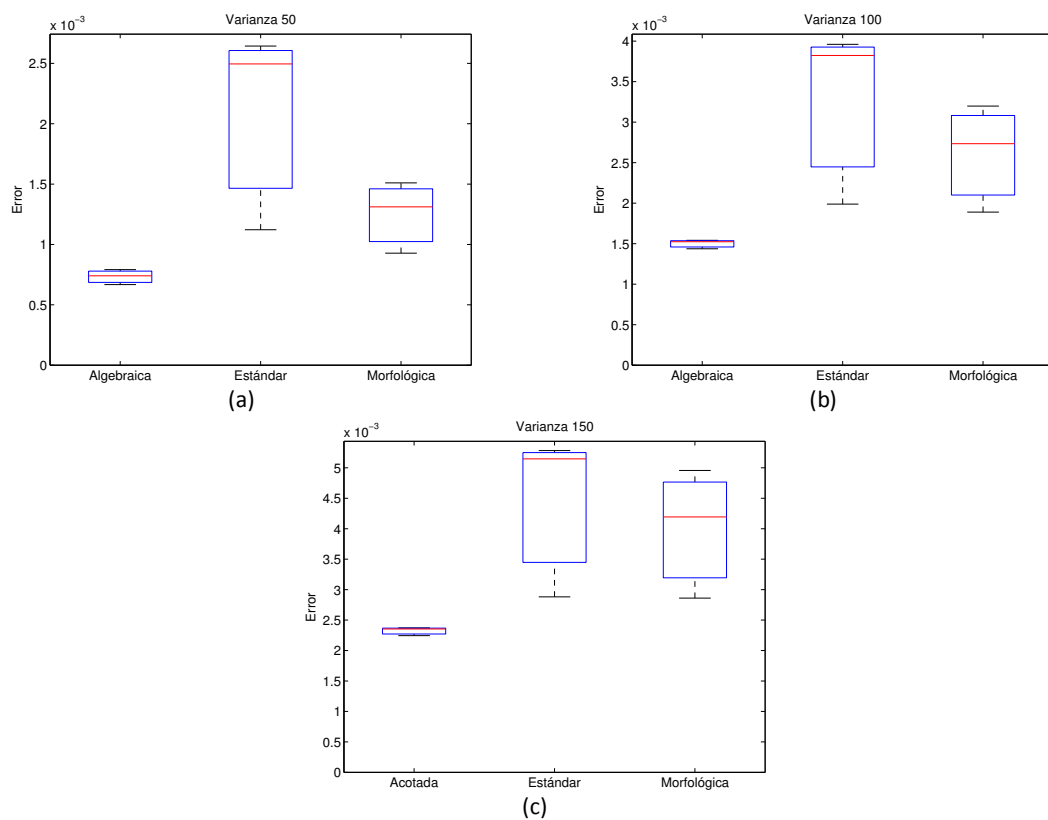


Figura 10.12: Diagramas de cajas para Top-Hat por apertura.
(a) Varianza: 50. (b) Varianza: 100. (c) Varianza: 150.

Tabla 10.13: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 3×3

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.00086797	0.001557	0.0010732	0.0015755	0.00096396	0.00091597
	100	0.0017622	0.0024927	0.0017148	0.0025184	0.0019182	0.0018739
	150	0.0026763	0.0034315	0.0024685	0.0034633	0.0028659	0.0028501

Tabla 10.14: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 7×7

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.0010852	0.0026575	0.0024975	0.0026866	0.0011431	0.0013684
	100	0.0020753	0.0040058	0.0031641	0.0040465	0.0022928	0.0028502
	150	0.0031068	0.0053937	0.0039423	0.0054442	0.0034558	0.0043686

Tabla 10.15: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 11×11

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
σ^2	50	0.0011478	0.0026346	0.0029254	0.0026809	0.0011592	0.0016609
	100	0.0021271	0.0041274	0.0035926	0.0041836	0.0023214	0.0034824
	150	0.0031493	0.0056199	0.0043639	0.0056887	0.0034957	0.0053529

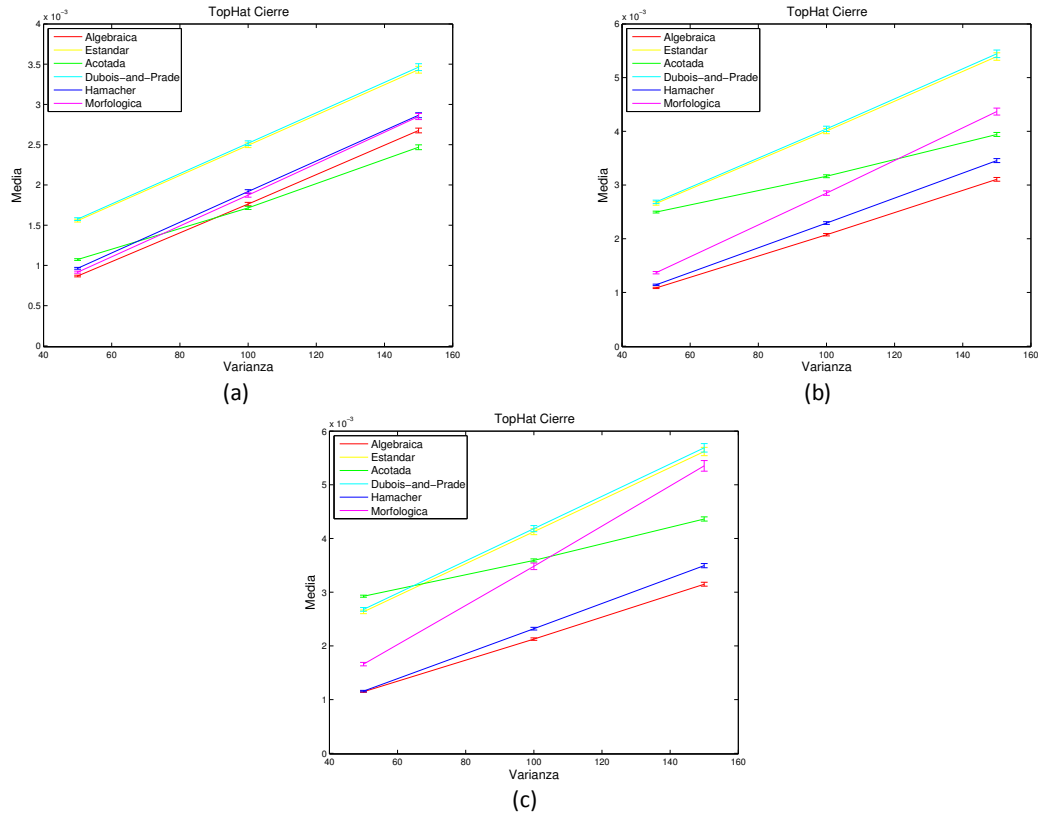


Figura 10.13: Gráficos de los errores para el Top-Hat por cierre.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

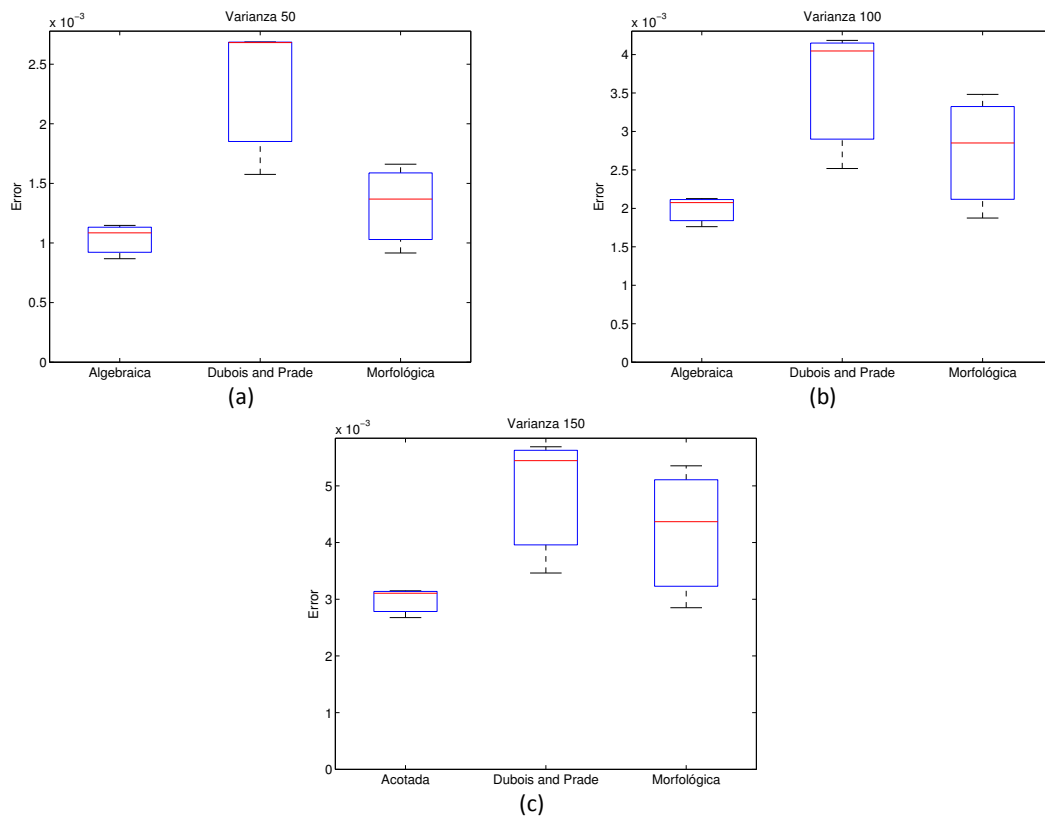


Figura 10.14: Diagramas de cajas para el Top-Hat por cierre.
(a) Varianza: 50. (b) Varianza: 100. (c) Varianza: 150.

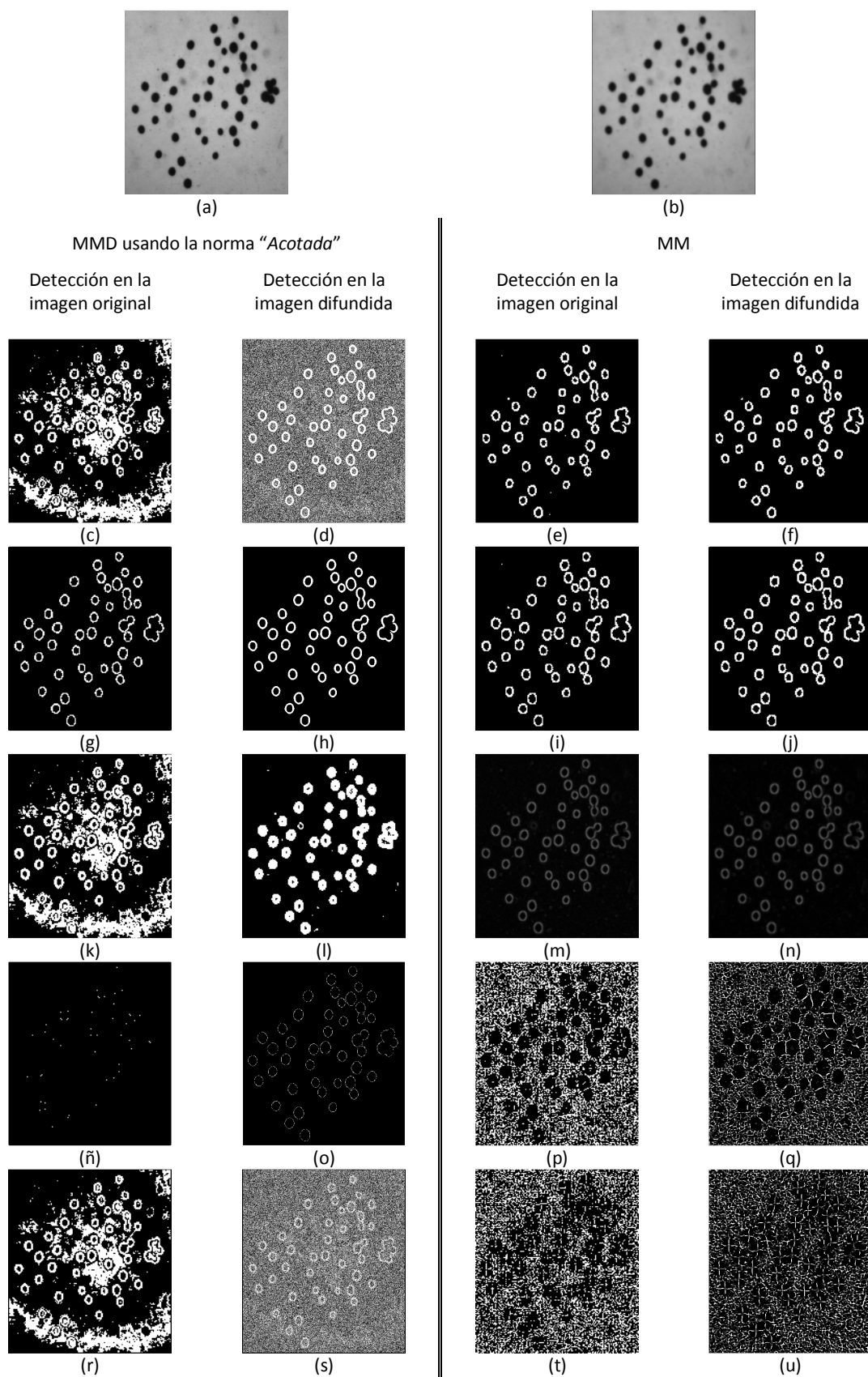


Figura 10.15: Visualización de los resultados de los experimentos utilizando la convolución.

(a) Imagen original. (b) Imagen distorsionada con una máscara de dimensión 3.
 (c)-(f) Gradiente por dilatación. (g)-(j) Gradiente por erosión. (k)-(n) Gradiente morfológico.
 (ñ)-(q) Top-Hat por apertura. (r)-(u) Top-Hat por cierre.

Tabla 10.16: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 3×3

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.0081837	0.0060459	0.0098441	0.0060458	0.0074574	3.2061e-006
	5	0.012565	0.010151	0.013684	0.010151	0.011857	4.7909e-006
	9	0.014685	0.012534	0.015022	0.012534	0.014313	5.9594e-006

Tabla 10.17: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 7×7

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.0090894	0.0053468	0.011803	0.0053468	0.0077704	2.468e-006
	5	0.015197	0.0099011	0.016848	0.009901	0.01405	3.9633e-006
	9	0.018851	0.014557	0.019302	0.014557	0.018316	6.2654e-006

Tabla 10.18: Matriz de errores para el gradiente por dilatación usando un EE de 11×11

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.0090362	0.0057743	0.011845	0.0057742	0.0076739	2.1622e-006
	5	0.015053	0.0096157	0.016816	0.0096156	0.013857	3.2276e-006
	9	0.019223	0.014462	0.019677	0.014462	0.018679	5.337e-006

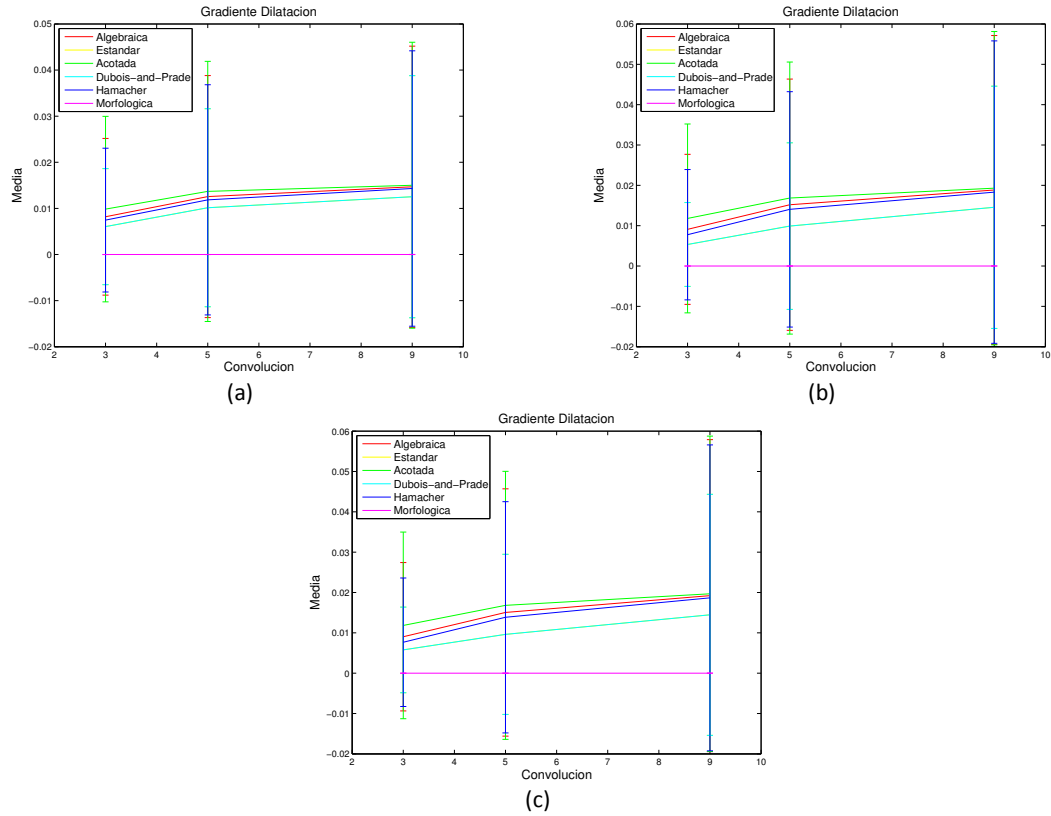


Figura 10.16: Gráfico de los errores del gradiente por dilatación.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

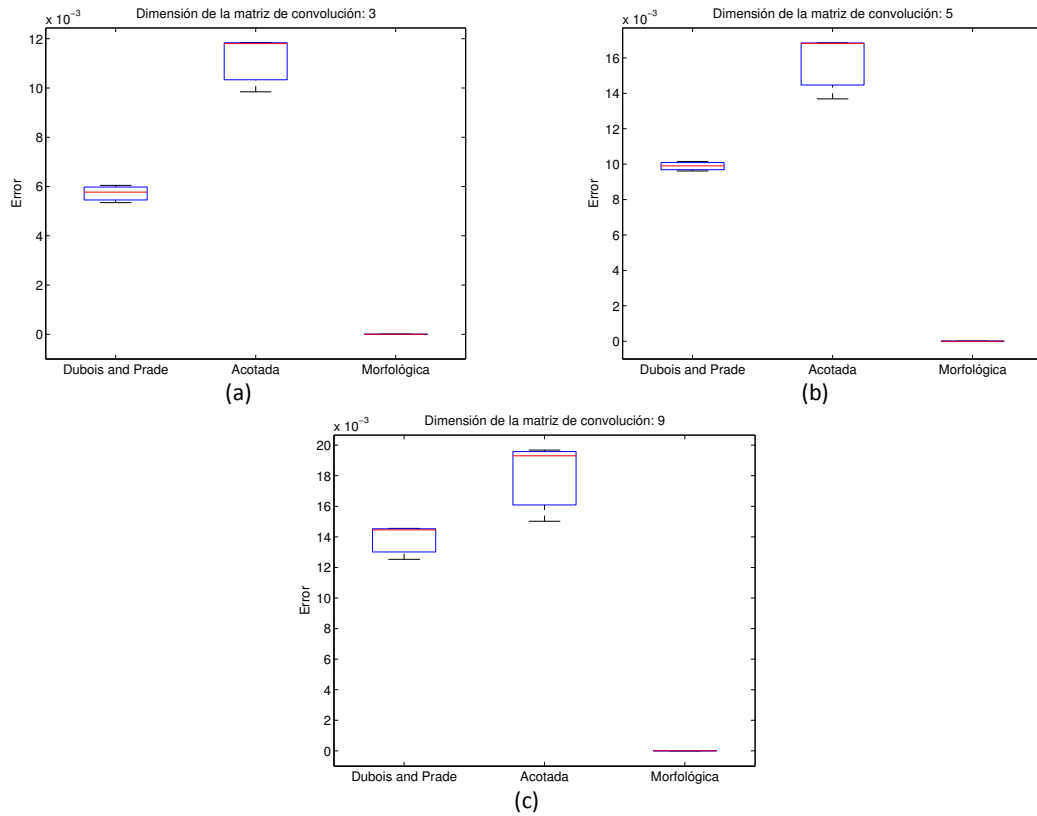


Figura 10.17: Diagramas de cajas para el gradiente por dilatación.
(a) Dimensión: 3. (b) Dimensión: 5. (c) Dimensión: 9.

