

**Universidad Nacional de Mar del Plata**

**Proyecto de Investigación**

**Técnicas de Estabilización Numérica  
en Problemas de Advección  
Dominante**

***Alumnos:***

Pablo Javier Blanco

Matrícula: 8492

Sebastián Chevalier

Matrícula: 8523

***Director del Proyecto:***

Ing. Santiago Urquiza

***Carrera:***

Ingeniería Electromecánica

***Calificación:***

***15 de Abril de 2003***



RINFI es desarrollado por la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la  
Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar  
documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y  
Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto  
de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo  
con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad  
entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons  
Atribución- NoComercial-CompartirIgual 4.0  
Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

**Universidad Nacional de Mar del Plata**

**Proyecto de Investigación**

**Técnicas de Estabilización Numérica  
en Problemas de Advección  
Dominante**

***Alumnos:***

Pablo Javier Blanco

Matrícula: 8492

Sebastián Chevalier

Matrícula: 8523

***Director del Proyecto:***

Ing. Santiago Urquiza

***Carrera:***

Ingeniería Electromecánica

***Calificación:***

***15 de Abril de 2003***

A mis familia y a mi novia por

el amor entregado

A mis amigos del alma

por acompañarme en todo.

Pablo Javier Blanco

A mi familia (los que están y los que no)

y a mi novia por estar siempre a mi lado,

en especial mi mamá.

A mis amigos, a mi padrino y  
a mi madrina por creer en mí.

Sebastián Chevalier

A Santiago por su dedicación y predisposición

A Adrián por su colaboración

Pablo y Sebastián

# Índice:

<b>Índice</b> .....	- 1 -
<b>Introducción</b> .....	- 3 -
<b>Presentación y organización del informe</b> .....	- 3 -
<b>Definición del problema, antecedentes y estado de la cuestión</b> .....	- 4 -
<b>Resumen y objetivos de la investigación</b> .....	- 5 -
<b>La línea de investigación realizada</b> .....	- 6 -
<b>Capítulo 1</b> .....	- 8 -
<b>1.1. Conceptos básicos del mecanismo de convección-difusión</b> .....	- 8 -
1.1.1. La ecuación de convección-difusión.....	- 8 -
1.1.2. El problema de la inestabilidad numérica.....	- 9 -
1.1.3. El esquema de difusión artificial.....	- 13 -
1.1.4. El esquema de upwinding para diferencias finitas.....	- 15 -
1.1.5. El esquema exponencial para diferencias finitas.....	- 15 -
<b>1.2. El método de los elementos finitos</b> .....	- 16 -
1.2.1. La discretización del método de los elementos finitos.....	- 17 -
1.2.2. La forma de Galerkin.....	- 19 -
1.2.3. El esquema de Petrov-Galerkin.....	- 20 -
1.2.4. El método de Least Squares.....	- 22 -
1.2.5. El método de Galerkin Least Squares.....	- 24 -
1.2.6. El método de SubGrid Scale.....	- 25 -
<b>1.3. Otro enfoque sobre las inestabilidades numéricas</b> .....	- 27 -
1.3.1. Autovalores complejos.....	- 28 -
<b>1.4. El método de cálculo finitesimal</b> .....	- 30 -
1.4.1. La ecuación diferencial estabilizada.....	- 30 -
1.4.2. Generalización para casos multidimensionales.....	- 32 -
1.4.3. Determinación de los parámetros de estabilización.....	- 33 -
1.4.4. Soluciones suavizadas.....	- 35 -
1.4.5. Derivación de ecuaciones estabilizadas de mayor orden.....	- 36 -
1.4.6. Extensión a sistemas de ecuaciones.....	- 37 -
1.4.7. Discusión sobre el MCF.....	- 38 -
<b>Capítulo 2</b> .....	- 39 -
<b>2.1. El método de los dominios desplazados</b> .....	- 39 -
2.1.1. Conceptos fundamentales.....	- 40 -
2.1.2. La interpretación del desplazamiento 'h'.....	- 41 -
2.1.3. Desarrollo general del método.....	- 42 -
2.1.4. Una formulación simplificada.....	- 44 -
2.1.5. Esquemas transitorios.....	- 45 -
2.1.6. Ecuaciones de mayor orden.....	- 46 -
<b>2.2. El MDD aplicado a la ecuación de advección-difusión</b> .....	- 46 -
2.2.1. El desplazamiento del residuo.....	- 47 -
2.2.2. El desplazamiento de la función de peso.....	- 49 -
2.2.3. Las condiciones de contorno.....	- 52 -
<b>2.3. Equivalencias del método</b> .....	- 52 -
2.3.1. Equivalencia con el MCF.....	- 52 -
2.3.2. Equivalencia con el esquema de Petrov-Galerkin.....	- 53 -
<b>2.4. Discusión sobre el MDD</b> .....	- 54 -
<b>Capítulo 3</b> .....	- 56 -

3.1.	<b>Desarrollo del MDD en casos unidimensionales.....</b>	<b>56 -</b>
3.2.	<b>Procedimiento para la estimación de los parámetros de estabilización.....</b>	<b>56 -</b>
3.2.1.	Aplicación a la ecuación de convección-difusión.....	58 -
3.2.2.	Un caso simple.....	59 -
3.3.	<b>Condicionamiento de los parámetros de estabilización.....</b>	<b>61 -</b>
3.4.	<b>Recuperación de gradientes.....</b>	<b>62 -</b>
3.4.1.	El problema de la capa límite.....	62 -
3.4.2.	Proyección de derivadas.....	64 -
3.4.3.	Elementos enriquecidos.....	65 -
3.5.	<b>Implementación del MDD en casos unidimensionales.....</b>	<b>67 -</b>
3.5.1.	La resolución del sistema de ecuaciones completo.....	67 -
3.5.2.	Los aportes elementales.....	69 -
3.5.3.	Framework utilizado.....	71 -
<b>Capítulo 4.....</b>		<b>76 -</b>
4.1.	<b>Introducción a los casos unidimensionales propuestos.....</b>	<b>76 -</b>
4.2.	<b>Ejemplo 1: Sin fuente, bajo Pe.....</b>	<b>77 -</b>
4.3.	<b>Ejemplo 2: Sin fuente, alto Pe.....</b>	<b>78 -</b>
4.4.	<b>Ejemplo 3: Fuente constante, bajo Pe.....</b>	<b>79 -</b>
4.5.	<b>Ejemplo 4: Fuente constante, alto Pe.....</b>	<b>80 -</b>
4.6.	<b>Ejemplo 5: Fuente lineal, bajo Pe.....</b>	<b>81 -</b>
4.7.	<b>Ejemplo 6: Fuente lineal, alto Pe.....</b>	<b>82 -</b>
4.8.	<b>Ejemplo 7: Fuente cuadrática.....</b>	<b>83 -</b>
4.9.	<b>Ejemplo 8: Fuente senoidal.....</b>	<b>84 -</b>
<b>Capítulo 5.....</b>		<b>85 -</b>
5.1.	<b>El problema de convección-difusión-radiación.....</b>	<b>85 -</b>
5.2.	<b>El método de elementos finitos.....</b>	<b>86 -</b>
5.3.	<b>El MDD aplicado a la ecuación de convección-difusión-radiación.....</b>	<b>87 -</b>
5.4.	<b>Ejemplo 9: Fuente constante, radiación pura.....</b>	<b>89 -</b>
5.5.	<b>Ejemplo 10: Fuente constante, radiación dominante.....</b>	<b>90 -</b>
<b>Conclusión.....</b>		<b>91 -</b>
<b>Apéndice.....</b>		<b>93 -</b>
Ap.I.	<b>Funciones de forma.....</b>	<b>93 -</b>
Ap.II.	<b>Los parámetros de estabilización.....</b>	<b>93 -</b>
Ap.II.i.	El parámetro de estabilización crítico.....	94 -
Ap.II.ii.	El parámetro de estabilización óptimo.....	94 -
Ap.III.	<b>El principio de trabajos virtuales.....</b>	<b>96 -</b>
Ap.IV.	<b>Fundamentos matemáticos del MEF.....</b>	<b>97 -</b>
Ap.V.	<b>El Jacobiano de transformación.....</b>	<b>101 -</b>
Ap.VI.	<b>Mecanismos de convección-difusión.....</b>	<b>102 -</b>
Ap.VI.i.	Un caso simple, “la brasa caliente”.....	102 -
Ap.VI.ii.	Otros casos.....	105 -
Ap.VII.	<b>Códigos desarrollados.....</b>	<b>109 -</b>
<b>Bibliografía.....</b>		<b>127 -</b>

# Introducción:

## Presentación y organización del informe:

En el presente trabajo se desarrolla la tesis de grado de la carrera de Ingeniería Electromecánica. El carácter de la misma es investigativo y exploratorio con el fin de establecer caminos alternativos que permitan desarrollar conceptos fundamentales asociados a los progresos científicos realizados en los últimos años en el área de los métodos numéricos aplicados a la ingeniería. Además, se enuncian, en forma resumida, algunos de los problemas más usuales que pueden ser encontrados en diversas ramas de la ingeniería en donde los mecanismos de convección-difusión se hacen presentes (ver el apartado Ap.VI.ii del apéndice).

En cuanto a la organización de la tesis, la misma se encuentra dividida en capítulos, cada uno presenta un aspecto importante asociado a la descripción del problema y al tratamiento del mismo al momento de su resolución. El capítulo 1 comienza con una discusión del problema de la estabilización numérica, estableciendo antecedentes y resumiendo los conceptos involucrados. Luego, y con el objetivo de establecer las bases firmes del trabajo, se realiza la introducción al problema de la convección-difusión incluyendo un simple ejemplo realizado en diferencias finitas. Conjuntamente con esto se presenta el método de los elementos finitos y los métodos clásicos utilizados en los procedimientos de estabilización, incorporando un punto de vista algebraico sobre los sistemas de ecuaciones resultantes, relacionado con las características de las matrices del sistema. A partir de aquí se está en condiciones de presentar el enfoque conceptual de la investigación desarrollada, así como las bases matemáticas, para la resolución de los problemas de transporte con advección<sup>1</sup> dominante, estableciendo las relaciones pertinentes con los demás esquemas de resolución. Luego, la línea de trabajo se orienta hacia la determinación de los parámetros de estabilización, estableciendo los fundamentos sobre los cuales descansa la técnica de optimización, incluyendo un análisis sobre métodos para la recuperación de campos continuos a partir de campos discontinuos. Hacia el final del informe se exponen los casos unidimensionales resueltos, incluyendo todas las condiciones de

---

<sup>1</sup> Algunos autores diferencian los fenómenos de advección y convección, hablándose de convección cuando el campo de temperaturas está acoplado con el campo de velocidades y de advección cuando no lo está. En el presente informe no se hace diferencia en cuanto a esta terminología.



resolución. En el último capítulo se realiza una pequeña extensión a los casos de convección-difusión-radiación, que poseen características similares a los problemas de convección-difusión, mostrando la versatilidad del método. Finalmente se expresan las conclusiones generales, enfatizando las ventajas y desventajas que el método presenta.

## **Definición del problema, antecedentes y estado de la cuestión:**

Es ampliamente aceptado que resolver numéricamente con precisión problemas de flujo de fluidos y problemas de advección-difusión, mediante el empleo de métodos tales como: el método de Diferencias Finitas (DF) [1], Volúmenes Finitos (VF) [1],[2], Elementos Finitos (MEF) [3]-[13], ó métodos de Puntos Finitos (PF) [14],[15], requiere necesariamente la adición de algún término que incluya difusión artificial tal que estabilice la solución, dada las asimetrías impuestas por la presencia de términos con importantes derivadas primeras. El objetivo de ésta difusividad artificial es doble:

- a) Oponerse al carácter subdifusivo de la mayoría de los esquemas de integración en el espacio (tales como el esquema centrado en los métodos DF o VF, ó la forma equivalente de Galerkin en MEF, etc.).
- b) Estabilizar la solución numérica en las proximidades de altos gradientes (tales como ondas de choque, capas límites termodinámicas, etc.) suavizando las oscilaciones generadas.

Si bien se han dedicado numerosos trabajos al desarrollo de procedimientos para estabilizar las soluciones en el contexto de los métodos de DF, VF y MEF, se sabe que la mayoría de los procedimientos existentes se basan en alguna clase de argumentos heurísticos. En efecto, está considerablemente aceptado que los orígenes y las precisas definiciones de los parámetros de estabilización usados en los cálculos numéricos son, en la mayoría de los casos, misterios no resueltos cuya solución ha motivado intensivas investigaciones en los años recientes, principalmente dentro del contexto del MEF.

Recientemente, Oñate y colaboradores [14]-[18],[33]-[37] han propuesto el Método del Cálculo Finitesimal como una técnica donde los términos de estabilización surgen naturalmente a partir de ecuaciones de balance en dominios de medida finita. Esto permite reinterpretar dichos parámetros como contribuciones intrínsecas y naturales a las ecuaciones diferenciales originales en vez de su introducción como términos de corrección en el problema discreto, lo que es usual en los métodos tradicionales.

Consecuentemente, estas ideas permiten reinterpretar los métodos de estabilización en problemas de convección-difusión (tales como el Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG), Subgrid Scale (SGS), Galerkin Least Squares (GLS), Least Squares (LS), etc.), con un carácter mucho más físico.

Otra característica sobresaliente del Método de Cálculo Finitesimal (MCF) es que posibilita la determinación de los parámetros de estabilización de manera numérica conjuntamente con la solución, evitando así, las estimaciones a priori de dichos coeficientes.

Sin embargo, la estimación de estos parámetros se realiza a partir de hipótesis basadas en la implementación de “soluciones suavizadas” [16],[36],[37]. Estas hipótesis presentan algunas dificultades de interpretación y de implementación, sobre todo en los casos multidimensionales debido a la aparición de parámetros diferenciales según las distintas dimensiones espaciales, lo que deja puertas abiertas a nuevas líneas de pensamiento.

Es por esto que se plantea la necesidad de indagar un camino alternativo para la obtención de dichos parámetros, a partir de la optimización de los errores de discretización en los algoritmos [23]-[25], con el objetivo de proporcionarle bases físico-numéricas mejor fundamentadas a los métodos de estabilización, logrando finalmente, una unicidad tanto en el planteo como en la implementación de estos métodos.

## **Resumen y objetivos de la investigación:**

La presente investigación pretende proveer otra interpretación del MCF a partir de su formulación como balances en dominios desplazados, desarrollando una vía alternativa de fundamentación y/o interpretación de dicho método. Conjuntamente con esto, se muestra que el cálculo de los parámetros de estabilización puede realizarse a través de la resolución de problemas de optimización de los errores de discretización.

Así es que, el objetivo principal de este trabajo es presentar otro camino de abordaje al problema de estabilización de ecuaciones de advección dominante y una mejora en la comprensión de los aspectos físico-matemáticos involucrados en dichas técnicas, partiendo de la mencionada reinterpretación del MCF.

Puntualizando los objetivos de esta investigación, éstos son los siguientes:

- a) Reformular del MCF como una técnica de Residuos Ponderados en Dominios Desplazados.

- b) Indagar caminos alternativos para la obtención de los parámetros de estabilización a partir de la optimización de funcionales asociados a los errores de discretización; estableciendo una técnica de recuperar gradientes en zonas donde la insuficiencia en el cálculo de los mismos es fundamental.
- c) Validar las técnicas propuestas a través de casos tratados en la bibliografía.

## La línea de investigación realizada:

Bajo la idea de resolver el problema de la estabilización numérica, partiendo de bases bien fundamentadas, y sobre todo, de lograr estimar los parámetros de estabilización utilizados (ver apartados 1.1.3, 1.4.3 y 2.1.2), el proceso abordó diferentes alternativas.

Como primer intento de plantear una formulación acorde, se construyó un funcional Lagrangeano el cual, era minimizado. Esto conllevó la adición de multiplicadores de Lagrange para desacoplar las ecuaciones, imponer las condiciones del equilibrio térmico y establecer las condiciones de proyección de derivadas, como se observa en la siguiente expresión:

$$L(T, D, h, l, l_D) = I(h) + R(T, h) \lambda + R_D(T, D) \lambda_D$$

donde  $I$  constituía un funcional que tenía por finalidad minimizar los errores en la discretización a partir de definir dos residuos, uno obtenido de la solución de elementos finitos y otro obtenido de la proyección de derivadas de este campo (ver apartados 1.4.3, 3.2 y 3.4),  $R$  era el residuo en la formulación variacional que se obtenía de plantear un esquema de dominios desplazados (ver apartados 2.1.1 y 2.1.3) y  $R_D$  era el residuo en la formulación variacional de la proyección del campo de derivadas (ver apartado 3.4). Por su parte  $\lambda$  y  $\lambda_D$  actuaban como multiplicadores de Lagrange imponiendo las condiciones explicadas. La extrema complejidad en la implementación, sumada al elevado costo computacional por el agregado de dos grados de libertad hizo que la formulación perdiera carácter práctico, continuándose en la búsqueda de una manera más simple de obtener el sistema de ecuaciones.

En la búsqueda, se trabajó intensamente sobre el método de cálculo finitesimal (ver apartado 1.4) en dónde se encontraron dos puntos débiles: la construcción de la ecuación para obtener los parámetros de estabilización (ver apartado 1.4.3) y el método de proyección de derivadas, que no estaba formalmente desarrollado.

Con esta premisa se modificó la forma de obtener los parámetros de estabilización, postulando un funcional más acorde a lo intuitivamente pensado (ver apartado 3.2), desechando la idea de una diferencia entre dos residuos, a la vez que se trabajó sobre la obtención de un campo continuo de derivadas. Específicamente esto último, tuvo un desarrollo enrevesado, lo que demandó gran esfuerzo, ahondando en distintas posibilidades hasta llegar al método propuesto.

Entre las clases de proyección trabajadas nombramos la proyección en  $L^2$  a través de matrices de masas lumped (ver apartado 3.4.2), el uso del Superconvergent Patch Recovery (ver [38]), la utilización de funciones Bubble, tanto de orden dos como de orden cuatro (ver [32]), la implementación de un esquema tipo Power-Law (ver apartado 1.1.5), así como también la implementación de una interpolación parabólica con curvatura variable. Por último de incursionó en la utilización de formulaciones planteadas en dominios desplazados para la proyección de las derivadas, estableciéndose una clase de upwinding sobre las funciones de peso de dicha formulación. Ninguno de estos métodos aportó, por distintas razones, una solución certera y simple al problema en cuestión.

# Capítulo 1:

## 1.1. Conceptos básicos del mecanismo de convección-difusión:

Varios problemas de la física se encuentran gobernados por ecuaciones diferenciales donde los mecanismos de convección-difusión se hacen presentes. Esto permite establecer una analogía en el sentido matemático, lo que le confiere, a los mismos, una equivalencia directa. Por ejemplo, la obtención de las concentraciones en el mezclado de sustancias resulta equivalente a la obtención de la distribución de temperaturas en un problema de transferencia de calor, ó a la resolución de un problema de flujos viscosos. En otras palabras, un mecanismo de convección-difusión expresa un balance entre el término encargado del “arrastre” del campo y el término encargado del “esparcimiento del mismo”. Ejemplos ilustrativos se encuentran en el apartado Ap.VI del apéndice.

### 1.1.1. La ecuación de convección-difusión:

La ecuación diferencial para el estado estacionario que permite representar los aspectos físicos de los problemas del tipo de convección-difusión tiene, en general, la siguiente forma:

$$-1- \quad - \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{N}} \Psi + \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{N}} \Psi + \mathbf{F} = 0 \quad \text{en } W$$

siendo ésta la ecuación con la que se trabaja. Donde  $\Psi$  es el vector de variables incógnitas fundamentales del problema, las que son transportadas por  $\mathbf{u}$ , que es el campo de velocidades,  $\mathbf{F}$  son las contribuciones por unidad de volumen,  $\mathbf{D}$  es la matriz de difusividad del problema y  $\tilde{\mathbf{N}}$  es el operador gradiente.

En el problema de la transferencia de calor bidimensional estacionaria de la que trata este trabajo, la ecuación diferencial resulta bien descrita de la siguiente forma:

$$-2- \quad - \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{N}} T + \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{N}} T + Q = 0 \quad \text{en } W$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x u \\ \hat{e}_y v \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Con negrilla se simbolizan los vectores y matrices

donde  $T$  es la temperatura, que es la variable transportada,  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente,  $k_x$  y  $k_y$  son las difusividades en las direcciones respectivas y  $Q$  es la fuente de calor por unidad de volumen.

Para completar la descripción del problema se deben establecer las condiciones de contorno sobre  $\Gamma$ . Las mismas pueden ser tanto condiciones de Dirichlet como de Neumann por lo que se especifican, en el caso más general, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -3- \quad T &= \bar{T} && \text{sobre } \Gamma_D \\ \bar{q}_n &= -n^T D \nabla T && \text{sobre } \Gamma_N \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_D$  indica la frontera sobre la que la temperatura está prescrita, siendo en consecuencia la frontera de Dirichlet, y  $\Gamma_N$  indica la frontera sobre la que el flujo calórico normal a la superficie está prescrito, siendo por lo tanto la frontera de Neumann. Además debe cumplirse que  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$  y que  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ .

Resolviendo este problema así planteado puede obtenerse la distribución de temperaturas en un dominio  $\Omega$ . Sin embargo, no existe un método general para hallar la solución exacta de estas ecuaciones, solo los casos con condiciones de contorno muy particulares ó dominios simples, tienen solución exacta conocida.

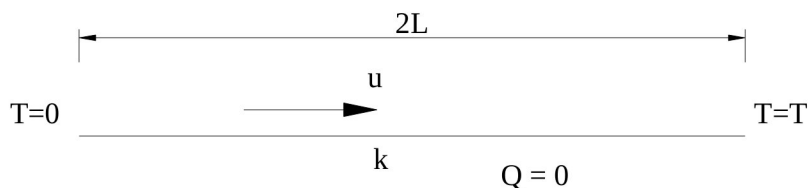
Es por esto que se plantea la necesidad de utilizar métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas del problema. Sin embargo, la aplicación de estos métodos a este tipo de ecuaciones presenta graves inconvenientes cuando el término advectivo es el de mayor importancia en la ecuación.

### **1.1.2. El problema de la inestabilidad numérica:**

Como se dijo, cuando el término convectivo es el dominante en la ecuación diferencial aparecen inestabilidades que corrompen el buen comportamiento de la solución numérica. Estos inconvenientes son causados por la difusividad negativa introducida por los métodos convencionales cuando se realiza la discretización en forma centrada de los términos con derivadas primeras. Esto provoca que, en las soluciones que dichos métodos arrojan, se observe la presencia de oscilaciones espurias cuando el límite de estabilidad del problema es sobrepasado. Obviamente el resultado son soluciones erróneas y que además, en la mayoría de los casos, no son físicamente viables.

Lo recién explicado puede observarse claramente en el siguiente ejemplo, donde se compara la solución exacta del problema (ejemplo gráfico) con la solución que resulta de

aplicar un esquema de diferencias finitas centradas (ejemplo numérico), apreciándose la naturaleza inestable de estas metodologías:



La descripción completa del problema es ahora la siguiente:

$$-u \frac{dT}{dx} + k \frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

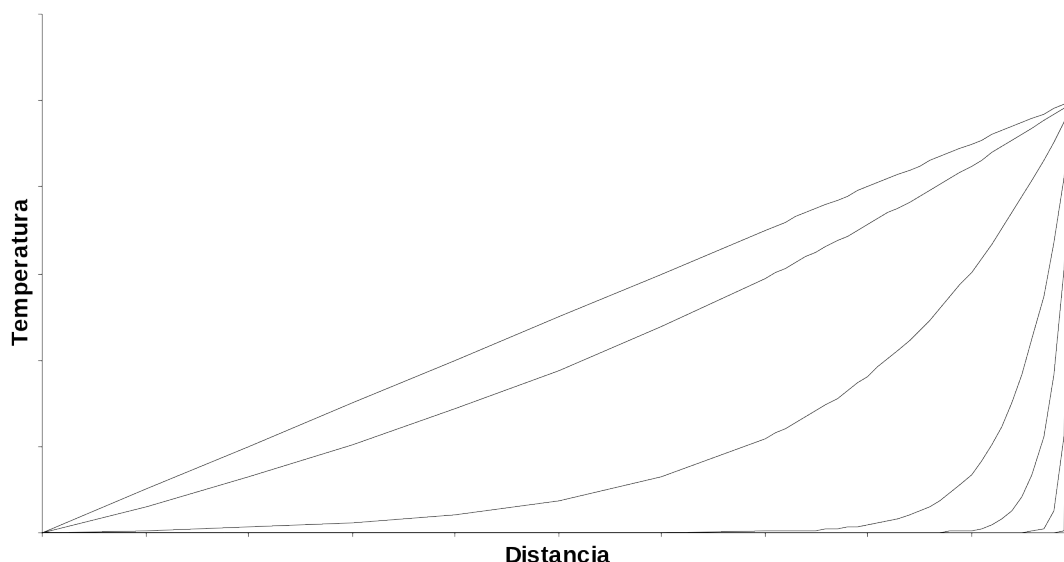
-4-  $T = 0$  en  $x = 0$   
 $T = \bar{T}$  en  $x = 2L$

Y la solución exacta, es (ver [16]):

-5-  $T = a e^{\frac{ux}{k}} + b$  con  $a = b = \frac{\bar{T}}{1 - e^{\frac{2uL}{k}}}$

La solución exacta es graficada a continuación para observar la naturaleza exponencial de la misma.

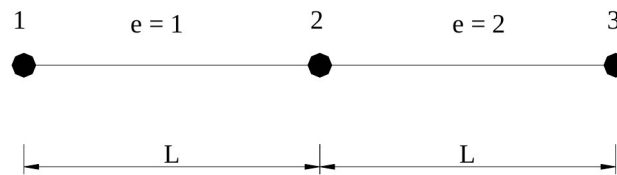
Formación de la capa límite



Puede observarse como la capa límite se forma en un entorno cada vez más reducido a medida que el campo de velocidades aumenta en magnitud, es decir, que el término convectivo toma mayor importancia relativa que el término difusivo.

Ahora se aplica a este simple problema el método de diferencias finitas centradas, con una malla de dos nodos, que sirve para simplificar la situación sin que se pierda el concepto. Recordando que el método de diferencias finitas con esquema centrado es equivalente al método de Galerkin y, por consiguiente, es directamente aplicable al método de los elementos finitos.

Para tal efecto se utiliza la malla que se muestra a continuación:



La discretización de la ecuación diferencial da como resultado lo siguiente:

$$-6- \quad -u \frac{T_3 - T_1}{2L} + k \frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{L^2} = 0$$

Sabiendo que  $T_1 = 0$  y que  $T_3 = \bar{T}$ , se puede resolver el valor de temperatura del nodo 2, que resulta:

$$-7- \quad T_2 = \frac{1}{2}(1 - Pe)\bar{T} \quad \text{con} \quad Pe = \frac{uL}{2k}$$

donde el número de Peclet quedó inmediatamente definido de manera local<sup>3</sup> y es el número adimensional que permite comparar las magnitudes relativas de los mecanismos de transferencia de calor por convección y por difusión. De esta manera un elevado número de Peclet significa que el mecanismo de transferencia de calor está regido por la convección mientras que si tiene un valor pequeño, la transferencia se realiza prácticamente por difusión.

Se ve que en el caso en que es  $Pe = 0$  la solución coincide con la solución exacta ya que esta es lineal. La solución pierde calidad cuando se alcanzan valores de  $Pe > 1$  pues, en ese caso la temperatura  $T_2$  resulta negativa lo que es físicamente imposible pues la transferencia siempre se da de la fuente caliente a la fuente fría y nunca al revés. Solo con valores de difusividad negativos podría satisfacerse este resultado, sin embargo esos valores no existen. De esto se desprende que el límite de estabilidad es  $Pe = 1$  lo que puede ser demostrado con mayor rigurosidad, como se demuestra en [31].

<sup>3</sup> La definición del Pe puede ser de manera global si se toma como longitud un valor de referencia del problema, en ese caso se define  $Pe^G = uL/k$



Otra conclusión importante del ejemplo es que el límite de estabilidad depende de la longitud de los elementos utilizados en la malla. Esto nos da la pauta de que una primera solución del problema de las oscilaciones sería un refinamiento de la malla tal que el valor de Pe se mantenga siempre por debajo de un determinado valor en todo el dominio. Esto se conoce como “densificación” de la malla.

Sin embargo esta solución conlleva dos inconvenientes:

En muchas situaciones es verdaderamente difícil lograr que el valor de Pe se mantenga menor que la unidad a lo largo de todo el dominio.

El costo computacional es mayor, ya que la densificación de las mallas en las zonas de elevados gradientes agrega grados de libertad al problema en forma considerable.

Es por esto que se busca otra metodología que sea útil a la hora de afrontar estas situaciones.

Generalizando el problema de los esquemas numéricos que tratan a los términos convectivos en forma centrada, podemos escribir las ecuaciones discretizadas que dan origen a la mencionada difusión artificial:

$$-8- \quad -u \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2L} + k \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{L^2} = 0$$

Desarrollando en series de Taylor y realizando un análisis del error de truncamiento se halla la ecuación diferencial modificada (ver [17]) que es la que resuelve el esquema:

$$-9- \quad -u \frac{dT_i}{dx} + (k - k'') \frac{d^2T_i}{dx^2} = 0 \quad \text{con } k'' = \frac{k}{2Pe} \left[ \frac{e^{2Pe} - 1}{2Pe} - 1 \right]$$

Como puede verse fácilmente, aparece una difusividad negativa que resta a la difusividad física del problema, y que se hace importante a medida que el término convectivo también se hace importante, en efecto, cuando sea  $Pe > 1$  será  $k'' > k$ , apareciendo la inestabilidad ya presentada. Ejemplos claros de las inestabilidades en problemas de advección dominante pueden observarse en el capítulo 4.

La solución mayormente planteada en la bibliografía resulta la adición de términos que permitan introducir difusividad a los esquemas numéricos. Estos términos, obviamente deberán desempeñar la función de oponerse a la difusividad negativa, eliminar cualquier inestabilidad presente en el esquema, y reobtener soluciones de mayor calidad sin elevar considerablemente el costo computacional.

A continuación se analizará en mayor detalle la función de éstos términos que llamaremos “términos de estabilización”.

### 1.1.3. El esquema de difusión artificial:

Como se dijo con anterioridad dos soluciones son propicias para resolver el problema de la inestabilidad numérica:

Una mayor densificación de las mallas en las zonas de elevados gradientes.

La adición de términos que incluyan difusividad artificial al esquema.

La segunda posibilidad requiere de la adición de términos que son “a priori” desconocidos, pero que deberán ser, seguramente, proporcionales al número de Pe y al tamaño de los elementos utilizados en la discretización.

Estos términos heurísticos que permiten cumplir el balance en las ecuaciones, alteran así a las mismas, resultando ecuaciones diferenciales modificadas, de manera que su forma discreta respete la situación física del problema.

Es bien conocida la ecuación diferencial que resulta de la adición de estos términos, tal que, en su forma discreta, la difusividad negativa del esquema numérico no afecta a la solución final:

$$-10- \quad -u \frac{dT}{dx} + \frac{\alpha}{\epsilon} k + a \frac{uL}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

donde L es el tamaño de los elementos utilizados y  $\epsilon$  es un parámetro que tendrá la función de ponderar el término de difusividad artificial agregado. Claramente se ve el rol que cumplirá el término de difusión agregado, oponiéndose al carácter subdifusivo que el método de discretización introduce.