Tabla 10.19: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 3×3

Dim	Matriz Conv.	Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	3	0.0094862	0.007517	0.012073	0.0075173	0.0086212	3.0602e-006
	5	0.014384	0.011908	0.016239	0.011908	0.013451	4.8969e-006
	9	0.016961	0.014564	0.017732	0.014564	0.016253	6.1261e-006

Tabla 10.20: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 7×7

Dim	Matriz Conv.	Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	3	0.01096	0.006514	0.016279	0.006513	0.0090346	2.6595e-006
	5	0.018995	0.013184	0.022148	0.013186	0.017151	4.2132e-006
	9	0.023663	0.018493	0.024806	0.018493	0.022501	6.4986e-006

Tabla 10.21: Matriz de errores para el gradiente por erosión usando un EE de 11×11

Dim	Matriz Conv.	Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	3	0.01126	0.0065838	0.017273	0.0065825	0.0090086	2.4069e-006
	5	0.019458	0.011888	0.023228	0.011888	0.017233	3.614e-006
	9	0.024927	0.018422	0.026237	0.018422	0.023622	5.7336e-006

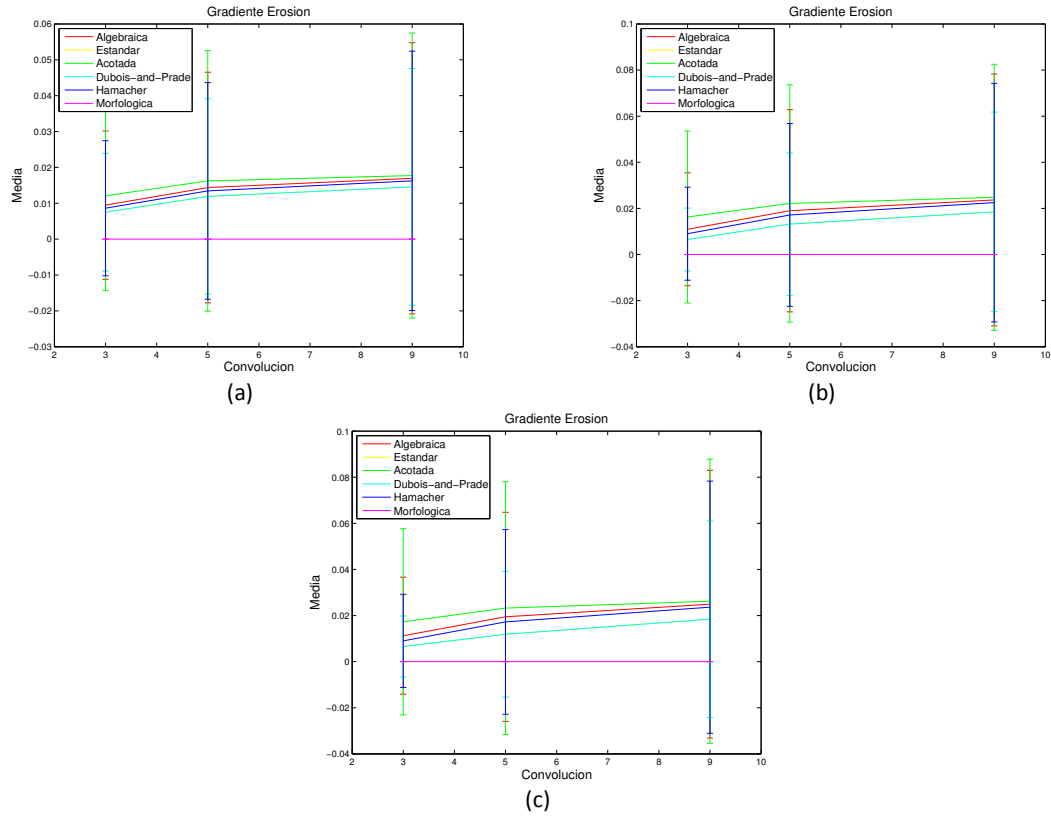


Figura 10.18: Gráfico de los errores del gradiente por erosión.
 (a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

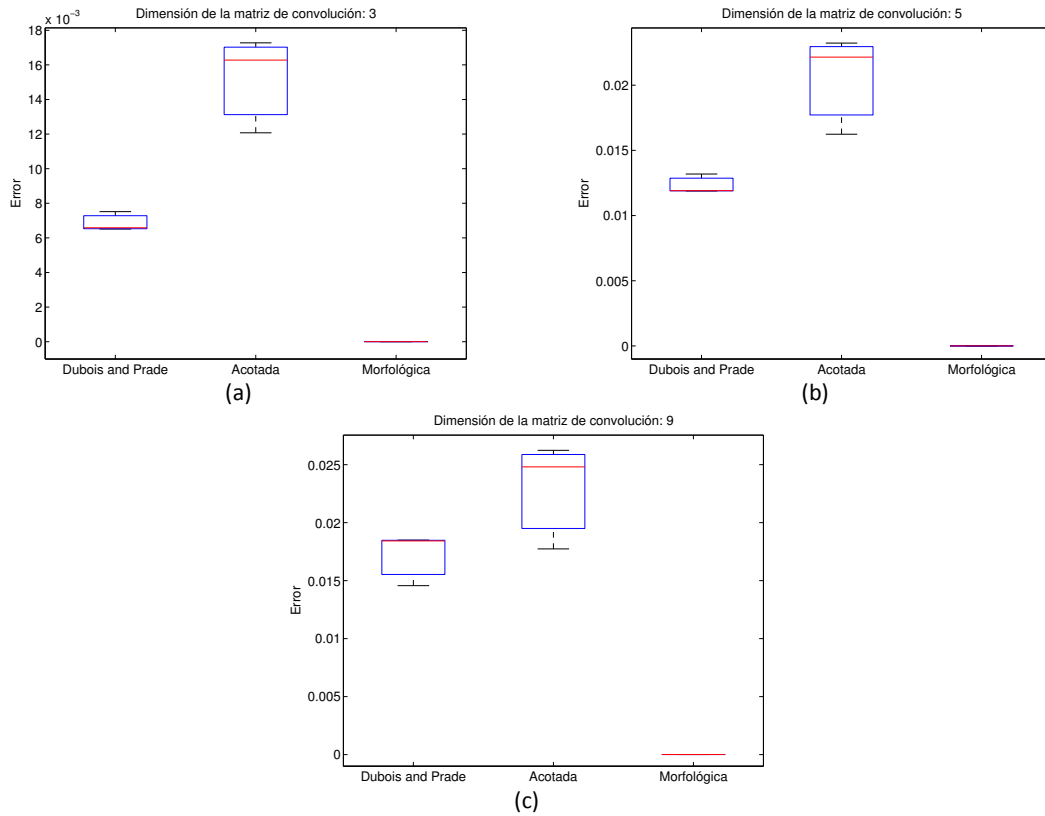


Figura 10.19: Diagramas de cajas para el gradiente por erosión.
 (a) Dimensión: 3. (b) Dimensión: 5. (c) Dimensión: 9.

Tabla 10.22: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 3×3

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.013922	0.009551	0.017592	0.0095543	0.012453	1.913e-006
	5	0.024608	0.019272	0.027533	0.019272	0.02293	3.592e-006
	9	0.031104	0.02631	0.032269	0.026312	0.029903	6.7043e-006

Tabla 10.23: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 7×7

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.016184	0.0072999	0.022646	0.0073025	0.013521	1.033e-006
	5	0.030432	0.017923	0.034885	0.017925	0.027539	1.7178e-006
	9	0.039368	0.028496	0.040966	0.028497	0.037569	3.692e-006

Tabla 10.24: Matriz de errores para el gradiente morfológico usando un EE de 11×11

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.016255	0.0066972	0.023346	0.0066994	0.013288	7.4317e-007
	5	0.030414	0.015711	0.03535	0.015713	0.027209	1.1239e-006
	9	0.039797	0.026443	0.041563	0.026443	0.037853	2.0157e-006

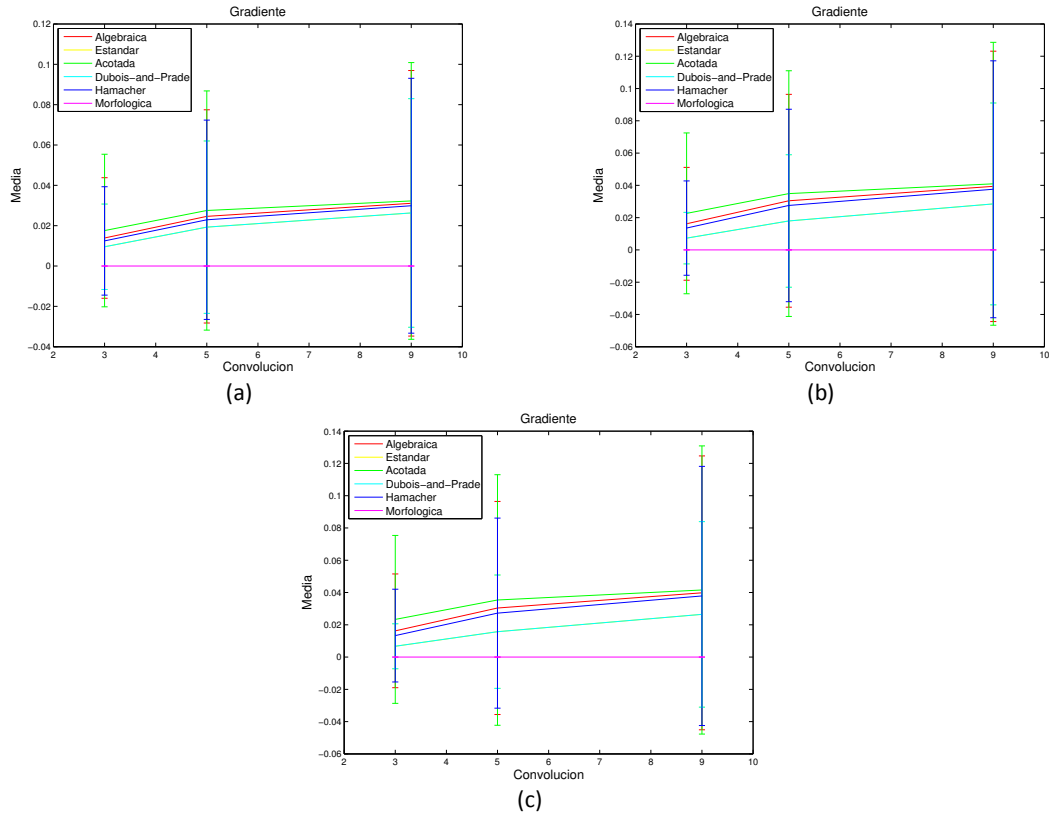


Figura 10.20: Gráfico de los errores del gradiente morfológico.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

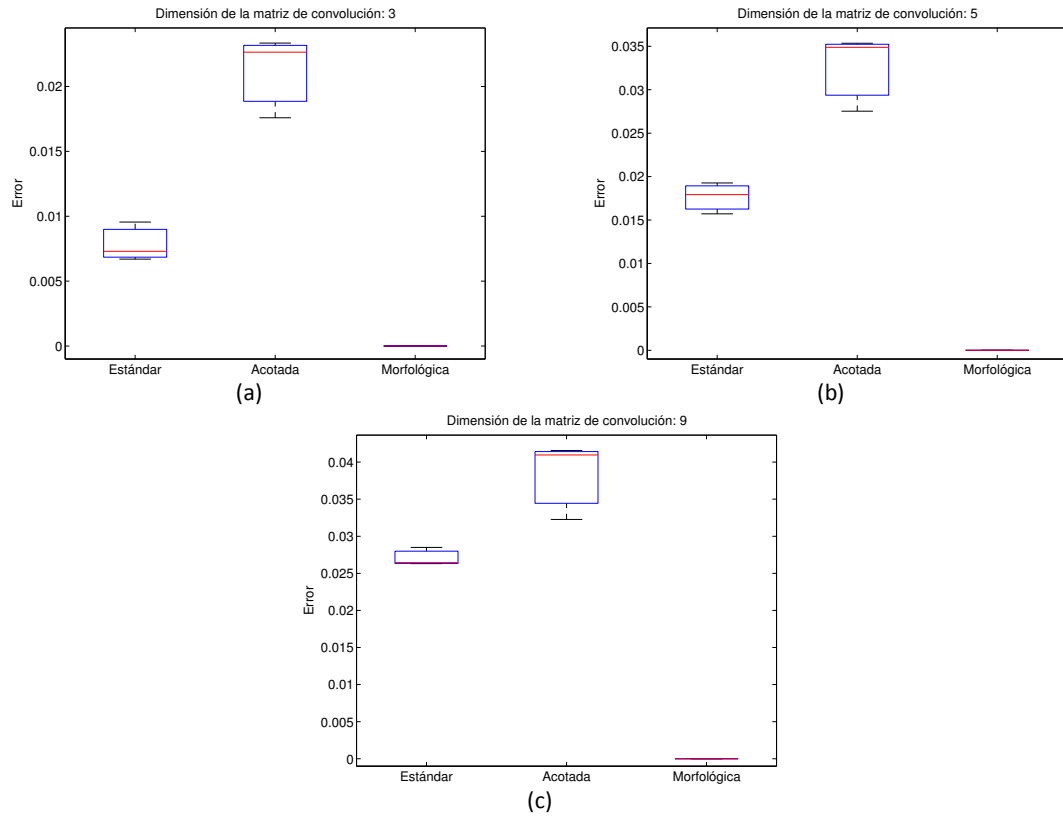


Figura 10.21: Diagramas de cajas para el gradiente morfológico.
(a) Dimensión: 3. (b) Dimensión: 5. (c) Dimensión: 9.