La discretización de -10- da como resultado el siguiente esquema:

$$-11- \quad -u \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2L} + \frac{\alpha}{\epsilon} k + a \frac{uL}{2} \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{L^2} = 0$$

que escrita en función del Pe resulta:

$$-12- \quad [Pe(1 - a) - 1]T_{i+1} + [2aPe + 2]T_i + [-Pe(1 + a) - 1]T_{i-1} = 0$$

La determinación del parámetro  $\epsilon$  se basa en dos condiciones que se le exigen a la solución obtenida de -12-:

Que la solución no sea oscilante, es decir, que no presente valores negativos de temperatura.

Que la solución coincida en los nodos con la solución exacta.

La primer condición da como resultado un valor de  $\epsilon$  denominado parámetro de estabilización **crítico**, mientras que la segunda da un valor de  $\epsilon$  denominado **óptimo**.

Volviendo al ejemplo visto en la apartado 1.1.2, si se quiere satisfacer la primera condición, una vez discretizada la ecuación diferencial modificada (ver el apartado Ap.II.i en el apéndice), el valor del parámetro  $a_{cr}$  resulta ser una condición a cumplir:

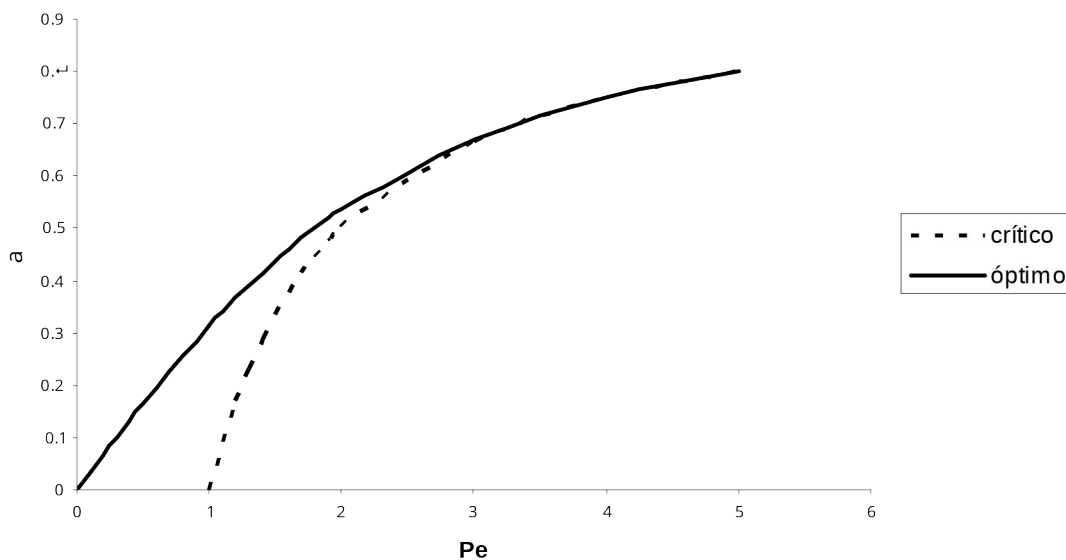
$$\text{-13-} \quad a_{cr} = 3 \left(1 - \frac{1}{Pe}\right)$$

Para el mismo ejemplo, trabajando ahora con la segunda condición, se llega a un valor del parámetro  $a_{op}$  dado por (ver el apartado Ap.II.ii en el apéndice):

$$\text{-14-} \quad a_{op} = \coth Pe - \frac{1}{Pe}$$

Los valores de los parámetros crítico y óptimo son prácticamente coincidentes para valores de  $Pe > 2$ , por lo tanto es más simple utilizar el valor crítico por su expresión más sencilla. Esto puede apreciarse en el siguiente gráfico:

Comparación de los parámetros de estabilización crítico y óptimo



De todas maneras no debemos olvidar de donde se obtuvieron estos valores de  $a$ , para su desarrollo se partió de un problema unidimensional en donde se incluyeron condiciones de Dirichlet en ambos contornos y con un valor de fuente nulo. Esta aclaración restaría generalidad al método de estabilización, sin embargo, el mismo es utilizado para todos los casos en la práctica.

### 1.1.4. El esquema de upwinding para diferencias finitas:

A veces se prefiere reinterpretar el problema de advección-difusión como un problema donde la información tiene una dirección y un sentido. Por esta razón, y debido al error introducido al discretizar las derivadas primeras en forma centrada, es que se decide darle mayor peso a la derivada primera corriente arriba (de ahí el término de upwinding) a través de un parámetro determinado. En resumen, esta interpretación impone que los términos del tipo convectivos deben calcularse utilizando la información “que trae la corriente”, que conforma la técnica denominada streamline upwinding.

Lo recién explicado puede verse fácilmente en las ecuaciones discretas como se muestra a continuación:

$$-15- \quad -u \frac{T_i - T_{i-1}}{L} b - u \frac{T_{i+1} - T_i}{L} (1 - b) + k \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{L^2} = 0$$

donde el parámetro  $b$  es el encargado de ponderar la derivada primera. Sobre la derivada segunda no se realiza ningún tratamiento ya que está asociada a los fenómenos difusivos, los cuales no presentan la asimetría que sí presentan los términos convectivos, y por consiguiente no muestran dificultades al momento de la discretización.

Nótese que  $b$  debe cumplir que  $0,5 \leq b \leq 1$  de manera que cuando es  $b = 0,5$  se está en presencia del esquema donde la derivada primera está evaluada en forma centrada, mientras que cuando es  $b = 1$  la situación es conocida como “full upwinding” debido a que la derivada primera está evaluada completamente corriente arriba, es decir, totalmente descentrada.

Entre  $a$  y el parámetro  $b$  presentado anteriormente existe una estrecha relación dada por  $b = (a + 1)/2$  y que establece las siguientes equivalencias:

$b = 0$	$a = 0,5$	esquema centrado
$b = 1$	$a = 1$	esquema de full upwinding

### 1.1.5. El esquema exponencial para diferencias finitas:

El esquema exponencial desarrollado en [28] permite obtener, para problemas unidimensionales y con términos fuente nulos, valores nodales exactos en la solución aproximada para cualquier número de  $Pe$ . Este esquema se deduce a partir de una interpolación exponencial entre los nodos de una malla de diferencias finitas, donde la

función de interpolación es conocida y es la solución exacta al problema unidimensional con condiciones de contorno de Dirichlet en ambos extremos y sin términos fuente.

El esquema resultante se muestra a continuación:

$$-16- \quad \frac{e^{-1}}{e^{2Pe} - 1} \dot{U}_{T_{i+1}} - \frac{e^{2Pe} + 1}{e^{2Pe} - 1} \dot{U}_{T_i} + \frac{e^{2Pe}}{e^{2Pe} - 1} \dot{U}_{T_{i-1}} = 0$$

Es fácil ver que este esquema presenta las mismas características que el esquema de difusión artificial visto en el apartado 1.1.3 cuando se incorpora el parámetro  $\alpha_p$ .

Una manera de simplificar el esquema sin apartarse de su característica más importante, es aproximar el comportamiento del siguiente número adimensional:

$$-17- \quad Ae = \frac{2Pe}{e^{2Pe} - 1}$$

por la siguiente expresión:

$$-18- \quad Ae = \begin{cases} (1 - 0,2Pe)^5 & Pe \leq 5 \\ Ae = 1 & Pe > 5 \end{cases}$$

El esquema aproximado resulta el siguiente:

$$-19- \quad \left[ (1 - 0,2Pe)^5 \right]_{T_{i+1}} - 2 \left[ (1 - 0,2Pe)^5 + 2Pe \right]_{T_i} + \left[ (1 - 0,2Pe)^5 + 2Pe \right]_{T_{i-1}} = 0$$

denominado esquema de power-law, presentado en [28]. Su origen se debe a una aproximación en los cálculos de manera de bajar el costo computacional del esquema exponencial, reemplazando el cálculo de las exponenciales por polinomios. Esta ventaja ha dejado de serla con el avance de los procesadores y a medida que el volumen de cálculo en los problemas se intensifica.

## 1.2. El método de los elementos finitos:

La aplicación del método de los elementos finitos a los problemas de la física en general, nace a partir de dos corrientes de pensamiento:

Residuos Ponderados.

Principios Variacionales.

Así, es que el desarrollo por elementos finitos de un problema cualquiera puede realizarse a partir del conocimiento del principio variacional del problema en cuestión, así como del tratamiento de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema como residuos ponderados.

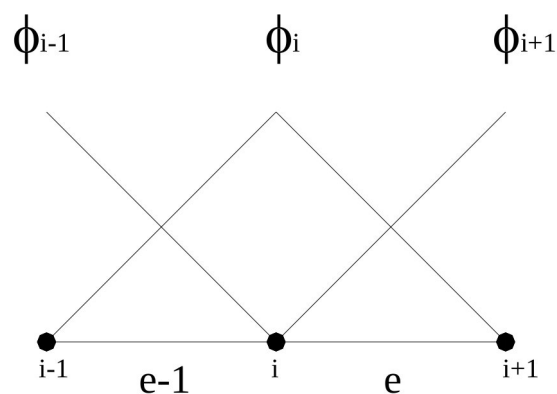
En esta investigación, como en gran parte de la bibliografía dedicada a los temas relacionados con la mecánica de los fluidos y con la transferencia de calor, se parte del tratamiento de los problemas como residuos ponderados. De esta manera es muy simple clasificar los métodos de resolución a partir de las formas proporcionadas a las funciones de ponderación. Comenzando desde el concepto más básico que impone la teoría de Galerkin, en donde las funciones de ponderación son las mismas que las utilizadas para la interpolación de la incógnita, pasando por las funciones de interpolación del tipo Petrov-Galerkin, y llegando a los métodos de mínimos cuadrados, donde dichas funciones nacen naturalmente de la minimización de un funcional. Se examinarán a continuación los distintos métodos utilizados en forma clásica.

### 1.2.1. La discretización del método de los elementos finitos:

Para construir la discretización por elementos finitos sobre un dominio se debe establecer la interpolación de la variable temperatura de la siguiente manera:

$$-20- \quad T @ \hat{T} = \sum_{i=1}^n f_i T_i$$

donde  $T_i$  es el valor de la incógnita temperatura en cada uno de los nodos, y  $f_i$  son las funciones de forma con las que se interpola el campo de temperaturas. Una interpolación lineal está formada por las siguientes  $f_i$ , que se utilizaron en el presente trabajo:



que poseen soporte local, es decir, que se anulan fuera del intervalo de definición, además poseen altura unitaria por lo que el coeficiente que la acompaña es el valor de la incógnita en el nodo asociado, según se desprende de la -20-. Las ecuaciones asociadas se encuentran en el apartado Ap.I del apéndice.

Partiendo del concepto de los residuos ponderados, es factible escribir la forma correspondiente a la ecuación de convección-difusión -2-, ponderándola con una función cualquiera  $w_i$ :

$$-21- \quad \int_{\Omega} w_i \left( u^T \tilde{N}^T \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N}^T \hat{T} + Q \right) d\Omega = 0$$

Se ve que las funciones de interpolación de la temperatura deben satisfacer la existencia de una derivada segunda continua, mientras que  $w_i$  puede ser cualquier función continua con las condiciones estipuladas en el apartado Ap.IV del apéndice.

Integrando por partes la ecuación -21- (ver el apartado Ap.III en el apéndice) resulta:

$$-22- \quad \int_W w_i \left( u^T \tilde{N}^T \hat{T} + \tilde{N}^T w_i D \tilde{N}^T \hat{T} \right) dW = \int_W w_i Q dW - \int_{G_N} w_i \bar{q}_n dG$$

Esta integración da como resultado el conocido principio de trabajos virtuales para el problema de transferencia de calor, y que en este caso se conoce como principio de “potencias virtuales”. La expresión -22- determina el equilibrio entre las potencias generadas en forma interna con las potencias generadas en forma externas. Así, se llega a la formulación variacional del problema de transferencia de calor. Al mismo punto se hubiera llegado en caso de haber partido del principio variacional del mencionado problema.

Nótese que, ahora, los requerimientos sobre las funciones de interpolación del campo de temperaturas son menores ya que solo se debe satisfacer un campo de derivadas primeras continuas, es por esto que la expresión -22- es también conocida como la formulación débil del problema de transferencia de calor en estado estacionario. Por otro lado se debe pagar un mayor precio sobre las funciones de ponderación ya que es necesario que posean un campo de derivadas primeras no nulo, mientras que antes de la integración no había restricción alguna. Para una explicación más detallada remitirse al apartado Ap.IV.

Reemplazando en la ecuación -22-, la aproximación del campo de la incógnita dada por -20- resulta:

$$-23- \quad \int_{\Omega} w_i \left( u^T \tilde{N}^T \hat{f}_j + \tilde{N}^T w_i D \tilde{N}^T \hat{f}_j \right) d\Omega = \int_W w_i Q dW - \int_{G_N} w_i \bar{q}_n dG$$

Y debido a que las funciones de forma son con soporte local, la expresión -23- puede escribirse como integrales elementales bajo una suma sobre todos los elementos. El sistema algebraico de ecuaciones resulta ser el siguiente:

-24-  $K\hat{T} = f$

donde la matriz  $K$  y el vector  $f$  están definidos por el ensamblaje de las contribuciones elementales de dadas por:

-25-

$$K_{ij}^{(e)} = \int_W w_i u^T \tilde{N} f_j + \tilde{N}^T w_i D \tilde{N} f_j dW$$

$$f_i^{(e)} = \int_W w_i Q dW - \int_{G_N} w_i \bar{q}_n dG$$

Como se dijo con anterioridad, el método de los elementos finitos fue presentado en base al concepto de residuos ponderados. Esta visión simplista puede tener otras interpretaciones contenidas en los fundamentos matemáticos que avalan la teoría del método de los elementos finitos. Estos permiten demostrar la unicidad entre tres tipos de problemas denominados de la siguiente forma:

- El problema ecuación diferencial (ED).
- El problema formulación variacional (FV).
- El problema formulación extremal (FE).
- Este análisis y su demostración pueden verse en el apartado Ap.IV.

Volviendo a la expresión -25-, a partir de aquí, y como se mencionó con anterioridad, las distintas metodologías para resolver el problema se basan en modificar convenientemente la función de ponderación.

**1.2.2. La forma de Galerkin:**

La forma de Galerkin es la mayormente utilizada en todos los problemas de la física abordados por el método de los elementos finitos. Para obtener esta forma a partir de la expresión -25- solamente se debe hacer  $w_i = f_i$ , es decir, la función de peso es la misma que se utiliza para la interpolación de la variable del problema, resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

-26-

$$K_{ij}^{(e)} = \int_W f_i u^T \tilde{N} f_j + \tilde{N}^T f_i D \tilde{N} f_j dW$$

$$f_i^{(e)} = \int_W f_i Q dW - \int_{G_N} f_i \bar{q}_n dG$$

A partir de aquí, realizando la integración de las ecuaciones -26-, se llega al sistema de ecuaciones -8-.



Como se mencionó con anterioridad, el método de Galerkin es equivalente al método de diferencias finitas convencional, es decir, con el término convectivo evaluado en forma centrada. Es por esto que este método resulta ser inestable a la hora de resolver los problemas de transporte donde los términos advectivos son los predominantes, y la presencia de capas límites es la característica sobresaliente.

Ya se comienza a evidenciar la necesidad de modificar las ecuaciones que resultan de la discretización por elementos finitos para conseguir un método estable, independientemente del “peso” relativo de los parámetros del problema.

### **1.2.3.El esquema de Petrov-Galerkin:**

La búsqueda de una solución a las deficiencias dadas en el método de Galerkin, ha llevado a los investigadores al desarrollo de un género diferente de funciones de peso, las cuáles pueden ser definidas como:

$$\text{-27-} \quad w_i = f_i + \alpha d_i$$

donde  $f_i$  es la misma función con la que se interpola el campo de la temperatura,  $d_i$  es una nueva función de prueba y  $\alpha$  es el parámetro de estabilización.

En base a esto es que se denominan formulaciones de elementos finitos del tipo Petrov-Galerkin a todas aquellas en donde las funciones de ponderación son diferentes de las funciones interpolantes.

Las formulaciones del tipo Petrov-Galerkin más utilizadas son aquellas donde las funciones de ponderación están definidas como sigue:

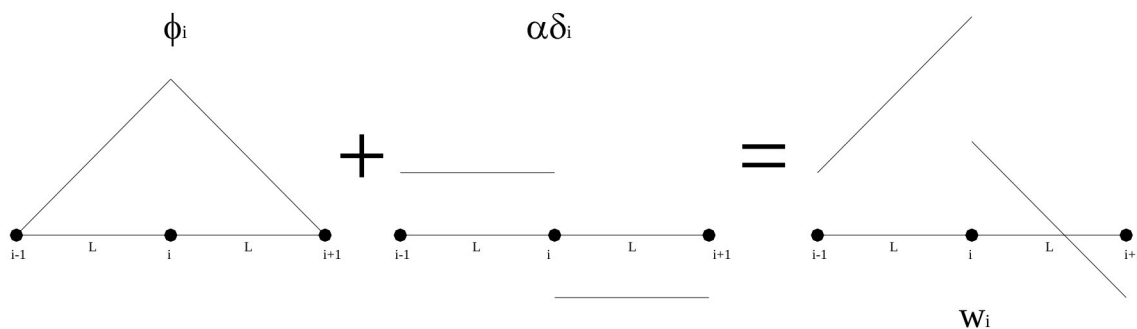
$$\text{-28-} \quad w_i = f_i + \frac{\alpha L}{2} \frac{u^T}{|u|} \tilde{N} f_i$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector velocidad, indicando así, una dirección de estabilización, debido a que la función de forma toma mayor peso en la dirección de contracorriente siendo  $L$  la longitud característica del elemento.

En un caso unidimensional, la función  $w_i$  estaría simplemente definida como:

$$\text{-29-} \quad w_i = f_i + \frac{\alpha L}{2} \frac{df_i}{dx}$$

En este caso no hace falta especificar la dirección en la cuál se da mayor peso a la función  $w_i$ . La forma que poseen las funciones de forma del tipo de la -29- es la siguiente:



Reemplazando la forma -28- en la discretización elementos finitos -25-, resulta:

$$\begin{aligned}
 & K\hat{T} = f \\
 \text{-30-} \quad K_{ij}^{(e)} &= \int_W \tilde{N}_i^T \tilde{N}_j + \frac{aL}{2|u|} \tilde{N}_i^T \tilde{N}_j + \tilde{N}_i^T \tilde{N}_j + \frac{aL}{2|u|} \tilde{N}_i^T \tilde{N}_j \\
 f_i^{(e)} &= \int_W \tilde{N}_i + \frac{aL}{2|u|} \tilde{N}_i - \int_{G_N} \tilde{N}_i + \frac{aL}{2|u|} \tilde{N}_i
 \end{aligned}$$

Antes de modificar la -30- es necesario recalcar la existencia de términos que involucran derivadas segundas de las funciones de interpolación  $\tilde{N}_i$ , estos términos se definen únicamente dentro de los elementos, debido a la presencia de discontinuidades en las fronteras de los mismos. Bajo esta aclaración, se dejan igualmente expresados los términos con estas características.

Ordenando los términos de -30- puede escribirse lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{-31-} \quad K_{ij}^{(e)} &= \int_W \tilde{N}_i^T \tilde{N}_j + \frac{aL}{2|u|} \tilde{N}_i^T \tilde{N}_j + \tilde{N}_i^T \tilde{N}_j + \frac{aL}{2|u|} \tilde{N}_i^T \tilde{N}_j \\
 f_i^{(e)} &= \int_W \tilde{N}_i + \frac{aL}{2|u|} \tilde{N}_i - \int_{G_N} \tilde{N}_i + \frac{aL}{2|u|} \tilde{N}_i
 \end{aligned}$$

El segundo término de la matriz  $K_{ij}^{(e)}$  es claramente una difusividad artificial que el procedimiento de Petrov-Galerkin introduce en el algoritmo ya que:

$$\text{-32-} \quad D^* = \frac{aL}{2|u|} uu^T = \frac{aL}{2|u|} \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix}$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. La matriz de difusividad artificial resulta simétrica, siempre introduciendo difusividad en la dirección de la línea de corriente. Con esta notación resulta el esquema de Petrov-Galerkin:

$$\begin{aligned}
 -33- \quad K_{ij}^{(e)} &= \int_{\Omega} \tilde{f}_i^T u^T \tilde{N} f_j + \tilde{N}^T f_i (D + D^*) \tilde{N} f_j + \frac{aL}{2|u|} u^T \tilde{N}^T \tilde{N} f_i D \tilde{N} f_j \frac{\partial}{\partial x} dW \\
 f_i^{(e)} &= \int_{\Omega} \tilde{f}_i^T + \frac{aL}{2} \frac{u^T}{|u|} \tilde{N} f_i \frac{\partial}{\partial x} dW - \int_{\Gamma_N} \tilde{f}_i^T + \frac{aL}{2} \frac{u^T}{|u|} \tilde{N} f_i \frac{\partial}{\partial x} dG
 \end{aligned}$$

Volviendo a la expresión -32-, en el término constante que multiplica a la matriz se puede distinguir lo siguiente:

$$-34- \quad t = \frac{L}{2|u|}$$

Este parámetro es conocido como el tiempo característico del problema en cuestión, pues representa el tiempo que una partícula tarda en recorrer una distancia  $L/2$  transportada a una velocidad cuyo módulo es  $|u|$ .

### 1.2.4.El método de Least Squares:

La utilización de un método del tipo de Least Squares (LS) representa una metodología unificada para obtener la solución numérica de cualquier sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El concepto de este método es realizar la minimización del residuo en las ecuaciones diferenciales en el sentido de cuadrados mínimos. Los métodos hasta aquí vistos se basan en la elección de las funciones de peso, como sucede en los métodos de Galerkin, Petrov-Galerkin y Galerkin Least Squares (que se verá en el siguiente apartado). Por el contrario, las formulaciones de LS tienen una base teórica firme, la que debería asegurar la mejor aproximación numérica a la solución del problema.

La siguiente notación permite desarrollar más claramente el método:

$$-35- \quad R(T) = L(T) - f^1_0$$

donde  $L(\chi)$  es el operador aplicado a la variable temperatura  $T$  y  $R$  resulta el residuo en la ecuación diferencial cuando el operador  $L(\chi)$  se aplica a la solución aproximada. Este último está dado por:

$$-36- \quad L(\chi) = -u^T \tilde{N}(\chi) + \tilde{N}^T(k \tilde{N}(\chi))$$

Se considera el funcional  $I$  que mide el error cuadrático producido en la aproximación de la solución, ponderado por una función  $W$  genérica:

$$-37- \quad I(T) = \|u(\tilde{T})\|_0^2 = \int_W \left( \mathcal{L}(\tilde{T}) - f \right)^2 dW$$

donde  $\tilde{T}$  está dada por:

$$-38- \quad T \approx \tilde{T} = \sum_{j=1}^{\text{Nod}} T_j f_j$$

donde Nod es la cantidad de nodos en la malla de elementos finitos usada. Para minimizar el error cuadrático se realiza lo siguiente:

$$-39- \quad \int_{T_i} \left( \sum_{j=1}^{\text{Nod}} T_j f_j - u \right)^2 dW = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \text{Nod}$$

Sin perder generalidad se adopta que  $W = 1$ , así, la expresión -39- conduce a:

$$-40- \quad \int_W \left( f_j \right) \mathcal{L} \left( f_i \right) dW T_j = \int_W \mathcal{L} \left( f_i \right) dW$$

donde la notación fue compactada de acuerdo a la notación de Einstein<sup>4</sup>. Se observa como las funciones de peso en esta formulación nacen en forma natural y son las imágenes de las funciones interpolantes a las que se les aplica el operador  $\mathcal{L}(\cdot)$ . Aplicando a la formulación el operador dado por -36- se obtiene:

$$-41- \quad \int_W \left( u^T \tilde{N} f_j + \tilde{N}^T k \tilde{N} f_j \right) \left( u^T \tilde{N} f_i + \tilde{N}^T k \tilde{N} f_i \right) dW T_j + \int_W \left( u^T \tilde{N} f_i + \tilde{N}^T k \tilde{N} f_i \right) dW = 0$$

En cuanto a las condiciones de contorno, estas pueden ser aproximadas en el sentido de cuadrados mínimos de la misma manera.

La característica más sobresaliente es que, mientras métodos como el SUPG ó el GLS pueden derivar en matrices no simétricas, el LS siempre da como resultado matrices simétricas que son definidas positivas. Esta ventaja en la simetría de la formulación y, por consiguiente, en la existencia de un operador auto-adjunto, se ve opacada por un aumento en los requerimientos sobre la continuidad y derivabilidad de las funciones interpolantes, por consiguiente el costo computacional también se ve incrementado.

<sup>4</sup> Esta notación consiste en eliminar el símbolo de sumatoria asumiendo que ésta existe cuando en un producto aparecen dos subíndices repetidos.

### 1.2.5. El método de Galerkin Least Squares:

Para ir finalizando la revisión de los métodos clásicos de estabilización, se presenta un método basado en una forma diferente del esquema de Petrov-Galerkin, donde las funciones de ponderación pueden obtenerse de minimizar el cuadrado del residuo. Es una metodología que nace en el método de Least Squares visto en el apartado 1.2.4 y que presenta ciertas ventajas respecto de éste, ya que no se requieren los mismos grados de continuidad sobre las funciones de forma interpolantes y de ponderación, como se verá a continuación.

Si se analiza el método de mínimos cuadrados como un simple Petrov-Galerkin, estaría definido por las siguientes funciones de ponderación:

$$-42- \quad w_i = f_i + \frac{aL^e}{2|u|} \left( u^T \tilde{N} f_i - \tilde{N}^T D \tilde{N} f_i \right)$$

Introduciendo -42- como función de peso de -21- resulta:

$$-43- \quad \int_{\Omega} \left( f_i + \frac{aL^e}{2|u|} \left( u^T \tilde{N} f_i - \tilde{N}^T D \tilde{N} f_i \right) \right) \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q \right) d\Omega = 0$$

Distribuyendo los términos resulta la siguiente forma:

$$-44- \quad \int_{\Omega} \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q \right) d\Omega - \int_{W_e} \frac{aL^e}{2|u|} \left( u^T \tilde{N} f_i + \tilde{N}^T D \tilde{N} f_i \right) \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q \right) dW = 0$$

Nótese que el primer término derivará en una forma de Galerkin como la vista en -26-, mientras que el segundo término es el que cumple la función de estabilizar el problema numérico. El nombre de “mínimos cuadrados” surge del segundo término, ya que este puede interpretarse como la minimización del siguiente funcional:

$$-45- \quad I = \frac{1}{2} \int_{W_e} \frac{aL^e}{2|u|} \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q \right) dW$$

Aquí se observa que las integrales están definidas dentro de cada elemento, no siendo un requisito la continuidad de las derivadas primeras entre elementos, lo que sí ocurre en el Least Squares.

### 1.2.6. El método de SubGrid Scale:

Este método se basa en la suposición de la existencia de dos escalas en el problema, la macro escala se puede resolver con la malla de elementos finitos, mientras que la micro escala, dada en el interior de los elementos (de ahí el nombre), es mucho menor que el tamaño de éstos. Se presenta el método para el problema de convección-difusión unidimensional estacionario con condiciones de contorno de Dirichlet. La presencia de las dos escalas hace que el campo de temperaturas está conformado de la siguiente manera:

$$-46- \quad T = \hat{T} + T^*$$

donde  $\hat{T}$  y  $T^*$  representan las variables para la macro y la micro escala respectivamente. Aquí  $\hat{T}$  es la variable que se resuelve a través de la malla de elementos finitos.

Se debe realizar la siguiente suposición: la escala no resoluble  $T^*$  se anula en el contorno de cada elemento, es decir:

$$-47- \quad T^* = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = L^e \quad e = 1, 2, \dots, n_e$$

Las funciones de forma también se encuentran formadas por dos escalas  $w = \hat{w} + w^*$ , donde  $w^*$  cumple la misma condición que la variable  $T^*$ , anulándose en los contornos de los elementos.

Introduciendo las incógnitas de ambas escalas en la formulación de residuos ponderados unidimensional se obtiene el siguiente par de ecuaciones, una para la macro escala:

$$-48- \quad \int_{L^e} \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} - u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} \right) \hat{w}_i + \int_{L^e} \left( \frac{\partial T^*}{\partial x} - u \frac{dT^*}{dx} + k \frac{d^2 T^*}{dx^2} \right) w_i + Q w_i \hat{u} dx = 0$$

y otra para la micro escala:

$$-49- \quad \int_{L^e} \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} - u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} \right) w_i^* + \int_{L^e} \left( \frac{\partial T^*}{\partial x} - u \frac{dT^*}{dx} + k \frac{d^2 T^*}{dx^2} \right) w_i^* + Q w_i^* \hat{u} dx = 0$$

La representación Euleriana-Lagrangeana para la expresión -49- es la siguiente:

$$-50- \quad -u \frac{dT^*}{dx} + k \frac{d^2 T^*}{dx^2} = -\hat{f}$$

$$T^* = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, \quad x = L^e$$

donde  $\hat{f}$  se define como:

$$-51- \quad \hat{r} = -u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + Q$$

Nótese como la variable de la micro escala dada por -50- está gobernada por el residuo de la variable de la macro escala. Luego, debido a las condiciones de Dirichlet sobre las fronteras de los elementos, el problema es local, pudiéndose resolver dentro de cada elemento.

El problema dado por la -50- puede resolverse usando una función de Green  $g(x,y)$  dando:

$$-52- \quad T^*(x) = \int_{L^e} g(x,y) \hat{r}(y) dy$$

donde la función de Green es la solución de las siguientes ecuaciones:

$$-53- \quad -u \frac{dg}{dx} + k \frac{d^2g}{dx^2} = d(y-x)$$

$$g = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, \quad x = L^e$$

donde  $d$  es la función delta de Dirac.

Integrando por partes el segundo término de la -48- resulta:

$$-54- \quad \int_L \left( u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + Q \right) \hat{w}_i dx + \int_{L^e} \left( u \frac{d\hat{w}_i}{dx} T^* - k \frac{dT^*}{dx} \frac{d\hat{w}_i}{dx} \right) dx = 0$$

La sumatoria aporta integrales elementales solamente. Integrando por partes la segunda parte de este término resulta:

$$-55- \quad \int_L \left( u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + Q \right) \hat{w}_i dx + \int_{L^e} \left( u \frac{d\hat{w}_i}{dx} T^* - k \frac{dT^*}{dx} \frac{d\hat{w}_i}{dx} \right) dx = 0$$

donde los términos del contorno se anulan automáticamente. Sustituyendo el valor de  $T^*$  dado por la -52- se obtiene que:

$$-56- \quad \int_L \hat{r} \hat{w}_i dx - \int_{L^e} \int_{L^e} \left( u \frac{d\hat{w}_i}{dx} - k \frac{d^2\hat{w}_i}{dx^2} \right) g(x,y) \hat{r}(y) dy dx = 0$$

donde

$$-57- \quad \int_{L^e} \hat{w}_i = \int_{L^e} \hat{w}_i$$

y  $\hat{r}$  está dado por la -51-. Realizando la siguiente suposición:

$$-58- \quad g(x,y) \approx \tilde{g}(x,y) = t(y) d(y-x)$$

donde  $\delta(y)$  es un parámetro de estabilización y  $\delta$  es la delta de Dirac. Reemplazando la -58- en la -55- resulta:

$$-59- \int_{L^e} \left[ u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + Q \hat{w} \right] dx - \int_{L^e} \left[ u \frac{d\hat{w}}{dx} - k \frac{d^2\hat{w}}{dx^2} - \delta(y) \hat{f}(y) \right] dx = 0$$

Es evidente la comparación entre la -59- y la -44- en su forma unidimensional. La diferencia entre el SubGrid Scale y el Galerkin Least Squares viene en el signo del término difusivo en la función de estabilización.

Una forma de obtener los parámetros de estabilización es a partir de la siguiente doble integración:

$$-60- \int_{L^e} \int_{L^e} \tau \delta(x - y) dx dy = \int_{L^e} \int_{L^e} \tau_g(x, y) dx dy$$

que para el caso unidimensional sin fuente y con condiciones de Dirichlet en ambos extremos se obtiene que:

$$-61- \tau = \frac{L^e}{2u} \frac{\alpha}{\epsilon} \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \frac{\ddot{\tau}}{\delta}$$

y que reemplazándolo en la siguiente expresión, da el parámetro de estabilización  $\tau_{op}$  como se observa:

$$-62- \tau^e = \frac{aL^e}{2|u|} \quad \text{p} \quad a = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe}$$

### 1.3. Otro enfoque sobre las inestabilidades numéricas:

Además de la necesidad de oponerse a la difusividad negativa que introducen los esquemas de integración espaciales, tanto en los métodos de diferencias finitas como de elementos finitos, cuando el término convectivo se discretiza en forma centrada, el fenómeno de la inestabilidad numérica puede atacarse desde un concepto puramente matemático.

Algunos trabajos, [29] y [30], refieren el problema de las oscilaciones a los autovalores de la matriz global  $\mathbf{K}$  definida en -26-. A medida que el régimen del problema adquiere un carácter convectivo cada vez mayor, se hacen presentes autovalores complejos conjugados en la matriz del sistema. Esto se evidencia en el aumento de la asimetría de la matriz principal  $\mathbf{K}$ , producto de los términos convectivos, lo que genera una matriz denominada “cuasi-hemisimétrica”.

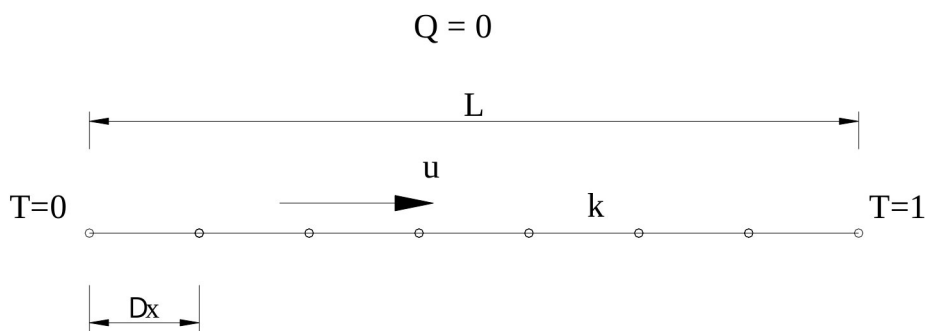


Debido a una insuficiente discretización de una malla de elementos finitos, es que un esquema como el Galerkin no puede propagar correctamente la frecuencia y amplitud de una autofunción asociada a la solución analítica de ciertos problemas. Los valores de frecuencia y amplitud son consecuencia de autovalores complejos asociados a dicha autofunción.

En base al concepto presentado es que, en la actualidad, se desarrollan métodos que agregan difusividad al problema, de manera que los autovalores de la matriz global  $\mathbf{K}$  sean números reales. Este procedimiento se presenta como general independizándose de la dimensión del problema y del tipo de ecuación diferencial que se resuelve. Un ejemplo simple es presentado en el apartado siguiente.

### 1.3.1. Autovalores complejos:

Sea el problema unidimensional dado por la siguiente figura:



donde se estableció la discretización pertinente. Los datos del problema son tales que se analizan tres casos que evidencian lo explicado, para lo cuál se establece que el  $Pe$  elemental varía de acuerdo a los siguientes casos:

$$Pe^1 = 0.5 \quad Pe^2 = 2 \quad Pe^3 = 10$$

donde el superíndice se correlacionará con los mismos.

El esquema de resolución es el de diferencias finitas centradas, siendo totalmente equivalente a un método de elementos finitos tipo Galerkin. Para esto se recuerda este esquema escrito en función del  $Pe$ :

$$\text{-63-} \quad (1 - Pe)T_{i+1} - 2T_i + (1 + Pe)T_{i-1} = 0 \quad Pe = \frac{uDx}{2k}$$

En base a los valores de  $Pe$  propuestos se establecen las matrices  $A_{ij}$  del sistema de ecuaciones dado por:

$$\text{-64-} \quad A_{ij}T_j = b_i$$

que resulta del ensamblaje de las ecuaciones. A continuación se presentan las matrices resultantes, luego de reemplazar las condiciones de Dirichlet, junto con los autovalores correspondientes.

Es fácil ver, como se dijo, que la asimetría de la matriz aumenta en función del aumento del Pe comparando las tablas respectivas. Además de observarse el aumento de la parte compleja de los autovalores.

Pe <sup>1</sup> = 0.5							
1	0	0	0	0	0	0	0
2	-2	1	0	0	0	0	0
0	2	-2	1	0	0	0	0
0	0	2	-2	1	0	0	0
0	0	0	2	-2	1	0	0
0	0	0	0	2	-2	1	0
0	0	0	0	0	2	-2	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Autovalores
-3.5605
-0.4395
-1.6146
-2.3854
-0.9201
-3.0799
1
1

Pe <sup>2</sup> = 2							
1	0	0	0	0	0	0	0
3	-2	-1	0	0	0	0	0
0	3	-2	-1	0	0	0	0
0	0	3	-2	-1	0	0	0
0	0	0	3	-2	-1	0	0
0	0	0	0	3	-2	-1	0
0	0	0	0	0	3	-2	-1
0	0	0	0	0	0	0	1

Autovalores
-2.0000 + 3.1210i
-2.0000 - 3.1210i
-2.0000 + 0.7708i
-2.0000 - 0.7708i
-2.0000 + 2.1598i
-2.0000 - 2.1598i
1
1

Pe <sup>3</sup> = 10							
1	0	0	0	0	0	0	0
11	-2	-9	0	0	0	0	0
0	11	-2	-9	0	0	0	0
0	0	11	-2	-9	0	0	0
0	0	0	11	-2	-9	0	0
0	0	0	0	11	-2	-9	0
0	0	0	0	0	11	-2	-9
0	0	0	0	0	0	0	1

Autovalores
-2.0000 +17.9291i
-2.0000 -17.9291i
-2.0000 + 4.4281i
-2.0000 - 4.4281i
-2.0000 +12.4073i
-2.0000 -12.4073i
1
1

## 1.4. El método de cálculo finitesimal:

Los métodos presentados hasta aquí proponen la solución del problema de la inestabilidad numérica a través del agregado de términos heurísticos que tienen la función de efectuar un adecuado balance de las ecuaciones diferenciales.

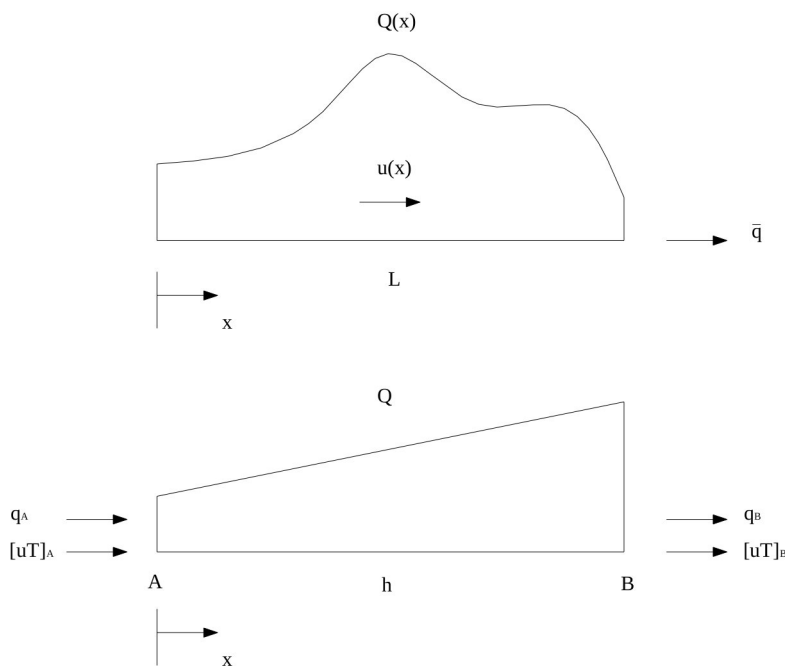
El método de cálculo finitesimal (MCF) desarrollado en [17], y complementado en [33]-[37], presenta una forma diferente de obtener las ecuaciones de equilibrio del problema, esto introduce a los parámetros de estabilización en forma natural dentro de las mismas, la cuáles se desarrollan sobre dominios finitos.

A continuación se presentan las bases del método de cálculo finitesimal así como algunas equivalencias con los métodos clásicos.

Otro punto importante es la determinación de los parámetros de estabilización. Si bien es viable la utilización de parámetros elegidos “a priori” como los parámetros crítico u óptimo, éstos se determinan de una forma diferente a la clásica.

### 1.4.1. La ecuación diferencial estabilizada:

Consideremos el problema de convección-difusión en un dominio unidimensional sobre el cuál se analiza un elemento de longitud  $h$ .



Assuming that the distribution of the source is linear in the element, we obtain the balance of fluxes given by the following expression:

$$\text{-65-} \quad q(x_B) + [uT](x_B) - q(x_B - h) - [uT](x_B - h) - \frac{1}{2} [Q(x_B) + Q(x_B - h)]h = 0$$

Los desarrollos en series de Taylor resultan ser los siguientes:

$$[uT](x_B - h) = [uT](x_B) - h \left. \frac{d[uT]}{dx} \right|_{x_B} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2[uT]}{dx^2} \right|_{x_B} - O(h^3)$$

$$\text{-66-} \quad q(x_B - h) = q(x_B) - h \left. \frac{dq}{dx} \right|_{x_B} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2q}{dx^2} \right|_{x_B} - O(h^3)$$

$$Q(x_B - h) = Q(x_B) - h \left. \frac{dQ}{dx} \right|_{x_B} + O(h^2)$$

Reemplazando -66- en -65-, eliminando los términos de orden  $h^2$  y superiores, y considerando además, que  $u$  es constante a lo largo del elemento, resulta:

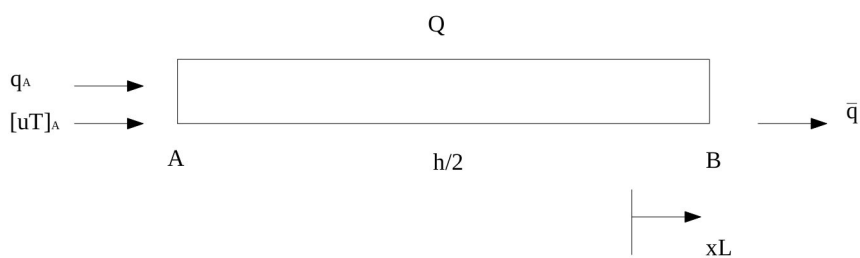
$$\text{-67-} \quad -u \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\alpha}{\rho c} \frac{dT}{dx} \right) + Q - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{e}{\rho c} u \frac{dT}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\alpha}{\rho c} \frac{dT}{dx} \right) + Q \frac{h}{2} = 0$$

que escrita en forma compacta es:

$$\text{-68-} \quad r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0 \quad 0 < x < L$$

con  $r = -u \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\alpha}{\rho c} \frac{dT}{dx} \right) + Q$

En cuanto a las condiciones de contorno, la de Dirichlet es la misma que la condición vista en -3-, sin embargo es necesario obtener las condiciones de Neumann estabilizadas. Para esto se realiza el balance de flujos en el elemento del contorno:



$$\text{-69-} \quad \bar{q} - q(x_A) - [uT](x_A) - \frac{h}{2} Q = 0$$

donde  $\bar{q}$  es el flujo prescrito en  $x_L$ . Desarrollando nuevamente en series de Taylor se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -70- \quad [uT](x_A) &= [uT]_{x_L} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} [uT]_{x_L} + O(h^2) \\
 q(x_A) &= q_{x_L} - \frac{h}{2} \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x_L} + O(h^2)
 \end{aligned}$$

Reemplazando los desarrollos de -70- en -69- y luego de eliminar los términos de orden superior, y considerando que  $u$  es constante a lo largo del elemento resulta:

$$-71- \quad \bar{q} + k \frac{dT}{dx} - uT - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} u \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial x} k \frac{dT}{dx} + Q \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = L$$

Si solamente el flujo difusivo está prescrito en  $x = L$ , la ecuación se modifica de la siguiente manera:

$$-72- \quad \bar{q} + k \frac{dT}{dx} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} u \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial x} k \frac{dT}{dx} + Q \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = L$$

que en forma compacta de acuerdo con la notación de -68- resulta:

$$-73- \quad \bar{q} + k \frac{dT}{dx} - \frac{h}{2} r = 0 \quad \text{en } x = L$$

Es fácil verificar en las expresiones -68- y -73- que cuando el parámetro  $h$  tiende a cero, las ecuaciones diferenciales que modelan el problema son reobtenidas.

### 1.4.2. Generalización para casos multidimensionales:

Extendiendo el concepto de estabilización, que presenta el MCF, a problemas 2D y 3D se llega a las siguientes ecuaciones diferenciales modificadas:

$$\begin{aligned}
 -74- \quad r - \frac{1}{2} h^T \tilde{N} r &= 0 && \text{en } W \\
 T &= \bar{T} && \text{sobre } G_D \\
 n^T D \tilde{N} T + \bar{q}_n - \frac{1}{2} h^T n r &= 0 && \text{sobre } G_N
 \end{aligned}$$

donde el vector  $\mathbf{h}$  está definido como:

$$-75- \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x \hat{u} \\ \hat{e}_y \hat{u} \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso 1D, cuando en el límite,  $\mathbf{h}$  es el vector nulo, las ecuaciones diferenciales de convección-difusión son reobtenidas.

Abordando el problema enunciado por las -74- a través de una formulación de elementos finitos del tipo de Galerkin se tiene que:

$$-76- \int_W \left( u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T D \tilde{N}^T + Q \right) \frac{h^T}{2} \tilde{N} \left( u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T D \tilde{N}^T + Q \right) \frac{\delta}{\delta} d\Omega = 0$$

Luego de realizar la integración por partes resulta:

$$-77- \int_W \left( f_i u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T f_i D^* \tilde{N}^T \right) dW = \int_W Q dW - \int_{G_N} \frac{\delta}{\delta} q_n - \frac{1}{2} r h^T n \frac{\delta}{\delta} dG$$

donde

$$-78- D^* = D + \frac{h u^T}{2} = \begin{pmatrix} k_x + \frac{h_x u_x}{2} & \frac{h_x u_y}{2} \\ \frac{h_y u_x}{2} & k_y + \frac{h_y u_y}{2} \end{pmatrix}$$

y sustituyendo por la forma aproximada del campo de temperaturas se llega a:

$$-79- \int_W \left( f_i u^T \tilde{N}^T f_j + \tilde{N}^T f_i D^* \tilde{N}^T f_j \right) dW \frac{\delta}{\delta} T_j = \int_W \frac{\delta}{\delta} Q - \frac{1}{2} h^T \tilde{N} Q \frac{\delta}{\delta} dW - \int_{G_N} \bar{q}_n dG$$

siendo la forma estabilizada de las -23- con  $D^*$  definida por la -78-. Esta forma puede ser escrita de diferentes maneras de acuerdo al término al que se le realice la integración por partes. De esta forma puede obtenerse una expresión como la siguiente, en la cuál la integración por partes no ha sido realizada:

$$-80- \int_W \left( u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T D \tilde{N}^T + Q \right) dW + \int_W h^T \tilde{N} f_i \left( u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T D \tilde{N}^T + Q \right) dW - \int_{G_N} \left( h^T D \tilde{N}^T + \bar{q}_n \right) dG = 0$$

### 1.4.3. Determinación de los parámetros de estabilización:

El desarrollo del MCF fue complementado con una metodología, distinta a las convencionales, para la determinación de los parámetros de estabilización, la misma se explica a continuación.

Se define el residuo modificado, que tiene origen en la ecuación diferencial modificada -68-:

$$\text{-81-} \quad r - \frac{1}{2} h^T \tilde{N} r = r_W \quad \text{en } W$$

Se define también el residuo promediado sobre un elemento como:

$$\text{-82-} \quad r^{(e)} = \frac{1}{W^{(e)}} \oint_W r dW$$

Sustituyendo la ecuación -82- en -81- resulta:

$$\text{-83-} \quad r_W^{(e)} = r^{(e)} - \frac{1}{2} h^T \tilde{N} r \frac{\dot{\delta}^{(e)}}{\delta}$$

donde cualquier cantidad con superíndice (e) puede definirse como:

$$\text{-84-} \quad a^{(e)} = \frac{1}{W^{(e)}} \oint_W a dW$$

Asumiendo que el vector  $\mathbf{h}$  tiene componentes que son constantes a lo largo de los elementos se simplifica la ecuación -83-, resultando:

$$\text{-85-} \quad r_W^{(e)} = r^{(e)} - \frac{1}{2} \left[ \mathbf{h}^{(e)} \right]^T (\tilde{N} r)^{(e)}$$

y expresando las componentes del vector  $\mathbf{h}$  en las direcciones dadas por el vector velocidad  $\mathbf{u}$  y por una dirección arbitraria  $\mathbf{v}$ , se tiene que:

$$\text{-86-} \quad \mathbf{h} = h_s \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} + h_t \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

donde el subíndice “s” representa la dirección de la corriente dada por el vector velocidad, mientras que el subíndice “t” indica una dirección transversal a la dada por la línea de corriente.

Según algunos autores [39], la dirección  $\mathbf{v}$  que mejores resultados ha arrojado es aquella dada por el  $\mathbf{T}$  siguiendo las ideas de los esquemas denominados shock capturing. Sin embargo cualquier dirección  $\mathbf{v}$  sería posible siempre que los resultados sean estables.

Expresando la -86- en forma proporcional a la longitud característica del elemento, y reemplazándola en -85- resulta:

$$\text{-87-} \quad r_W^{(e)} = r^{(e)} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\delta}^{(e)}}{\delta} \left[ a_s L^{(e)} \frac{\mathbf{u}^T}{|\mathbf{u}|} + a_t L^{(e)} \frac{\mathbf{v}^T}{|\mathbf{v}|} \right] \dot{\delta} (\tilde{N} r)^{(e)}$$

Se considera que existen dos soluciones dadas por el método de elementos finitos para la ecuación diferencial, una se obtiene de la formulación del MCF dada por la -74- y otra “mejorada”, a partir de la primera, a través de cualquier método de suavizado (ver la discusión

sobre este punto en el apartado 1.4.4). Dichas soluciones dan como resultado dos residuos  $r_1^{(e)}$  y  $r_2^{(e)}$  respectivamente debiéndose cumplir que:

$$\text{-88-} \quad r_1^{(e)} - r_2^{(e)} \geq 0$$

En este caso fue asumido que  $r_1$  es positivo, en caso de que sea negativo, la desigualdad debe ser invertida.

Combinando las ecuaciones -87- y -88- se obtiene:

$$\text{-89-} \quad \hat{\alpha}_s \frac{u^T}{|u|} + \alpha_t \frac{v^T \dot{u}^{(e)}}{|v| \dot{u}^{(e)}} \left( \tilde{N}r_2^{(e)} - \tilde{N}r_1^{(e)} \right) = \frac{2}{L^{(e)}} \left( r_2^{(e)} - r_1^{(e)} \right)$$

Esta expresión es la base para la determinación de los parámetros  $\alpha_s$  y  $\alpha_t$ . El procedimiento propuesto en [16] y [17] se basa en técnicas iterativas que en forma resumida se pasan a explicar:

- a) Se resuelve el problema planteado en -74- a través del método de los elementos finitos con parámetros de estabilización iniciales cualesquiera.
- b) Se calculan los residuos y sus gradientes.
- c) Se obtiene, despejando de -89- un valor de  $\alpha_s$ , y se itera hasta que converge dicho parámetro.
- d) Luego se despeja de -89- un valor de  $\alpha_t$  con el valor de  $\alpha_s$  del paso anterior, y se itera hasta obtener un valor convergido del parámetro transversal.

#### **1.4.4. Soluciones suavizadas:**

El concepto de solución suavizada nace de la idea de recuperar los gradientes de manera de obtener un campo continuo que los represente. Por ejemplo, la utilización de elementos de interpolación lineal para la resolución de los problemas sobrelleva a un campo de gradientes discontinuo y constante elemento a elemento. La recuperación de gradientes permite obtener los valores nodales de éstos, e interpolando con la misma función de forma con la que se aproxima el campo incógnita original (lineal en este ejemplo), se obtiene un campo de gradientes con interpolación de orden superior (lineal en este caso), y por consiguiente se logran capturar valores de derivadas segundas dentro de cada elemento (discontinuas entre elementos).

Las recomendaciones realizadas, para la implementación del MCF, en [16],[22],[36],[37] en cuanto a la recuperación de un campo de gradientes lineal, es en base a un “smoothing” de los gradientes de la solución, lo que es análogo a realizar un promedio,



sobre cada nodo de la malla, de los valores de gradiente que cada elemento conectado a dicho nodo posee. Este promedio puede ser ponderado en función de la longitud elemental (en problemas unidimensionales), del ángulo de incidencia de cada elemento (en problemas bidimensionales) ó de un ángulo sólido de incidencia (en problemas tridimensionales). Otro método muy recomendado es el Superconvergent Patch Recovery (SPR) [38]. El mismo se basa en encontrar ciertos puntos dentro de cada elemento donde se obtiene el valor del gradiente a partir de la interpolación original y de realizar una proyección hacia los nodos de estos valores encontrados. La ventaja del esquema es que eleva, en uno, el orden de convergencia, siendo los puntos donde el esquema se vuelve “superconvergente”, los puntos de Gauss. Para un caso unidimensional con interpolación lineal, el punto de Gauss utilizado es el que se encuentra en la mitad del elemento y la proyección de los valores del gradiente es lineal.

Sin embargo un punto muy importante debe ser tenido en cuenta, y es que todos los métodos aquí mencionados fallan en la recuperación de gradientes cuando las capas límites se encuentran dentro de un solo elemento, esta discusión se presenta en el apartado 3.4 con un simple ejemplo. Debido a este inconveniente se postula que la metodología presentada posee deficiencias de cálculo en presencia de capas límites. De hecho, un cálculo errado ó insuficiente de los gradientes, y por consiguiente de las derivadas segundas, implica que el residuo  $r_2$  propuesto en -88- estará fuera del orden de lo que en realidad tendría que ser, siendo ésta, la mayor dificultad que el método desarrollado en el capítulo 2 posee.

Como conclusión, cabe aclarar que este punto es clave para el éxito de una formulación de esta clase.

### **1.4.5. Derivación de ecuaciones estabilizadas de mayor orden:**

El análisis para la determinación de las ecuaciones diferenciales estabilizadas de mayor orden es el mismo que el realizado para el balance hecho en -65-. Así es que utilizando mayor cantidad de términos de las series puede arribarse a las ecuaciones diferenciales de mayor orden buscadas. El resultado es el siguiente:

$$r - \tilde{N}^1_r + \tilde{N}^2_r - \tilde{N}^3_r = 0$$

-90-

$$\text{con } r = -u \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{dT}{dx} \right) + Q$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}^1 &= \frac{h_x}{2} \frac{\tau}{\tau_x} + \frac{h_y}{2} \frac{\tau}{\tau_y} \\
 -91- \quad \tilde{N}^2 &= \frac{h_x^2}{6} \frac{\tau^2}{\tau_x^2} + \frac{h_x h_y}{4} \frac{\tau^2}{\tau_x \tau_y} + \frac{h_y^2}{6} \frac{\tau^2}{\tau_y^2} \\
 \tilde{N}^3 &= \frac{h_x^3}{24} \frac{\tau^3}{\tau_x^3} + \frac{h_x^2 h_y}{12} \frac{\tau^3}{\tau_x^2 \tau_y} + \frac{h_x h_y^2}{12} \frac{\tau^3}{\tau_x \tau_y^2} + \frac{h_y^3}{24} \frac{\tau^3}{\tau_y^3}
 \end{aligned}$$

que permite plantear esquemas estabilizados utilizando mayor orden en la formulación, pudiéndose calcular, de manera similar, los parámetros de estabilización. Esto implicaría, entre otras cosas, la utilización de funciones de forma de mayor orden, como son las cuadráticas ó cúbicas, siendo elevado el costo computacional introducido por éstas.

### 1.4.6. Extensión a sistemas de ecuaciones:

La generalidad del MCF permite extender el método a sistemas de ecuaciones diferenciales, tales como Navier Stokes y sus variaciones, estableciendo parámetros de estabilización para cada ecuación diferencial y en cada una de las coordenadas espaciales. A continuación se presenta el MCF aplicado en forma genérica a un conjunto de ecuaciones diferenciales k.

Los balances en dominios discretos dan como resultado el siguiente sistema:

$$-92- \quad r_k - \frac{h_{kj}}{2} \frac{\tau r_k}{\tau_x} = 0 \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, N_{ed} \\ j = 1, 2, \dots, N_d \end{array}$$

donde  $r_k$  es la ecuación diferencial estándar que se obtiene del análisis infinitesimal,  $h_{kj}$  son los parámetros característicos,  $N_{ed}$  es el número de ecuaciones diferenciales que describen el problema y  $N_d$  es el número de dimensiones en el que el problema está descrito.

La obtención de los parámetros  $h_{kj}$  es análoga al caso analizado en el apartado 1.4.3:

$$-93- \quad r_1^{(e)} - r_2^{(e)} \approx 0$$

donde  $r_1^{(e)}$  simboliza el residuo original para la ecuación k, mientras que  $r_2^{(e)}$  es el residuo mejorado (a partir de una solución suavizada) para la misma ecuación.

Reemplazando la -92- en la -93- se obtienen las expresiones para el cálculo de los parámetros de estabilización en forma general.

### **1.4.7. Discusión sobre el MCF:**

Si bien la metodología utilizada a la hora de estabilizar las soluciones dadas por el MEF, en el contexto de los procedimientos básicos, ha sido bien aceptada, y lo sigue siendo, queda una deuda pendiente sobre el origen del fenómeno de la estabilización. La estabilización puede ser considerada como una simple modificación de los esquemas numéricos, como se vio en los apartados 1.1.3, 1.1.4, 1.2.3 y 1.2.5, ó un balance intrínseco dentro de las ecuaciones diferenciales para dominios finitos que resulta vital para la resolución numérica del problema, como se vio en 1.4.1 y como se analizará más adelante.

Para discernir esto, se debe recordar de dónde es que nace la idea de la resolución de problemas a través de esquemas numéricos. Esta idea surge de discretizar las ecuaciones diferenciales, aquí los incrementos finitos  $\Delta x$  ya no tienen el concepto del ideal “tendiendo a cero”, y es por esto que se dan los fenómenos de la inestabilidad analizados en 1.1.2.

Si ahora en el momento de obtener las ecuaciones diferenciales, no se desprecian los términos que son dependientes de esos incrementos finitos  $\Delta x$ , debido a que ahora ya “no tienden a cero”, se obtendrá, con mayor aproximación, la forma discreta del problema que se quiere resolver como se vio en 1.4.1.

En base a esta idea, es que la estabilización ha avanzado en gran medida respecto de lo que anteriormente se suponía, que no eran ideas desacertadas, sino que no eran lo suficientemente fundamentadas ó generales, debido a que sólo la práctica y la experiencia determinaban la posible solución a un problema.

Como se ha mencionado en los objetivos de este trabajo, la reinterpretación de los métodos de estabilización es algo que se requiere, para que la resolución de los problemas de transporte no pretenda ser un misterio, sino solamente una clase diferente de problemas cuando son abordados desde el método de los elementos finitos.

## Capítulo 2:

### 2.1. El método de los dominios desplazados:

Luego de haber presentado los métodos clásicos involucrados en los procedimientos de estabilización y de haber discutido las bases sobre las cuáles reposa el MCF, presentado en el apartado anterior, se puede remarcar que la forma de estabilización más sólida, en cuanto al origen de las ecuaciones modificadas, la posee este último.

Sin embargo, la derivación de ecuaciones diferenciales modificadas puede no resultar algo general o intuitivo. He aquí la necesidad de replantear el origen de los procesos de estabilización con el fin de poseer una forma de resolución concluyente para los problemas de transporte.

Es posible concluir, de todo lo visto hasta aquí, que para obtener una representación correcta de los fenómenos físicos que se dan en los problemas regidos por ecuaciones del tipo de la -1- se necesita alguna clase de información extra sobre el campo que se encarga de convectar las cantidades. En los problemas de transferencia de calor ó de flujo de fluidos, el campo de velocidades, que es el encargado de la convección del campo de temperaturas y del campo de velocidades mismo, es la opción ideal, como referencia para obtener esa información buscada.

De aquí surge la necesidad de establecer una nueva forma para el abordaje de este tipo de problemas. Para solucionar esto es que se reformula el MCF como una técnica de estabilización basada en la resolución de los problemas por el método de elementos finitos a partir del concepto de residuos ponderados en dominios desplazados.

El método de los dominios desplazados (MDD) implica una resolución conceptualmente diferente, ya que el punto de vista desde el cual se afronta el problema es aquél que permite obtener las formulaciones variacionales en forma directa, sin la necesidad de detenerse a pensar en aquellos términos ineludibles, desde el punto de vista de las formulaciones clásicas, para evitar las inestabilidades numéricas. De esta forma, la simple idea de utilizar dominios desplazados, ó lo que es lo mismo, residuos desplazados permitirá lograr lo anteriormente explicado.

Otro objetivo de esta reformulación es lograr un avance en la comprensión de los fenómenos físicos y matemáticos involucrados en estas técnicas. Conjuntamente con esto, el

método pretende darle generalidad a los problemas de transporte, cuyas características requieren generalmente, una resolución específica diferente de la resolución clásica dada por un esquema tipo Galerkin.

Como forma de expresar la generalidad del MDD, se presentan las equivalencias y diferencias respecto de los demás métodos (ver apartado 2.3).

**2.1.1. Conceptos fundamentales:**

Se presentó el MDD como una técnica de resolución por el método de los elementos finitos en la cual los dominios de resolución del problema se encuentran desplazados de su posición original.

La formulación clásica de los métodos de residuos ponderados establece que:

$$-94- \int_{\Omega} r(u, x) w(x) dx = 0$$

donde “r” representa el residuo de la ecuación diferencial cuando una solución aproximada **u** es utilizada, “w” es una función de peso que pondera al residuo y **x** es el vector posición respecto del cuál está planteada la resolución del problema.