Tabla 10.25: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 3×3

Dim	Matriz Conv.	Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	3	0.0047659	0.0048663	0.005706	0.0048701	0.0045869	0.0034926
	5	0.0069493	0.0071197	0.0073935	0.0071225	0.0068055	0.0045303
	9	0.008021	0.0081073	0.0081993	0.0081092	0.0078738	0.0047163

Tabla 10.26: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 7×7

Dim	Matriz Conv.	Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	3	0.0068692	0.0060238	0.010252	0.006037	0.0059438	0.0066926
	5	0.011373	0.010458	0.012785	0.010475	0.010611	0.010956
	9	0.014155	0.013733	0.014636	0.013752	0.013679	0.013019

Tabla 10.27: Matriz de errores para el Top-Hat por apertura usando un EE de 11×11

Dim	Matriz Conv.	Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
	3	0.0078256	0.0053709	0.012406	0.0053788	0.0064655	0.0078658
	5	0.01304	0.010135	0.015219	0.010149	0.011849	0.014274
	9	0.016668	0.014712	0.017378	0.014733	0.01599	0.019003

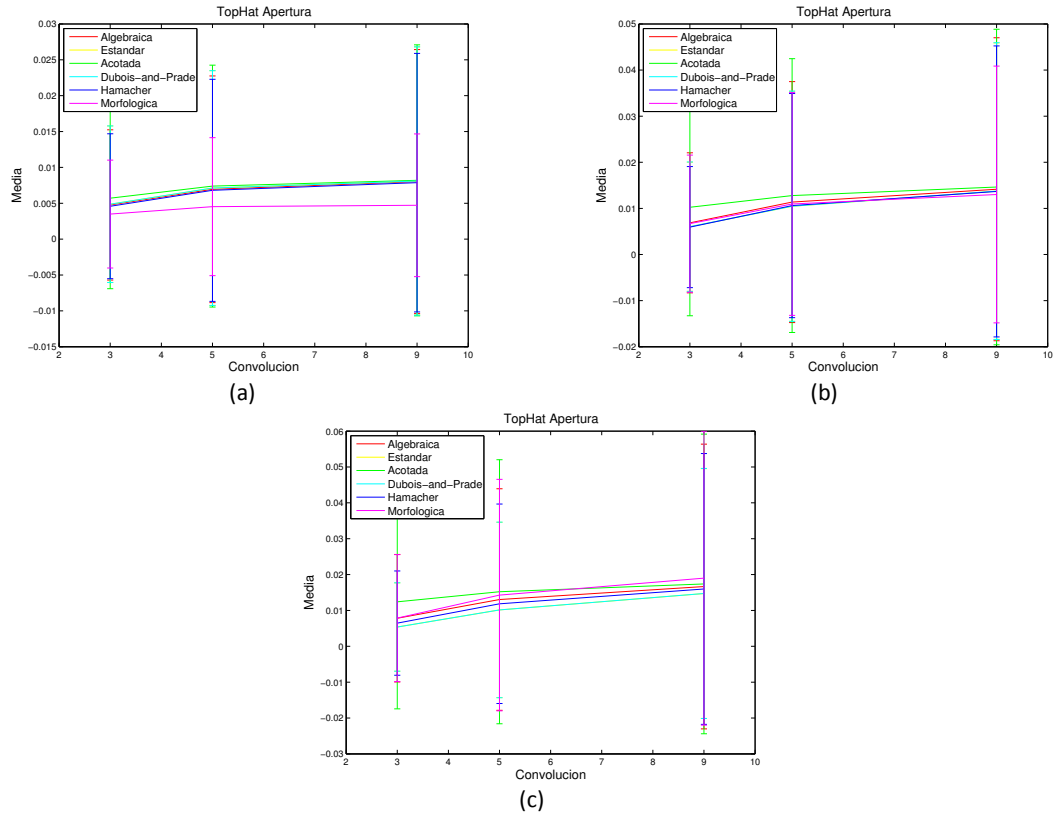


Figura 10.22: Gráfico de los errores del Top-Hat por apertura.
(a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

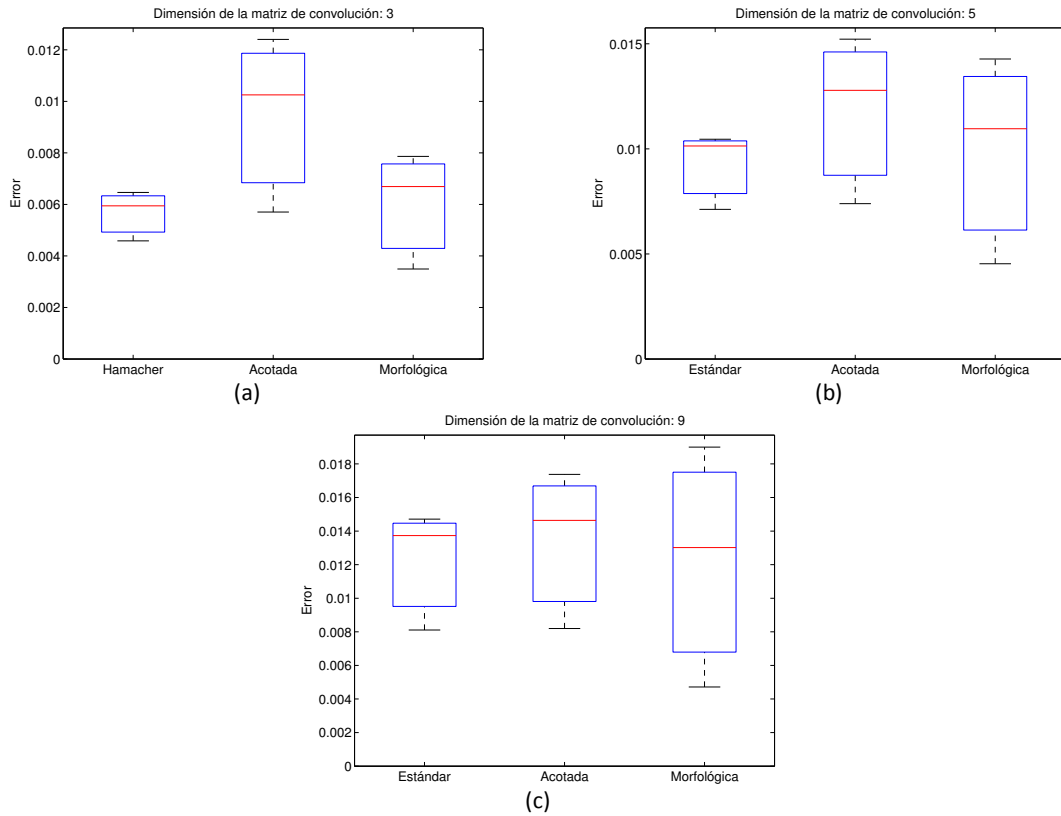


Figura 10.23: Diagramas de cajas para el Top-Hat por apertura.
(a) Dimensión: 3. (b) Dimensión: 5. (c) Dimensión: 9.

Tabla 10.28: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 3×3

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.0046714	0.0044911	0.0051584	0.0044721	0.004576	0.004105
	5	0.0073	0.0071399	0.0073433	0.0071191	0.007311	0.00491
	9	0.0091377	0.0090543	0.0091163	0.0090323	0.0091784	0.0049479

Tabla 10.29: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 7×7

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.0064601	0.0053912	0.0084273	0.0053733	0.0059203	0.0061166
	5	0.01056	0.0095125	0.011287	0.009485	0.010297	0.011151
	9	0.01355	0.013229	0.013652	0.013198	0.013514	0.012631

Tabla 10.30: Matriz de errores para el Top-Hat por cierre usando un EE de 11×11

		Algebraica	Estándar	Acotada	D&P	Hamacher	MM
Dim Matriz Conv.	3	0.0067236	0.005263	0.0090719	0.0052543	0.0060519	0.0068999
	5	0.01104	0.0096043	0.012072	0.0095853	0.010647	0.013358
	9	0.014348	0.01381	0.014613	0.013777	0.014192	0.018189

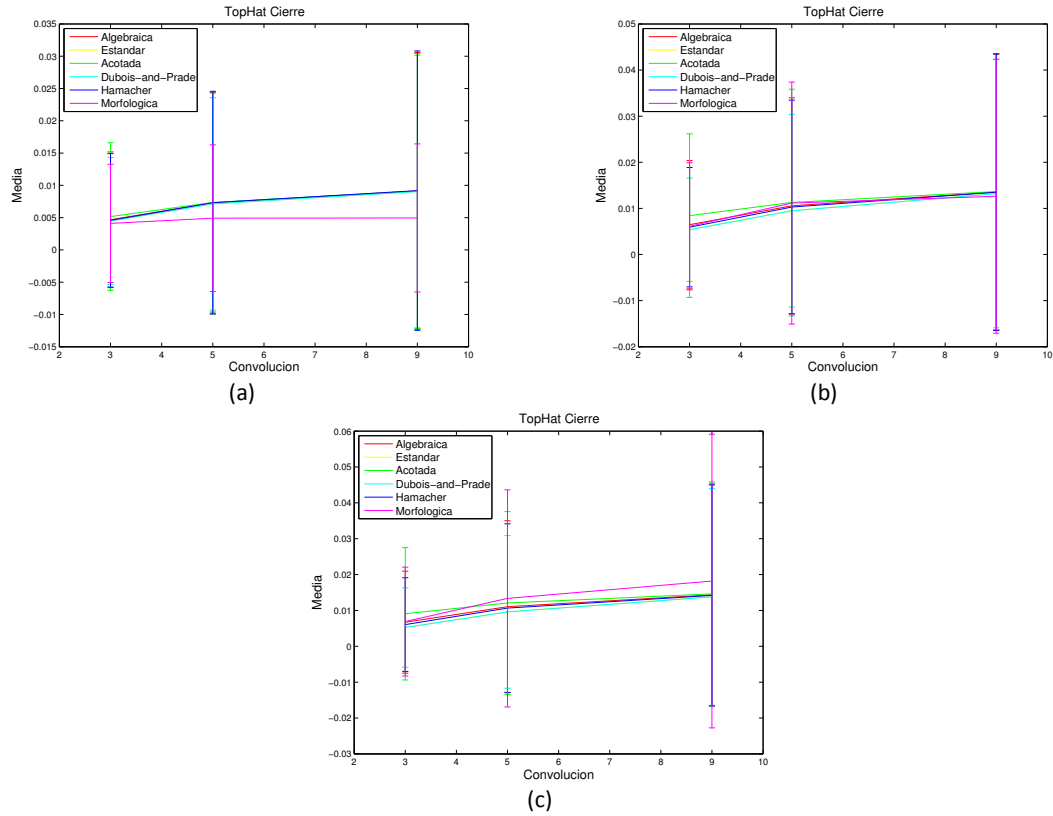


Figura 10.24: Gráfico de los errores del Top-Hat por cierre.
 (a) EE de dimensión 3×3 . (b) EE de dimensión 7×7 . (c) EE de dimensión 11×11 .

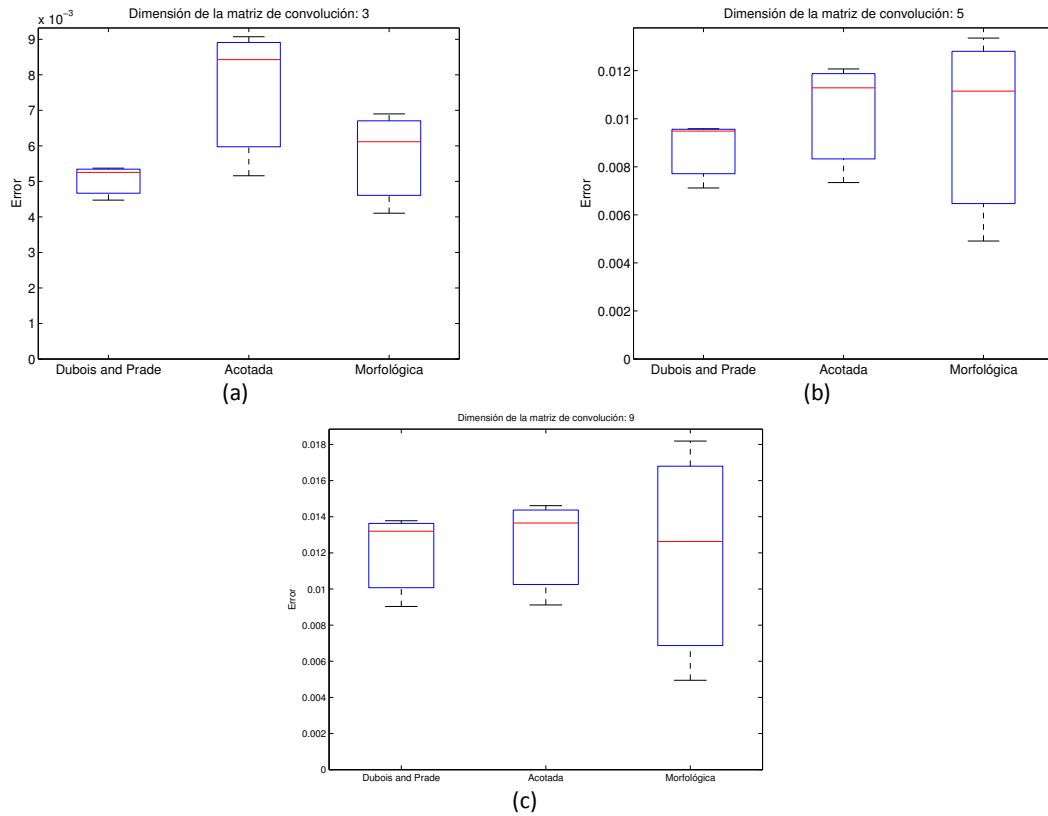


Figura 10.25: Diagramas de cajas para el Top-Hat por cierre.
 (a) Dimensión: 3. (b) Dimensión: 5. (c) Dimensión: 9.

10.3 Discusión

10.3.1 Experimentos utilizando ruido

10.3.1.1 Gradiente por dilatación

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del gradiente por dilatación, se puede observar que para todos los niveles de ruido generados y para todas las dimensiones del EE utilizadas la MM presenta el menor error.

Con respecto a los operadores de la MMD, para el caso en el que se utiliza un EE de dimensión 3×3 el operador definido a partir de la t-norma “Algebraica” muestra el menor error cuando se genera ruido con una varianza igual a 50, mientras que cuando la varianza es igual a 100 y 150 el menor error lo muestra el operador definido a partir de la t-norma “Acotada”. Sucede algo similar cuando se utilizan EE de dimensión 7×7 y 11×11 diferenciándose en el caso donde la varianza es igual a 100 donde la t-norma “Acotada” deja de ser la que menor error presenta siendo la t-norma “Algebraica” la que ocupa ese lugar.

El gradiente por dilatación utilizando la t-norma “Dubois and Prade” es el operador que muestra el mayor error en todas las condiciones experimentales.

10.3.1.2 Gradiente por erosión

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del gradiente por erosión, se puede observar que para todos los niveles de ruido generados y para todas las dimensiones del EE utilizadas la MM presenta el menor error al igual que ocurre en el caso del análisis de robustez del gradiente por dilatación.

Con respecto a los operadores de la MMD, para el caso en el que se utiliza un EE de dimensión 3×3 el comportamiento del operador bajo análisis es idéntico al comportamiento del gradiente por dilatación. Es decir, el operador definido a partir de la s-norma “Algebraica” muestra el menor error cuando se genera ruido con una varianza igual a 50, mientras que cuando la varianza es igual a 100 y 150 el menor error lo muestra el operador definido a partir de la s-norma “Acotada”. Cuando se utiliza un EE de dimensión 7×7 , para todos los niveles de ruido generados, la s-norma “Algebraica” es la que muestra el mejor desempeño; sucediendo algo similar cuando se utiliza un EE de dimensión 11×11 salvo para el caso en el cual la

varianza es igual a 50 donde el error más pequeño se presenta cuando se usa la s-norma “Hamacher”.

El gradiente por erosión utilizando la s-norma “Estándar” es el operador que muestra el mayor error en todas las condiciones experimentales.

10.3.1.3 Gradiente morfológico

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del gradiente morfológico, se puede observar que para todos los niveles de ruido generados y para todas las dimensiones del EE utilizadas la MM presenta el menor error al igual que ocurre en el caso del análisis de robustez del gradiente por dilatación y del gradiente por erosión.

Con respecto a los operadores de la MMD, para el caso en el que se utiliza un EE de dimensión 3×3 el comportamiento del operador bajo análisis es idéntico al comportamiento del gradiente por dilatación y del gradiente por erosión. Cuando se utiliza un EE de dimensión 7×7 , el gradiente morfológico se comporta como el gradiente por dilatación siendo la norma “Algebraica” la que menor error presenta para los niveles de ruido generados por la varianza igual a 50 y a 100, mientras que cuando la varianza es igual a 150 es la norma “Acotada” la que muestra el mejor desempeño. Por último, cuando se utiliza un EE de dimensión 11×11 la norma “Algebraica” presenta el menor error para todos los niveles de ruido analizados.

El gradiente morfológico utilizando la norma “Estándar” es el operador que muestra el mayor error en todas las condiciones experimentales.

10.3.1.1 Top-Hat por apertura

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del operador Top-Hat por apertura, se puede observar que en el 88,89% de los casos cuando se utiliza la norma “Estándar” se obtiene el mayor error; mientras que el 11,11% restante corresponde al operador definido a partir de la norma “Acotada”. Este último porcentaje se debe a que la norma “Acotada” muestra el mayor error cuando se utiliza un EE de dimensión 11×11 y se genera ruido a partir de la varianza igual a 50.

Para el caso en el que se utiliza un EE de dimensión 3×3 el comportamiento del operador bajo análisis definido a partir de la norma “Algebraica” presenta el menor error cuando se genera ruido con una varianza igual a 50; mientras que cuando la varianza es igual a 100 y 150 la norma que menor error muestra es la “Acotada”. Cuando el EE es de 7×7 la norma “Algebraica” es la que mejor desempeño tiene para todos los niveles de ruido generados. Cuando el EE es de 11×11 el mejor comportamiento, para el primer nivel de ruido, lo muestra la norma “Hamacher” y para los otros niveles de ruido lo muestra la norma “Algebraica”. Es importante destacar que la norma “Algebraica” tiene el mejor desempeño en el 66,67% de los casos.

En estos experimentos el Top-Hat por apertura de la MM no muestra un desempeño superior al Top-Hat por apertura de la MMD, es decir, no presenta el error más pequeño; pero es importante recalcar que tampoco es el que muestra el peor comportamiento.

10.3.1.1 Top-Hat por cierre

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del operador Top-Hat por cierre, se puede observar que en el 88,89% de los casos cuando se utiliza la norma “Dubois and Prade” se obtiene el mayor error; mientras que el 11,11% restante corresponde al operador definido a partir de la norma “Acotada”. Este último porcentaje se debe a que la norma “Acotada” muestra el mayor error cuando se utiliza un EE de dimensión 11×11 y se genera ruido a partir de la varianza igual a 50. Este comportamiento es idéntico al del operador Top-Hat por apertura.

Para el caso en el que se utilizan EE de dimensiones 3×3 y 7×7 el comportamiento del operador bajo análisis es idéntico al comportamiento del Top-Hat por apertura. Cuando la dimensión del EE es de 11×11 deja de tener el mismo desempeño que el Top-Hat por apertura ya que para todos los niveles de ruido generados la norma “Algebraica” es la que muestra el menor error. En este caso, esta última norma tiene el mejor comportamiento en el 77,78% de los casos analizados.

Al igual que ocurre para el Top-Hat por apertura, en estos experimentos el Top-Hat por cierre de la MM no muestra un desempeño superior al Top-Hat por cierre de la MMD, es decir, no presenta el error más pequeño; pero es importante recalcar que tampoco es el que muestra el peor comportamiento.

10.3.2 Experimentos utilizando la convolución

10.3.2.1 Gradiente por dilatación

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del gradiente por dilatación, se puede observar que para todas las dimensiones de la máscara de convolución usadas y para todas las dimensiones del EE utilizadas la MM presenta el menor error.

Con respecto a los operadores de la MMD, el operador definido a partir de la t-norma “*Dubois and Prade*” es el que muestra el mejor desempeño, mientras que el que usa la t-norma “*Acotada*” es el que muestra el peor comportamiento, para todas las condiciones experimentales diseñadas.

Es importante destacar que cuando se utiliza un EE de 3×3 el error que presenta el operador usando la t-norma “*Estándar*” es idéntico al de la norma “*Dubois and Prade*” para las máscaras de convolución de dimensión 5 y 9.

10.3.2.2 Gradiente por erosión

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del gradiente por erosión, se puede observar que para todas las dimensiones de la máscara de convolución usadas y para todas las dimensiones del EE utilizadas la MM presenta el menor error, al igual que ocurre para el gradiente por dilatación.

Entre los operadores definidos en la MMD, cuando se utiliza un EE de dimensión 3×3 la s-norma “*Estándar*” es la que presenta en menor error. Esta norma tiene un comportamiento idéntico a la norma “*Dubois and Prade*” cuando la dimensión de la máscara de convolucion es 5 y 9, hecho que también ocurre para el gradiente por dilatación. Cuando el EE es de 7×7 la s-norma que tiene el menor error es “*Dubois and Prade*” para la máscara de convolución de dimensión 3, mientras que para las máscaras de dimensiones 5 y 9 es la s-norma “*Estándar*”. Cuando el EE es de 11×11 la s-norma que tiene el menor error es “*Dubois and Prade*” para todas las dimensiones de la máscara de convolución utilizadas.

El operador definido a partir de la s-norma “*Acotada*” es el que muestra el peor desempeño, para todas las condiciones experimentales diseñadas.

10.3.2.3 Gradiente morfológico

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del gradiente morfológico, se puede observar que para todas las dimensiones de la máscara de convolución usadas y para todas las dimensiones del EE utilizadas la MM presenta el menor error, al igual que ocurre para el gradiente por dilatación y el gradiente por erosión.

Entre los operadores definidos en la MMD, en todos los diseños experimentales el operador que mejor desempeño presenta es el definido a partir de la norma “Estándar”. Es importante destacar que este operador tiene idéntico comportamiento que el operador definido a partir de la norma “*Dubois and Prade*” en dos casos: cuando el EE es de dimensión 3×3 y la máscara de convolución es de dimensión 5, y cuando el EE es de 11×11 y la dimensión de la máscara de convolución es 9.

El operador definido a partir de la norma “*Acotada*” es el que muestra el peor desempeño, para todas las condiciones experimentales diseñadas.

10.3.2.4 Top-Hat por apertura

De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del operador Top-Hat por apertura, se puede observar que en el 44,44% de los casos el menor error se produce cuando se utiliza el operador definido en la MM, siendo el mismo porcentaje para el caso en que se utiliza el operador de la MMD usando la norma “*Estándar*”. En el 11,11% restante se produce el mínimo error cuando se utiliza el operador de la MMD usando la norma “*Hamacher*”. Este último porcentaje se debe a que la norma “*Hamacher*” presenta el menor error cuando se utiliza un EE de dimensión 7×7 y la dimensión de la máscara de convolución es 3. Es importante destacar que cuando se utiliza un EE de 3×3 el operador de la MM es el que muestra el mejor desempeño para todas las dimensiones de la máscara de convolución usadas.

El mayor error lo presenta el operador de la MMD definido a partir de la norma “*Acotada*” en un 88,89% de los casos, mientras que en el 11,11% restante el peor desempeño es presentado por el operador de la MM. Dicho operador presenta el mayor error en un único caso, el cual es cuando se utiliza un EE de 11×11 y la máscara de convolución es de dimensión 9.

10.3.2.5 Top-Hat por cierre

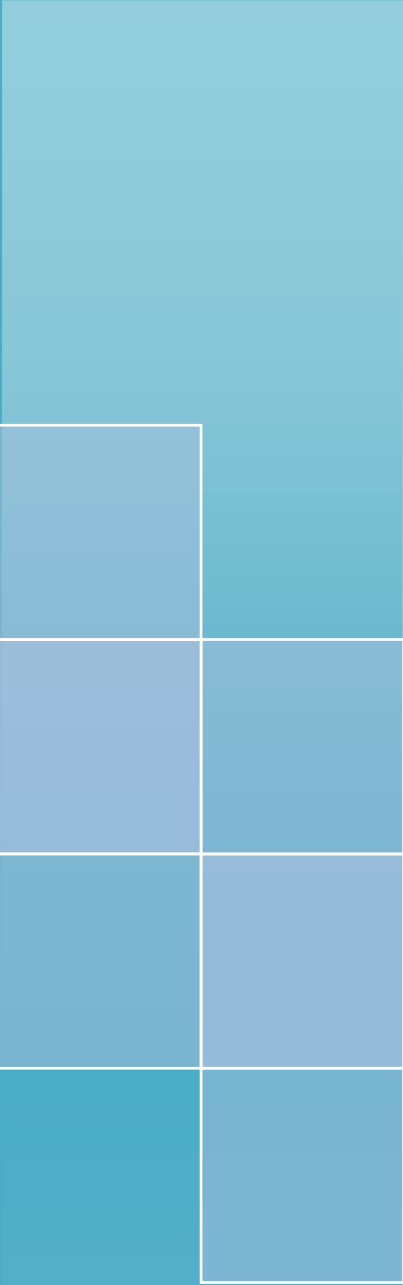
De los resultados obtenidos en los experimentos para analizar la robustez del operador Top-Hat por cierre, se puede observar que en el 44,44% de los casos el menor error se produce cuando se utiliza el operador definido en la MM, mientras que en el 55,56% restante el mejor desempeño lo tiene el operador de la MMD definido a partir de la norma “*Dubois and Prade*”. Es importante destacar que cuando se utiliza un EE de 3×3 el operador de la MM es el que muestra el mejor desempeño para todas las dimensiones de la máscara de convolución usadas, al igual que ocurre para el Top-Hat por apertura.

El mayor error lo presenta el operador de la MMD definido a partir de la norma “*Acotada*” en un 66,67% de los casos, en un 22,22% de los casos el peor desempeño lo muestra el operador de la MM y el 11,11% restante es producido por la norma “*Hamacher*”. Este último porcentaje corresponde al caso en el que se utiliza un EE de 3×3 y la máscara de convolución es de dimensión 9. El porcentaje correspondiente a la MM surge del experimento donde la dimensión del EE es de 11×11 y las dimensiones de la máscara de convolución son 5 y 9.

10.3.3 Conclusiones

Se puede concluir que, bajo las condiciones experimentales diseñadas, la detección de bordes por medio de los operadores de la MM resultan ser más robustos frente al ruido y a la distorsión de la imagen que los operadores de detección de bordes de la MMD analizados.

Para el caso de la aplicación de la transformada Top-Hat se puede concluir que, bajo las condiciones experimentales diseñadas, existen normas de la MMD a las cuales la presencia de ruido y/o la distorsión de la imagen las afecta en menor medida que a la transformada de la MM.



Capítulo 11

Aplicación: Segmentación de imágenes usando MMD

Capítulo 11

Aplicación: Segmentación de imágenes usando MMD

La segmentación automática de estructuras en imágenes médicas constituye un problema significativo dentro del Procesamiento Digital de Imágenes. Debido a la baja relación señal ruido, al contraste pobre y al alto contenido de imprecisión, la segmentación de imágenes médicas resulta dificultosa con técnicas tradicionales.

En este capítulo se estudia la aplicación de operadores morfológicos difusos en la segmentación de vasos sanguíneos presentes en angiografías retinales.

11.1 Segmentación

La segmentación de imágenes biomédicas es una tarea compleja debido a la baja relación señal ruido, pobre contraste y alto contenido de imprecisión, característicos en este tipo de imágenes. Las técnicas clásicas no resuelven satisfactoriamente la segmentación de este tipo de imágenes (Bouchet et al., 2007; Bouchet et al., 2008; Bouchet et al., 2005). Más aún, cada tipo de imagen dependiendo del equipo y de los requerimientos del diagnóstico implica el estudio de nuevas técnicas y de su implementación computacional. Generar nuevas técnicas para satisfacer las demandas en biomedicina constituye una motivación constante para los investigadores de esta temática. Un ejemplo de este problema es el análisis de las angiografías retinales (Bouchet et al., 2009), el cual es abordado en este capítulo.

La segmentación automática de las estructuras en las imágenes médicas constituye el primer paso fundamental para cualquier diagnóstico posterior. Las MM y la MMD son dos técnicas que han resultado exitosas en la segmentación en imágenes médicas.

El objetivo de este capítulo es estudiar la aplicación de operadores morfológicos difusos con el objeto de segmentar vasos sanguíneos en angiografías retinales, para mejorar la visualización de dichas ramificaciones, y de esta manera realizar un diagnóstico correcto por parte de los expertos.

11.2 Materiales y métodos

La angiografía retinal es un examen diagnóstico que usa cámaras fotográficas especiales para evaluar las estructuras del fondo ocular. Para realizar este examen se administran gotas oculares que hacen dilatar la pupila para luego tomar fotografías del interior del ojo, es decir, del flujo sanguíneo de la retina. Después de tomar el primer grupo de imágenes, se inyecta un tinte especial, llamado fluoresceína, dentro de la vena. Una cámara especial toma fotografías del ojo a medida que el tinte va pasando a través de los vasos sanguíneos en la parte posterior del ojo. De esta manera se logra determinar si existe una adecuada circulación. Este examen se utiliza para detectar fugas o daños en los vasos sanguíneos de la retina. También se puede usar para diagnosticar problemas oculares o para determinar qué tan bien está funcionando un tratamiento (Spaeth, 1975; Schmetterer, 2007).

Dado que los vasos sanguíneos en este tipo de imágenes se caracterizan por ser objetos brillantes (niveles de gris altos), con intensidades mayores al resto de la imagen (Figura 11.1 (a)), para su segmentación se utiliza el Top-Hat difuso por apertura (Bouchet et al., 2009). Para definir dicho operador en la MMD se utilizaron la t-norma y la s-norma “Estándar” dadas por las siguientes fórmulas:

$$\text{t-norma: } t(a,b) = \min(a,b)$$

$$\text{s-norma: } s(a,b) = \max(a,b)$$

Se utilizaron estas normas dado que son las de uso más común. Se utilizó un EE simétrico con forma de campana generado por una función gaussiana de dimensión 3×3 (Ver Apéndice B).

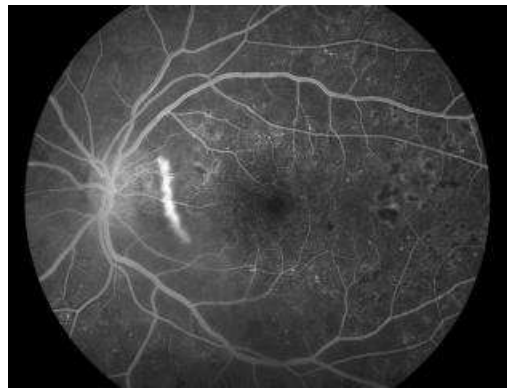
Para comparar los resultados obtenidos respecto al Top-Hat clásico, se aplicó el mismo procedimiento utilizando el Top-Hat por apertura definido en la MM. En este caso, usando un EE plano cuya dimensión es la misma que el determinado en la MMD.

El resultado de aplicar esta transformada es una imagen en niveles de gris donde se observan resaltadas las regiones filtradas por el operador, las cuales representan los vasos sanguíneos presentes en la imagen. Para eliminar el ruido en la imagen filtrada se aplica una binarización que permite etiquetar las regiones que la determinan, donde 0 representa el fondo de la imagen y 1 representa los objetos de interés. El umbral que se utiliza para binarizar la imagen se determina de manera tal que el porcentaje de píxeles resultantes (vasos sanguíneos) sea el mismo tanto en la imagen procesada en la MMD como en la procesada en

la MM. Para cada imagen la elección del umbral depende de las características de la misma. De esta manera, las imágenes pueden ser comparadas independientemente de los valores de gris obtenidos.

11.3 Resultados

A modo de ejemplo se presentan algunos resultados en las Figuras 11.1, 11.2 y 11.3. En primer lugar se muestra la imagen original. Luego, se muestra la segmentación propuesta binarizada. La selección del umbral para obtener la imagen resultado se realizó, eligiendo la imagen que menor porcentaje de ruido presentaba. Para una mejor visualización de la misma se superpone dicha segmentación sobre la imagen original. Por último se muestra el resultado obtenido a partir de la segmentación clásica, es decir, utilizando los operadores de la MM clásica.



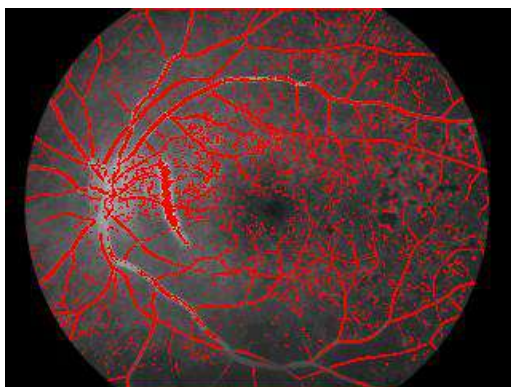
(a)



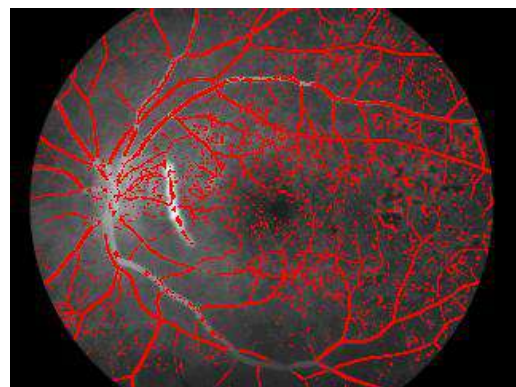
(b)



(c)



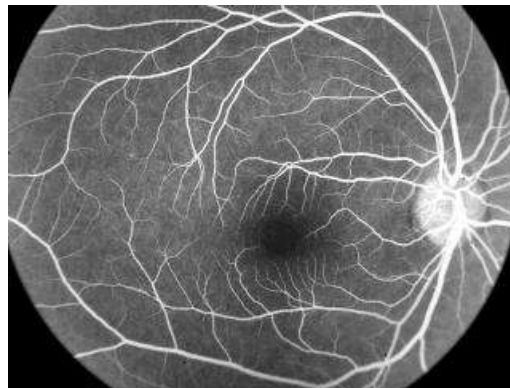
(d)



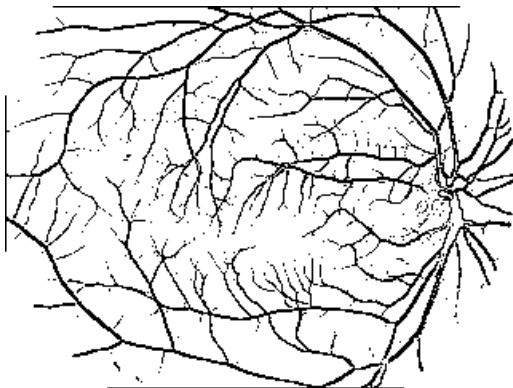
(e)

Figura 11.1: Segmentación de angiografías: Ejemplo 1.

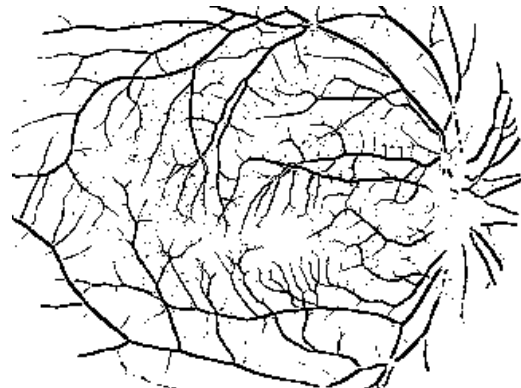
(a) Imagen Original. (b) Segmentación difusa. (c) Segmentación clásica. (d) Visualización de la segmentación difusa. (e) Visualización de la segmentación clásica. Porcentaje de píxeles clasificados como vasos sanguíneos: 13%



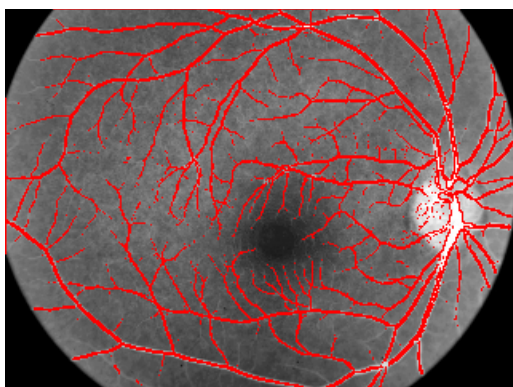
(a)



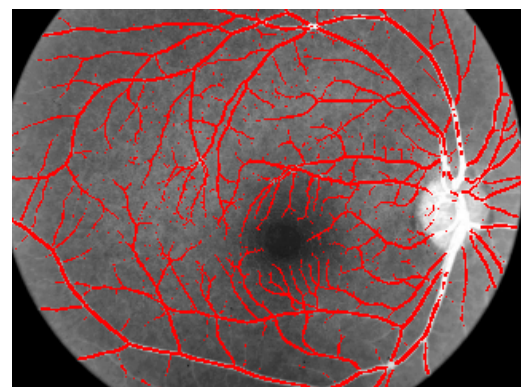
(b) MMD 87%



(c) MM 87%



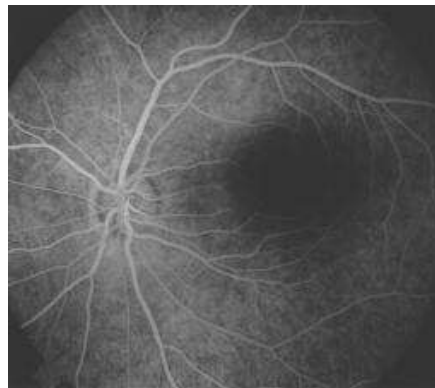
(d)



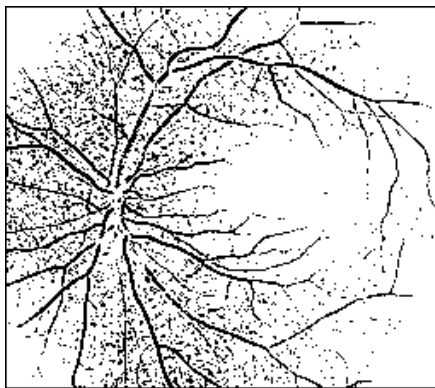
(e)

Figura 11.2: Segmentación de angiografías: Ejemplo 2.