El concepto innovador que introduce el MDD es el siguiente:

$$-95- \int_{\Omega'} r(u, x') w(x') dx' = 0$$

donde  $\Omega'$  indica un dominio diferente de aquél en el cual el problema fue especificado por la -94-. La -95- tiene su equivalencia en la expresión que sigue, donde el dominio se refiere al dominio  $\Omega$  a través de una transformación en las coordenadas:

$$-96- \int_{\Omega'} r(x') w(x') dx' = \int_{\Omega} r(x - h) w(x - h) |J| dx = 0$$

donde  $|J|$  es el módulo del Jacobiano, necesario para realizar la transformación de coordenadas,  $\Omega$  es el dominio original en donde se plantea el problema y **h** es un pequeño desplazamiento dado al dominio  $\Omega'$ .

Nótese como el planteo del problema en un dominio  $\Omega'$  puede llevarse en forma directa al dominio  $\Omega$  a través del desplazamiento de los componentes del integrando. Esto

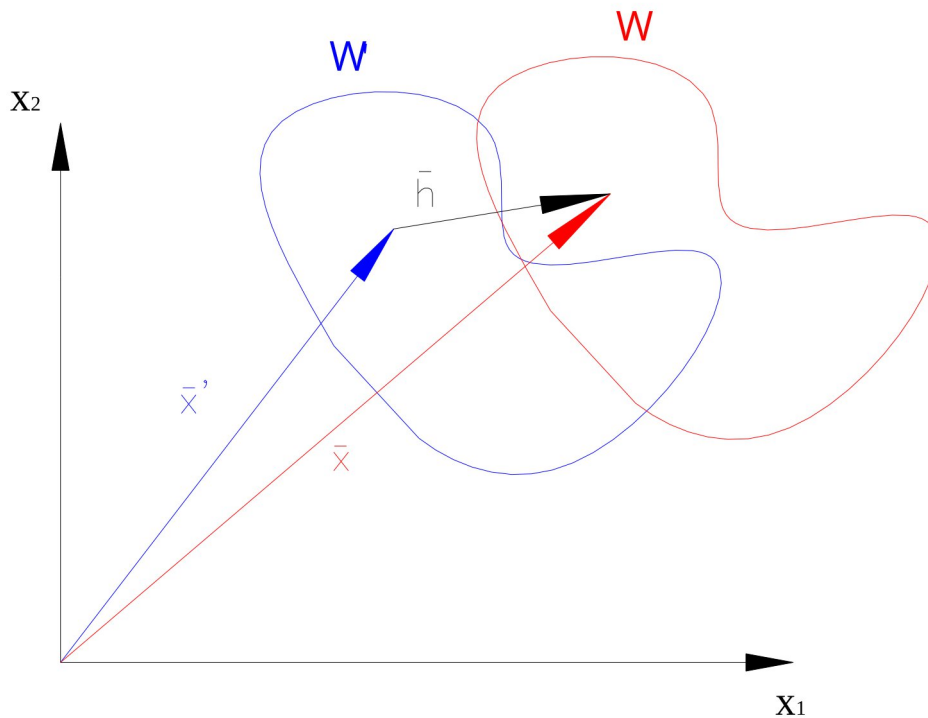
permite trabajar con la segunda parte de la -96- con el fin de manejar los mismos instrumentos que los utilizados hasta ahora.

La formulación anterior expresa que el equilibrio debe ser planteado bajo la condición del desplazamiento de los dominios ó de los residuos y de las funciones de peso como se ve del lado derecho del igual, este desplazamiento está representado por el vector  $\mathbf{h}$  el cuál será interpretado más adelante.

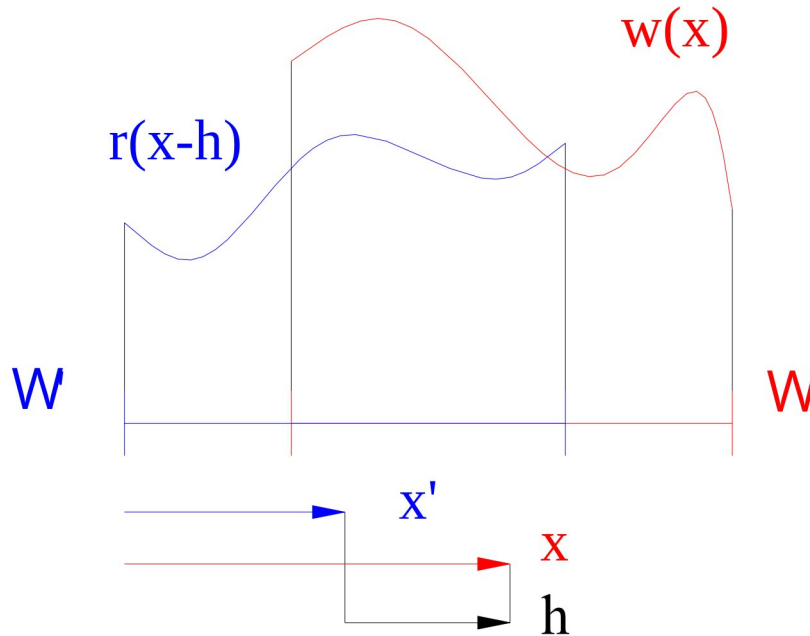
La ventaja de esta nueva formulación es la generalidad que se le da a este tipo de problemas así como también a otras clases de problemas no abordados en este trabajo (ver ejemplos en el apartado Ap.VI del apéndice). La línea de pensamiento así constituida permite establecer nuevas posibilidades al momento de resolver un problema. Incluso, y se verá mas adelante, la certeza de trabajar con este tipo de formulaciones, es la de reobtener los balances necesarios para lograr soluciones estables en forma natural partiendo de la formulación de residuos ponderados del MEF, y no de las ecuaciones diferenciales modificadas, lo que lo hace conceptualmente distinto del MCF.

### **2.1.2. La interpretación del desplazamiento 'h':**

Como se explicó en el apartado anterior, el desplazamiento dado al dominio resulta fácilmente visible si se observa la figura siguiente:



En este caso general de un dominio bidimensional se observa cómo el problema planteado en se resuelve en , sin embargo, y como se verá más adelante, se puede elegir la función del integrando de -96- a la cuál se le puede aplicar este desplazamiento. Si se elige realizar un desplazamiento del residuo solamente, para un caso unidimensional es muy representativa la figura que se muestra a continuación:



donde una función  $w(x)$  pondera al residuo  $r(x-h)$  desplazado, realizándose la integral en el dominio original .

Se debe aclarar que de aquí en adelante las componentes que conforman el desplazamiento  $h$  no son dados en forma explícita. La forma en que se determinan los mismos se presenta en el apartado 3.2. Sin embargo, la utilización de parámetros determinados a priori es viable según lo que se analizará en el apartado 2.3.2.

### 2.1.3. Desarrollo general del método:

Para implementar el método, consideremos un desarrollo en series de Taylor de las expresiones del integrando de -96- teniendo en cuenta en el desarrollo sólo los términos de primer orden, debido a que se consideran pequeños desplazamientos:

$$\begin{aligned}
 -97- \quad r(x-h) &= r(x) - h^T \tilde{N} r \\
 w(x-h) &= w(x) - h^T \tilde{N} w
 \end{aligned}$$

Este desarrollo permite volver a trabajar con los residuos y las funciones de forma ya definidos. Desde ya que un mayor orden de aproximación en los desarrollos de Taylor es

posible como se verá en el apartado 2.1.6, sin embargo, por su simplicidad, se utilizarán elementos con funciones de forma lineales. Cabe aclarar que los desplazamientos efectuados sobre la función de peso y sobre el residuo son iguales, como se ve en la -97-.

La expresión dada para el módulo del Jacobiano de transformación, considerando pequeños desplazamientos, es la siguiente (ver apartado Ap.V en el apéndice):

$$\text{-98-} \quad |J| = 1 - \text{divh}$$

Reemplazando las -97- en -96- se obtiene:

$$\text{-99-} \quad \int_W \left[ \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w(\mathbf{x}) \right] \left[ \mathbf{w}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w(\mathbf{x}) \right] (1 - \text{divh}) dW = 0$$

Suprimiendo la dependencia funcional respecto de  $\mathbf{x}$ , resulta:

$$\text{-100-} \quad \int_W \left( \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w \right) \left( \mathbf{w} - \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w \right) (1 - \text{divh}) dW = 0$$

Para obtener una formulación general y consistente con lo anterior, trabajamos con la expresión -100- distribuyendo los términos de ésta:

$$\text{-101-} \quad \int_W \left[ \mathbf{w} - r \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w - \mathbf{w} \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r + \left( \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r \right) \left( \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w \right) \right] (1 - \text{divh}) dW = 0$$

El término  $\left( \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r \right) \left( \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w \right)$  puede escribirse de la siguiente forma:

$$\text{-102-} \quad \left( \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r \right) \left( \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w \right) = \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{r} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{N}}_w$$

donde la matriz  $\mathbf{H}$  es de segundo orden y para el caso bidimensional está dada por:

$$\text{-103-} \quad \mathbf{H} = |h|^2 \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & 1 \\ \hat{e}_2 & \hat{u} \end{bmatrix}$$

Resultando la formulación general del método de los dominios desplazados la siguiente:

$$\text{-104-} \quad \int_W \left[ \mathbf{w} - r \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w - \mathbf{w} \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r + \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{r} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{N}}_w \right] (1 - \text{divh}) dW = 0$$

Eliminando el término de segundo orden, resulta la siguiente expresión general donde los términos son todos de primer orden en el desplazamiento  $\mathbf{h}$ :

$$\text{-105-} \quad \int_W \left[ \mathbf{w} - r \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w - \mathbf{w} \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r \right] (1 - \text{divh}) dW = 0$$



Distribuyendo el producto y teniendo en cuenta que  $\text{divh} = \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{h}$  se obtiene lo siguiente:

$$\text{-106-} \quad \oint_W \left[ \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w - r \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w - w \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r - r w \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{h} + \left( r \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w + w \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r \right) \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{h} \right] dW = 0$$

mientras que algunos términos del corchete se pueden agrupar de acuerdo a la siguiente identidad:

$$\text{-107-} \quad \tilde{\mathbf{N}}^T (\mathbf{h} r w) = \left( \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{h} \right)_w + \left( \tilde{\mathbf{N}}^T w \right)_h + \left( \tilde{\mathbf{N}}^T r \right)_w \mathbf{h} = r w \left( \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{h} \right)_+ + r \mathbf{h}^T \left( \tilde{\mathbf{N}}_w \right) + w \mathbf{h}^T \left( \tilde{\mathbf{N}}_r \right)$$

Reemplazando la -107- en la -106- resulta:

$$\text{-108-} \quad \oint_W \left[ \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w - \tilde{\mathbf{N}}^T (\mathbf{h} r w) + \left( r \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w + w \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r \right) \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{h} \right] dW = 0$$

El teorema de la divergencia expresa lo siguiente:

$$\text{-109-} \quad \oint_W \left( \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} \right) dW = \oint_G \left( \mathbf{n}^T \mathbf{t} \right) dG$$

donde  $\mathbf{t}$  es un campo vectorial,  $G$  es la frontera del dominio y  $\mathbf{n}$  es la normal a la dicha frontera. Aplicando la -109- en la -108- se obtiene una formulación alternativa de dominios desplazados para elementos finitos con desarrollos de primer orden y pequeños desplazamientos:

$$\text{-110-} \quad \oint_W \left[ \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w + \left( r \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_w + w \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{N}}_r \right) \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{h} \right] dW = \oint_G \left[ \mathbf{n}^T \mathbf{h} r w \right] dG$$

Volviendo a la expresión general -105- se pueden derivar de ésta, la mayoría de los métodos de estabilización vistos en el capítulo anterior. En el apartado 2.3 se plantean las mencionadas equivalencias con dichos métodos clásicos.

### 2.1.4. Una formulación simplificada:

Partiendo de la expresión -105- vista en el apartado anterior, se realizan las siguientes consideraciones:

Asumiendo  $\mathbf{h}$  constante dentro de cada elemento, y considerando pequeños desplazamientos, se desprecia el término de la divergencia, es decir,  $\text{divh} \approx 0$ .

Se presentan dos opciones: realizar el desplazamiento del residuo solamente, permaneciendo la función de peso en la posición original, ó desplazar la función de peso, permaneciendo el residuo inalterable.

Entonces, se obtiene la siguiente formulación para el primer caso:

$$-111- \quad \int_W [r - h^T \tilde{N}_r] w dW = 0$$

donde el residuo es desplazado, mientras que en el segundo caso la formulación es la siguiente:

$$-112- \quad \int_W [r_w - h^T \tilde{N}_w] dW = 0$$

donde la función de peso es desplazada. Estas expresiones se podrán reconocer al presentar las equivalencias con las formulaciones clásicas.

### 2.1.5. Esquemas transitorios:

En caso de problemas transitorios, el concepto del método no se modifica. El desplazamiento del dominio resulta también en sentido temporal, lo que se observa claramente al plantear al tiempo como una variable más,  $x_j$ , en el residuo.

Para obtener la formulación en el caso transitorio se reemplaza el tiempo como variable escalar del problema:

$$-113- \quad \int_{t'} \int_W r(t, x) w(x) dx dt' = \int_t \int_W r(t - d, x - h) w(x - h) dx dt = 0$$

donde se ha considerado un campo de pequeños desplazamientos constantes dentro de cada elemento, por consiguiente el determinante del Jacobiano de transformación es unitario.

Nótese que la integración temporal puede realizarse en la forma mostrada, ó abordarse desde un esquema de diferencias finitas.

El desarrollo en series de Taylor del residuo desplazado en la -113- se muestra a continuación:

$$-114- \quad r(t - d, x - h) = r(t, x) - h^T \tilde{N}_r(t, x) - d \frac{\partial r(t, x)}{\partial t}$$

donde  $\tau$  es el desplazamiento del residuo en el tiempo. Incorporando el desarrollo en series de Taylor para la función de peso junto con la -114- en la -113-, se obtiene una formulación variacional más general que la -105-, bajo las consideraciones realizadas:

$$-115- \quad \int_{t-W}^t \int_W \left( r(t, x) - h^T \tilde{N}r(t, x) - d \frac{\partial r(t, x)}{\partial t} \left[ w - h^T \tilde{N}w \right] \right) dW dt = 0$$

Nótese como la formulación adiciona los términos que son necesarios para la estabilización del esquema numérico. Sin embargo hasta aquí se ha considerado un desarrollo de los términos del integrando de la -113- de primer orden, la ventaja de este procedimiento variacional es la versatilidad en cuanto al orden del esquema que se desee. Obviamente cabe aclarar que mayores órdenes en los desarrollo requerirían órdenes de continuidad más elevados para las funciones de peso y para las de interpolación.

### 2.1.6. Ecuaciones de mayor orden:

Como se mencionó en el apartado anterior, la posibilidad de utilizar desarrollos de mayor orden para los términos de la expresión -113- no es una limitación, en absoluto, desde el punto de vista matemático, aunque sí desde la implementación, lo que representa tema de estudios futuros. De hecho, podemos generalizar el desarrollo de Taylor para las expresiones de la formulación general:

$$-116- \quad \begin{aligned} r(t - d, x - h) &= r(t, x) - \tilde{N}^1 r(t, x) + \tilde{N}^2 r(t, x) - \tilde{N}^3 r(t, x) - \\ & d \frac{\partial r(t, x)}{\partial t} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 r(t, x)}{\partial t^2} - \frac{d^3}{6} \frac{\partial^3 r(t, x)}{\partial t^3} + O(d^4, h^4) \\ w(x - h) &= w(x) - \tilde{N}^1 w(x) + \tilde{N}^2 w(x) - \tilde{N}^3 w(x) + O(h^4) \end{aligned}$$

donde  $\tilde{N}^1$ ,  $\tilde{N}^2$  y  $\tilde{N}^3$  están definidos en la -91-. En este caso se muestra un desarrollo de tercer orden tanto para el esquema de integración espacial como temporal.

La equivalencia entre el MDD y el MCF se va evidenciando a partir de la similitud en las expresiones, más allá de pequeñas diferencias que serán evaluadas en el apartado 2.3.1.

## 2.2. El MDD aplicado a la ecuación de advección-difusión:

Haciendo referencia al problema concreto que importa en el presente trabajo, se aplican las formas simplificadas -111- y -112-, que componen el conjunto de las formulaciones reducidas con las que se desarrollará este apartado y los siguientes.

Recordando las expresiones simplificadas:

$$-117- \int_W \left[ -h^T \tilde{N}_r \right] w dW = 0$$

para el desplazamiento del residuo, y

$$-118- \int_W \left[ w - h^T \tilde{N}_w \right] dW = 0$$

para el desplazamiento de la función de peso. Ambas formulaciones se referirán al problema estacionario de convección-difusión con campos de pequeños desplazamiento.

La expresión del residuo está dada por la -2-, reescribiéndola para mayor comodidad, es:

$$-119- \quad -u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q = r \quad \text{en } W$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades,  $\mathbf{D}$  es la matriz de difusividad,  $Q$  es la fuente por unidad de volumen y  $\hat{T}$  es la solución aproximada que define al residuo  $r$ .

### 2.2.1. El desplazamiento del residuo:

Reemplazando la -119- en la -117- se obtiene la formulación de residuos ponderados para el problema planteado:

$$-120- \int_W \left[ u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q - h^T \tilde{N} \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q \right) \right] w dW = 0$$

Para obtener una formulación de elementos finitos reemplazamos la función de peso  $w$  por las funciones de interpolación de la temperatura, incorporando las siguientes expresiones

$$-121- \quad \begin{aligned} \hat{T} &= T_j f_j & j &= 1, 2, \dots, \text{Nod} \\ w &= f_i \end{aligned}$$

en la expresión -120-, resultando:

$$-122- \int_W \left[ u^T \tilde{N} (f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j) + Q - h^T \tilde{N} \left( u^T \tilde{N} (f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j) + Q \right) \right] f_i dW = 0$$

Distribuyendo y trabajando algebraicamente se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 -123- \quad & \int_W \dot{u}^T f_i \tilde{N}(f_j T_j) + f_i \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + f_i Q - \\
 & f_i h^T \tilde{N} \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + Q \right) dW = 0
 \end{aligned}$$

Se integra por partes el siguiente término:

$$-124- \quad \int_W \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) dW = \int_G \dot{n}^T D \tilde{N}(f_j T_j) dG - \int_W (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N}(f_j T_j) dW$$

y el siguiente:

$$\begin{aligned}
 -125- \quad & \int_W \dot{h}^T \tilde{N} \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + Q \right) dW = \\
 & \int_G \dot{n}^T h \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + Q \right) dG - \\
 & \int_W (\tilde{N} f_i)^T h \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + Q \right) dW
 \end{aligned}$$

Reemplazando las -125- y -124- en la -123- resulta:

$$\begin{aligned}
 -126- \quad & \int_W \dot{u}^T f_i \tilde{N}(f_j T_j) dW + \int_W \dot{f}_i Q dW + \int_G \dot{n}^T D \tilde{N} f_j T_j dG - \int_W (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N}(f_j T_j) dW - \\
 & \int_G \dot{n}^T h \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + Q \right) dG + \\
 & \int_W (\tilde{N} f_i)^T h \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + Q \right) dW = 0
 \end{aligned}$$

y ordenando a ambos lados del igual se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -127- \quad & \int_W \dot{u}^T f_i \tilde{N}(f_j T_j) dW + \int_W (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N}(f_j T_j) dW - \\
 & \int_W (\tilde{N} f_i)^T h \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + Q \right) dW = \int_W \dot{f}_i Q dW + \\
 & \int_G \dot{n}^T D \tilde{N}(f_j T_j) dG - \int_G \dot{n}^T h \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) + Q \right) dG
 \end{aligned}$$

Note que si se utiliza una función de forma lineal, el término  $\tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j, T_j)$  sigue siendo de segundo orden, por lo que no sobreviviría con esta interpolación para la temperatura, por lo tanto la expresión anterior se modifica como sigue:

$$\begin{aligned}
 -128- \quad & \int_W u^T f_i \tilde{N}(f_j, T_j) dW + \int_W (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N}(f_j, T_j) dW + \int_W (\tilde{N} f_i)^T h u^T \tilde{N}(f_j, T_j) dW = \\
 & \int_W \tau Q dW + \int_G n^T D \tilde{N}(f_j, T_j) dG - \int_G n^T h \left( u^T \tilde{N}(f_j, T_j) + Q \right) dG
 \end{aligned}$$

Acá se aprecia que la tercera integral del primer miembro es una clase de difusión artificial, como la incluida por los métodos clásicos, habiendo aquí un fuerte vínculo con los mismos. Juntando la segunda y la tercera integral del primer miembro de la siguiente manera:

$$-129- \quad \int_W (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N}(f_j, T_j) dW + \int_W (\tilde{N} f_i)^T h u^T \tilde{N}(f_j, T_j) dW = \int_W (\tilde{N} f_i)^T D^{\ddot{A}} \tilde{N}(f_j, T_j) dW$$

donde la matriz  $D^{\ddot{A}}$  está compuesta por:

$$-130- \quad D^{\ddot{A}} = D + h u^T = D + D^* = \begin{bmatrix} \hat{e} k_x & 0 & \hat{e} h_x u_x & h_x u_y & \hat{e} k_x + h_x u_x & h_x u_y \\ \hat{e} 0 & k_y \hat{u} + \hat{e} h_y u_x & \hat{e} h_y u_x & h_y u_y \hat{u} = \hat{e} h_y u_x & \hat{e} h_y u_x & k_y + h_y u_y \hat{u} \end{bmatrix}$$

donde  $D^*$  es similar a la vista en la expresión -32- del apartado 1.2.3 donde se trató el esquema de Petrov Galerkin. Reemplazando y trabajando algebraicamente podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 -131- \quad & \int_W \left[ u^T f_i \tilde{N}(f_j, T_j) + (\tilde{N} f_i)^T D^{\ddot{A}} \tilde{N}(f_j, T_j) \right] dW = \\
 & \int_W \tau Q dW + \int_G \left( n^T D^{\ddot{A}} \tilde{N}(f_j, T_j) - n^T h Q \right) dG
 \end{aligned}$$

que es la formulación de elementos finitos utilizando el concepto de residuo desplazado para el problema de convección-difusión estacionario multidimensional con interpolación lineal, y la función de peso igual a la de interpolación.

### 2.2.2. El desplazamiento de la función de peso:

Reemplazando la -119- en la -118- se obtiene la formulación de residuos ponderados para este caso:

$$-132- \quad \int_W u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q \left[ w - h^T \tilde{N} w \right] dW = 0$$

De la misma manera que en el apartado anterior incorporamos la interpolación de elementos finitos dada por:

$$-133- \quad \begin{aligned} \hat{T} &= T_j f_j & j &= 1, 2, \dots, \text{Nod} \\ w &= f_i \end{aligned}$$

y reemplazándola en la -132- resulta:

$$-134- \quad \int_W u^T \tilde{N} (f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j) + Q \left[ f_i - h^T \tilde{N} f_i \right] dW = 0$$

Distribuyendo y trabajando algebraicamente obtenemos lo siguiente:

$$-135- \quad \int_W u^T f_i \tilde{N} (f_j T_j) + f_i \tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j) + f_i Q - h^T \tilde{N} f_i \left( u^T \tilde{N} (f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j) + Q \right) dW = 0$$

Se integra por partes el siguiente término:

$$-136- \quad \int_W \tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j) dW = \int_G n^T D \tilde{N} (f_j T_j) dG - \int_W (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N} (f_j T_j) dW$$

que sustituyéndolo en la -135- resulta:

$$-137- \quad \int_W u^T f_i \tilde{N} (f_j T_j) - (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N} (f_j T_j) + f_i Q - h^T \tilde{N} f_i \left( u^T \tilde{N} (f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j) + Q \right) dW + \int_G n^T D \tilde{N} (f_j T_j) dG = 0$$

y reacomodando a ambos lados del igual es:

$$-138- \quad \int_W \left[ u^T f_i \tilde{N} (f_j T_j) + (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N} (f_j T_j) + h^T \tilde{N} f_i \left( u^T \tilde{N} (f_j T_j) + \tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j) + Q \right) \right] dW = \int_W Q dW + \int_G n^T D \tilde{N} (f_j T_j) dG$$

Nuevamente el término  $\tilde{N}^T D \tilde{N} (f_j T_j)$  permanece de segundo orden, y en caso de utilizar funciones lineales se anulan dentro de cada elemento resultando lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 -139- \quad \int_W u^T f_i \tilde{N}(f_j T_j) dW + \int_W (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N}(f_j T_j) dW + \int_W h^T (\tilde{N} f_i) \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) \right) dW = \\
 \int_W (f_i - h^T \tilde{N} f_i) dW + \int_G \tilde{N}^T D \tilde{N}(f_j T_j) dG
 \end{aligned}$$

donde el término  $h^T (\tilde{N} f_i) \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) \right)$  puede expresarse de la siguiente forma:

$$-140- \quad h^T (\tilde{N} f_i) \left( u^T \tilde{N}(f_j T_j) \right) = - (\tilde{N} f_i)^T h u^T \tilde{N}(f_j T_j)$$

que reemplazándolo en la expresión -139- permite reescribir lo siguiente:

$$-141- \quad \int_W (\tilde{N} f_i)^T D \tilde{N}(f_j T_j) dW - \int_W (\tilde{N} f_i)^T h u^T \tilde{N}(f_j T_j) dW = \int_W (\tilde{N} f_i)^T D^{\hat{A}} \tilde{N}(f_j T_j) dW$$

donde la matriz  $D^{\hat{A}}$  está dada por:

$$-142- \quad D^{\hat{A}} = D - h u^T = \begin{matrix} \hat{e} k_x & 0 & \hat{e} h_x u_x & h_x u_y & \hat{e} k_x - h_x u_x & - h_x u_y \\ \hat{e} 0 & k_y & \hat{e} h_y u_x & h_y u_y & \hat{e} - h_y u_x & k_y - h_y u_y \end{matrix}$$

que es análoga a las matrices vistas en las -32- y -130- con la salvedad del signo en este último caso. Finalmente, luego de efectuar los reemplazos se conduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 -143- \quad \int_W \left[ u^T f_i \tilde{N}(f_j T_j) + (\tilde{N} f_i)^T D^{\hat{A}} \tilde{N}(f_j T_j) \right] dW = \\
 \int_W (f_i - h^T \tilde{N} f_i) dW - \int_G q_n dG
 \end{aligned}$$

que es la formulación de elementos finitos utilizando el concepto de función de peso desplazada para el problema de convección-difusión estacionario multidimensional con funciones de forma lineales.

En la expresión anterior se efectuó el reemplazo  $q_n = - n^T D \tilde{N} T$ , donde  $q_n$  simboliza el flujo normal a la superficie especificado en la frontera de Neumann.

Es fácil ver como ambas formulaciones tienen equivalencias marcadas. En primera instancia se observa que un desplazamiento del residuo en una dirección  $h$  es equivalente a un desplazamiento de la función de peso en la dirección contraria, es decir, según  $-h$  lo que se observa claramente en el signo de la matriz de difusividades en las -130- y -142-. Más adelante se discutirá la equivalencia con los esquemas clásicos y se podrán obtener conclusiones sobre el sentido del desplazamiento de la función de peso.



### **2.2.3. Las condiciones de contorno:**

El tratamiento que el método presenta para las condiciones de contorno está claramente determinado en las expresiones -131- y -143- donde el MDD permite, en forma natural, establecer las condiciones de contorno estabilizadas. Por el contrario, se vio en el desarrollo del MCF, más precisamente en la expresión -73- que el balance sobre los elementos del contorno se obtiene de considerar una longitud especial  $L/2$ , lo que no resulta intuitivo.

La diferencia entre las expresiones -131- y -143- se debe a que en la integración por partes de la formulación del residuo desplazado se traslada el término de la difusividad artificial a la frontera, siendo un término que estabiliza las condiciones de Neumann, por el contrario, la forma dada en la formulación de la función de peso desplazada no incorpora términos de estabilización sobre las condiciones de Neumann.

## **2.3. Equivalencias del método:**

A continuación se mostrará la equivalencia entre el MDD y los métodos como son el MCF y el SUPG, elegidos de manera de establecer el paralelismo con un método desarrollado últimamente (MCF), y con el método más clásico y más utilizado (SUPG). Para todos los casos se hará referencia a las formulaciones finales para mayor claridad.

### **2.3.1. Equivalencia con el MCF:**

Obsérvese las expresiones -79-, para la formulación de residuos ponderados dada por el MCF, y la -131- que arroja el MDD cuando el desplazamiento se realiza sobre el residuo solamente. Es evidente la similitud directa entre ambas, tanto en el problema planteado sobre como en el tratamiento de las condiciones de contorno sobre . La pequeña diferencia resulta ser una constante que modifica el desplazamiento  $h$  dado en el MDD, que pasa a ser  $h/2$  en el MCF. Podemos concluir de forma inmediata que ambos métodos son equivalentes, es más, para que haya total equivalencia el desplazamiento realizado en el MDD debe ser de la mitad que lo planteado en el MCF, es decir:

$$\text{-144-} \quad h^{\text{MDD}} = \frac{h^{\text{MCF}}}{2}$$

La comparación entre las matrices de difusividad artificial que ambos métodos incorporan se realiza a continuación, donde se observa lo antedicho:

$$\begin{aligned}
 D^{*MCF} &= \frac{hu^T}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{e}_x u & h_x v \\ \hat{e}_y u & h_y v \end{pmatrix} \\
 D^{*MDD} &= hu^T = \begin{pmatrix} \hat{e}_x u & h_x v \\ \hat{e}_y u & h_y v \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{-145-}$$

Esta equivalencia puede observarse también en las expresiones -74- y -105-. En éstas, la forma general es la misma, sin embargo el concepto que encierra a ambas es diferente. Una discusión sobre esto fue presentada en el apartado 2.4.

Finalmente, el MCF puede reinterpretarse como un método de dominios desplazados

donde el residuo se evalúa en  $\frac{\partial}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x}$ .

### 2.3.2. Equivalencia con el esquema de Petrov-Galerkin:

Obsérvese las expresiones -31-, para la formulación del SUPG, y la -143- para el MDD cuando el desplazamiento se realiza sobre la función de peso solamente. Ambas muestran el agregado de un término de difusión artificial cuyo origen es conceptualmente diferente. La diferencia en los mencionados términos es el signo de la matriz de difusividades que el esquema agrega, a continuación se presentan las respectivas expresiones para una mejor visualización:

$$\begin{aligned}
 D^{*SUPG} &= \frac{aL}{2|u|} uu^T = \frac{aL}{2|u|} \begin{pmatrix} \hat{e}_x^2 & \hat{e}_x \hat{e}_y \\ \hat{e}_x \hat{e}_y & \hat{e}_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \\
 D^{*MDD} &= -hu^T = - \begin{pmatrix} \hat{e}_x u & h_x v \\ \hat{e}_y u & h_y v \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{-146-}$$

De la -146- se desprende que la equivalencia entre el MDD y el SUPG requiere de un desplazamiento en sentido opuesto, para la función de forma, que el realizado en el caso del residuo. Esto significa que el SUPG puede reinterpretarse, al igual que el MCF, como un

método de dominios desplazados donde la función de peso se evalúa en  $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{aL}{2|u|} \frac{\partial}{\partial x}$ .

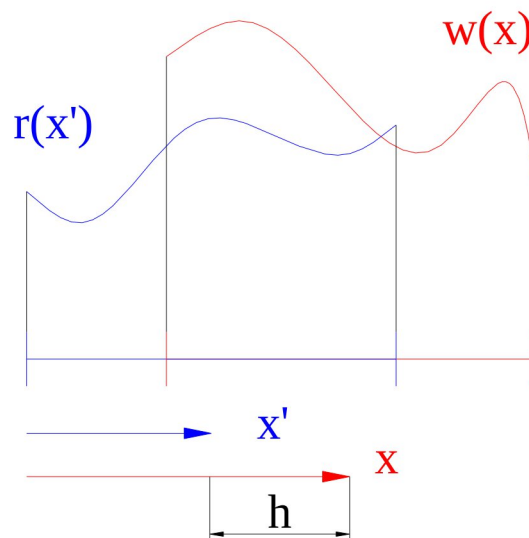
## 2.4. Discusión sobre el MDD:

Un nuevo esquema de resolución de problemas a través del método de elementos finitos fue presentado en este capítulo. El concepto incorporado permite desligarse de cualquier análisis a priori sobre qué es necesario para obtener un esquema estabilizado, sobre todo en el contexto de los problemas de transporte, puesto que el origen de dicho esquema se obtiene naturalmente con el desplazamiento del dominio.

Las simplificaciones realizadas permiten reducir el MDD a cualquier formulación existente como se analizó en los apartados 2.3.1 y 2.3.2, además de poder reinterpretar a estos métodos clásicos como variaciones del método general que constituye el MDD. En el análisis realizado se manifiesta una idea que surge en forma intuitiva, y es la completa analogía entre las formulaciones a partir del residuo desplazado en un sentido y la correspondiente formulación partiendo del desplazamiento de la función de forma en sentido opuesto, es decir:

$$\text{-147-} \quad \mathbf{F} [r(x - h)] \circ \mathbf{F} [w(x + h)]$$

donde  $\mathbf{F}$  simboliza la formulación de MDD aplicada. La -147- expresa la equivalencia explicada que se complementa con la siguiente figura:



donde un simple cambio de coordenadas da como resultado lo siguiente:

$$\text{-148-} \quad \begin{aligned} r(x') &= r(x - h) \\ w(x) &= w(x' + h) \end{aligned}$$

que muestra el paralelismo planteado. Además el Jacobiano de transformación es la unidad como se evidencia claramente.

La generalidad del método puede establecerse debido a la posibilidad de abordar cualquier tipo de problemas sin limitaciones; de la misma manera que un esquema tipo

Galerkin se aplica a un problema, un esquema de MDD puede hacer lo propio, sin importar si se trata de una ecuación ó de un sistema de ecuaciones, ó, si el problema es estacionario ó transitorio.

Un capítulo aparte merecen los parámetros  $h$  y  $\tau$  que en la expresión -113- representan los desplazamientos en el campo espacial y en el parámetro temporal. La utilización de parámetros determinados a priori es válida en el MDD, de hecho el SUPG pudo reinterpretarse como una técnica de dominios desplazados donde  $h$  estaba explicitado. Sin embargo una estimación en forma óptima de los mismos se intenta, a continuación, de manera de abandonar la idea de utilizar parámetros predeterminados. Este procedimiento es presentado en el capítulo siguiente, más precisamente en el apartado 3.2.

## Capítulo 3:

### 3.1. Desarrollo del MDD en casos unidimensionales:

Para desarrollar el problema de convección-difusión unidimensional se optó por una formulación del tipo de la -143- con la equivalencia dada por la -146-, con un desplazamiento para la función de peso en sentido opuesto al planteado por la primera. Esto es viable debido a lo explicado en el apartado 2.4.

Entonces, la expresión utilizada es la siguiente:

$$-149- \int_W \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) w \frac{\partial}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} dW = 0$$

y luego de desarrollar e integrar por partes se llega a la forma débil (ver apartado Ap.III en el apéndice):

$$-150- \int_W \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) w \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) f_i \frac{df_j}{dx} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dW = \int_G q_n dG$$

que constituye la ecuación de equilibrio para este problema, y resulta un sistema de ecuaciones algebraicas dado por:

$$-151- K_{ij} T_j = f_i$$

### 3.2. Procedimiento para la estimación de los parámetros de estabilización:

Con el fin de estimar el parámetro de estabilización que constituye el desplazamiento “h” se hace necesaria una ecuación que los determine con un criterio establecido. Para cumplir con esta premisa se propone el siguiente funcional a minimizar:

$$-152- \min V_h \int_W \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) w \frac{\partial}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w dW$$

donde  $r$  es el residuo en la ecuación diferencial que se define más adelante, lo anterior no implica otra cosa que la minimización de dicho residuo desplazado en una cantidad igual a  $h$ . La minimización de la -152- en el sentido de cuadrados mínimos con respecto al parámetro elemental  $h^e$  arroja lo siguiente:

$$-153- \quad \int_{W_e} r^d \frac{dr^d}{dh^e} dW = 0$$

$$r^d = r - \frac{h^e}{2} \frac{dr}{dx}$$

donde  $r^d$  es el residuo desplazado que resulta del desarrollo de Taylor de primer orden para  $r = r(x) - \frac{h^e}{2} \frac{dr}{dx}$  como se define en la expresión correspondiente y  $h^e$  es el parámetro de estabilización ó desplazamiento del elemento “e”. Es fácil ver cómo se desacoplan las ecuaciones de la -153- generando una ecuación por elemento y resultando integrales dentro de los mismos, producto de que sólo existirá derivada respecto de  $h^e$  dentro del elemento “e”.

Entonces, la expresión que se deriva es la que sigue:

$$-154- \quad \int_{W_e} \left( r - \frac{h^e}{2} \frac{dr}{dx} \right) \frac{dr}{dh^e} dW = 0$$

y sabiendo que la única función que anula  $r$  es la exacta, y que ésta no pertenece al espacio de las funciones de elementos finitos (variacionalmente admisibles) se deduce que  $\frac{dr}{dx} \neq 0$  siempre, resultando lo siguiente:

$$-155- \quad \int_{W_e} \left( r - \frac{h^e}{2} \frac{dr}{dx} \right) \frac{dr}{dh^e} dW = 0$$

que es análogo a plantear que el residuo desplazado sea nulo en promedio dentro de cada elemento, siendo un puente que relaciona el método propuesto con el desarrollado para el MCF en el apartado 1.4.3. La -155- puede reformularse de la siguiente manera:

$$-156- \quad \int_{W_e} r dW - \frac{h^e}{2} \int_{W_e} \frac{dr}{dx} dW = 0$$

y definiendo a las integrales de la siguiente forma, para mayor claridad:

$$-157- \quad \int_{W_e} r dW = U^{(e)} W_e$$

resulta, luego de despejar el parámetro  $h^e$ , lo siguiente:

$$\text{-158-} \quad h^e = 2 \left( \frac{r^{(e)}}{\left( \frac{dr}{dx} \right)^{(e)}} \right)$$

que constituye la expresión que permite estimar el parámetro de estabilización para cada elemento en particular. Cabe aclarar que esta expresión resulta de linealizar la -153- en la minimización.

### **3.2.1. Aplicación a la ecuación de convección-difusión:**

Aplicamos ahora la expresión -158- al problema de convección-difusión. En este caso el residuo resulta:

$$\begin{aligned} \text{-159-} \quad r &= -u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + Q \\ \frac{dr}{dx} &= -u \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + k \frac{d^3\hat{T}}{dx^3} + \frac{dQ}{dx} \end{aligned}$$

donde  $\hat{T}$  es la solución aproximada obtenida a partir de un esquema numérico. Una interpolación lineal para el campo de temperaturas provocaría valores nulos para la derivada del residuo, lo que generaría un denominador nulo para la expresión -158-. Para darle sentido a esta expresión, es necesario que los elementos constitutivos de la misma sean parámetros representativos del problema, en este caso se hace necesario un valor de derivada segunda de temperaturas. En base a esta condición es necesaria la inclusión de una nueva variable en el problema que no es otra que la derivada primera del campo de temperaturas. Esto incluye un nuevo concepto fundamental para el correcto condicionamiento del cálculo de  $h^e$ , lo que implica obtener a partir de un campo discontinuo de derivadas (debido a la interpolación lineal de la temperatura), uno continuo entre elementos, que es análogo a un aumento en el orden de interpolación del mismo. Este procedimiento se explica con detalles en el apartado 3.4, donde se completa el concepto de la recuperación de gradientes.

Supongamos que se obtuvo de alguna forma el residuo y el gradiente del residuo en base a la explicación del párrafo anterior:

$$\begin{aligned} \text{-160-} \quad r &= -u\hat{D} + k \frac{d\hat{D}}{dx} + Q \\ \frac{dr}{dx} &= -u \frac{d\hat{D}}{dx} + k \frac{d^2\hat{D}}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} \end{aligned}$$

donde  $\hat{D}$  es el campo de gradientes recuperado a partir del campo  $\hat{T}$ , con la misma interpolación que la solución  $\hat{T}$  tiene en las expresiones -150- y -159-. Esto significa que el término de derivada tercera se anula, permaneciendo un valor constante dentro de cada elemento para la derivada segunda.

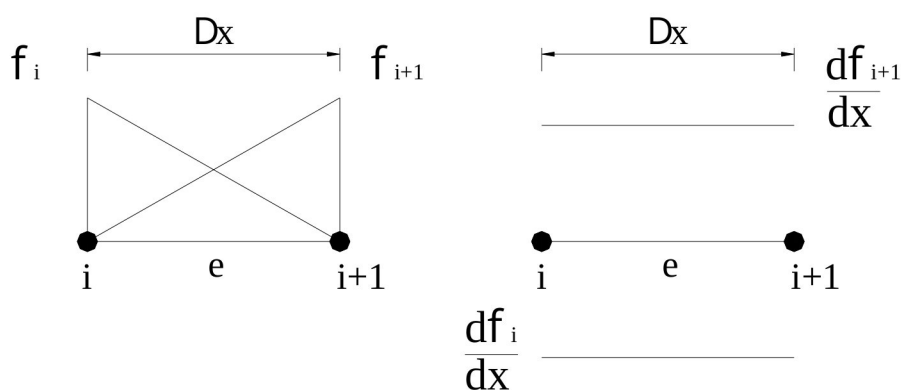
A partir de las ecuaciones -151- y -158-, y teniendo en cuenta el origen de la -160-, se aprecia que el sistema es altamente no lineal. La resolución del sistema completo se explica en el apartado 3.5.1.

### 3.2.2. Un caso simple:

Considerando un caso unidimensional sin fuente, y partiendo de la ecuación -158- para el parámetro  $h$ , es posible encontrar una expresión que relacione a dicho parámetro con los valores nodales de la incógnita  $\hat{D}$  evaluando en forma elemental, de acuerdo a la definición presentada en la -157-, las expresiones dadas en -160-. Escribimos esta última de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 -161- \quad r &= -u(D_i f_i + D_{i+1} f_{i+1}) + k_c \frac{\partial}{\partial x} (D_i \frac{df_i}{dx} + D_{i+1} \frac{df_{i+1}}{dx}) \\
 \frac{dr}{dx} &= -u \frac{\partial}{\partial x} (D_i \frac{df_i}{dx} + D_{i+1} \frac{df_{i+1}}{dx})
 \end{aligned}$$

donde el subíndice “i” indica el nodo izquierdo del elemento “e”, según lo indicado en la figura de abajo:



donde las funciones de interpolación lineales son de la forma:

$$\begin{aligned}
 -162- \quad f_i &= 1 - \frac{x}{Dx} & \frac{df_i}{dx} &= -\frac{1}{Dx} \\
 f_{i+1} &= \frac{x}{Dx} & \frac{df_{i+1}}{dx} &= \frac{1}{Dx}
 \end{aligned}$$



con  $\eta$  como coordenada local dentro de cada elemento, y  $x$  como longitud del elemento. Integrando la -161- entre 0 y  $\Delta x$  se obtiene lo siguiente:

$$-163- \quad r^{(e)} = \frac{\alpha}{\epsilon} u \frac{Dx}{2} - k \frac{\ddot{u}}{\epsilon} D_i + \frac{\alpha}{\epsilon} u \frac{Dx}{2} + k \frac{\ddot{u}}{\epsilon} D_{i+1}$$

$$\frac{\alpha}{\epsilon} \frac{dr}{dx} \frac{\ddot{u}^{(e)}}{\epsilon} = -u(D_{i+1} - D_i)$$

Reemplazando la -163- en la -158-, luego de simple álgebra se obtiene la siguiente ecuación:

$$-164- \quad h^e = Dx \frac{\epsilon D_{i+1} + D_i}{\epsilon D_{i+1} - D_i} - \frac{1}{Pe} \frac{\dot{u}}{\dot{u}}$$

con  $Pe = uDx / 2k$ . Esta forma es equivalente a la presentada en [16] con la diferencia de estar presentada en función de las temperaturas nodales.

Ahora, es sencillo mostrar cómo la expresión -164- es consistente con el valor del parámetro de estabilización usado en la práctica. Para esto, recordando la solución exacta del problema unidimensional sin fuente y con condiciones de Dirichlet en ambos contornos, se obtienen los valores de derivadas exactos en  $i$  e  $i+1$  que adoptan la siguiente forma:

$$-165- \quad T = \frac{e^{\frac{ux_i}{k}} - 1}{e^{\frac{uL}{k}} - 1} \quad D_i = \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\ddot{u}}{\epsilon} \frac{e^{\frac{ux_i}{k}}}{e^{\frac{uL}{k}} - 1} \quad ; \quad D_{i+1} = \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\ddot{u}}{\epsilon} \frac{e^{\frac{u(x_i+Dx)}{k}}}{e^{\frac{uL}{k}} - 1}$$

donde simplificando puede escribirse:

$$-166- \quad D_{i+1} = D_i e^{\frac{uDx}{k}} = D_i e^{2Pe}$$

Reemplazando la -166- en la -164-, y luego de un poco de trabajo algebraico, se obtiene el valor del parámetro de estabilización óptimo visto en la expresión -14- del apartado 1.1.3, y que es:

$$-167- \quad h^e = Dx \frac{\alpha}{\epsilon} \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \frac{\dot{u}}{\dot{u}} = Dx a_{op}$$

que es el parámetro que permite obtener soluciones nodales exactas, como se ha explicado anteriormente.

El procedimiento para obtener una expresión de la forma de la -167- evidencia notoriamente, la necesidad de una manera más certera de evaluar las derivadas del campo solución, para, de esta manera, asegurar la obtención de valores de  $h^e$  acordes a cada problema.

### 3.3. Condicionamiento de los parámetros de estabilización:

Algunas condiciones son necesarias sobre los valores de los desplazamientos  $h$ , que se deben a dos razones que se detallan a continuación.

Una es el funcional propuesto en la -152-, que posee gran cantidad de mínimos locales, lo que hace inestable y sensible al algoritmo iterativo. Para sortear este inconveniente, y ser coherentes con una formulación de pequeños desplazamientos de los dominios, es necesario un intervalo de definición que acote los valores de los desplazamientos, el mismo es el siguiente:

$$-168- \quad 0 \leq h^e \leq D_x$$

donde  $x$  es la longitud de cada elemento en la malla.

La otra, es producto de los errores numéricos existentes en el cálculo, ya que cuando los valores que toma el campo solución entran dentro del orden de los dichos errores, pierde exactitud dicho cálculo, ya que la expresión -158- resulta una indeterminación producto de la división de dos números que tienden a cero, en donde los errores numéricos le dan un carácter aleatorio. Para evitar este inconveniente, en cada caso, se investiga una norma para evaluar el orden del denominador de la -158- (de la derivada del residuo), estableciendo un  $h^e$  que se incorpora a través de la siguiente expresión condicional:

$$-169- \quad \begin{aligned} &\text{si } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial \ddot{r}^{(e)}}{\partial x} \leq \epsilon \quad h^e = 0 \\ &\text{si } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial \ddot{r}^{(e)}}{\partial x} > \epsilon \quad h^e = 2 \left( \frac{r^{(e)}}{\left| \frac{dr}{dx} \right|} \right)^{\epsilon} \end{aligned}$$

Para establecer un orden para los parámetros del problema se puede resolver en forma inicial con un esquema de Galerkin convencional para obtener el orden de la solución y el del gradiente, pudiendo establecer lo siguiente:

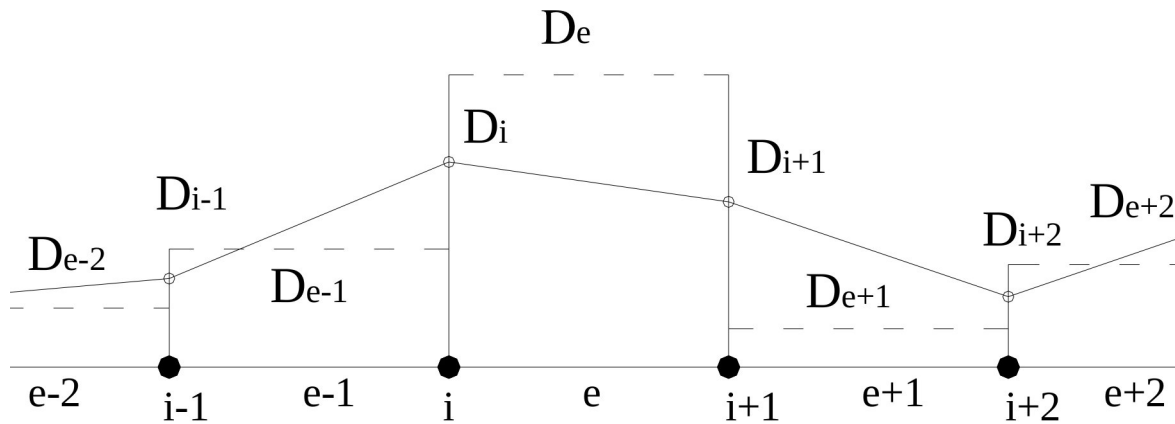
$$-170- \quad O \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial \ddot{r}^{(e)}}{\partial x} \right) = \left| \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{DT}{L^2} + k \frac{DT}{L^3} + DQ \frac{\partial \ddot{r}^{(e)}}{\partial x} \right) \right|$$

donde  $T$  es la máxima diferencia entre valores del campo solución, haciendo lo mismo para la fuente, y  $L$  es la longitud del dominio completo donde se resuelve el problema.

### 3.4. Recuperación de gradientes:

El objetivo de establecer un método de recuperación de derivadas surge a partir de la necesidad de una correcta evaluación de las expresiones -160- para los residuos que luego serán la base del cálculo de los parámetros de estabilización.

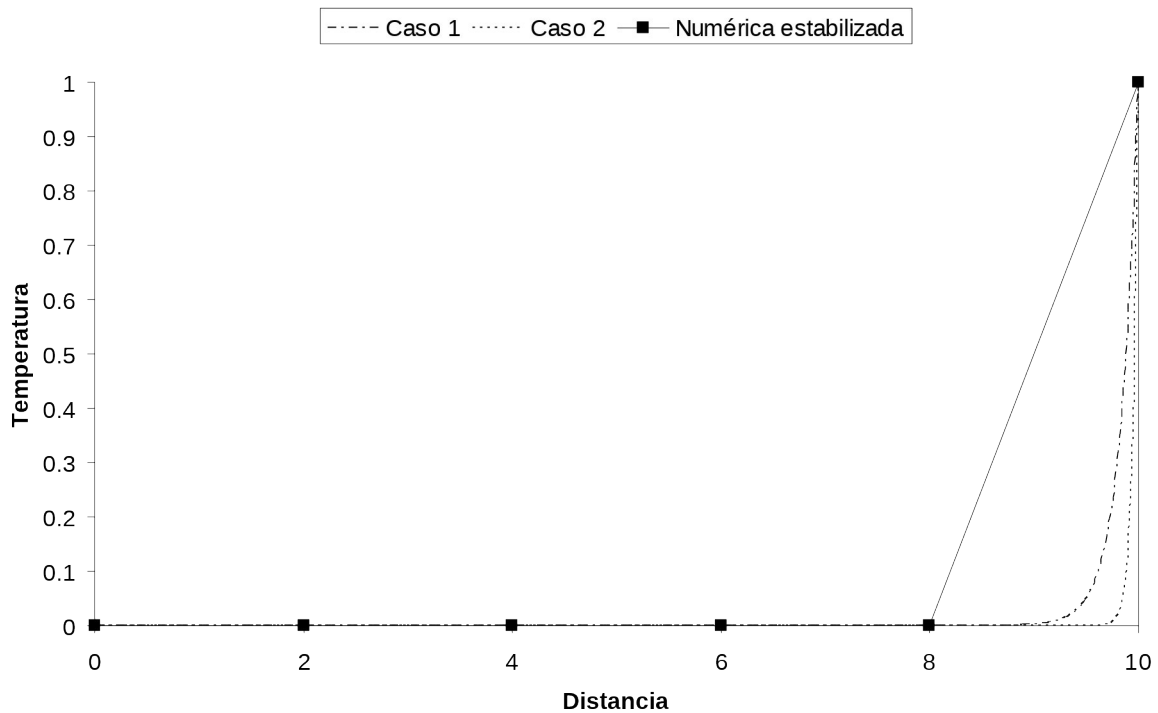
La idea de recuperación de gradientes incluye el siguiente concepto:



que puede formalizarse matemáticamente de diversas maneras como se realiza en [38]. Se ha efectuado la distinción visual entre los campos continuo (lleno) y discontinuo (discontinuo) para una mejor apreciación. Sin embargo en problemas de advección dominante la existencia de capas límites hace que las formas convencionales de recuperación de derivadas no sean totalmente apropiadas. Este inconveniente y la solución propuesta se explican en los apartados subsiguientes.

#### 3.4.1. El problema de la capa límite:

Al realizar la discretización de un dominio, las longitudes elementales son determinantes para capturar las variaciones de la solución. Este es el inconveniente que se hace presente cuando un problema posee capas límites, debido a que las variaciones abruptas no son, en general, bien reproducidas por una malla de elementos finitos cuando la densidad de elementos es insuficiente. Esta dificultad adquiere cada vez más importancia a medida que el espesor de la capa límite se hace cada vez menor que la longitud del elemento dentro del cual se encuentra. El siguiente gráfico establece un ejemplo claro de este problema:



donde se comparan la solución exacta con una solución arrojada por cualquier esquema numérico estabilizado. Nótese como la capa límite se encuentra completamente dentro del último elemento. Además, en base a la solución que entrega el esquema numérico, la máxima derivada que se puede obtener para el último nodo de la malla es la pendiente de la recta, que es la siguiente:

$$\text{-171-} \quad D_{10} = \frac{T_{10} - T_8}{D_x} \gg \frac{T_D}{D_x}$$

donde el subíndice indica la coordenada en la malla,  $T_{10}$  es la temperatura de Dirichlet  $T_D$  y  $T_8 \approx 0$  a medida que el  $Pe$  aumenta. La -171- entrega un valor muy diferente al real dado por la solución exacta, que es:

$$\text{-172-} \quad D_{10}^{ex} = \frac{T_D}{D_x} 2Pe \frac{e^{2Pe}}{e^{2Pe} - 1}$$

donde  $\Delta x$  es la longitud de cada elemento. La inconsistencia en el cálculo del gradiente en el último nodo a través de un esquema numérico se acrecienta a medida que el  $Pe$  aumenta su valor, debido a que la capa límite se adentra cada vez más en el último elemento. Por otro lado, la resolución de la malla propuesta no permite aumentar el valor del gradiente dado por la -171- más que  $T_D / \Delta x$  para cualquier valor de  $Pe$ ; la diferencia entre las expresiones se acentúa para  $Pe > 1$  debido al carácter exponencial del coeficiente de la -172-.

En el caso 1 evaluado en la figura anterior los datos son los siguientes:

$$L = 10 \quad x = 2 \quad Pe = 3 \quad T_D = 1$$

y se obtienen las derivadas definidas anteriormente:

$$\text{-173-} \quad \begin{aligned} D_{10} &= 1 \\ D_{10}^{ex} &= 3 \end{aligned}$$

En el caso 2 los datos son los siguientes:

$$L = 10 \quad x = 2 \quad Pe = 10 \quad T_D = 1$$

y se obtienen las derivadas definidas anteriormente:

$$\text{-174-} \quad \begin{aligned} D_{10} &= 1 \\ D_{10}^{ex} &= 10 \end{aligned}$$

Concluyéndose que el orden del gradiente en presencia de capas límites se ve reducido notablemente cuando el mismo es obtenido a partir del esquema numérico. Por lo tanto es de vital importancia plantear un método que entregue valores de gradientes del orden de los existentes en dichas zonas. Para esto se plantea un tipo de proyección de derivadas para las áreas donde la solución varía suavemente y otra clase de proyección para los elementos que contengan capas límites, que llamaremos “elementos enriquecidos”, como se ve a continuación.

### 3.4.2. Proyección de derivadas:

Para realizar la idea planteada al comienzo del apartado 3.4 en cuanto a la recuperación de un campo de derivadas nodales a partir del campo de temperaturas, se analiza la relación entre ambas a través de la siguiente ecuación diferencial:

$$\text{-175-} \quad D = \frac{dT}{dx}$$

que en el sentido de residuo en la ecuación diferencial se escribe de la siguiente forma:

$$\text{-176-} \quad r = \hat{D} - \frac{dT}{dx}$$

y ponderándola con una función de peso  $\phi_i$  igual a la utilizada en el esquema térmico resulta la formulación de residuos ponderados para la ecuación de derivadas:

$$\text{-177-} \quad \int_W \phi_i \left( \hat{D} - \frac{dT}{dx} \right) dW = 0$$

y escribiendo la interpolación lineal para las derivadas y para las temperaturas resulta:

$$-178- \quad \hat{D} = \hat{D}_j f_j$$

$$\frac{dT}{dx} = T_j \frac{df_j}{dx}$$

Reemplazando la -178- en la -177- se obtiene la expresión que permite calcular el campo de derivadas nodales:

$$-179- \quad \int_W \hat{D}_j f_j - \frac{d(T_j f_j)}{dx} \frac{df_j}{\hat{\phi}} dW = 0$$

que trabajando algebraicamente, resulta lo siguiente:

$$-180- \quad \int_W \hat{D}_j f_j dW - \int_W \frac{df_j}{dx} dW T_j = 0$$

Se reconoce al coeficiente que acompaña a la incógnita  $\hat{D}_j$  como la matriz de masas, mientras que la matriz que acompaña a  $T_j$  es asimétrica.

Lo realizado en este apartado es una proyección tipo  $L^2$  (funciones de cuadrado integrable) del campo de las derivadas sobre el espacio de las interpolantes lineales  $C^0$ .

### 3.4.3. Elementos enriquecidos:

De acuerdo a las dificultades encontradas en presencia de capas límites, como se mostró en el apartado 3.4.1, es necesario implementar un cálculo que permita establecer valores de derivadas del orden de los existentes.

Con este fin se propone una interpolación exponencial dentro de aquellos elementos donde exista capa límite, a partir de la siguiente expresión:

$$-181- \quad T(x) = T_i + (T_{i+1} - T_i) \frac{e^{\text{sgn}(u) \frac{x}{Dx}} - 1}{e^{|-1} - 1} \quad 0 \leq x \leq Dx$$

donde  $x$  es la coordenada local,  $\text{sgn}(u)$  introduce el sentido del campo de velocidades a partir del eje de coordenadas propuesto,  $T_i$  es la temperatura del nodo izquierdo del elemento, y lo propio para  $T_{i+1}$ ,  $|$  es un coeficiente que modifica el carácter de la exponencial, este valor se obtiene según lo explicado más abajo.

El origen de la -181- es una solución a un problema unidimensional sin fuente con las siguientes condiciones de Dirichlet:

$$\begin{aligned} -182- \quad T_i &= T_0 \\ T_{i+1} &= T_{Dx} \end{aligned}$$

los cuáles son valores conocidos dentro de cada elemento y son los valores nodales.

Para obtener una expresión de cálculo para  $\bar{D}$  se deriva dos veces la expresión -181- respecto de  $x$  resultando:

$$-183- \quad \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{(T_{i+1} - T_i)}{Dx^2} \left| \frac{e^{\frac{x}{Dx}}}{e^1 - 1} \right|$$

Integrando la -183-, con lo que se obtiene el valor medio de la derivada segunda en el elemento, se llega a:

$$-184- \quad \overline{\frac{d^2T}{dx^2}} = \frac{1}{Dx} \int_0^{Dx} \frac{(T_{i+1} - T_i)}{Dx^2} \left| \frac{e^{\frac{x}{Dx}}}{e^1 - 1} \right| dx = \frac{(T_{i+1} - T_i)}{Dx^2} \left| \frac{e^1 - 1}{1} \right|$$

Por otro lado, es fácil deducir que el valor medio de la derivada segunda, para una interpolación lineal del campo de derivadas primeras, puede expresarse como sigue:

$$-185- \quad \overline{\frac{d^2T}{dx^2}} = \frac{D_{i+1} - D_i}{Dx}$$

e igualando ambas expresiones resulta la ecuación para el cálculo de  $\bar{D}$ :

$$-186- \quad \bar{D} = Dx \frac{D_{i+1} - D_i}{T_{i+1} - T_i} \left| \frac{e^1 - 1}{1} \right|$$

La dependencia de  $\bar{D}$  con los valores nodales de las temperaturas y de las derivadas hacen que el sistema adquiera mayor carácter no lineal del que poseía en principio.

A continuación se deriva la -181- para obtener las ecuaciones que se ensamblan en el sistema completo:

$$-187- \quad \frac{dT}{dx} = \frac{(T_{i+1} - T_i)}{Dx} \left| \frac{e^{\frac{x}{Dx}}}{e^1 - 1} \right|$$

y especializando en  $x=0$  y  $x=Dx$  resulta, respectivamente:

$$-188- \quad \begin{aligned} D_i &= \frac{dT}{dx} \Big|_0 = \frac{(T_{i+1} - T_i)}{Dx} \left| \frac{1}{e^1 - 1} \right| \\ D_{i+1} &= \frac{dT}{dx} \Big|_{Dx} = \frac{(T_{i+1} - T_i)}{Dx} \left| \frac{e^1}{e^1 - 1} \right| \end{aligned}$$

Es necesario aclarar que este procedimiento se realiza solamente en aquellos elementos donde se hacen presentes capas límites.

### 3.5. Implementación del MDD en casos unidimensionales:

A continuación se incluyen los apartados donde se explica el funcionamiento del método cuando es directamente aplicado al caso unidimensional de convección-difusión. Además, contienen las ecuaciones utilizadas para la resolución y la forma en la que se encara la no linealidad del algoritmo. También se explican las características del código desarrollado y las del framework de elementos finitos utilizado.

Los resultados obtenidos para los casos resueltos se incluyen en el capítulo 4.

#### 3.5.1. La resolución del sistema de ecuaciones completo:

La resolución del sistema completo implica los siguientes aspectos:

Resolución del campo de temperaturas, a partir de la -150-.

Recuperación de gradientes, a partir de las -180- y -188-.

Cálculo del coeficiente exponencial en los elementos enriquecidos, a partir de la -186-.

Estimación de los parámetros de estabilización, a partir de las -158- y -160-.