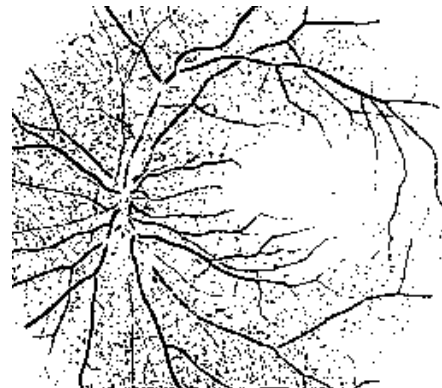
(a) Imagen Original. (b) Segmentación difusa. (c) Segmentación clásica. (d) Visualización de la segmentación difusa. (e) Visualización de la segmentación clásica. Porcentaje de píxeles clasificados como vasos sanguíneos: 13%



(a)



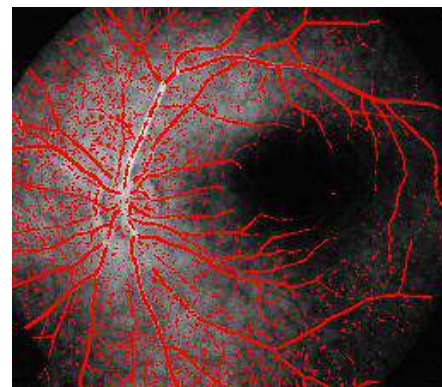
(b) MMD 85%



(c) MM 85%



(d)



(e)

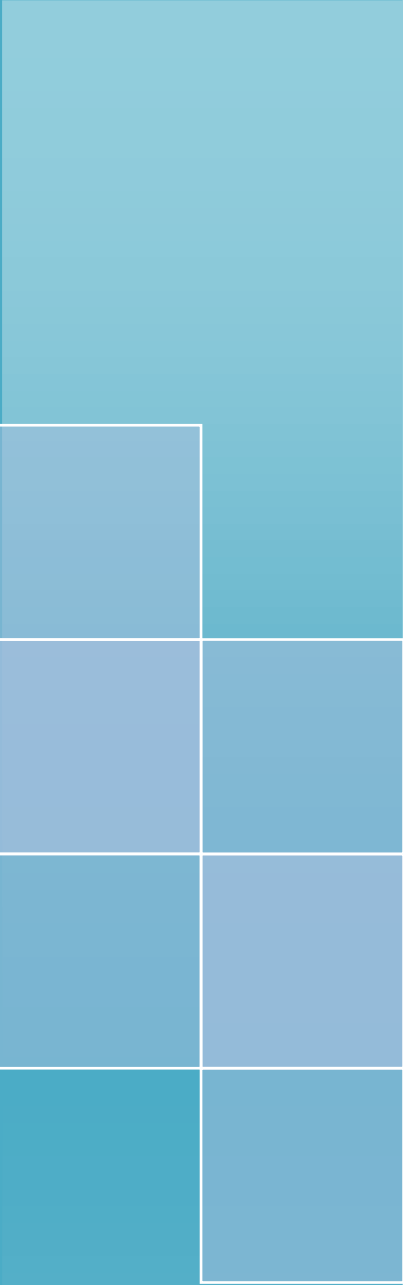
Figura 11.3: Segmentación de angiografías: Ejemplo 3.

(a) Imagen Original. (b) Segmentación difusa. (c) Segmentación clásica. (d) Visualización de la segmentación difusa. (e) Visualización de la segmentación clásica. Porcentaje de píxeles clasificados como vasos sanguíneos: 15%

11.4 Discusión

A partir de las imágenes procesadas se puede observar que la segmentación difusa de angiografías retinales muestra resultados más completos, detectando regiones de vasos sanguíneos que la MM clásica no detectó. En particular, esto se puede observar en las regiones de la imagen donde las intensidades del elemento de interés y del fondo tienden a ser similares. Para las imágenes procesadas se puede concluir que la aplicación del Top-Hat por apertura difuso presenta mayor robustez que el Top-Hat por apertura definido en la MM.

Como trabajo futuro se propone automatizar la detección del umbral que se utiliza para binarizar la imagen obtenida luego de la aplicación del Top-Hat por apertura. Análisis cuantitativos adicionales serán necesarios para confirmar estos resultados, utilizando imágenes donde los vasos sanguíneos se encuentran ya segmentados para usar como “gold standar”.



Capítulo 12

Conclusiones

Capítulo 12

Conclusiones

En esta tesis se presentó el estado del arte de la MMD y se evaluó, analizó y comparó el comportamiento de distintos operadores morfológicos difusos frente a los operadores morfológicos clásicos.

En la bibliografía existen diversos enfoques basados en la teoría de conjuntos difusos que abordan la extensión de los operadores morfológicos binarios a imágenes en niveles de gris. Se realizó un análisis exhaustivo presentando los distintos enfoques y encontrando la unificación de todos ellos en las fórmulas dadas por Bloch y Maître, las cuales fueron utilizadas a lo largo de este trabajo.

Es importante destacar que se utilizó la Lógica Difusa para extender los operadores de la MM binaria a niveles de gris, sin considerar la naturaleza de las imágenes. No se consideró a la imagen como una representación difusa de un objeto, sino que se la modeló como un conjunto difuso con el fin de poder aplicar la teoría de conjuntos difusos.

En la MMD, al utilizar conceptos de la teoría de conjuntos difusos, la lógica difusa juega un papel fundamental. Un caso particular de esta lógica es la Lógica Difusa Compensatoria. Se presentó su definición y se propuso una nueva cuarteta de operadores, basada en la media aritmética, que satisfacen los axiomas necesarios para generar una nueva Lógica Difusa Compensatoria. A partir de la conjunción y la disyunción de esta lógica se definieron los operadores básicos, dilatación y erosión, dando origen a la MMC la cual resulta ser un caso particular de la MMD.

Luego de definir los operadores en las distintas teorías, Morfología Matemática (MM), Morfología Matemática Difusa (MMD) y Morfología Matemática Compensatoria (MMC), en primer lugar se evaluó la robustez frente al ruido de los operadores básicos dilatación y erosión. A partir de los resultados obtenidos para los experimentos diseñados se pudo concluir que los operadores básicos de la Morfología Matemática Compensatoria tienen, en general, mayor robustez frente al ruido para el tipo de imágenes y ruido utilizados.

En segundo lugar, se evaluó la robustez de los filtros morfológicos básicos apertura y cierre. En este caso solo se analizó el desempeño de los filtros definidos en la MM y en la MMD. Bajo

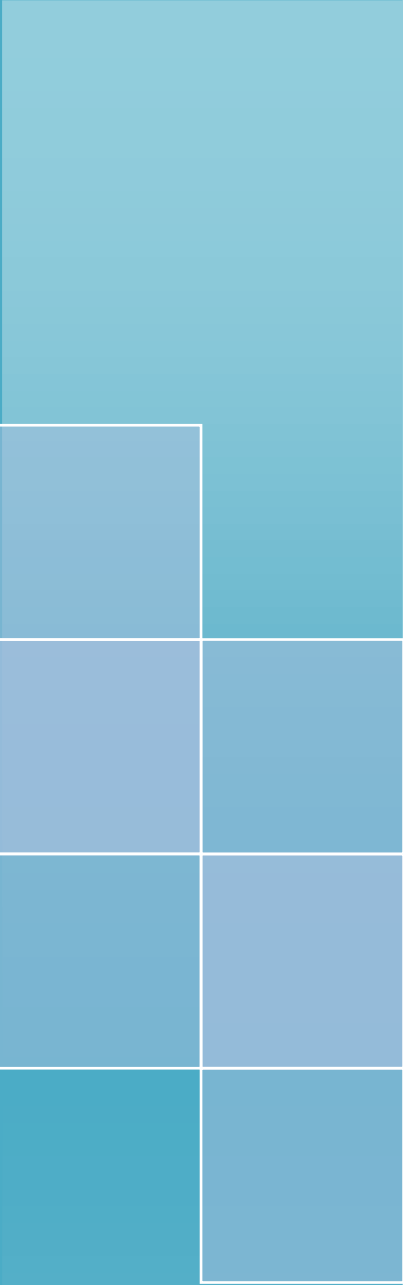
las condiciones experimentales planteadas, se pudo concluir que existen filtros morfológicos difusos a los cuales la presencia de ruido en la imagen original los afecta en menor grado que a los filtros morfológicos clásicos.

En tercer lugar, se evaluó la robustez de los filtros secuenciales alternados apertura-cierre y cierre-apertura de la MM y la MMD. Se pudo concluir que existen filtros secuenciales alternados de la MMD cuya aplicación permite eliminar el ruido y conservar las estructuras de la imagen bajo estudio sin afectar en gran medida su forma y tamaño original, con un desempeño superior al de los filtros secuenciales alternados de la MM.

En cuarto lugar, se evaluó la robustez de los operadores de detección de bordes y la aplicación del Top-Hat. Se analizaron diferentes operadores de detección de bordes y las transformadas Top-Hat de la MM y la MMD. En algunos casos se encontró que los operadores de la MM fueron los que mostraron el mejor desempeño, pero cuando se analizó la aplicación de las transformadas Top-Hat se encontró que existen normas de la MMD que muestran un mejor desempeño que la MM para el caso donde se agregó ruido Gaussiano a la imagen original. Para el caso donde se generó una imagen distorsionada, las conclusiones a las que se arriba son similares salvo para el caso de la transformada Top-Hat, donde no siempre se encuentran normas en la MMD cuyo desempeño sea mejor a la MM.

Por último, se presentó una aplicación en la segmentación de imágenes médicas, en este caso, angiografías retinales, utilizando la MMD. A partir de las imágenes procesadas se pudo observar que la segmentación mediante operadores de la MMD mostraron resultados más completos, detectando regiones de los vasos sanguíneos que la segmentación utilizando operadores de la MM no detectó. La segmentación propuesta permitió mejorar la visualización de los vasos sanguíneos y, como consecuencia, realizar un diagnóstico correcto por parte de los expertos.

Como trabajos futuros se propone realizar un análisis exhaustivo del tipo de elemento estructurante utilizado en la MMD, estudiando el comportamiento de distintas formas que éste puede tomar. También se propone realizar la segmentación de los vasos sanguíneos de las angiografías retinales a partir de operadores de la MMD definidos mediante otras normas para mejorar aún más los resultados obtenidos. Por último, se plantea estudiar la aplicación de los operadores de la MMD para analizar si resulta ventajosa cuando hay ruido o distorsión en cualquier tipo de imagen.



Apéndice A

Lógica Difusa

Apéndice A

Conjunciones y Disyunciones de la Lógica Difusa

Del mismo modo que en la lógica clásica tenemos la conjunción y la disyunción para modelar las operaciones intersección y unión en teoría de conjuntos, se necesita también operadores difusos que modelen dichas operaciones. Las t-normas y las s-normas son operadores que modelan la intersección y la unión entre conjuntos difusos, respectivamente, sin perder generalidad cuando se trate de conjuntos clásicos.

A.1 Conjunción difusa y disyunción difusa

La conjunción difusa y la disyunción difusa surgen de extender al rango $[0,1]$ la conjunción y la disyunción booleana definidas sobre el conjunto $\{0,1\}$.

Definición A.1: Una función $C:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una conjunción difusa si es creciente en ambos argumentos y satisface:

$$\begin{aligned} C(0,0) &= C(0,1) = C(1,0) = 0 \\ C(1,1) &= 1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Definición A.2: Una función $D:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una disyunción difusa si es creciente en ambos argumentos y satisface:

$$\begin{aligned} D(1,1) &= D(0,1) = D(1,0) = 1 \\ D(0,0) &= 0 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.2 Las normas en la definición de los operadores básicos de la MMD

Existen conjunciones que no son conmutativas. Por ejemplo, sea $C:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ dada por $C(s,t) = s^3 \cdot t^2$. Esta función satisface la ecuación (A.1) y es creciente en ambos argumentos ya que si se toman $a,b,c,d \in [0,1]$ tales que $a < c$ y $b < d$:

$$a^3 < c^3 \text{ y } b^2 < d^2 \Rightarrow a^3.b^2 < c^3.d^2 \Rightarrow C(a,b) < C(c,d).$$

Esta conjunción difusa no es conmutativa. Es aquí donde surge un gran problema. En la ecuación (5.46):

$$\chi_{(A \oplus B)}(x) = \sup_{y \in U} [\chi_A(y) \wedge \chi_{B_x}(y)] \quad (\text{A.2})$$

se reemplazó χ_A por μ_A , χ_{B_x} por μ_{B_x} y la conjunción booleana por una t-norma t obteniéndose la siguiente expresión para la dilatación difusa:

$$\mu_{(A \oplus B)}(x) = \sup_{y \in U} [t(\mu_A(y), \mu_B(y-x))] \quad (\text{A.3})$$

Si la conjunción booleana se hubiese reemplazado por la conjunción difusa, se hubiese obtenido la siguiente expresión:

$$\mu_{(A \oplus B)}(x) = \sup_{y \in U} [C(\mu_A(y), \mu_B(y-x))] \quad (\text{A.4})$$

la cual no define una dilatación dado que la dilatación debe ser conmutativa como se mostró en la propiedad 3.12 del capítulo 3 y en este caso esta propiedad no se cumple.

Como consecuencia surge la necesidad de incorporar una función que sea conmutativa y que posea las mismas características que la conjunción difusa. Las t-normas definidas en el capítulo 4 cumplen con esa condición y algunas restricciones adicionales.

Definición A.3: Una función $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una *norma triangular* (t-norma) si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $a, b, c \in [0,1]$ (Dubois & Prade, 1980):

- i. Condición de frontera: $t(a,1) = a$
- ii. Simetría: $t(a,b) = t(b,a)$
- iii. Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $t(a,b) \leq t(c,d)$
- iv. Asociatividad: $t(t(a,b),c) = t(a,t(b,c))$

Por lo tanto, la dilatación difusa está dada por la ecuación (A.3) la cual para facilitar la notación se escribirá:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in U} [t(\mu(y), \nu(y-x))] \quad (\text{A.5})$$

A partir de la dualidad entre la dilatación y la erosión se puede definir la erosión difusa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E(\mu, \nu)(x) &= [D(\mu^c, \nu)(x)]^c \\ &= \left\{ \sup_{y \in U} [t(c(\mu(y)), \nu(y-x))] \right\}^c \\ &= \inf_{y \in U} \left\{ c[t(c(\mu(y)), \nu(y-x))] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Como las t-normas y las s-normas son duales se satisface:

$$s(a, b) = c[t(c(a), c(b))] \quad (\text{A.7})$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} E(\mu, \nu)(x) &= \inf_{y \in U} \left\{ c[t(c(\mu(y)), \nu(y-x))] \right\} \\ &= \inf_{y \in U} [s(\mu(y), c(\nu(y-x)))] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Se obtiene de esta forma la fórmula para la erosión difusa donde se ve la necesidad de introducir el concepto de s-norma, que es una disyunción con restricciones adicionales. Es por esto que en la ecuación (5.40) dada por:

$$\chi_{(A \oplus B)}(x) = \inf_{y \in U} [\chi_A(y) \vee \chi_{B_x^c}(y)] \quad (\text{A.9})$$

se reemplaza χ_A por μ_A , $\chi_{B_x^c}$ por $\mu_{B_x^c}$ y la disyunción booleana por una s-norma s obteniendo de esta forma (Ec. 5.41):

$$\mu_{(A \oplus B)}(x) = \inf_{y \in U} [s(\mu_A(y), \mu_{B_x^c}(y))] \quad (\text{A.10})$$

que es equivalente a (Ec. 5.42):

$$\mu_{(A \oplus B)}(x) = \inf_{y \in U} [s(\mu_A(y), c(\mu_B(y-x)))] \quad (\text{A.11})$$

La erosión difusa está dada por la ecuación (A.11) la cual para facilitar la notación se escribirá:

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in U} \left[s(\mu(y), c(\nu(y-x))) \right] \quad (\text{A.12})$$

Aquí queda demostrada la necesidad de introducir los conceptos de t-normas y s-normas en la definición de los operadores básicos de la MMD.

A.3 La conjunción de la LDC en la definición de la dilatación

En la sección 6.7 del capítulo 6 se presentaron las definiciones de los operadores básicos de la MMC. Se reemplazó la t-norma por la conjunción compensatoria y la s-norma por la disyunción compensatoria obteniendo las fórmulas para la dilatación compensatoria y la erosión compensatoria:

$$D(\mu, \nu)(x) = \sup_{y \in U} \left[C(\mu(y), \nu(y-x)) \right] \quad (\text{A.13})$$

$$E(\mu, \nu)(x) = \inf_{y \in U} \left[D(\mu(y), c(\nu(y-x))) \right] \quad (\text{A.14})$$

En este caso, se suavizan las restricciones, impuestas por las t-normas utilizadas en la definición de la dilatación, exigiendo solamente que la función sea una conjunción conmutativa. De esta forma el operador dilatación queda bien definido dado que las conjunciones compensatorias son conmutativas por definición.

Para mostrar que las conjunciones compensatorias no son t-normas se muestra a continuación como la condición de frontera no se satisface. Sea $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ la conjunción de la LDCBMG restringida a dos variables, dada por $C(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$, entonces para $0 < x < 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned} C(x, 1) &= \sqrt{x \cdot 1} \\ &= \sqrt{x} \\ &\neq x \end{aligned}$$

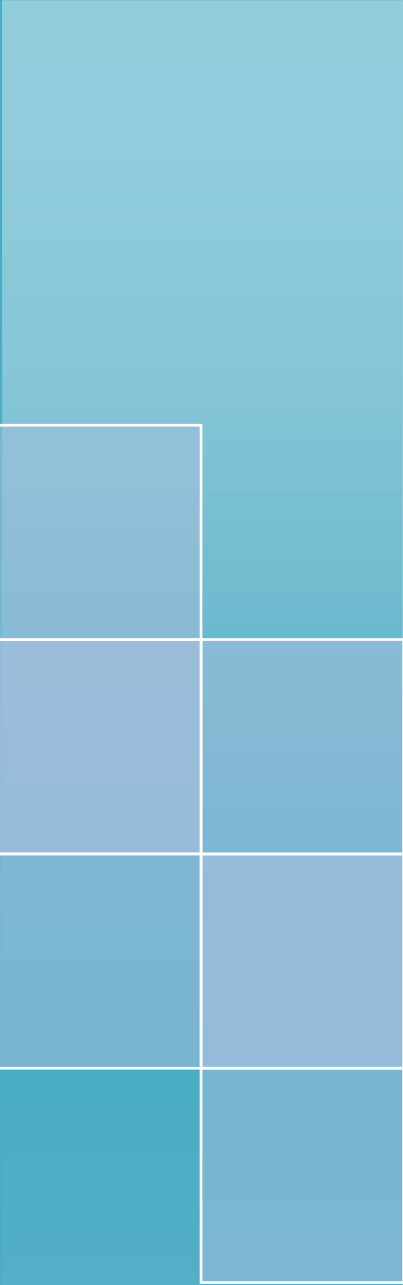
con lo cual no se cumple siempre que $C(x, 1) = x$.