Para analizar las características que el sistema completo posee, reiteramos las ecuaciones a continuación:

$$(a) \quad \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{u}{2} \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) \frac{\partial f_j}{\partial x} dx + \frac{h}{2} \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial x} dx = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{u}{2} \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) \frac{\partial f_j}{\partial x} dx + \int_{\Omega} \frac{h}{2} \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial x} dx - \int_{\Omega} q_n dG$$

$$(b) \quad \int_{\Omega} f_j dW_j - \int_{\Omega} \frac{\partial f_j}{\partial x} dW_j = 0$$

$$(c) \quad D_i = \frac{\alpha T}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{(T_{i+1} - T_i)}{Dx} \frac{1}{e^l - 1} \quad D_{i+1} = \frac{\alpha T}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{(T_{i+1} - T_i)}{Dx} \frac{e^l}{e^l - 1} \quad \text{capas límites}$$

$$(d) \quad l = Dx \frac{D_{i+1} - D_i}{T_{i+1} - T_i}$$

$$(e) \quad h^e = 2 \left( \frac{r^{(e)}}{dr/dx} \right)^e \quad r = -u\hat{D} + k \frac{d\hat{D}}{dx} + Q \quad \frac{dr}{dx} = -u \frac{d\hat{D}}{dx} + k \frac{d^2\hat{D}}{dx^2} + \frac{dQ}{dx}$$



Para resolver el sistema **-189-(a)** - **-189-(e)** se formula el siguiente esquema iterativo, el mismo consiste en series de reemplazos sucesivos tipo Picard, de la forma expresada en el siguiente procedimiento:

- 1) Resolver la **-189-(a)** acoplada con las **-189-(b)** y **-189-(c)** suponiendo valores iniciales para los parámetros de estabilización  $h^e$ ,  $h^{e(0)}$ , y para los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ . Pudiendo ser, dichos valores, nulos en la primera iteración.
- 2) Resolver la **-189-(d)** a partir de los valores obtenidos del paso anterior.
- 3) Repetir los pasos 1) y 2) hasta lograr la convergencia del conjunto de incógnitas en base a una norma preestablecida.
- 4) Resolver la **-189-(e)** con los valores convergidos obtenidos de los pasos anteriores.
- 5) Repetir los pasos 1) a 4) hasta lograr la convergencia de todos los grados de libertad del sistema.

En este procedimiento, las condiciones de convergencia se imponen sobre los grados de libertad del problema, que para un elemento general, son los siguientes:

Dos grados de libertad de temperaturas ( $T_i - T_{i+1}$ ).

Dos grados de libertad de derivadas ( $D_i - D_{i+1}$ ).

Un grado de libertad del parámetro de estabilización ( $h^e$ ).

En cuanto al procedimiento propiamente aplicado en un framework de elementos finitos, se forma el siguiente esquema de cálculo, basado en la posibilidad de establecer módulos de cálculo denominados SubSteps:

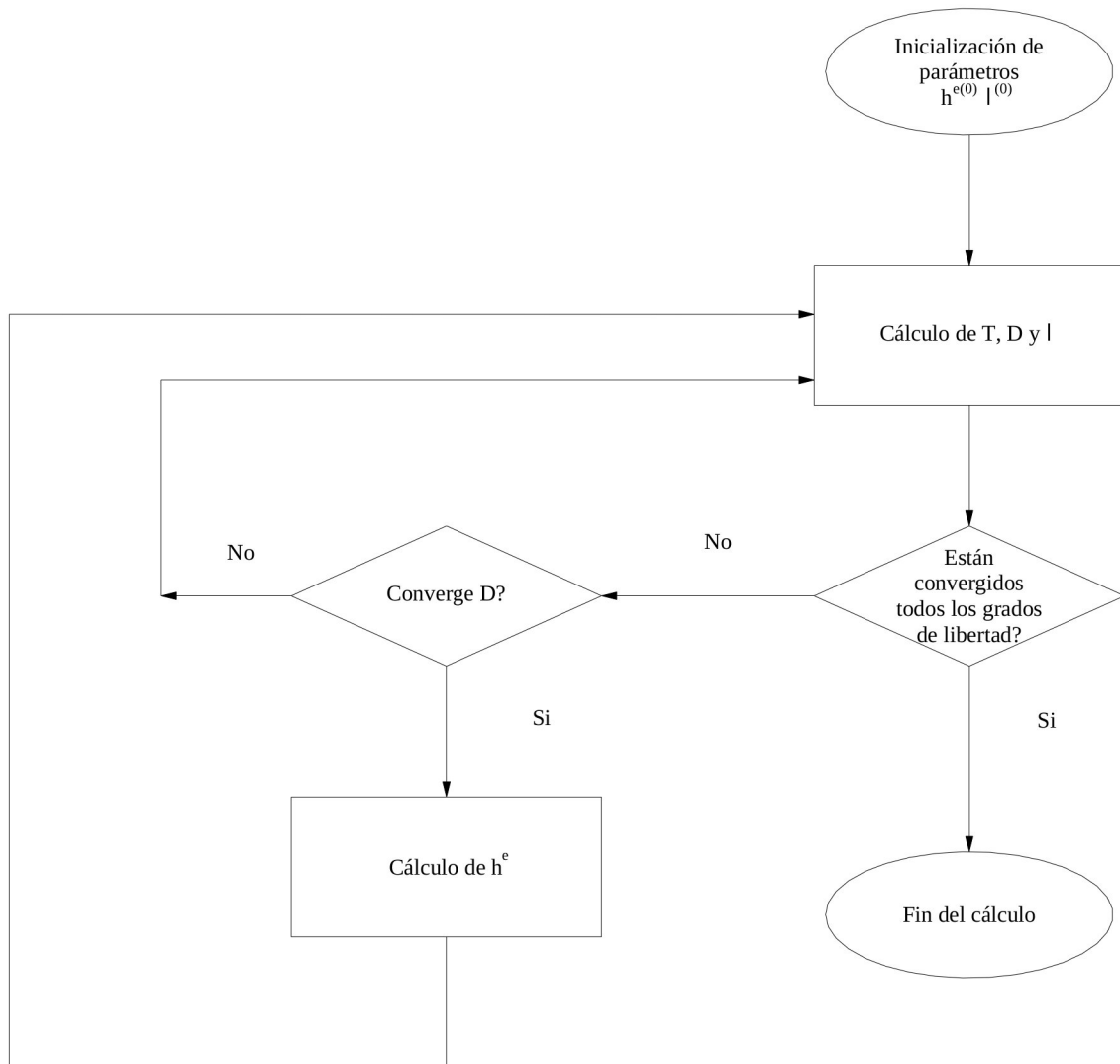
Primer SubStep: realización de los pasos 1), 2) y 3)

Segundo SubStep: realización del paso 4)

Se ve que el primer SubStep constituye un esquema iterativo, mientras que el segundo SubStep es lineal. El control sobre el sistema completo es manejado por fuera de estos bloques de cálculo, en lo que se denomina el StepContinuationControl, siendo el esqueleto del framework utilizado.

Con el fin de clarificar la resolución del sistema, se presenta un diagrama de flujo que esquematiza el procedimiento anteriormente explicado, identificando cada etapa de cálculo y las etapas de análisis de convergencia.

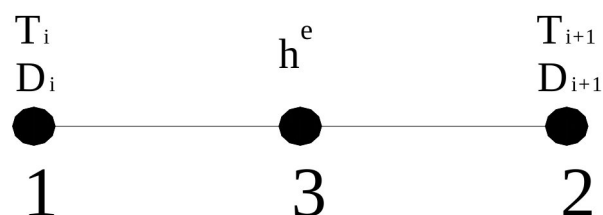
Las normas de convergencia utilizadas para la evaluación de los procesos iterativos se obtiene de un análisis del problema, con las mismas herramientas que se analiza el orden del denominador de la ecuación **-158-**, luego se confecciona la constante frente a la cual se analiza dicha convergencia.



### 3.5.2. Los aportes elementales:

Con el fin de mostrar el aporte matricial hecho por un elemento genérico y la forma final de las matrices elementales, se detallan los resultados que se obtienen de realizar las integrales elementales de las ecuaciones del sistema **-189-**.

Es importante recalcar la correspondencia de los grados de libertad, y su ubicación nodal dentro de un elemento, para lo cual nos referimos a la siguiente figura:



donde la numeración indica la ubicación, a nivel elemental, de los nodos. En base a esto, se conforma la siguiente matriz genérica:

$$\begin{matrix}
 & T_1 & D_1 & T_2 & D_2 & h^e \\
 \text{-190-} & A^S = \begin{matrix} \hat{e} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{e} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hat{e} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{e} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hat{e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} & \begin{matrix} T_1 \\ D_1 \\ T_2 \\ D_2 \\ h^e \end{matrix}
 \end{matrix}$$

que es la matriz simbólica que un elemento aporta a la matriz global. Las filas y columnas de ésta se organizan de acuerdo a la disposición dada en la figura anterior<sup>5</sup>.

Realizando las integrales de **-189-(a)** se obtiene lo siguiente:

$$\text{-191-} \quad \frac{k}{Dx} \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \begin{matrix} 1 - PeCl - h^e/Dx \\ 1 - PeCl + h^e/Dx \\ 1 - PeCl - h^e/Dx \\ 1 - PeCl + h^e/Dx \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \end{matrix} - \begin{matrix} 1 + PeCl - h^e/Dx \\ 1 + PeCl + h^e/Dx \\ 1 + PeCl - h^e/Dx \\ 1 + PeCl + h^e/Dx \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{U} \\ \ddot{U} \\ \ddot{U} \\ \ddot{U} \\ \ddot{U} \end{matrix} = \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \begin{matrix} Q(x) \\ Q(x) \\ Q(x) \\ Q(x) \\ Q(x) \end{matrix} \begin{matrix} - h^e/2Dx - x/Dx \\ - h^e/2Dx + x/Dx \\ - h^e/2Dx - x/Dx \\ - h^e/2Dx + x/Dx \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \end{matrix} \begin{matrix} dx \\ dx \\ dx \\ dx \\ dx \end{matrix}$$

que se corresponde con la siguiente forma:

$$\text{-192-} \quad K_{ij} T_j = f_i \quad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{matrix}$$

con

$$\text{-193-} \quad K_{ij} = \frac{k}{Dx} \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \begin{matrix} 1 - PeCl - h^e/Dx \\ 1 - PeCl + h^e/Dx \\ 1 - PeCl - h^e/Dx \\ 1 - PeCl + h^e/Dx \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \end{matrix} - \begin{matrix} 1 + PeCl - h^e/Dx \\ 1 + PeCl + h^e/Dx \\ 1 + PeCl - h^e/Dx \\ 1 + PeCl + h^e/Dx \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{U} \\ \ddot{U} \\ \ddot{U} \\ \ddot{U} \\ \ddot{U} \end{matrix}$$

$$f_i = \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \begin{matrix} Q(x) \\ Q(x) \\ Q(x) \\ Q(x) \\ Q(x) \end{matrix} \begin{matrix} - h^e/2Dx - x/Dx \\ - h^e/2Dx + x/Dx \\ - h^e/2Dx - x/Dx \\ - h^e/2Dx + x/Dx \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \\ \ddot{O} \end{matrix} \begin{matrix} dx \\ dx \\ dx \\ dx \\ dx \end{matrix}$$

En este caso ilustrativo se han obviado los términos del contorno de Neumann donde el flujo normal es prescripto.

Realizando las integrales de **-189-(b)** se obtiene lo siguiente:

$$\text{-194-} \quad \frac{1}{Dx} \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \begin{matrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_2 \end{matrix} + \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \begin{matrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_2 \end{matrix}$$

que puede escribirse como:

<sup>5</sup> El nodo 3 tiene únicamente el grado de libertad de h<sup>e</sup>, que es la única variable de carácter elemental.

$$-195- \quad A_{ij}D_j + B_{ij}T_j = 0 \quad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{matrix}$$

con

$$-196- \quad A_{ij} = \begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{matrix} \quad B_{ij} = \begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

En cuanto a la integración de la -189-(e) el resultado es el siguiente coeficiente:

$$-197- \quad h^e = \frac{D_{i+1} + D_i + \int Q(x) dx}{D_{i+1} - D_i + \int \frac{dQ(x)}{dx} dx}$$

que puede escribirse de la siguiente forma:

$$-198- \quad z \cdot h^e = w$$

con

$$-199- \quad z = 1 \quad w = \frac{D_{i+1} + D_i + \int Q(x) dx}{D_{i+1} - D_i + \int \frac{dQ(x)}{dx} dx}$$

Ahora tenemos todas las expresiones de los coeficientes para colocarlos en sus lugares correspondientes en la matriz elemental, la que se constituye como sigue:

$$-200- \quad A^E = \begin{matrix} K_{11} & 0 & K_{12} & 0 & 0 \\ B_{11} & A_{11} & B_{12} & A_{12} & 0 \\ K_{21} & 0 & K_{22} & 0 & 0 \\ B_{21} & A_{21} & B_{22} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{matrix} \quad B^E = \begin{matrix} f_1 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ w \end{matrix}$$

donde se incluyó el vector segundo miembro que cada elemento aporta.

### 3.5.3. Framework utilizado:

Un “Framework” es un diseño reutilizable de un sistema o parte de él, que describe cómo el sistema es descompuesto en un conjunto de clases o módulos abstractos interactuantes, constituyendo el armazón ó esqueleto de una aplicación que puede ser adaptado para desarrollar aplicaciones específicas, a la vez que describe la arquitectura de dicho sistema, las interfaces, los tipos de objetos en él y sus formas de interacción.

La diferencia entre un framework y un programa tradicional es que en el programa tradicional, los desarrolladores utilizan componentes de una librería, escribiendo un programa principal (main), que llama los componentes cuando es necesario. Por el contrario, en un framework lo que se reutiliza es el “MAIN”, y el programador decide qué cosas son conectadas (encastradas-acopladas) en él y puede también diseñar algún nuevo componente con el mismo fin.

Las ventajas en la utilización de un framework son muy significativas, las más importantes se exponen a continuación:

El usuario es el encargado de programar su elemento que será llamado por el framework, y de preparar las entradas de datos. Se focaliza el esfuerzo en la rutina de cálculo de matrices elementales y en la entrada de datos (disminuyendo los tiempos de implementación y, disminuyendo y concentrando el esfuerzo de “debugging” en pocas rutinas).

Facilidad de desarrollo y reutilización de “elementos” nuevos y existentes, dado que al tener una interfaz común son automáticamente congruentes con el framework y por lo tanto, entre ellos en problemas acoplados.

Posibilidad de paralelización de tareas de desarrollo. Manteniendo una interfaz y marco de referencia común a todos los desarrolladores. Y facilidad de la interacción entre diferentes personas y trabajo a distancia.

Capacidad de acomodar diferentes formulaciones y métodos.

Resulta un sólo programa para métodos tales como MEF, DF, VF, etc. y para diferentes problemas físicos-matemáticos.

Posibilidad de utilizar métodos explícitos e implícitos.

Fuera de tratamientos especiales para las condiciones de contorno, que ahora son distintos tipos de elementos.

Facilidad de desarrollo de aplicaciones de testeo de formulaciones nuevas y evaluación de las diferentes alternativas.

Enseñanza de técnicas numéricas de distintas clases en un mismo ambiente.

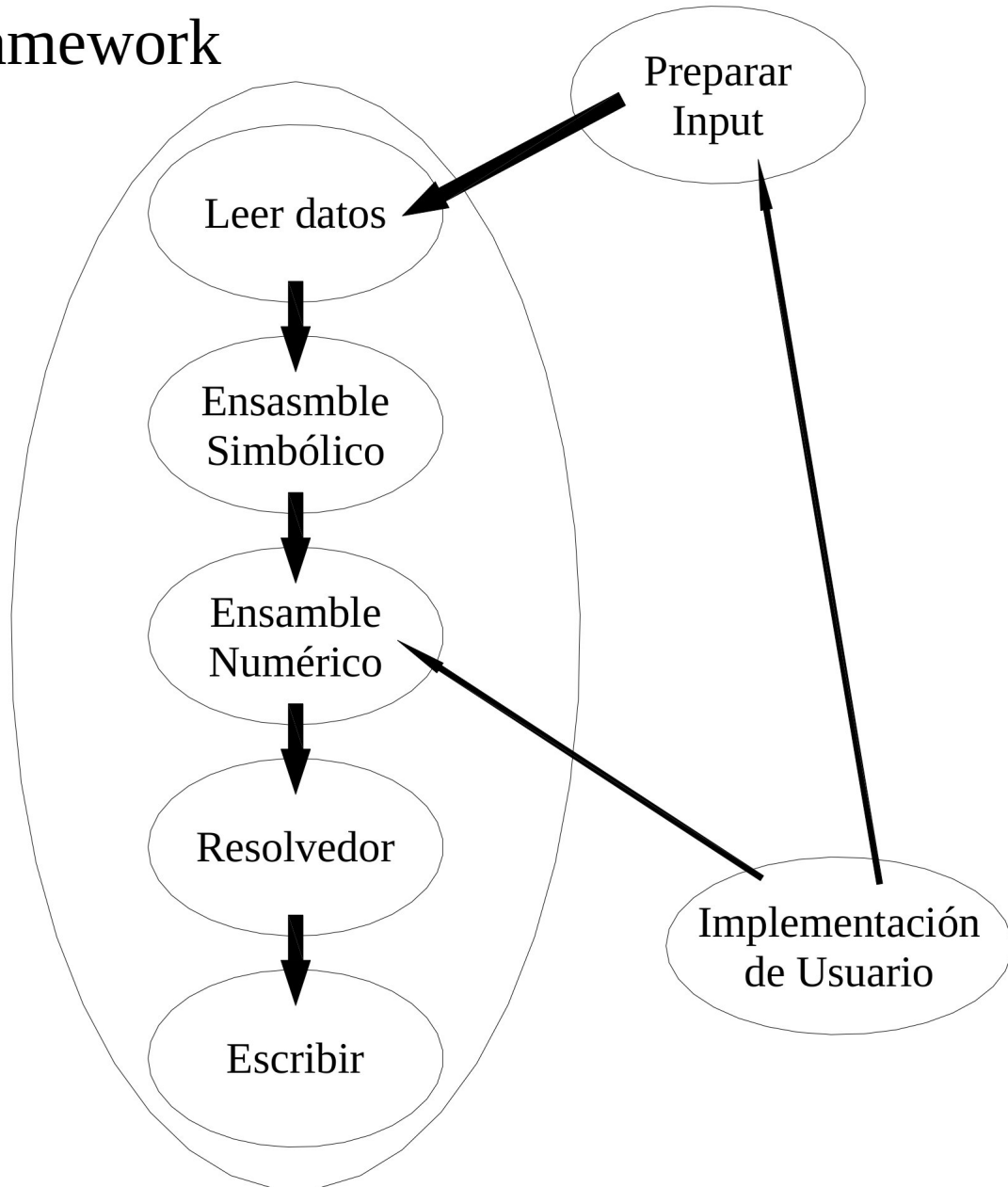
Para especificar un término importante como el de “elemento” resumimos sus características a continuación:

Es un conjunto de nodos que tienen asociados un cierto número de incógnitas o grados de libertad y determinadas relaciones de acoplamiento entre ellos.

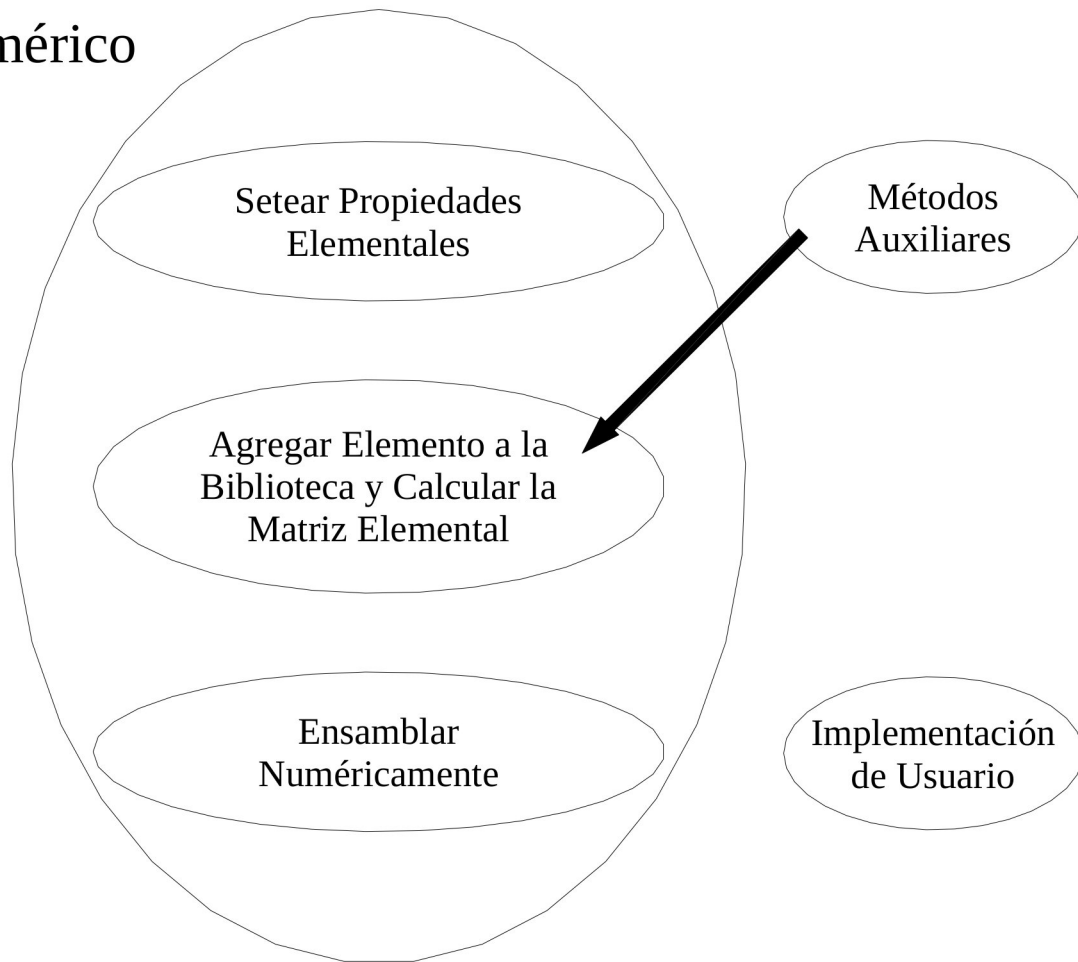
Los “elementos” serán considerados como operadores de adición que aportan a uno o varios coeficientes de la matriz.

El esquema de funcionamiento de un framework se presenta en las siguientes figuras:

## Framework



## Ensamble Numérico



Resumiendo, un framework tiene la ventaja de poder abordar casi cualquier problema que, en el modelo final, esté representado por un sistema de ecuaciones algebraicas, sea lineal ó no lineal, sin incursionar en la formulación específica del problema. De esta manera, con la sola adición de los “elementos” se puede resolver el problema por ellos planteado, sin alterar el programa principal a la vez que se mantiene la eficiencia numérica.

Este framework fue desarrollado por el Ingeniero Santiago Urquiza, y puesto a disposición de la investigación a causa de su versatilidad en las aplicaciones tratadas, ya sea en cuanto al tipo de programación que propone como la facilidad a la hora de generar modificaciones en la estructura de cálculo.

Los códigos desarrollados integran el núcleo del esquema que se muestra arriba, dicho núcleo se denomina el “elemento” debido a que, en esa clase de subrutina, es donde se establecen las ecuaciones elementales que luego, el ensamblador se encargará de ordenar apropiadamente en el sistema algebraico global.

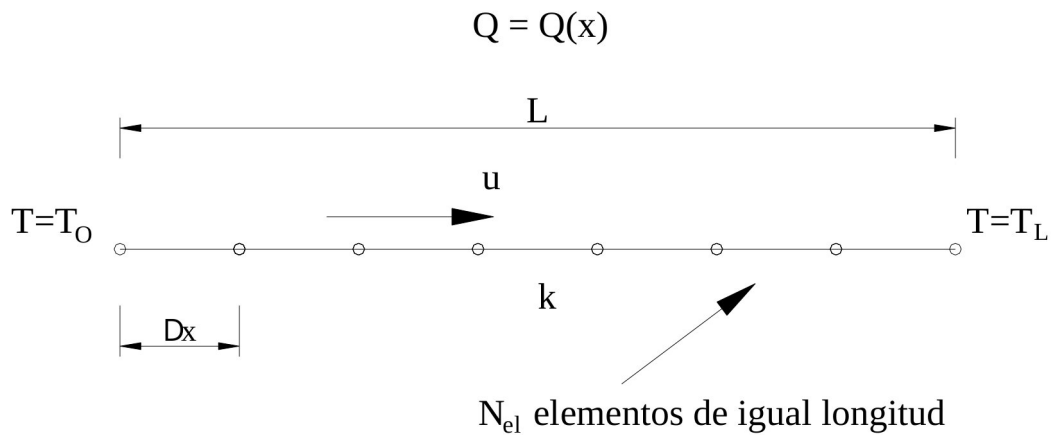
El framework posee varias opciones en cuanto al sistema de resolución de las ecuaciones algebraicas (método directo, de gradientes conjugados, de Gauss-Seidel, de GMRES, etc.), en este trabajo se utilizó un método directo de resolución debido a que los casos analizados no requerían un elevado costo computacional y evitando también el uso de algoritmos iterativos de resolución.



# Capítulo 4:

## 4.1. Introducción a los casos unidimensionales propuestos:

Se propone resolver la ecuación de convección-difusión del campo de temperaturas en un dominio unidimensional de longitud  $L$  con condiciones de Dirichlet en ambos extremos, como indica la figura, y con términos de generación de calor por unidad de volumen determinados en cada caso. La discretización se realiza con  $N_{el}$  elementos lineales de longitud  $x$ , con lo que se establecen de inmediato los valores del número de  $Pe$  local ( $Pe^L$ ) y global ( $Pe^G$ ). La cantidad de iteraciones realizadas se simboliza con  $N^{it}$



En todos los casos se prescinden de las unidades pues el motivo de los ejemplos es mostrar la morfología de las soluciones. La presentación de cada caso se realiza en base a los datos utilizados, luego, se exponen las soluciones del campo de temperaturas en tres casos: solución exacta, solución del MEF tipo Galerkin y solución del MDD. Por último se incluyen los gráficos que muestran los valores de los parámetros de estabilización obtenidos. Es necesario aclarar que en los casos en donde la condición sobre el gradiente del residuo

$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \leq \epsilon$  es rebasada, se coloca un valor nulo del parámetro de estabilización, es decir,

$h^e = 0$ , como fue explicado en la condición -169-.

Además se incluye el valor del parámetro en caso de que el proceso de estabilización fuese realizado con un esquema de SUPG, al que se denomina  $h_{cr}$ , y se define de acuerdo a la expresión -13-, es decir  $h_{cr} = a_{cr} Dx$ .

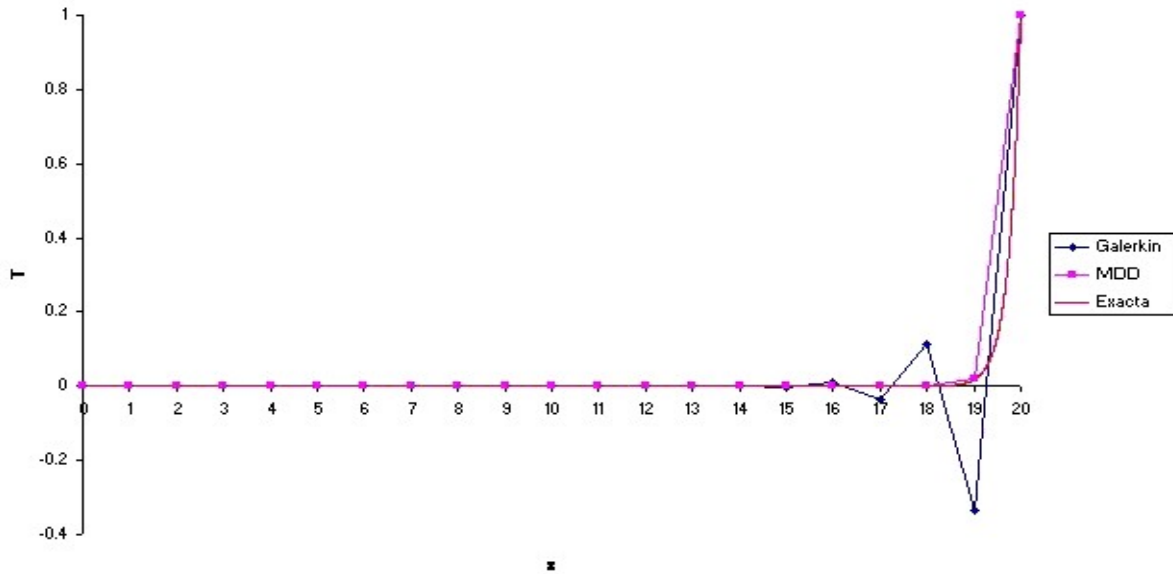
## 4.2. Ejemplo 1: Sin fuente, bajo Pe

Los datos que definen el problema son los siguientes:

$T_O$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	1	4	1	20	1	20	$1 \cdot 10^{-8}$	80	2	0	0.5	28

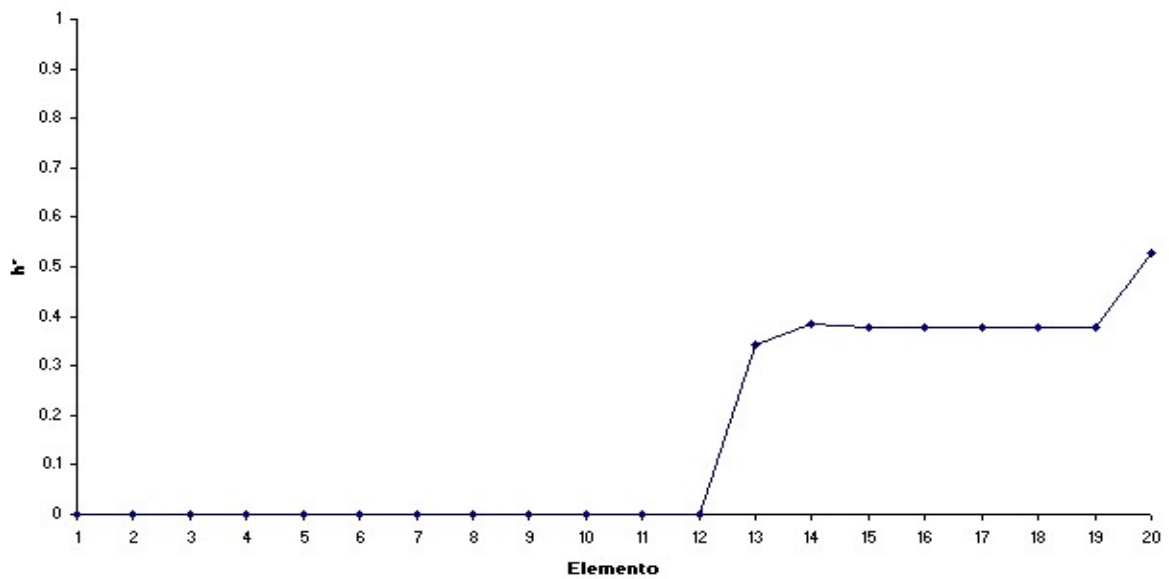
La solución se presenta a continuación:

Caso sin fuente con  $Pe^L = 2$



y el parámetro de estabilización resulta:

Parámetro  $h^*$  para el caso sin fuente con  $Pe^L = 2$

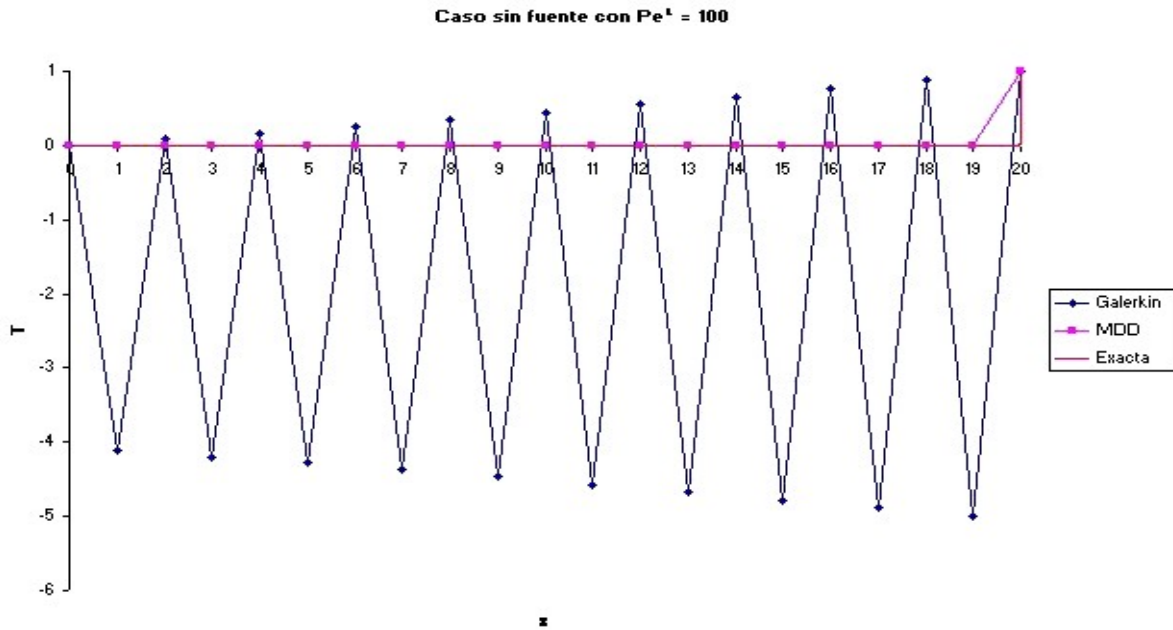


### 4.3. Ejemplo 2: Sin fuente, alto Pe

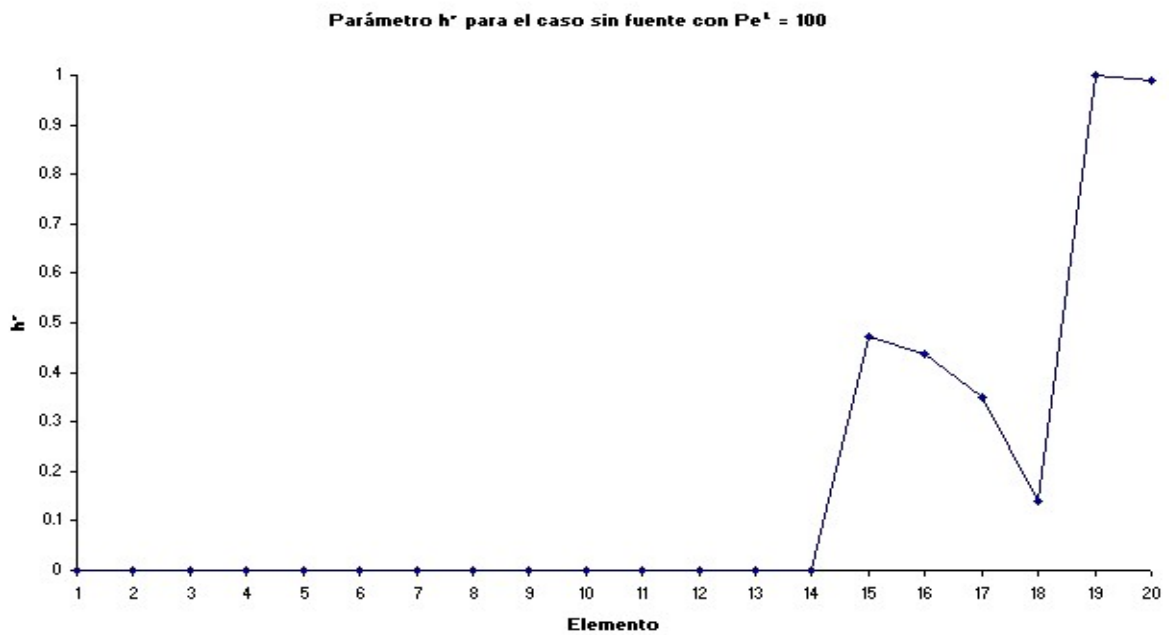
Los datos que definen el problema son los siguientes:

$T_O$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	1	200	1	20	1	20	$2.5 \cdot 10^{-3}$	4000	100	0	0.99	5

La solución se presenta a continuación:



y el parámetro de estabilización resulta:



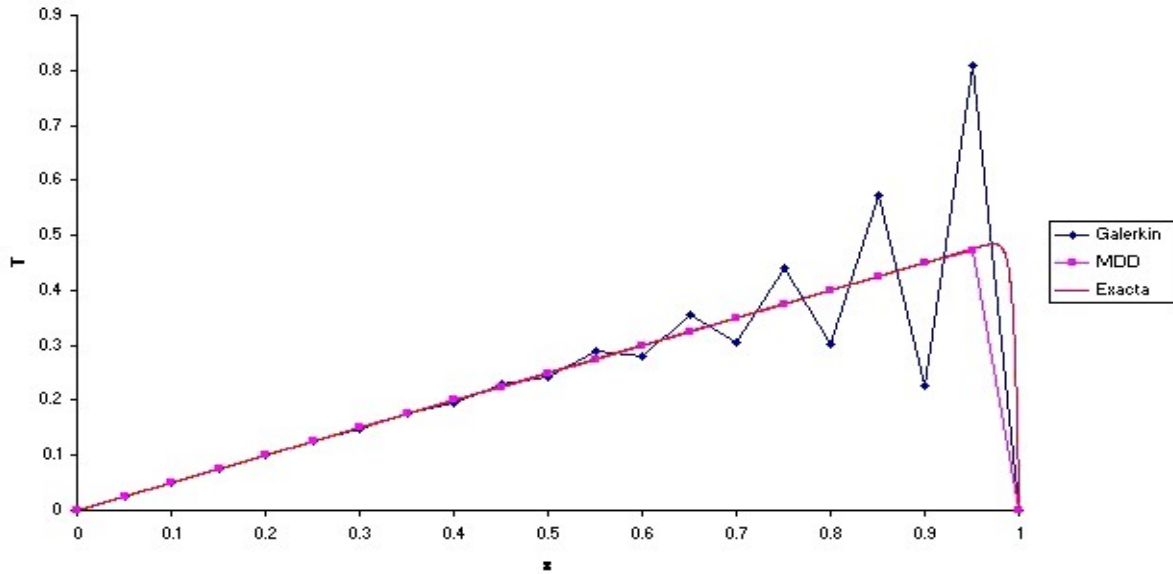
### 4.4. Ejemplo 3: Fuente constante, bajo Pe

Los datos que definen el problema son los siguientes:

$T_O$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	0	200	1	1	0.05	20	$6 \cdot 10^{-2}$	200	5	100	0.8	17

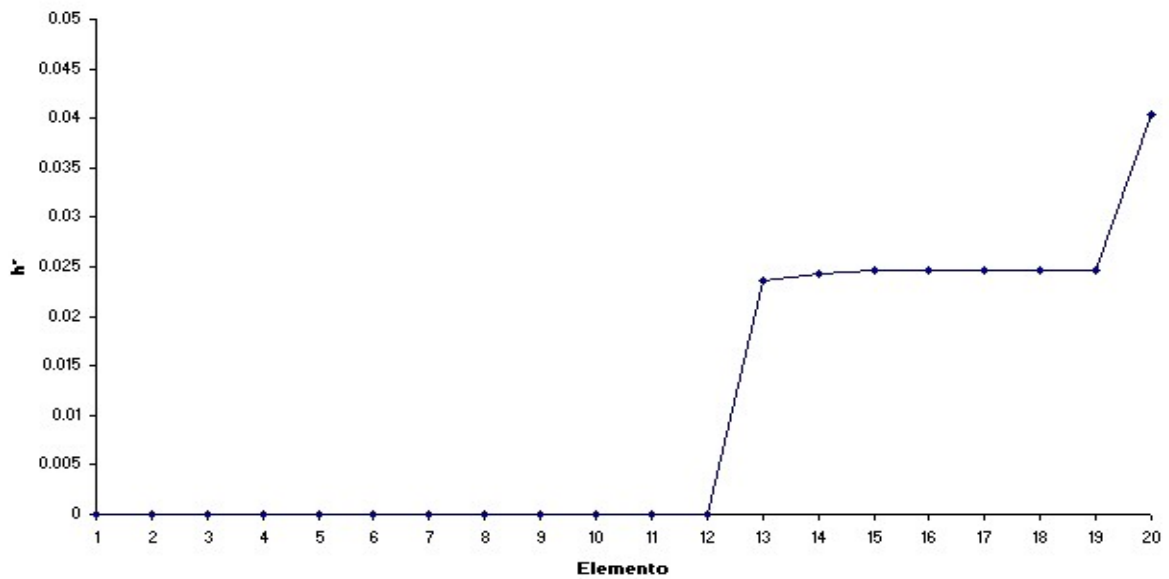
La solución se presenta a continuación:

**Caso con fuente  $Q = 100$  con  $Pe^L = 5$**



y el parámetro de estabilización resulta:

**Parámetro  $h^*$  para el caso con fuente  $Q = 100$  con  $Pe^L = 5$**



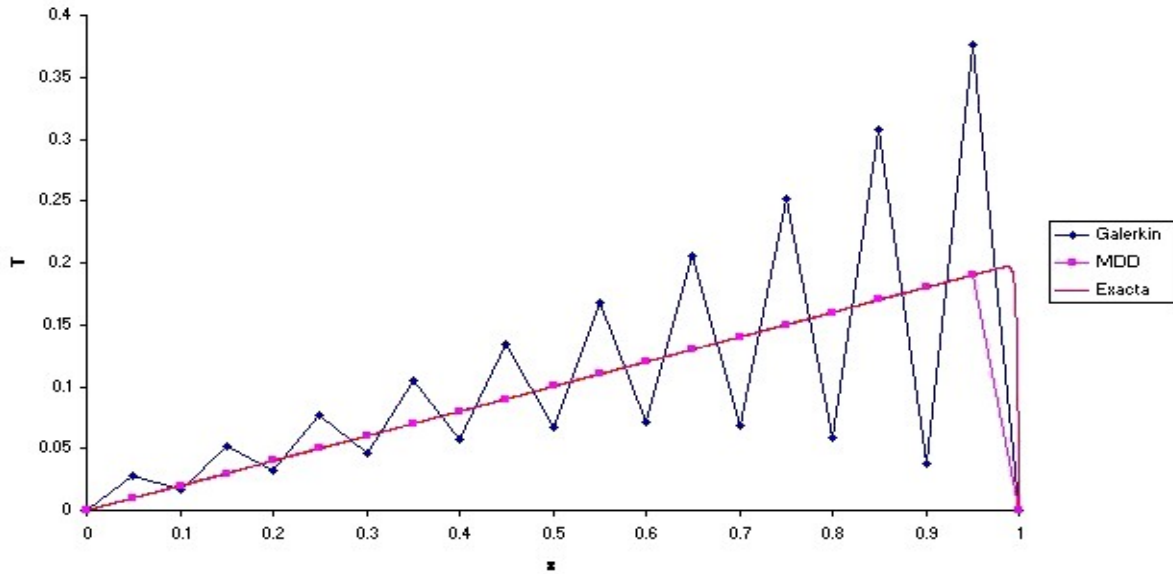
### 4.5. Ejemplo 4: Fuente constante, alto Pe

Los datos que definen el problema son los siguientes:

$T_0$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	0	500	1	1	0.05	20	$6 \cdot 10^{-2}$	500	12.5	100	0.046	7

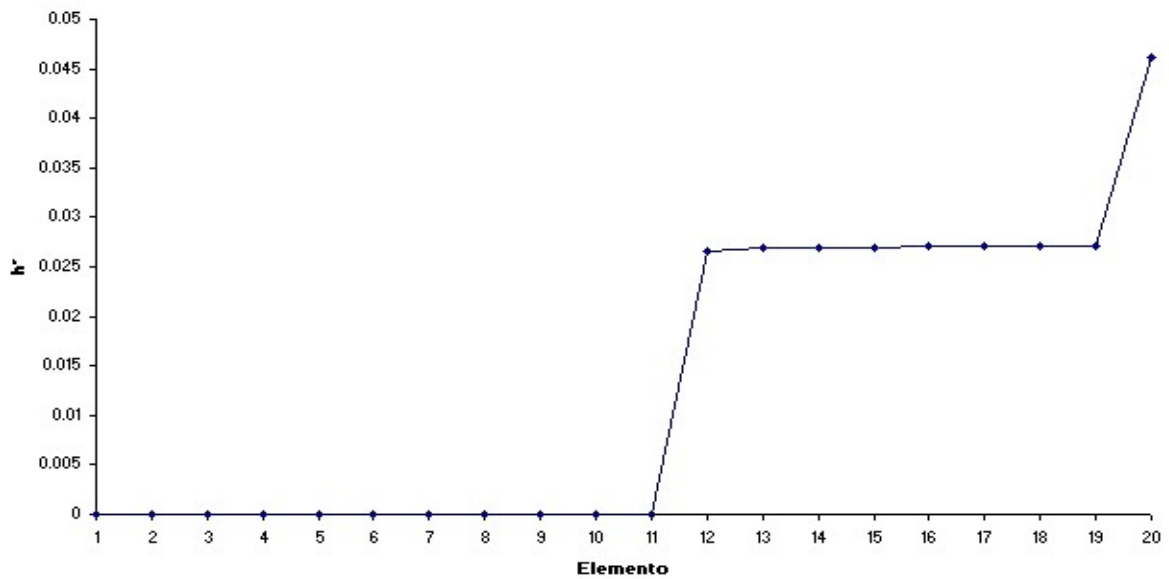
La solución se presenta a continuación:

**Caso con fuente  $Q = 100$  con  $Pe^L = 12.5$**



y el parámetro de estabilización resulta:

**Parámetro  $h^*$  para el caso con fuente  $Q = 100$  con  $Pe^L = 12.5$**



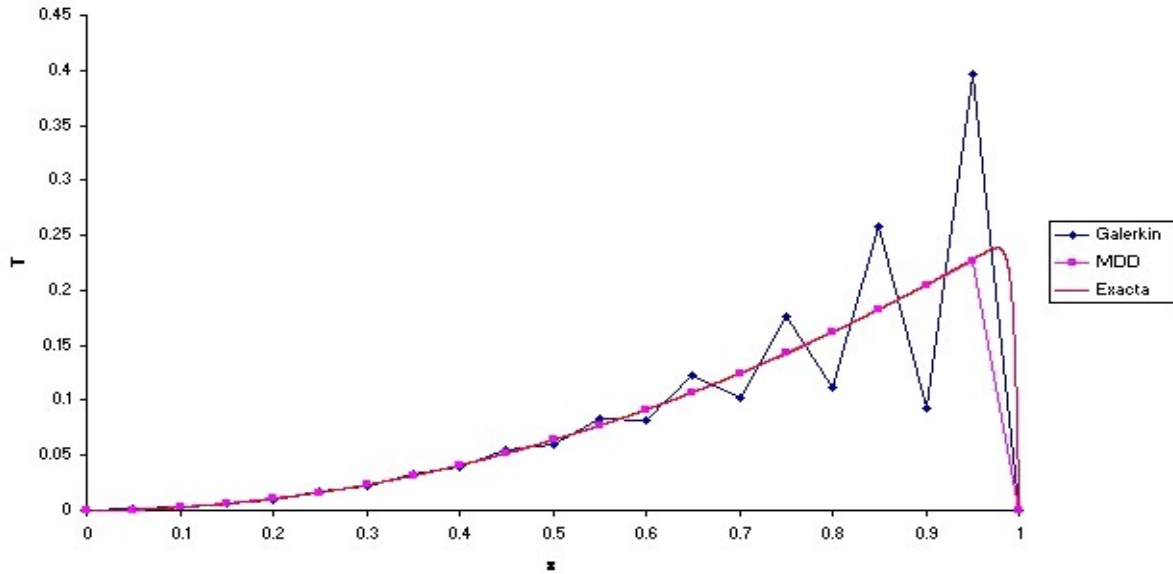
### 4.6. Ejemplo 5: Fuente lineal, bajo Pe

Los datos que definen el problema son los siguientes:

$T_O$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	0	200	1	1	0.05	20	$1.5 \cdot 10^1$	200	5	$100x$	0.04	7

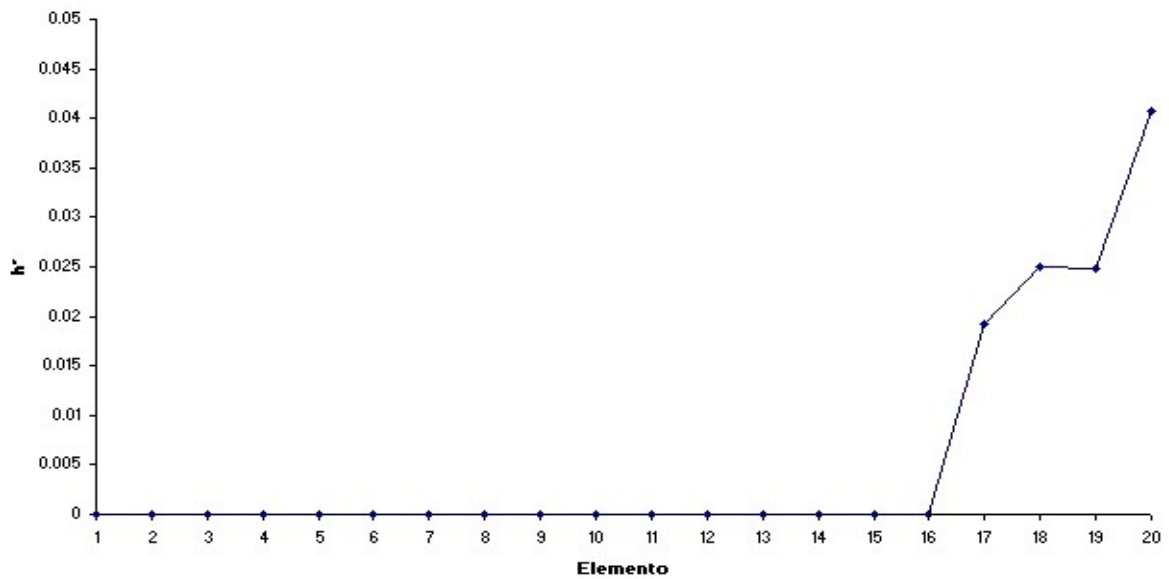
La solución se presenta a continuación:

**Caso con fuente  $Q = 100x$  con  $Pe^L = 5$**



y el parámetro de estabilización resulta:

**Parámetro  $h^*$  para el caso con fuente  $Q = 100x$  con  $Pe^L = 5$**



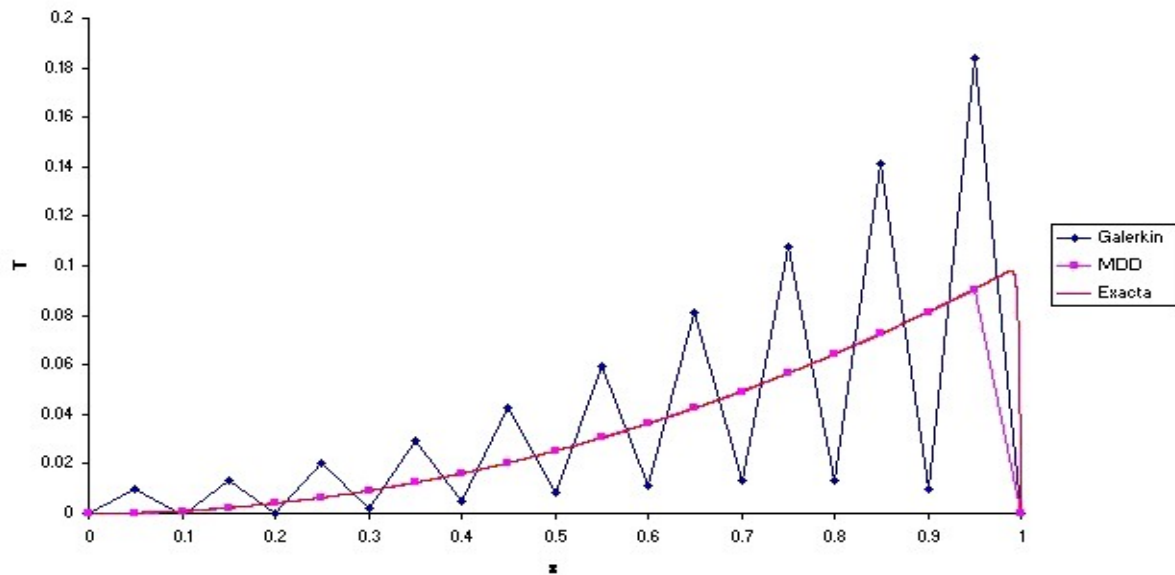
### 4.7. Ejemplo 6: Fuente lineal, alto Pe

Los datos que definen el problema son los siguientes:

$T_0$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	0	500	1	1	0.05	20	$1.5 \cdot 10^1$	500	12.5	$100x$	0.046	6

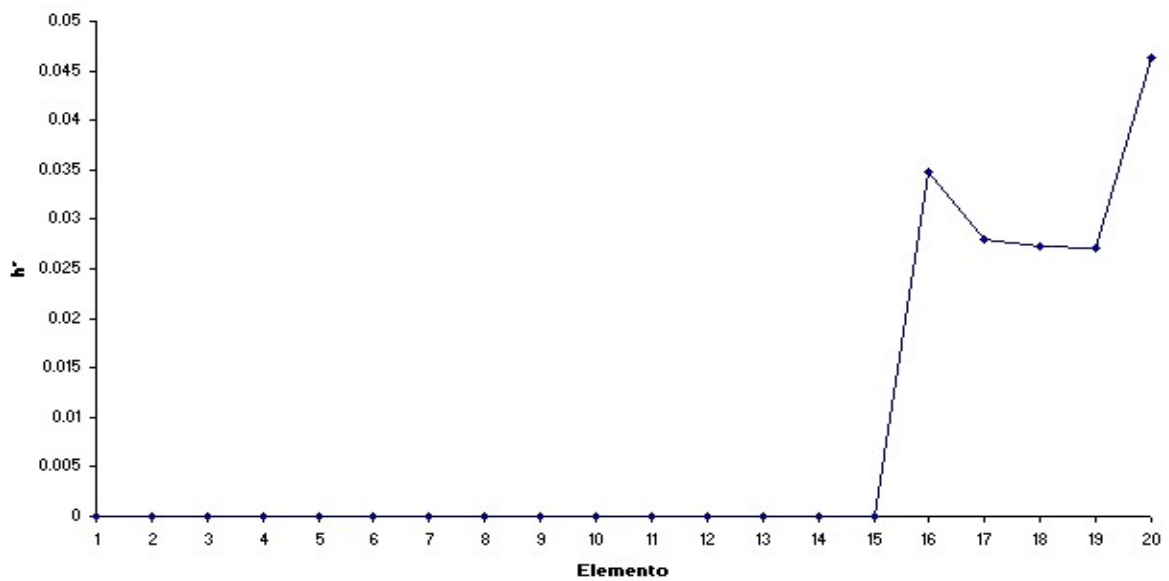
La solución se presenta a continuación:

**Caso con fuente  $Q = 100x$  con  $Pe^L = 12.5$**



y el parámetro de estabilización resulta:

**Parámetro  $h^*$  para el caso con fuente  $Q = 100x$  con  $Pe^L = 12.5$**



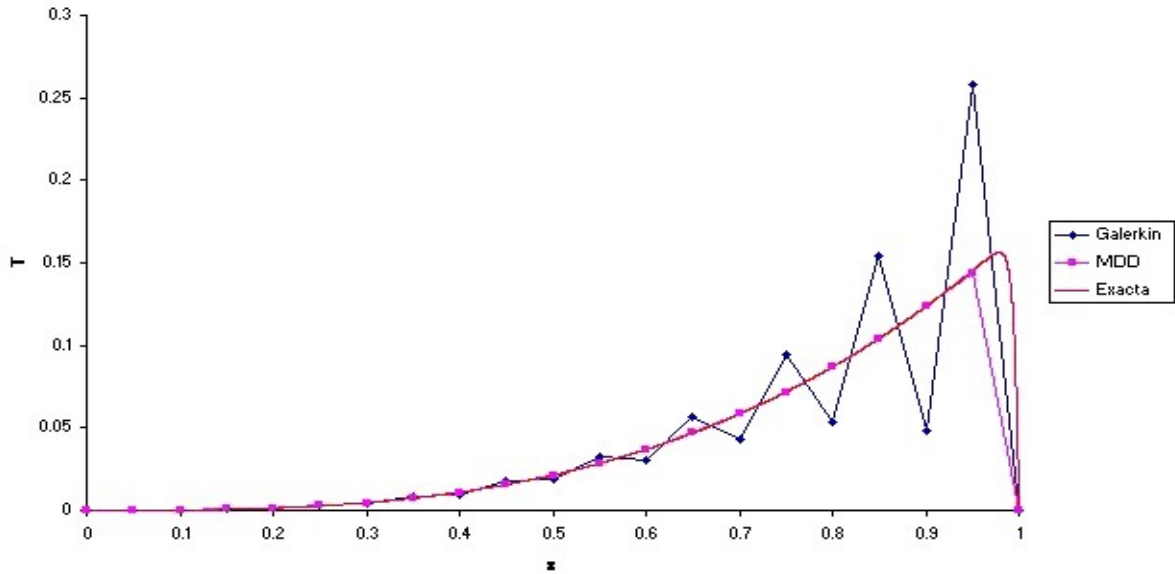
### 4.8. Ejemplo 7: Fuente cuadrática

Los datos que definen el problema son los siguientes:

$T_0$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	0	200	1	1	0.05	20	$5 \cdot 10^1$	200	5	$100x^2$	0.04	6

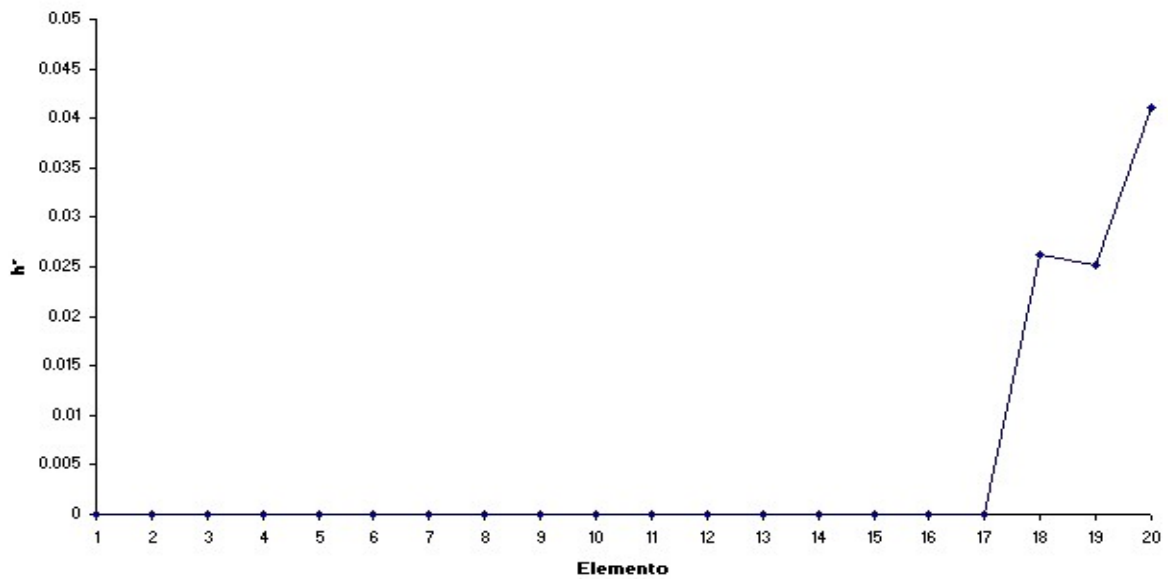
La solución se presenta a continuación:

**Caso con fuente  $Q = 100x^2$  con  $Pe^L = 5$**



y el parámetro de estabilización resulta:

**Parámetro  $h^*$  para el caso con fuente  $Q = 100x^2$  con  $Pe^L = 5$**





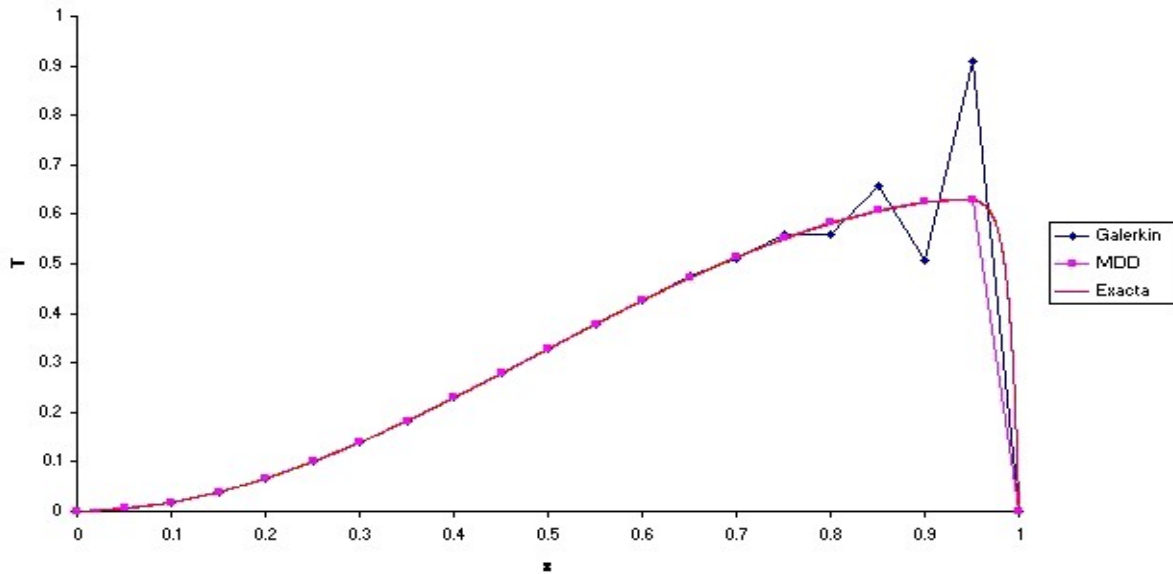
### 4.9. Ejemplo 8: Fuente senoidal

Los datos que definen el problema son los siguientes:

$T_0$	$T_L$	$u$	$k$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Q(x)$	$h_{cr}$	$N^{it}$
0	0	1	0.01	1	0.05	20	$3 \cdot 10^{-1}$	100	2.5	$100\text{sen}(\pi x)$	0.03	6

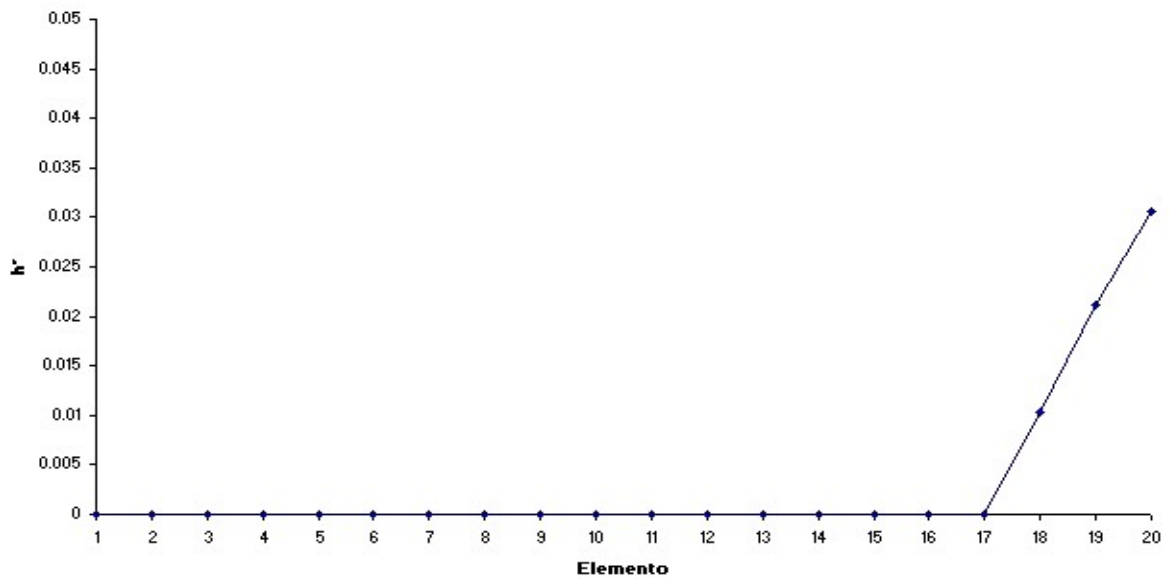
La solución se presenta a continuación:

**Caso con fuente  $Q = \text{sen}(\pi x)$  con  $Pe^L = 2.5$**



y el parámetro de estabilización resulta:

**Parámetro  $h^*$  para el caso con fuente  $Q = 100\text{sen}(\pi x)$  con  $Pe^L = 2.5$**



## Capítulo 5:

### 5.1. El problema de convección-difusión-radiación:

Sea el problema donde los mecanismos interactuantes son la convección, la difusión y la radiación, gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\text{-201-} \quad -u \frac{dT}{dx} + k \frac{d^2T}{dx^2} - sT + Q = 0$$

donde la diferencia entre la **-4-** y la **-201-** son el término fuente (también presente en el problema de convección-difusión) y el término de radiación dado por el producto  $sT$ .