Sea $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ la conjunción de la LDCBMA restringida a dos variables, dada por $C(x, y) = \sqrt{\min(x, y) \cdot \frac{x+y}{2}}$, entonces para $0 < x < 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned} C(x,1) &= \sqrt{\min(x,1) \cdot \frac{x+1}{2}} \\ &= \sqrt{x \cdot \frac{x+1}{2}} \\ &\neq x \end{aligned}$$

con lo cual no se cumple siempre que $C(x,1) = x$.

De manera similar, se puede probar que las disyunciones compensatorias no son s-normas dado que no satisfacen la condición de frontera.



Apéndice B

Elementos Estructurantes

Apéndice B

Elementos estructurantes

La forma y el tamaño del EE dependen tanto de la imagen bajo estudio como del operador a utilizar. Este punto requiere especial análisis debido a que no existe una teoría formal en la que se detallen estos requerimientos, sino que son elegidas de manera empírica. Como consecuencia, su determinación conlleva a un elevado tiempo de experimentaciones.

En este apéndice se muestran los EE utilizados en el desarrollo de los experimentos. Dichos elementos son simétricos con forma de campana generados por una función Gaussiana cuya media es 0 y su dispersión es 3. Dichos valores fueron elegidos de manera heurística.

El EE difuso utilizado en la aplicación de los operadores morfológicos difusos debe ser “normalizado”. Esto significa que debe contener al menos un elemento igual a uno entre los valores que lo componen. Esta condición es necesaria y suficiente para garantizar la extensividad de la dilatación y, por lo tanto, la antiextensividad de la erosión. Además dicha condición no es una restricción adicional con respecto a la morfología clásica sino que corresponde a la condición de que el centro del EE debe pertenecer a él ($O \in B$) para que estos operadores cumplan las propiedades mencionadas (Propiedad 3.15 de la Sección 3.5.2) (Bloch & Maitre, 1995).

B.1 Generación del elemento estructurante difuso

Para generar un EE difuso en primer lugar se calcula la distancia euclidiana entre el centro del EE y cada uno de los píxeles que lo componen. Es decir, si se genera un EE de dimensión 3×3 se tiene una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} (-1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (-1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (-1,-1) & (0,-1) & (1,-1) \end{bmatrix}$$

A partir de esta se calcula la distancia euclidiana entre el centro y cada uno de los demás elementos obteniendo:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Se evalúa cada uno de estos valores en la función de densidad de probabilidades de la distribución normal con media igual a 0 y dispersión igual a 3. A partir de dicha función se obtiene la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0.1190 & 0.1258 & 0.1190 \\ 0.1258 & 0.1330 & 0.1258 \\ 0.1190 & 0.1258 & 0.1190 \end{bmatrix}$$

Para finalizar, se divide cada uno de estos valores por el máximo de la matriz, es este caso se divide por 0.1330, obteniendo de esta forma el EE buscado:

$$\begin{bmatrix} 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 \\ 0.94596 & 1 & 0.94596 \\ 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar dicho elemento satisface las condiciones nombradas anteriormente, es decir, está normalizado y es simétrico. A continuación se muestran los EE utilizados en el desarrollo de esta tesis.

B.2 Elemento estructurante difuso de dimensión 3x3

La matriz de valores que describe al EE de dimensión 3×3 es:

$$B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 \\ 0.94596 & 1 & 0.94596 \\ 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 \end{bmatrix}$$

Gráficamente la matriz $B_{3 \times 3}$ se puede observar en la Figura B.1.

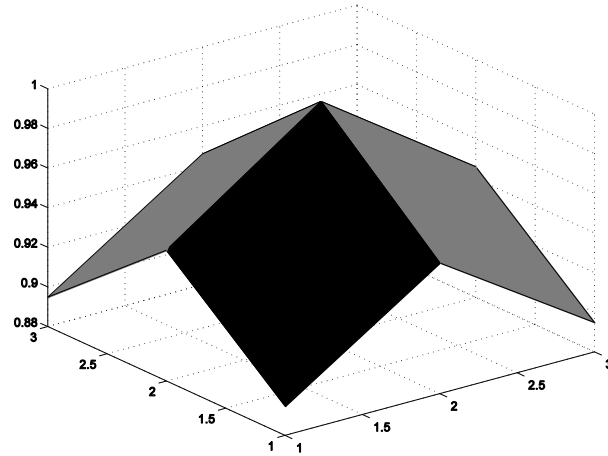


Figura B.1: Visualización tridimensional del EE $B_{3 \times 3}$

B.3 Elemento estructurante difuso de dimensión 5x5

La matriz de valores que describe al EE de dimensión 5×5 es:

$$B_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0.64118 & 0.75747 & 0.80074 & 0.75747 & 0.64118 \\ 0.75747 & 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 & 0.75747 \\ 0.80074 & 0.94596 & 1 & 0.94596 & 0.80074 \\ 0.75747 & 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 & 0.75747 \\ 0.64118 & 0.75747 & 0.80074 & 0.75747 & 0.64118 \end{bmatrix}$$

Gráficamente la matriz $B_{5 \times 5}$ se puede observar en la Figura B.2.

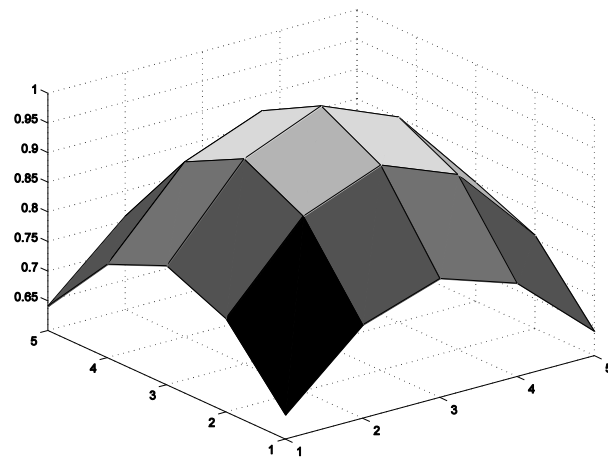


Figura B.2: Visualización tridimensional del EE $B_{5 \times 5}$

B.4 Elemento estructurante difuso de dimensión 7x7

La matriz de valores que describe al EE de dimensión 7×7 es:

$$B_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} 0.36788 & 0.48567 & 0.57375 & 0.60653 & 0.57375 & 0.48567 & 0.36788 \\ 0.48567 & 0.64118 & 0.75747 & 0.80074 & 0.75747 & 0.64118 & 0.48567 \\ 0.57375 & 0.75747 & 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 & 0.75747 & 0.57375 \\ 0.60653 & 0.80074 & 0.94596 & 1 & 0.94596 & 0.80074 & 0.60653 \\ 0.57375 & 0.75747 & 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 & 0.75747 & 0.57375 \\ 0.48567 & 0.64118 & 0.75747 & 0.80074 & 0.75747 & 0.64118 & 0.48567 \\ 0.36788 & 0.48567 & 0.57375 & 0.60653 & 0.57375 & 0.48567 & 0.36788 \end{bmatrix}$$

Gráficamente la matriz $B_{7 \times 7}$ se puede observar en la Figura B.3.

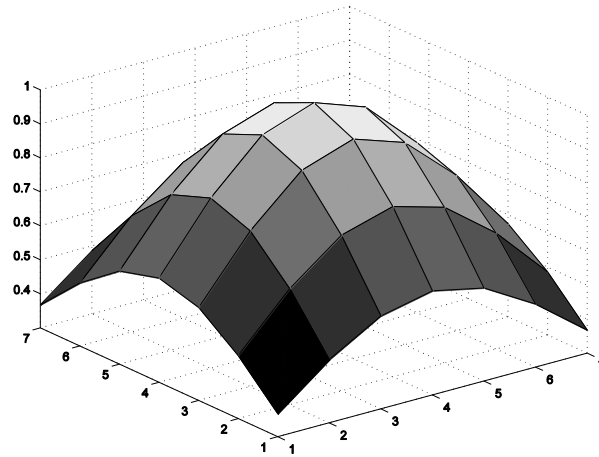


Figura B.3: Visualización tridimensional del EE $B_{7 \times 7}$

B.5 Elemento estructurante difuso de dimensión 11x11

La matriz de valores que describe al EE de dimensión 11×11 es:

$$B_{11 \times 11} = \begin{bmatrix} 0.062177 & 0.10251 & 0.15124 & 0.19967 & 0.23588 & 0.24935 & 0.23588 & 0.19967 & 0.15124 & 0.10251 & 0.062177 \\ 0.10251 & 0.16901 & 0.24935 & 0.32919 & 0.3889 & 0.41111 & 0.3889 & 0.32919 & 0.24935 & 0.16901 & 0.10251 \\ 0.15124 & 0.24935 & 0.36788 & 0.48567 & 0.57375 & 0.60653 & 0.57375 & 0.48567 & 0.36788 & 0.24935 & 0.15124 \\ 0.19967 & 0.32919 & 0.48567 & 0.64118 & 0.75747 & 0.80074 & 0.75747 & 0.64118 & 0.48567 & 0.32919 & 0.19967 \\ 0.23588 & 0.3889 & 0.57375 & 0.75747 & 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 & 0.75747 & 0.57375 & 0.3889 & 0.23588 \\ 0.24935 & 0.41111 & 0.60653 & 0.80074 & 0.94596 & 1 & 0.94596 & 0.80074 & 0.60653 & 0.41111 & 0.24935 \\ 0.23588 & 0.3889 & 0.57375 & 0.75747 & 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 & 0.75747 & 0.57375 & 0.3889 & 0.23588 \\ 0.19967 & 0.32919 & 0.48567 & 0.64118 & 0.75747 & 0.80074 & 0.75747 & 0.64118 & 0.48567 & 0.32919 & 0.19967 \\ 0.15124 & 0.24935 & 0.36788 & 0.48567 & 0.57375 & 0.60653 & 0.57375 & 0.48567 & 0.36788 & 0.24935 & 0.15124 \\ 0.10251 & 0.16901 & 0.24935 & 0.32919 & 0.3889 & 0.41111 & 0.3889 & 0.32919 & 0.24935 & 0.16901 & 0.10251 \\ 0.062177 & 0.10251 & 0.15124 & 0.19967 & 0.23588 & 0.24935 & 0.23588 & 0.19967 & 0.15124 & 0.10251 & 0.062177 \end{bmatrix}$$

Gráficamente la matriz $B_{11 \times 11}$ se puede observar en la Figura B.4.

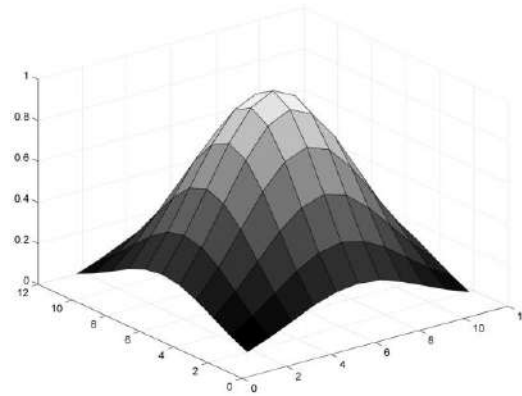


Figura B.4: Visualización tridimensional del EE $B_{11 \times 11}$

B.6 Elemento estructurante difuso de dimensión 15x15

La matriz de valores que describe al EE de dimensión 15×15 es:

$$B_{15 \times 15} = \begin{bmatrix} 0.0043202 & 0.0088954 & 0.01639 & 0.027022 & 0.039866 & 0.052631 & 0.062177 & 0.065729 & 0.062177 & 0.052631 & 0.039886 & 0.027022 & 0.01639 & 0.0088954 & 0.0043202 \\ 0.0088954 & 0.018316 & 0.033746 & 0.055638 & 0.082085 & 0.10837 & 0.12802 & 0.13534 & 0.12802 & 0.10837 & 0.082085 & 0.055638 & 0.033746 & 0.018316 & 0.0088954 \\ 0.01639 & 0.033746 & 0.062177 & 0.10251 & 0.15124 & 0.19967 & 0.23588 & 0.24935 & 0.23588 & 0.19967 & 0.15124 & 0.10251 & 0.062177 & 0.033746 & 0.01639 \\ 0.027022 & 0.055638 & 0.10251 & 0.16901 & 0.24935 & 0.32919 & 0.3889 & 0.41111 & 0.3889 & 0.32919 & 0.24935 & 0.16901 & 0.10251 & 0.055638 & 0.027022 \\ 0.039866 & 0.082085 & 0.15124 & 0.24935 & 0.36788 & 0.48567 & 0.57375 & 0.60653 & 0.57375 & 0.48567 & 0.36788 & 0.24935 & 0.15124 & 0.082085 & 0.039866 \\ 0.052631 & 0.10837 & 0.19967 & 0.32919 & 0.48567 & 0.64118 & 0.75747 & 0.80074 & 0.75747 & 0.64118 & 0.48567 & 0.32919 & 0.19967 & 0.10837 & 0.052631 \\ 0.062177 & 0.12802 & 0.23588 & 0.3889 & 0.57375 & 0.75747 & 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 & 0.75747 & 0.57375 & 0.3889 & 0.23588 & 0.12802 & 0.062177 \\ 0.065729 & 0.13534 & 0.24935 & 0.41111 & 0.60653 & 0.80074 & 0.94596 & 1 & 0.94596 & 0.80074 & 0.60653 & 0.41111 & 0.24935 & 0.13534 & 0.065729 \\ 0.062177 & 0.12802 & 0.23588 & 0.3889 & 0.57375 & 0.75747 & 0.89484 & 0.94596 & 0.89484 & 0.75747 & 0.57375 & 0.3889 & 0.23588 & 0.12802 & 0.062177 \\ 0.052631 & 0.10837 & 0.19967 & 0.32919 & 0.48567 & 0.64118 & 0.75747 & 0.80074 & 0.75747 & 0.64118 & 0.48567 & 0.32919 & 0.19967 & 0.10837 & 0.052631 \\ 0.039866 & 0.082085 & 0.15124 & 0.24935 & 0.36788 & 0.48567 & 0.57375 & 0.60653 & 0.57375 & 0.48567 & 0.36788 & 0.24935 & 0.15124 & 0.082085 & 0.039866 \\ 0.027022 & 0.055638 & 0.10251 & 0.16901 & 0.24935 & 0.32919 & 0.3889 & 0.41111 & 0.3889 & 0.32919 & 0.24935 & 0.16901 & 0.10251 & 0.055638 & 0.027022 \\ 0.01639 & 0.033746 & 0.062177 & 0.10251 & 0.15124 & 0.19967 & 0.23588 & 0.24935 & 0.23588 & 0.19967 & 0.15124 & 0.10251 & 0.062177 & 0.033746 & 0.01639 \\ 0.0088954 & 0.018316 & 0.033746 & 0.055638 & 0.082085 & 0.10837 & 0.12802 & 0.13534 & 0.12802 & 0.10837 & 0.082085 & 0.055638 & 0.033746 & 0.018316 & 0.0088954 \\ 0.0043202 & 0.0088954 & 0.01639 & 0.027022 & 0.039866 & 0.052631 & 0.062177 & 0.065729 & 0.062177 & 0.052631 & 0.039886 & 0.027022 & 0.01639 & 0.0088954 & 0.0043202 \end{bmatrix}$$

Gráficamente la matriz $B_{15 \times 15}$ se puede observar en la Figura B.5.

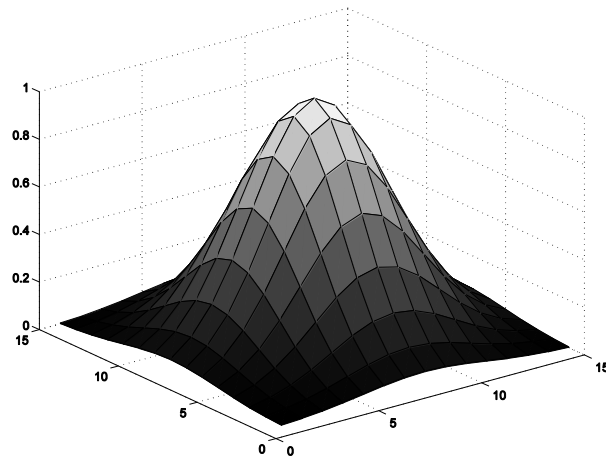
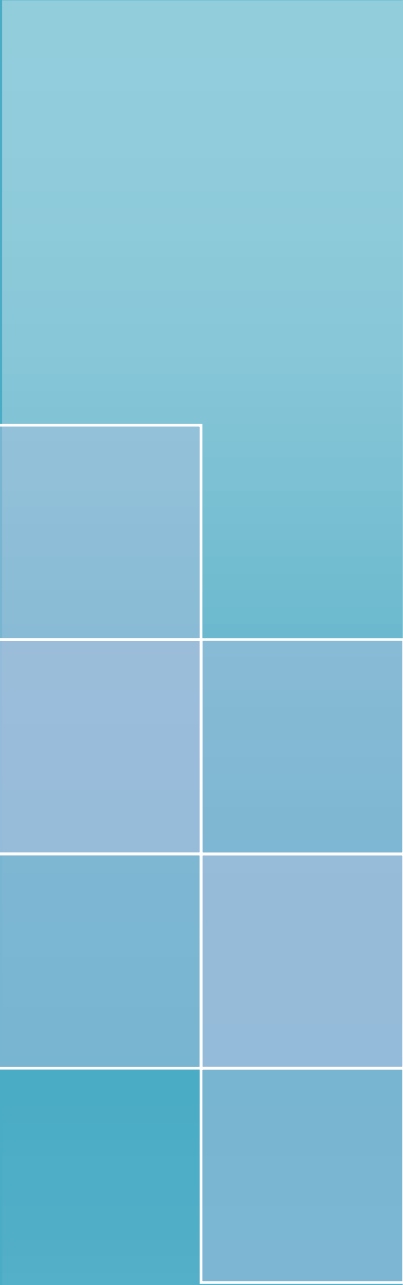


Figura B.5: Visualización tridimensional del EE $B_{15 \times 15}$



Apéndice C

Comportamiento de la norma Drástica en la detección de bordes

Apéndice C

Comportamiento de la norma Drástica en la detección de bordes

A lo largo de esta tesis se diseñan distintos tipos de experimentos para analizar la robustez de los operadores morfológicos difusos frente al comportamiento de los operadores morfológicos clásicos. Al definir los operadores de la MMD se utilizan distintas normas: “Estándar”, “Algebraica”, “Acotada”, “Drástica”, “Dubois and Prade” y “Hamacher”. La norma “Drástica” presenta problemas al momento de ser utilizada en los operadores de detección de bordes del capítulo 10, los cuales son analizados en este apéndice.

La t-norma “Drástica” se define de la siguiente manera:

$$t(a,b) = \begin{cases} a & \text{para } b=1 \\ b & \text{para } a=1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (C.1)$$

El EE que se utiliza en los experimentos que se diseñan en los capítulos anteriores para la aplicación de los operadores de la MMD es simétrico con forma de campana generado por una función Gaussiana, como se muestra en el apéndice B. Dicho elemento debe estar normalizado, es decir, al menos uno de sus valores debe ser igual a uno.

Al realizar los experimentos se percibe que la detección de bordes mediante el gradiente por dilatación con la norma “Drástica” resulta siempre una imagen vacía, es decir, todas las intensidades de los niveles de gris son iguales a cero.

La razón de este comportamiento es que, para la norma “Drástica”, si el EE tiene un solo elemento con valor igual a uno en su origen, entonces la dilatación por dicho EE es equivalente al operador identidad, ya que no produce cambios en la imagen. Por lo tanto, si el EE tiene un solo máximo, como ocurre en la totalidad de los experimentos diseñados, la extracción de bordes usando dilatación basada en esta t-norma tiende a fallar, dado que $D(\mu, \nu) - \mu = 0$ pues $D(\mu, \nu) = \mu$, donde μ representa la imagen y ν el EE. Es importante destacar que en el desarrollo de los experimentos donde se analiza la robustez de los operadores y filtros

morfológicos esta dificultad no fue encontrada debido a que se trabaja con la dilatación y no se realiza la resta $D(\mu, \nu) - \mu$.

Para comprender mejor este comportamiento se muestran los siguientes ejemplos. En la Tabla C.1 se muestran dos EE normalizados de dimensión 3×3 , uno con forma de campana generado por una función Gaussiana y otro plano con forma de cruz.

Tabla C.1: EE normalizado.

EE generado por una función Gaussiana			EE plano con forma de cruz		
0.8948	0.9460	0.8948	0	1	0
0.9460	1	0.9460	1	1	1
0.8948	0.9460	0.8948	0	1	0

Como primera conclusión se puede afirmar que si la imagen no posee algún valor igual a uno entre sus elementos, al dilatar la imagen por medio de dicho EE se obtiene la imagen original. Es decir, este operador funciona como una identidad sin modificar la imagen resultado con respecto a la imagen original. Este efecto se muestra en las Tablas C.2 y C.3. En la primera de las tablas se muestra una ventana de la imagen original, en la segunda se muestra el resultado de la aplicación de la dilatación definida utilizando la t-norma “Drástica” con el EE generado por la función Gaussiana. Las diferencias se pueden visualizar sobre los bordes de la imagen dado que el EE no es aplicado sobre los valores que se encuentran en dicho lugar.

Tabla C.2: Ventana de la imagen original.

0.6824	0.6824	0.6824	0.6824	0.6824	0.6784	0.6745	0.6745	0.6824
0.6784	0.6784	0.6784	0.6706	0.6667	0.6745	0.6784	0.6745	0.6784
0.6745	0.6745	0.6745	0.6706	0.6667	0.6667	0.6706	0.6706	0.6784
0.6745	0.6706	0.6706	0.6667	0.6667	0.6745	0.6784	0.6706	0.6784
0.6784	0.6745	0.6745	0.6745	0.6706	0.6745	0.6784	0.6784	0.6784
0.6745	0.6824	0.6863	0.6863	0.6863	0.6902	0.6902	0.6863	0.6902
0.6667	0.6706	0.6824	0.6863	0.6824	0.6902	0.6941	0.6824	0.6824
0.6667	0.6784	0.6863	0.6863	0.6824	0.6863	0.6902	0.6863	0.6863
0.6588	0.6588	0.6588	0.6667	0.6667	0.6784	0.6824	0.6784	0.6784

Tabla C.3: Ventana de la imagen resultado.

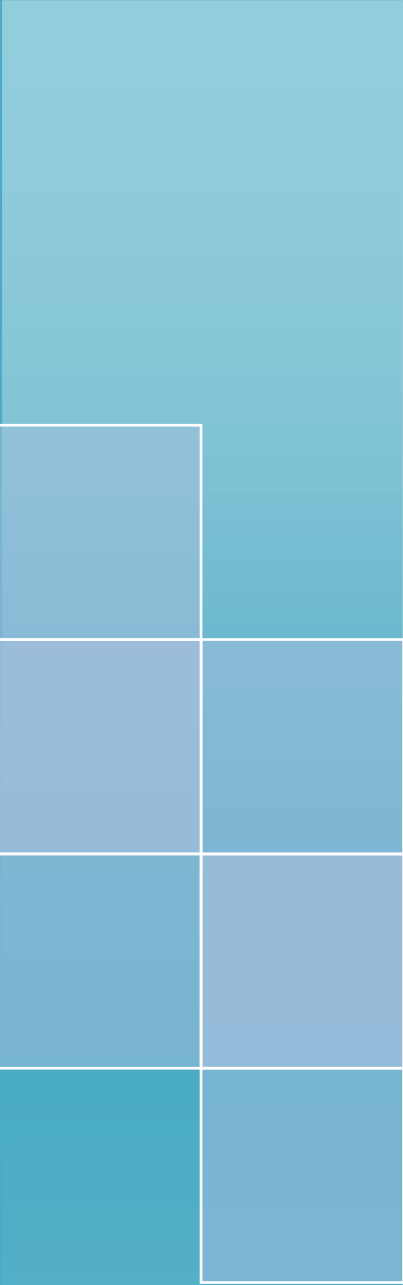
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.6784	0.6784	0.6706	0.6667	0.6745	0.6784	0.6745	0.6784
0	0.6745	0.6745	0.6706	0.6667	0.6667	0.6706	0.6706	0.6784
0	0.6706	0.6706	0.6667	0.6667	0.6745	0.6784	0.6706	0.6784
0	0.6745	0.6745	0.6745	0.6706	0.6745	0.6784	0.6784	0.6784
0	0.6824	0.6863	0.6863	0.6863	0.6902	0.6902	0.6863	0.6902
0	0.6706	0.6824	0.6863	0.6824	0.6902	0.6941	0.6824	0.6824
0	0.6784	0.6863	0.6863	0.6824	0.6863	0.6902	0.6863	0.6863
0	0.6588	0.6588	0.6667	0.6667	0.6784	0.6824	0.6784	0.6784

Para comparar este comportamiento a situaciones donde no se presenta el problema, se definirá otro tipo de EE para analizar los efectos de dilatación utilizando la t-norma bajo estudio. Con este objetivo se define un EE plano con forma de cruz como se muestra en la Tabla C.1. Este EE puede ser aplicado en esta teoría ya que cumple el requisito pedido de normalidad. Entonces al aplicar la dilatación definida con la t-norma bajo estudio se obtienen los valores de la imagen en los píxeles para los cuales el EE toma el valor uno. Por lo tanto, al aplicar la dilatación y tomar el valor máximo del entorno se logran diferencias con respecto a la aplicación del EE anterior. Esto se puede visualizar en la Tabla C.4.

Tabla C.4: Resultado de aplicar la dilatación sobre la imagen con un EE en forma de cruz

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.6824	0.6824	0.6824	0.6824	0.6784	0.6784	0.6784	0.6902
0	0.6784	0.6784	0.6745	0.6706	0.6745	0.6784	0.6784	0.6902
0	0.6745	0.6745	0.6745	0.6745	0.6784	0.6784	0.6784	0.6902
0	0.6824	0.6863	0.6863	0.6863	0.6902	0.6902	0.6863	0.6902
0	0.6863	0.6863	0.6863	0.6902	0.6902	0.6941	0.6902	0.6902
0	0.6824	0.6863	0.6863	0.6902	0.6941	0.6941	0.6941	0.6902
0	0.6863	0.6863	0.6863	0.6863	0.6902	0.6941	0.6902	0.6863
0	0.6784	0.6863	0.6863	0.6824	0.6902	0.6941	0.6863	0.6863

Por lo expuesto es que la norma “Drástica” fue removida de los experimentos desarrollados para analizar la robustez de los operadores de detección de bordes.



Apéndice D

Software Implementado: Librería de MMD

Apéndice D

Software Implementado: Librería de MMD

Para poder implementar los algoritmos desarrollados para cada tipo de experimento diseñado a lo largo de esta tesis fue necesario generar una librería con las funciones básicas de la MMD en lenguaje Matlab. En este apéndice se detallan cada una de las funciones creadas. Es importante destacar que esta librería también fue utilizada por otros investigadores en trabajos que utilizan funciones de la MMD.

D.1 Descripción de la librería

A continuación, en la Tabla D.1, se detallan las funciones generadas.

Tabla D.1: Funciones generadas en la librería de MMD.

<i>dif_fuzzy:</i>	Fuzzyfica la imagen utilizando el máximo del rango.
<i>dif_desfuzzy:</i>	Desfuzzyfica la imagen utilizando el máximo del rango.
<i>dif_dil_t:</i>	Dilata la imagen difusa.
<i>dif_ero_s:</i>	Erosiona la imagen difusa.
<i>dif_apertura:</i>	Calcula la apertura difusa de una imagen.
<i>dif_cierre:</i>	Calcula el cierre difuso de una imagen.
<i>dif_apertura_cierre:</i>	Calcula el filtro secuencial alternado difuso apertura-cierre de una imagen.
<i>dif_cierre_apertura:</i>	Calcula el filtro secuencial alternado difuso cierre-apertura de una imagen.
<i>dif_grad:</i>	Calcula el gradiente difuso de una imagen.
<i>dif_grad_dil:</i>	Calcula el gradiente por dilatación difuso de una imagen.
<i>dif_grad_ero:</i>	Calcula el gradiente por erosión difuso de una imagen.
<i>dif_tophat_apertura:</i>	Calcula el Top-Hat difuso por apertura de una imagen.
<i>dif_tophat_cierre:</i>	Calcula el Top-Hat difuso por cierre de una imagen.
<i>dif_norma:</i>	Calcula una norma.
<i>dif_t_estandar:</i>	Calcula la t-norma estándar.
<i>dif_s_estandar:</i>	Calcula la s-norma estándar.
<i>dif_t_algebraica:</i>	Calcula la t-norma algebraica.
<i>dif_s_algebraica:</i>	Calcula la s-norma algebraica.
<i>dif_t_acotada:</i>	Calcula la t-norma acotada.
<i>dif_s_acotada:</i>	Calcula la s-norma acotada.
<i>dif_t_drastica:</i>	Calcula la t-norma drástica.
<i>dif_s_drastica:</i>	Calcula la s-norma drástica.
<i>dif_t_hamacher:</i>	Calcula la t-norma Hamacher.
<i>dif_s_hamacher:</i>	Calcula la s-norma Hamacher.
<i>dif_t_dubois:</i>	Calcula la t-norma Dubois and Prade.
<i>dif_s_dubois:</i>	Calcula la s-norma Dubois and Prade.
<i>dif_c_estandar:</i>	Calcula el complemento difuso estándar.

Para comprender el comportamiento de cada una de las funciones mencionadas en la Tabla D.1 se realizará un detalle de las mismas de la siguiente manera: nombre de la función, prototipos de llamadas, parámetros de entrada, parámetros de salida y una descripción detallada.

- ***dif_fuzzy:***

[Y] = dif_fuzzy (X)

Input:

X - Double Matrix. Imagen.

Output:

Y - Double Matrix. Imagen difusa.

DIF_FUZZY devuelve la imagen fuzzificada. El rango de la imagen debe ser [0,255]. Divide a cada valor de la imagen por 255 obteniendo como resultado la imagen fuzzificada.

- ***dif_desfuzzy:***

[Y] = dif_desfuzzy (X)

Input:

X - Double Matrix. Imagen difusa.

R - Integer. Rango de las imágenes [0 R].

Output:

Y - Double Matrix. Imagen.

DIF_DESFUZZY desfuzzifica la imagen difusa. El rango de la imagen original debe ser [0,255]. Multiplica a cada valor de la imagen difusa por 255 obteniendo como resultado la imagen desfuzzificada.

- ***dif_dil_t:***

[Y] = dif_dil_t (Funct,A,B,g)

Input:

Funct - String. Nombre de la Norma a utilizar.

A - Double Matrix. Imagen difusa.

B - Double Matrix. Elemento estructurante difuso.

g - Real Number. Parámetro de la Norma a utilizar.

Output:

Y - Double Matrix. Imagen difusa dilatada.

DIF_DIL_T dilata la imagen difusa utilizando la t-norma ingresada. El elemento estructurante es difuso. La dimensión del elemento estructurante es $N \times N$, donde N es un número impar mayor o igual a 3.

- **dif_ero_s:**

$[Y] = \text{dif_ero_s}(\text{Funct}, A, B, g)$

Input:

Funct - String. Nombre de la Norma a utilizar.

A - Double Matrix. Imagen difusa.

B - Double Matrix. Elemento estructurante difuso.

g - Real Number. Parámetro de la Norma a utilizar.

Output:

Y - Double Matrix. Imagen Difusa Dilatada.

DIF_EROS erosiona la imagen difusa utilizando la s-norma ingresada. El elemento estructurante es el complemento difuso del elemento estructurante original y su dimensión es $N \times N$.

- **dif_apertura:**

$[Y] = \text{dif_Apertura_Cierre}(X, \text{Funct}, B, g, R)$

Input:

X - Double Matrix. Imagen original.

Funct_Dil - String. Nombre de la t-norma a utilizar.

Funct_Ero - String. Nombre de la s-norma a utilizar.

B - Double Matrix. Elemento estructurante.

g - Real number. Parámetro.

R - Integer. Rango de las imagenes.

Output:

Y - Double Matrix. Imagen filtrada.

DIF_APERTURA calcula la apertura difusa de una imagen. Ingresa la imagen original (X). Se fuzzifica la imagen utilizando la función de fuzzificación dif_fuzzy. Se calcula la apertura utilizando la norma ingresada como 'Funct' y se desfuzzifica el resultado obtenido (Y).

- **dif_cierre:**

[Y] = dif_cierre_Cierre (X,Funct,B,g,R)

Input:

- X - Double Matrix. Imagen original.
- Funct_Dil - String. Nombre de la t-norma a utilizar.
- Funct_Ero - String. Nombre de la s-norma a utilizar.
- B - Double Matrix. Elemento estructurante.
- g - Real number. Parámetro.
- R - Integer. Rango de las imágenes.

Output:

Y - Double Matrix. Imagen filtrada.

DIF_CIERRE calcula el cierre difuso de una imagen. Ingresas la imagen original (X). Se fuzzifica la imagen utilizando la función de fuzzificación dif_fuzzy. Se calcula el cierre utilizando la norma ingresada como 'Funct' y se desfuzzifica el resultado obtenido (Y).

- **dif_apertura_cierre:**

[Y] = dif_apertura_cierre (X,Funct,B,g,R)

Input:

- X - Double Matrix. Imagen original.
- Funct_Dil - String. Nombre de la t-norma a utilizar.
- Funct_Ero - String. Nombre de la s-norma a utilizar.
- B - Double Matrix. Elemento estructurante.
- g - Real number. Parámetro.
- R - Integer. Rango de las imágenes.

Output:

Y - Double Matrix. Imagen filtrada.

DIF_APERTURA_CIERRE calcula el filtro secuencial alternado difuso apertura-cierre de una imagen. Ingresas la imagen original (X). Se fuzzifica la imagen utilizando la función de fuzzificación dif_fuzzy. Se calcula el filtro utilizando la norma ingresada como 'Funct' y se desfuzzifica el resultado obtenido (Y).

- **dif_cierre_apertura:**

[Y] = dif_cierre_apertura (X,Funct,B,g,R)

Input:

- X - Double Matrix. Imagen original.
- Funct_Dil - String. Nombre de la t-norma a utilizar.
- Funct_Ero - String. Nombre de la s-norma a utilizar.

- B - Double Matrix. Elemento estructurante.
- g - Real number. Parámetro.
- R - Integer. Rango de las imágenes.

Output:

Y - Double Matrix. Imagen filtrada.

DIF_CIERRE_APERTURA calcula el filtro secuencial alternado difuso cierre-apertura de una imagen. Ingresa la imagen original (X). Se fuzzifica la imagen utilizando la función de fuzzificación dif_fuzzy. Se calcula el filtro utilizando la norma ingresada como 'Funct' y se desfuzzifica el resultado obtenido (Y).

- **dif_grad:**

[Grad] = dif_grad (X,Funct_Dil,B,g,R)

Input:

- X - Double Matrix. Imagen Original.
- Funct_Dil - Function_Handle. Nombre de la t-norma a utilizar.
- Funct_Ero - Function_Handle. Nombre de la s-norma a utilizar.
- B - Double Matrix. Elemento estructurante.
- g - Real Number. Parametro de algunas normas.
- R - Integer. Valor máximo del rango de las imágenes.

Output:

Grad - Double Matrix. Gradiente difuso de la imagen.

DIF_GRAD calcula el gradiente de una imagen en niveles de gris a partir de la resta entre dilatación y la erosión.

- **dif_grad_dil:**

[Grad] = dif_grad_dil (X,Funct_Dil,B,g,R,K)

[Grad] = dif_grad_dil (X,Funct_Dil,B,g,R)

Input:

- X - Double Matrix. Imagen Original.
- Funct_Dil - Function_Handle. Nombre de la t-norma a utilizar.
- B - Double Matrix. Elemento estructurante.
- g - Real Number. Parametro de algunas normas.
- R - Integer. Valor máximo del rango de las imágenes.
- K - Integer. Valor a partir del cual se binariza la imagen resultado.

(Default = -1: No binarizacion)

Output:

Grad - Double Matrix. Gradiente difuso por dilatación de la imagen. Binaria si se define el parámetro K. En niveles de gris si no se define el parámetro K.

DIF_GRAD_DIL calcula el gradiente difuso por dilatación de una imagen en niveles de gris.

- **dif_grad_ero:**

[Grad] = dif_grad_ero (X,Funct_Ero,B,g,R,K)

[Grad] = dif_grad_ero (X,Funct_Ero,B,g,R)

Input:

X - Double Matrix. Imagen Original.

Funct_Ero - Function_Handle. Nombre de la s-norma a utilizar.

B - Double Matrix. Elemento estructurante.

g - Real Number. Parámetro de algunas normas.

R - Integer. Valor máximo del rango de las imágenes.

K - Integer. Valor a partir del cual se binariza la imagen resultado.

(Default = -1: No binarizacion)

Output:

Grad - Double Matrix. Gradiente difuso por erosión de la imagen. Binaria si se define el parámetro K. En niveles de gris si no se define el parámetro K.

DIF_GRAD_EROS calcula el gradiente difuso por erosión de una imagen en niveles de gris.

- **dif_tophat_apert:**

[TopHat] = dif_tophat_apert (X,Funct,B,g,R)

Input:

X - Double Matrix. Imagen Original.

Funct - Function_Handle. Nombre de la norma a utilizar.

B - Double Matrix. Elemento estructurante.

g - Real Number. Parametro de algunas normas.

R - Integer. Valor máximo del rango de las imágenes.

Output:

TopHat - Double Matrix. Top-Hat difuso por apertura de la imagen.

DIF_TOPHAT_APERT calcula el Top-Hat difuso por apertura de una imagen en niveles de gris.

- ***dif_tophat_cierre:***

[TP] = dif_tophat_cierre (X,Funct,B,g,R)

Input:

X - Double Matrix. Imagen Original.

Funct - Function_Handle. Nombre de la norma a utilizar.

B - Double Matrix. Elemento estructurante.

g - Real Number. Parámetro de algunas normas.

R - Integer. Valor máximo del rango de las imágenes.

Output:

Grad - Double Matrix. Top-Hat difuso por cierre de la imagen.

DIF_TOPHAT_CIERRE calcula el Top-Hat difuso por cierre de una imagen en niveles de gris.

- ***dif_norma:***

[T] = dif_t_norma (Funcion,A,B,g)

Input:

Funcion - String. Nombre de la Norma.

A - Double Matrix. Imagen difusa.

B - Double Matrix. Elemento estructurante difuso.

g - Real number. Parámetro.

Output:

T - Double Matrix. Imagen.

DIF_T_Norma calcula la norma entre las matrices A y B.

Example:

A = [0.4 0.5; 1 0.8];

B = [0.6 0.2; 0.9 0.5];

g = 0.2;

T = dif_t_norma(@dif_t_algebraic,A,B,g)

- ***dif_t_estandar:***

[T] = dif_t_estandar (A,B)

[S] = dif_t_estandar ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real number. Parámetro. (En esta función no se utiliza)

Output:

T - Double Matrix.

S - String.

DIF_T_ESTANDAR calcula el mínimo entre dos matrices. La función t-norma estándar $t(a,b) = \min(a,b)$.

- ***dif_s_estandar:***

[S] = dif_s_estandar (A,B)

[T] = dif_s_estandar ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real number. Parámetro. (En esta función no se utiliza)

Output:

S - Double Matrix.

T - String.

DIF_S_ESTANDAR calcula el máximo entre dos matrices. La función s-norma estándar $s(a,b) = \max(a,b)$.

- ***dif_t_algebraica:***

[T] = dif_t_algebraica (A,B)

[S] = dif_t_algebraica ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real number. Parámetro. (En esta función no se utiliza)

Output:

T - Double Matrix.

S - String.

DIF_T_ALGEBRAICA calcula la t-norma algebraica $t(a,b) = a.b$.

- ***dif_s_algebraica:***

[S] = dif_s_algebraica (A,B)

[T] = dif_s_algebraica ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real number. Parámetro. (En esta función no se utiliza)

Output:

S - Double Matrix.

T - String.

DIF_S_ALGEBRAICA calcula la s-norma algebraica $s(a,b) = a + b - a.b$.

- ***dif_t_acotada:***

[T] = dif_t_acotada (A,B)

[S] = dif_t_acotada ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real number. Parámetro. (En esta función no se utiliza)

Output:

T - Double Matrix.

S - String.

DIF_T_ACOTADA calcula la t-norma acotada $t(a,b) = \max[0, a + b - 1]$.

- ***dif_s_acotada:***

[S] = dif_s_acotada (A,B)

[T] = dif_s_acotada ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real number. Parámetro. (En esta función no se utiliza)

Output:

S - Double Matrix.

T - String.

DIF_S_ACOTADA calcula la s-norma acotada $s(a,b) = \min[1, a + b]$.

- ***dif_t_drastica:***

[T] = dif_t_drastica (A,B)

[S] = dif_t_drastica ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real number. Parámetro. (En esta función no se utiliza)

Output:

T - Double Matrix.

S - String.

DIF_T_DRASTICA calcula la t-norma drástica $t(a,b) = \begin{cases} a & \text{para } b=1 \\ b & \text{para } a=1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$.

- ***dif_s_drastica:***

[S] = dif_s_drastica (A,B)

[T] = dif_s_drastica ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real number. Parámetro. (En esta función no se utiliza)

Output:

S - Double Matrix.

T - String.

DIF_S_DRASTICA calcula la s-norma drástica $s(a,b) = \begin{cases} a & \text{para } b=0 \\ b & \text{para } a=0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$.

- ***dif_t_hamacher:***

[T] = dif_t_hamacher (A,B)

[S] = dif_t_hamacher ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real. Valor Real mayor que cero. ($g > 0$)

Output:

T - Double Matrix.

S - String.

DIF_T_HAMACHER calcula la t-norma Hamacher $t(a,b) = \frac{a.b}{g + (1-g).(a+b-a.b)}$.

- **dif_s_hamacher:**

[S] = dif_s_hamacher (A,B,g)

[T] = dif_s_hamacher ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real. Valor Real mayor que cero. ($g > 0$)

Output:

S - Double Matrix.

T - String.

DIF_S_HAMACHER calcula la s-norma Hamacher $s(a,b) = \frac{a+b+(g-2).a.b}{1+(g-1).a.b}$.

- **dif_t_dubois:**

[T] = dif_t_dubois (A,B,g)

[S] = dif_t_dubois ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real. Valor Real mayor que cero. ($0 < g < 1$)

Output:

T - Double Matrix.

S - String.

DIF_T_DUBOIS calcula la t-norma Dubois and Prade $t(a,b) = \frac{a.b}{\max[a,b,g]}$.

- **dif_s_dubois:**

[S] = dif_s_dubois (A,B,g)

[T] = dif_s_dubois ()

Input:

A - Double Matrix.

B - Double Matrix.

g - Real. Valor Real mayor que cero. ($0 < g < 1$)

Output:

S - Double Matrix.

T - String.

DIF_S_DUBOIS calcula la s-norma Dubois and Prade $s(a,b) = 1 - \frac{(1-a) \cdot (1-b)}{\max[1-a, 1-b, g]}$.

- ***dif_c_estandar:***

[C] = dif_c_estandar (A)

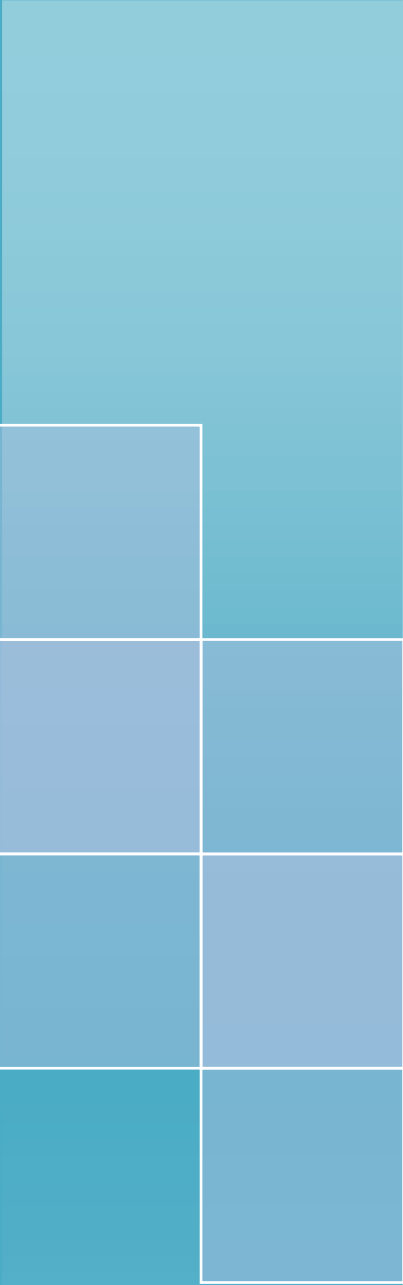
Input:

A - Double Matrix.

Output:

C - Double Matrix.

DIF_C_ESTANDAR calcula el complemento difuso estándar $c(a) = 1 - a$.



Referencias

Referencias

- Aranguren, S.M. & Muzachiodi, S.L. (2003). Implicancias del Data Mining. *Tesis de grado: Licenciatura en Sistemas de Información*. Universidad Tecnológica Nacional. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Argentina.
- Bandemer, H. & Näther, W. (1992). *Fuzzy Data Analysis*, Theory and Decision Library, Serie B: Mathematical and Statistical, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Bangham, J.A. & Marshall, S. (1998). Image and Signal processing with mathematical morphology. *IEE Electronics & Communication Engineering Journal*; 10: 117-128.
- Batyrshin, I.Z., Kaynak, O. & Rudas, I. (1998). Generalized conjunction and disjunction operations for fuzzy control. *Proc. EUFIT'98*. Aachen, Germany.
- Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*. Providence, Rhode Island.
- Bloch, I. (2006). Duality vs Adjunction and General Form for Fuzzy Mathematical Morphology. *Fuzzy Logic and Applications*, 3849: 354 - 361. Springer Berlin / Heidelberg
- Bloch, I. (2009). Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. *Fuzzy Sets and Systems*; 160: 1858-1867.
- Bloch, I. & Maitre, H. (1995). Fuzzy mathematical morphologies: A comparative study. *Pattern Recognition*; 28: 1341-1387.
- Bouchet, A., Pastore, J. & Ballarin, V. (2005). Segmentación de Imágenes a través de Morfología Matemática Difusa. *Reunión de Procesamiento de la Información y Control (RPIC 2005)*. Universidad Nacional de Río Cuarto. Córdoba, Argentina.
- Bouchet, A., Pastore, J. & Ballarin, V. (2007). Segmentation of Medical Images using Fuzzy Mathematical Morphology. *Journal of Computer Science and Technology*; 7: 256-262.
- Bouchet, A., Pastore, J. & Moler, E. (2008). Reconstrucción geodésica de imágenes a través de componentes conectadas. *IEEE America Latina*; 6: 471-476.
- Bouchet, A., Brun, M. & Ballarin, V. (2009). Morfología Matemática Difusa aplicada a la segmentación de angioografías retinales. *XVII Congreso Argentino de Bioingeniería (SABI 2009)*. Rosario, Santa Fé, Argentina.

- Buckley, J. & Eslami, E. (2002). *An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets*. Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company. Heidelberg.
- Cornelis, C., Van der Donck, C. & Kerre, E. (2003). Sinha-Dougherty approach to the fuzzification of set inclusion revisited. *Fuzzy Sets and Systems*; 134: 283-295.
- De Baets, B. (1995). Idempotent closing and opening operations in fuzzy mathematical morphology. *Proceedings of ISUMA - NAFIPS '95 The Third International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis and Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society*.
- De Baets, B., Kerre, E. & Gupta, M. (1995a). The Fundamentals of Fuzzy Mathematical Morphology. Part 1: Basic Concepts. *International Journal of General Systems*; 23: 155 - 171.
- De Baets, B., Kerre, E. & Gupta, M. (1995b). The Fundamentals of Fuzzy Mathematical Morphology. Part 2: Idempotence, Convexity and Decomposition. *International Journal of General Systems*; 23: 307 - 322.
- Di Gesu, V. (1988). Mathematical morphology and image analysis: a fuzzy approach. *Proceedings of the Workshop on Knowledge-Based Systems and Models of Logical Reasoning*. Cairo, Egypt.
- Di Gesu, V., Maccarone, M.C. & Tripiciano, M. (1991). MMFUZZY Mathematical morphology based on fuzzy operators. *Proceedings of the 4th IFSA Congress '91*. Ed: Roubens RLaM. Brussels.
- Di Gesu, V., Maccarone, M.C. & Tripiciano, M. (1993). Mathematical Morphology based on Fuzzy Operators. *Fuzzy Logic*. Ed: Lowen R & Roubens M. Kluwer Academic Publishers.
- Dougherty, E.R. (1993). *Mathematical morphology in image processing*. M. Dekker.
- Dubois, D. & Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York, Academic Press Inc.
- Dubois, D. & Prade, H. (1985). Review of fuzzy set aggregation connectives. *Information Sciences (INFO SCI)*; 36: 85 - 121.
- Espin Andrade, R., Fernández González, E. & Mazcorro Téllez, G. (2002). Compensatory Logic. *Congress of Fuzzy Logic for Management and Economy (SIGEF 2002)*. Mérida, Venezuela.

- Espín Andrade, R., Marx Gómez, J., Mazcorro Téllez, G. & Fernández González, E. (2004). Compensatory Logic: A Fuzzy Approach to Decision Making. *Proceedings of 4th International Symposium on Engineering of Intelligent Systems (EIS' 2004)*. Madeira, Portugal.
- Espin Andrade, R., Mazcorro Téllez, G., Fernández González, E., Marx-Gómez, J. & Lecich, M.I. (2006). Compensatory Logic: A fuzzy normative model for decision making. *Investigación Operativa, Universidad de la Habana*, 27: 188 - 197.
- Espín Andrade, R. & Mazcorro Téllez, G. (2007). Consideraciones sobre el carácter normativo de la lógica difusa compensatoria. *Infraestructuras de Datos Espaciales en Iberoamérica y el Caribe*. Ed: IDICT. Habana, Cuba.
- Espin Andrade, R. & Fernández González, E. (2009). *La Lógica Difusa Compensatoria: Una Plataforma para el Razonamiento y la Representación del Conocimiento en un Ambiente de Decisión Multicriterio. Análisis Multicriterio para la Toma de Decisiones: Métodos y Aplicaciones*. Coedición: editorial Plaza y Valdes / Editorial Universidad de Occidente.
- Facon, J. (1996). *Morfología Matemática. Teoría e ejemplos*. Ed: Universitária Champagnat da Pontífica Universidade Católica do Paraná. Curitiba, Brasil.
- Gentile, E.R. (1967). *Estructuras Algebraicas I*. Washington, D.C.
- Gentile, E.R. (1984). *Notas de Álgebra I*. Buenos Aires.
- Giardina, C.R. & Sinha, D. (1990). Image processing using pointed fuzzy sets. *SPIE Conference on Intelligent Robots and Computer Vision VIII: Algorithms and Techniques*. Philadelphia, USA.
- Glasbey, C.A. & Horgan, G.W. (1995). *Image Analysis for the Biological Sciences*. Ed: John Wiley and Sons. England.
- Goetcherian, V. (1980). From binary to grey tone image processing using fuzzy logic concepts. *Pattern Recognition*; 12: 7 - 15.
- González, R. & Woods, R. (1996). *Tratamiento Digital de Imágenes*. Addison Wesley.
- Grätzer, G. (1978). *General Lattice Theory*. Academic Press.
- Halmos, P. (1974). *Set Theory*. Springer-Verlag. New York.

- Haralick, R., Sternberg, S. & Zhuang, X. (1987). Image Analysis Using Mathematical Morphology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9(4): 532-549.
- Jackway, P.T. & Deriche, M. (1996). Scale-Space Properties of the Multiscale Morphological Dilation-Erosion. *IEEE Trans.on Pattern Analysis and Machine Intelligence*; 18: 38-51.
- Jantzen, J. (1999). *Tutorial on fuzzy logic*. Technical University of Denmark, Department of Automation.
- Kapur, J.N., Sahoo, P.K. & Wong, A.K.C. (1985). A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*; 29: 273-285.
- Kaufmann, A. & Gupta, M.M. (1988). Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science. *Elsevier Science Inc.* New York, USA.
- Kerre, E.E. & Nachtegaal, M. (2000). *Fuzzy Techniques in Image Processing*. New York.
- Kleene, S.C. (1952). *Introduction to metamathematics*. North-Holland, Amsterdam.
- Kwon, S.H. (2004). Threshold selection based on cluster analysis. *Pattern Recognition Letters*; 25: 1045-1050.
- Laplante, P.A. & Giardina, C.R. (1991). Fast dilation and erosion of time-varying grey-valued images with uncertainty. *SPIE*, 1568: 295-302. Ed: Paul DG & Edward RD.
- Lombraña, J.V. (1978). Lógica Polivalente. *El Basilisco*; 1: 93-99.
- Nakatsuyama, M. (1993). Fuzzy mathematical morphology for image processing. *ANZIS - 93*. Perth, Western Australia.
- Öffenberger, N. (2008). Valores de verdad en la lógica de Aristóteles. *Thémata. Revista de Filosofía*; 40: 62-70.
- Otsu, N. (1979). A threshold selection method from gray-level histogram. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*; 9: 62-66.
- Rojó, A. (1978). *Álgebra I*. Buenos Aires.
- Ronse, C. & Heijmans, H.J.A.M. (1991). The algebraic basis of mathematical morphology : II. Openings and closings. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*; 54: 74-97.

- Sahoo, P.K., Soltani, S. & Wong, A.K.C. (1988). A survey of thresholding techniques. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*; 41: 233-260.
- Schmetterer, L. (2007). How can blood flow be measured?. *Surv Ophthalmol*; 52: S134-8.
- Serra, J. (1982). *Image analysis and mathematical morphology. Vol I*. Academic Press. London.
- Serra, J. (1988). *Image analysis and mathematical morphology. Vol II*. Academic Press. London.
- Sezgin, M. & Sankur, B. (2004). Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. *J. Electron. Imaging*; 13: 146-165.
- Spaeth, G.L. (1975). Fluorescein angiography: Its contributions toward understanding the mechanisms of visual loss in glaucoma. *Trans Am Ophthalmol Soc*; 73: 491-553.
- Szász, G. (1963). *Introduction to Lattice Theory*. Academic Press.
- Valdés, A., Espin Andrade, R. & Gómez, J.M. (2010). *Compensatory Fuzzy Ontology*. ICT Innovations 2009. Springer Berlin Heidelberg.
- Weszka, J.S., Nagel, R.N. & Rosenfeld, A. (1974). A Threshold Selection Technique. *IEEE Transactions on Computers*; 23: 1322 - 1326.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*; 8: 338-353.
- Zadeh, L.A. (1974). The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning - Parts 1–3. *Information Sciences*; 8: 199 - 249.
- Zadeh, L.A. (1988). Fuzzy Logic. *Computer*; 21: 83 - 93
- Zadeh, L.A. (1996). Fuzzy logic = Computing with words. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*: 103-111.