En el caso de transferencia de calor, el término adicional puede asociarse a una linealización de un término que imponga radiación en el problema.

Las condiciones de contorno para la **-201-** se especifican de la misma manera que en el problema de convección-difusión, siendo:

$$\text{-202-} \quad \begin{array}{ll} T = \bar{T} & \text{sobre } G_D \\ \bar{q}_n = -k \frac{dT}{dx} & \text{sobre } G_N \end{array}$$

pudiendo establecerse otras condiciones en función del flujo total de calor a través de la frontera de Neumann.

El carácter que puede adquirir el problema es triple, alcanzando los siguientes niveles:

Convección dominante

Difusión dominante

Radiación dominante

y la existencia de capas límites en estos problemas no es solo debido a la convección, sino que el término de radiación también es capaz de originar estas fuertes discontinuidades en ciertas condiciones. Para esto se definen los números adimensionales que caracterizan la importancia relativa de los mecanismos involucrados:

$$\text{-203-} \quad Pe = \frac{uL}{k} \quad Rn = \frac{sL^2}{k}$$

donde el  $Pe$  es el mismo con el que se trabajó a lo largo del trabajo definido de manera global, mientras que el  $Rn$  es el que mide la importancia relativa entre la radiación y la difusión,  $L$  es una longitud característica del problema.

## 5.2. El método de elementos finitos:

Aplicando a la -201- una formulación de residuos ponderados resulta:

$$-204- \int_W \left( u \frac{dT}{dx} + k \frac{d^2T}{dx^2} - sT + Q \right) w dW = 0$$

Integrando por partes se obtiene la formulación débil del problema:

$$-205- \int_W \left( u \frac{dT}{dx} w + k \frac{dT}{dx} \frac{dw}{dx} + sT w \right) dW = \int_W Q w dW + \int_{\Gamma_N} \frac{dT}{dx} \frac{\delta}{\delta G_N}$$

y aplicando un esquema de tipo Galerkin resulta:

$$-206- \int_W \left( u \frac{df_j}{dx} f_i + k \frac{df_j}{dx} \frac{df_i}{dx} + s f_j f_i \right) dW = \int_W Q f_i dW + \int_{\Gamma_N} \frac{dT}{dx} \frac{\delta}{\delta G_N}$$

donde se reemplazó

$$-207- T = T_j f_j$$

Como se mencionó en el apartado anterior, el origen de capas límites es debido, no sólo a los fenómenos convectivos, sino también a los de radiación. En ciertos problemas de radiación dominante, como se verá en los ejemplos, se generan capas límites sin la presencia de convección, ó con términos convectivos despreciables.

Con el objeto de lograr esquemas estables, el desarrollo de métodos como el SubGrid Scale (ver apartado 1.2.6) constituye un punto importante como herramienta de resolución. Una formulación variacional así planteada especifica lo siguiente:

$$-208- a(T, w) - l(w) + r(T, w) = 0$$

donde se utilizó la notación variacional para mayor claridad, los términos son los siguientes:

$$a(T, w) = \int_W \left( u \frac{dT}{dx} w + k \frac{dT}{dx} \frac{dw}{dx} + sT w \right) dW$$

$$-209- l(w) = \int_W Q w dW$$

$$r(T, w) = \int_W \left( u \frac{dw}{dx} - k \frac{d^2w}{dx^2} + s w \right) dW + \int_W \left( u \frac{dT}{dx} + k \frac{d^2T}{dx^2} - s w + Q \right) dW$$

Introduciendo la siguiente notación:  $T = T_j f_j$  y  $w = f_i$ , y sabiendo que las funciones son lineales, resulta:

$$a(T_j f_j, f_i) = \int_{\Omega} u \frac{df_j}{dx} f_i + k \frac{df_j}{dx} \frac{df_i}{dx} + s f_j f_i \frac{dW}{dx} \quad (210)$$

$$l(f_i) = \int_{\Omega} Q f_i dW$$

$$r(T_j f_j, f_i) = \int_{\Omega} \left( u \frac{df_i}{dx} + s f_i \frac{d(f_j T_j)}{dx} - s(f_j T_j) \right) + Q \frac{dW}{dx} \quad (211)$$

Finalmente, luego de trabajo algebraico, resulta:

$$-211- \int_{\Omega} u (1 - 2ts) f_i \frac{df_j}{dx} + (k + tu^2) \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} + s(1 - ts) f_i f_j \frac{dW}{dx} = \int_{\Omega} Q f_i dW + t.c.$$

donde, en el segundo miembro, se agruparon los términos de contorno. El parámetro  $t$  es el parámetro de estabilización para esta formulación. Para eliminar la existencia de oscilaciones debe cumplirse lo siguiente (ver [32]):

$$-212- \quad t^3 \frac{Dx}{2u} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial x} \quad Pe = \frac{uDx}{2k}$$

$$t^3 \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{Rn} \frac{\partial}{\partial x} \quad Rn = \frac{s(Dx)^2}{2k}$$

donde el  $Pe$  y el  $Rn$  fueron definidos en sentido local.

### 5.3. El MDD aplicado a la ecuación de convección-difusión-radiación:

Sea el esquema de dominios desplazados (desplazamiento sobre el término del residuo) aplicado a la ecuación diferencial -201-:

$$-213- \quad \int_{\Omega} \left( \frac{dr}{dx} - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} \right) dW = 0$$

con

$$-214- \quad r = -u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} - s\hat{T} + Q$$

donde la expresión -213- es muy similar a la -111-, afectada por una constante. Reemplazando la -214- en la -213-, luego de unos pasos algebraicos se obtiene lo siguiente:

$$-215- \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} - s\hat{T} + Q \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} - s\hat{T} + Q \right) + \frac{h}{2} \frac{df_i}{dx} \frac{\partial}{\partial x} W + t.c.$$

donde se reemplazó  $\hat{T} = T_j f_j$  y  $w = f_i$ , y se realizó una integración por partes sobre el término de derivada de orden dos en el gradiente del residuo. E integrando por partes el término  $\frac{sh}{2} f_i \frac{df_j}{dx}$  resulta una formulación ligeramente diferente:

$$-216- \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + s \hat{T} + \frac{h}{2} \frac{df_i}{dx} \frac{\partial}{\partial x} W \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{d\hat{T}}{dx} + k \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + s \hat{T} + \frac{h}{2} \frac{df_i}{dx} \frac{\partial}{\partial x} W \right) + t.c.$$

Cualquiera de las dos formulaciones obtenidas constituye un esquema estabilizado para el problema de convección-difusión-radiación.

Para la estimación de los desplazamientos se recurre a la expresión -158-, y especializándola en este problema en particular resulta:

$$-217- \quad h^e = 2 \frac{D_x \left( u D + k \frac{dD}{dx} - sT + Q \frac{\partial}{\partial x} \right)}{D_x \left( u \frac{dD}{dx} - sD + \frac{dQ}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right)}$$

Para obtener el campo de derivadas proyectado se utiliza el método desarrollado en el apartado 3.4.2, mientras que las condiciones impuestas sobre los desplazamientos son conformes a las presentadas en el apartado 3.3.

A continuación se exponen dos ejemplos. El primero corresponde a un problema de radiación-difusión con radiación dominante. El mismo, evidencia la posibilidad de usar el MDD como estimador de parámetros de estabilización a pesar de no tener información sobre el campo de velocidades, ya que es  $Pe = 0$  en este caso. El segundo ejemplo es un problema de convección-difusión-radiación con radiación dominante.

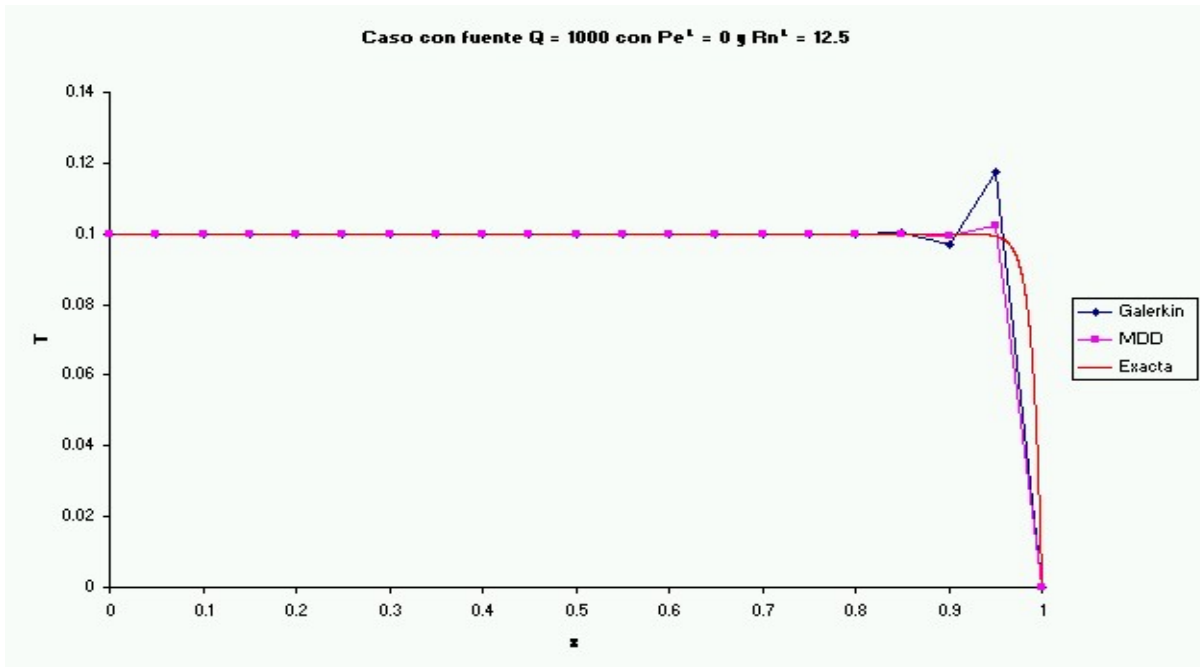
El formato de presentación es el mismo que en los problemas de convección-difusión presentados en el capítulo 4.

### 5.4. Ejemplo 9: Fuente constante, radiación pura

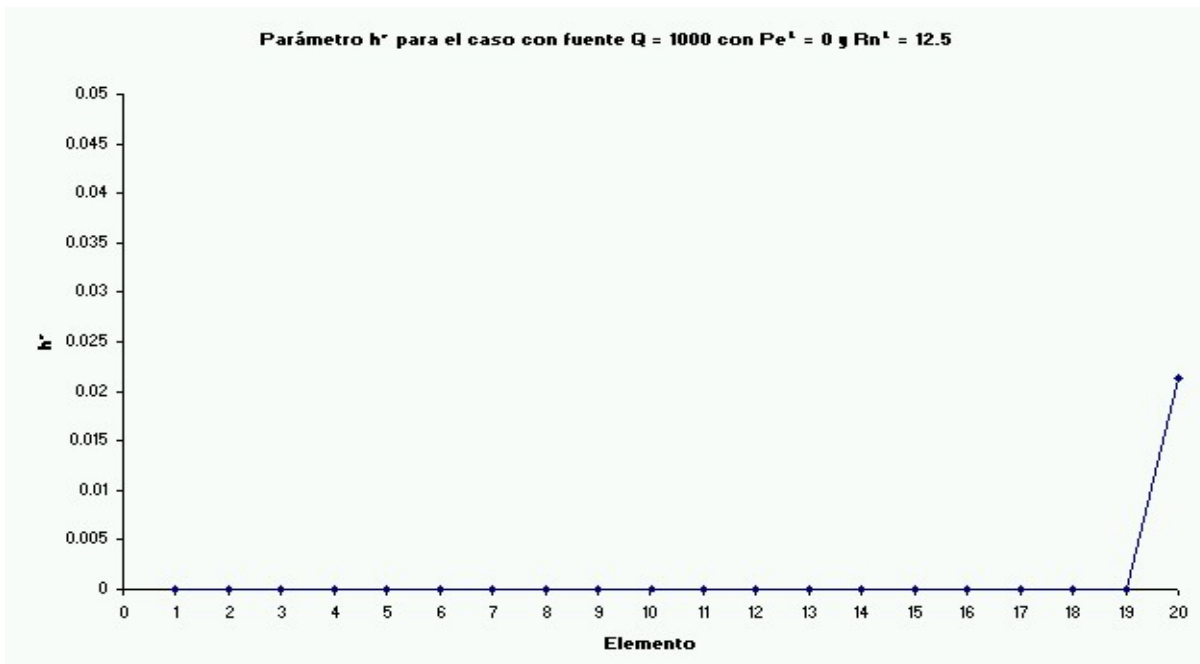
Los datos que definen el problema son los siguientes:

$q_0$	$T_L$	$u$	$k$	$s$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Rn^G$	$Rn^L$	$Q(x)$	$N^{it}$
0	0	0	1	10000	1	0.05	20	$1.10^1$	0	0	5000	12.5	1000	11

La solución se presenta a continuación:



y el parámetro de estabilización resulta:



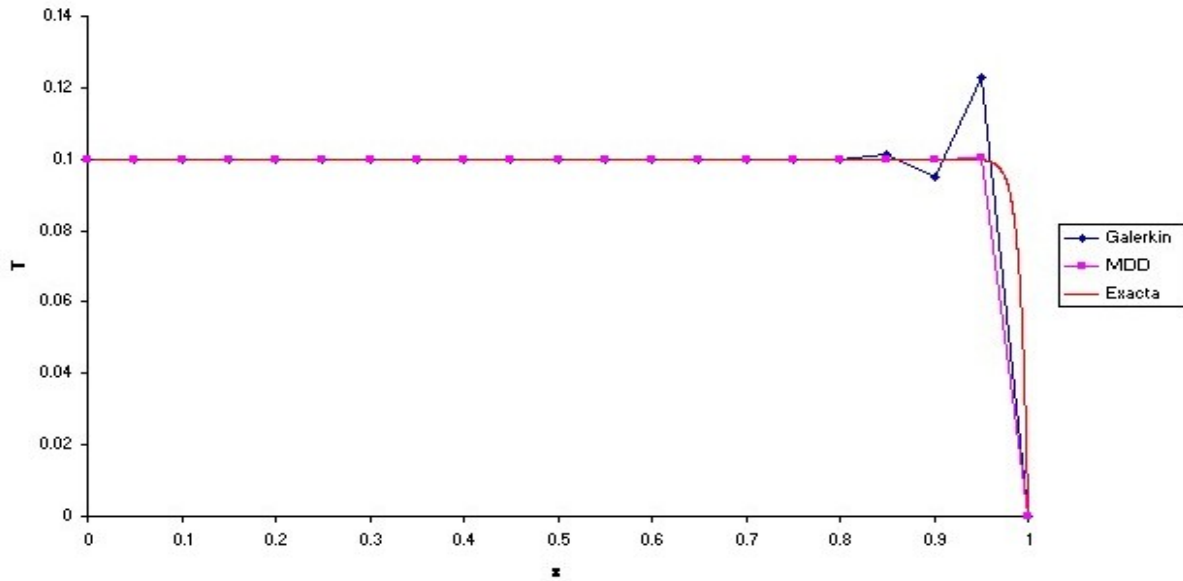
### 5.5. Ejemplo 10: Fuente constante, radiación dominante

Los datos que definen el problema son los siguientes:

$q_0$	$T_L$	$u$	$k$	$s$	$L$	$x$	$N_{el}$		$Pe^G$	$Pe^L$	$Rn^G$	$Rn^L$	$Q(x)$	$N^{it}$
0	0	40	1	10000	1	0.05	20	$1 \cdot 10^1$	20	1	5000	12.5	1000	55

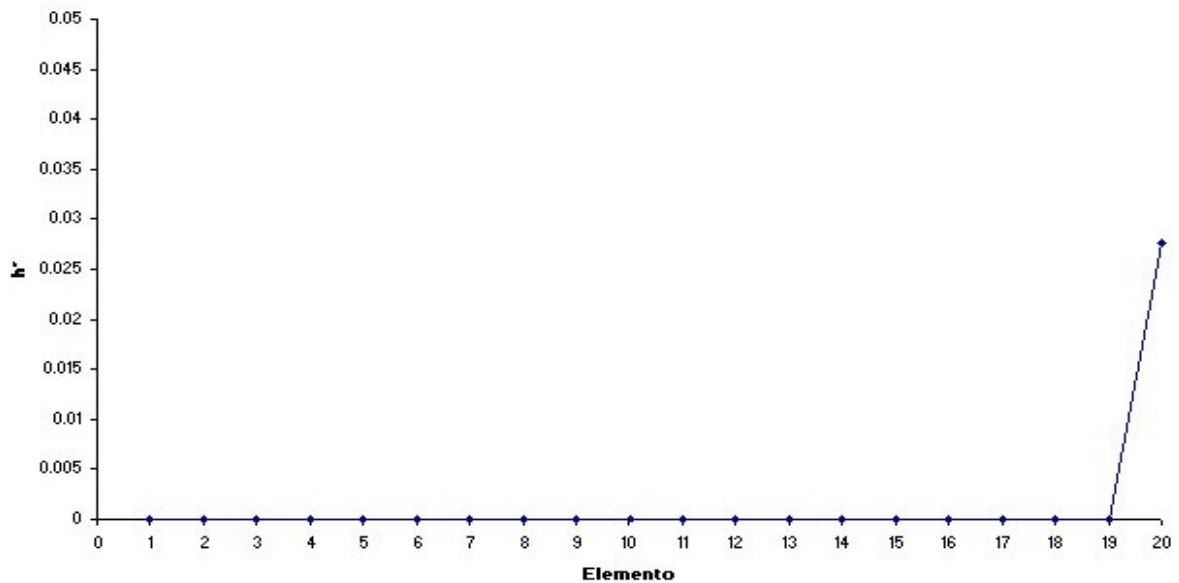
La solución se presenta a continuación:

**Caso con fuente  $Q = 1000$  con  $Pe^L = 1$  y  $Rn^L = 12.5$**



y el parámetro de estabilización resulta:

**Parámetro  $h^*$  para el caso con fuente  $Q = 1000$  con  $Pe^L = 1$  y  $Rn^L = 12.5$**



## Conclusión:

Una reseña teórica de los métodos tradicionales de estabilización fue realizada con el fin de brindar el enfoque heurístico que éstos proponen, y evaluar las debilidades existentes en los mismos, particularizando sobre el MCF cuya filosofía de cálculo es similar a la que se propone en este trabajo.

Un nuevo método de estabilización numérica para la resolución de problemas por medio del método de elementos finitos fue presentado. La reformulación del MCF a través de un método de residuos ponderados en dominios desplazados le confiere, al concepto de la estabilización, un nuevo significado. Esto se evidencia en la posibilidad de obtener esquemas estabilizados para cualquier clase de problemas a partir de una formulación variacional simple, con sólo el conocimiento del residuo en la ecuación diferencial, y eliminando la necesidad de recurrir a aquellos términos dados por la experiencia, conocidos como “términos heurísticos de estabilización”. Así mismo, el método entrega, también en forma natural, las condiciones de contorno estabilizadas. Una extensión teórica a problemas transitorios demuestra su aplicabilidad en este campo, adquiriendo una vasta generalidad.

En cuanto a la estimación de los desplazamientos (ó parámetros de estabilización) necesarios para estabilizar las soluciones, se derivó una expresión que surge de la minimización de un funcional. El mismo se basa en el residuo desplazado expresado en función del campo de gradientes recuperado a partir de la solución del esquema de elementos finitos, constituyendo un proceso iterativo para la mencionada estimación. Gracias a esto es posible obtener valores de los parámetros sin un discernimiento previo sobre sus magnitudes, como sucede en los métodos clásicos.

Del análisis del MCF y del MDD, y con el fin de lograr una correcta evaluación del residuo y su gradiente, se desprende una significativa dependencia de los desplazamientos respecto del campo de derivadas proyectado. Esto llevó a la implementación de elementos especiales en las zonas de elevados gradientes. La interpolación exponencial propuesta mostró buen comportamiento, ajustándose a las necesidades de cada caso, y computando gradientes del orden de los existentes.

Como contrapartida, la resolución del sistema de ecuaciones en forma iterativa representa un punto que debe optimizarse, puesto que los resultados se obtienen luego un número de iteraciones globales entre 4 y 50, dependiendo del número de  $Pe$  y de las características del problema. Sumado a las iteraciones realizadas en la determinación de los



gradientes a partir de la interpolación exponencial (SubStep1), que resultan elevadas, del orden de 40 iteraciones y reduciéndose drásticamente a medida que el sistema completo entra en convergencia. Sin embargo, a partir de los casos presentados, se comprobó la capacidad de resolución del método, que resultó ser altamente satisfactoria, ya que se obtuvieron soluciones estabilizadas en todos los casos. En cuanto al inconveniente que el proceso iterativo presenta, se deja abierta la posibilidad para el desarrollo de esquemas iterativos no lineales mejorados con el objetivo de acelerar la convergencia, cuestión que no fue el objetivo principal de este trabajo. Por otra parte, es conveniente resaltar que en los casos transitorios donde la solución en cada paso de tiempo varía poco, y las capas límites se van desarrollando en la medida que avanza la resolución del problema, es esperable que este costo adicional sea reducido significativamente.

Para mostrar la potencialidad del método se incluyó un capítulo donde se analizó el problema de convección-difusión-radiación. El MDD mostró capacidad de estimar los parámetros incluso en situaciones donde no se poseía información sobre el campo de velocidades, sin embargo evidenció un comportamiento ligeramente subdifusivo en estas situaciones, lo que deja abierto el camino al estudio profundo de este tipo de problemas. La presencia de términos convectivos, en problemas de radiación dominante, corrigió esta situación, presentando soluciones satisfactorias.

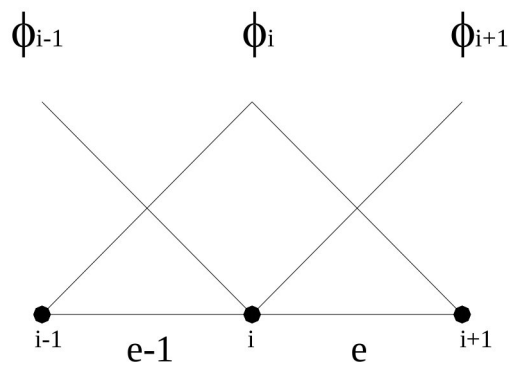
Como corolario de este trabajo debe establecerse una discusión entre la utilización de métodos de estabilización ó la posibilidad de un refinamiento de las mallas al momento de resolver problemas de transporte. Si bien hay muchos aspectos a tener en cuenta, se pueden resaltar que de acuerdo a la capacidad computacional disponible, se podrá, ó no, realizar un refinamiento de mallas, siendo el método más sencillo en éstas condiciones. Además de ser un método fundamental si el problema requiere capturar en forma fiel la morfología de las capas límites. Cuando esto no sea una premisa, ó la malla sea de tamaño considerable, y lo que se desean son soluciones estabilizadas, sin apartarse de la realidad, es muy beneficioso el uso cualquier esquema de resolución estabilizado, en particular del MDD, debido a las características discutidas a lo largo del trabajo.

## Apéndice:

### Ap1.I. Funciones de forma:

Las funciones de forma cumplen un rol muy importante en una formulación de elementos finitos. Debido a la característica de poseer valor no nulo en solamente un nodo, hace que el sistema tenga un alto grado de desacoplamiento generando matrices tipo banda y reduciendo notablemente el costo computacional. Su altura unitaria permite que los coeficientes de la interpolación adquieran el significado de la variable que se desea conocer en cada nodo.

Las funciones de forma lineales para el problema unidimensional presentan la siguiente forma:



donde están definidas, en forma elemental, por las siguientes expresiones:

$$\text{Ap. -1-} \quad \begin{aligned} f_i^e &= 1 - \frac{x}{Dx} & f_{i+1}^e &= \frac{x}{Dx} \\ f_i^{e-1} &= \frac{x}{Dx} & f_{i-1}^{e-1} &= 1 - \frac{x}{Dx} \end{aligned}$$

donde  $x$  es la coordenada local dentro de cada elemento y  $Dx$  es la longitud elemental (acá se supuso una malla uniforme). Mayores órdenes de interpolación son factibles, siempre que cumpla con las condiciones establecidas acerca del soporte local y de su altura unitaria en el nodo asociado y nulo en los demás nodos de la malla.

### Ap1.II. Los parámetros de estabilización:

La búsqueda de los parámetros de estabilización, tal que entregaran un indicio de estabilidad, comenzó con el estudio de casos que, si bien se encontraban limitados en cuanto a

las restricciones sobre ellos impuestos, presentaban una solución provisoria y que, en primera instancia, era plausible.

**1Ap.II.i. El parámetro de estabilización crítico:**

Sea el esquema de upwinding obtenido de la ecuación diferencial modificada, se requiere obtener el valor del parámetro tal que la solución no incurra en valores negativos:

$$\text{Ap. -2-} \quad [Pe(1 - a) - 1]T_{i+1} + [2aPe + 2]T_i + [-Pe(1 + a) - 1]T_{i-1} = 0$$

En el ejemplo visto en el apartado 1.1.2, la expresión **Ap. -2-** se particulariza con  $T_{i-1} = T_1 = 0$ ,  $T_i = T_2$  y  $T_{i+1} = T_3 = \bar{T}$ . El objetivo buscado es lograr que sea  $T_2 \geq 0$  para todos los valores de Pe.

Reemplazando se obtiene que:

$$\text{Ap. -3-} \quad [Pe(1 - a) - 1]\bar{T} + [2aPe + 2]T_2 = 0$$

Despejando y trabajando la expresión anterior resulta:

$$\text{Ap. -4-} \quad T_2 = \frac{1 - a}{a + \frac{1}{Pe}} \bar{T}$$

Se ve claramente que la condición para que  $T_2$  sea mayor que cero es la siguiente:

$$\text{Ap. -5-} \quad \frac{1 - a}{a + \frac{1}{Pe}} \geq 0$$

y se llega a la expresión dada en **-13-**:

$$\text{Ap. -6-} \quad a_{cr} \geq 1 - \frac{1}{Pe}$$

**1Ap.II.ii. El parámetro de estabilización óptimo:**

Partiendo del mismo esquema que el visto en el apartado anterior, ahora se pretende lograr que la solución nodal que entrega el método coincida con la solución exacta. Para esto recordamos la expresión del esquema de upwinding:

$$\text{Ap. -7-} \quad [Pe(1 - a) - 1]T_{i+1} + [2aPe + 2]T_i + [-Pe(1 + a) - 1]T_{i-1} = 0$$

donde se conoce la solución exacta dada por:

$$T_i = A \hat{e}^{\frac{ux_i}{k}} - e^{\frac{u(x_i - Dx)}{k}} \hat{u} \quad T_{i-1} = A \hat{e}^{\frac{u(x_i - Dx)}{k}} - e^{\frac{ux_i}{k}} \hat{u} \quad T_{i+1} = A \hat{e}^{\frac{u(x_i + Dx)}{k}} - e^{\frac{ux_i}{k}} \hat{u}$$

**Ap. -8-**

$$A = \bar{T} \frac{1}{\hat{e}^{\frac{uL}{k}} - e^{\frac{uL}{k}} \hat{u}}$$

donde  $x_i$  indica la posición genérica del nodo  $i$ , mientras que los nodos  $i+1$  e  $i-1$  están representados por  $x_i + x$  y  $x_i - x$  respectivamente.

Reemplazando **Ap. -8-** en **Ap. -7-** resulta, eliminando la constante  $A$ , lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Ap. -9-} \quad & [Pe(1-a) - 1] \hat{e}^{\frac{ux_i}{k}} - e^{\frac{u(x_i - Dx)}{k}} \hat{u} + [2aPe + 2] \hat{e}^{\frac{ux_i}{k}} \hat{u} + \\ & + [-Pe(1+a) - 1] \hat{e}^{\frac{ux_i}{k}} - e^{\frac{u(x_i - Dx)}{k}} \hat{u} = 0 \end{aligned}$$

Al expandir la expresión anterior resulta lo que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Ap. -10-} \quad & Pe(1-a) - 1 - Pe(1-a) e^{\frac{ux_i}{k}} e^{\frac{uDx}{k}} + e^{\frac{ux_i}{k}} e^{\frac{uDx}{k}} + 2aPe + 2 - 2aPe e^{\frac{ux_i}{k}} - \\ & - 2e^{\frac{ux_i}{k}} - Pe(1+a) - 1 + Pe(1+a) e^{\frac{ux_i}{k}} e^{\frac{uDx}{k}} + e^{\frac{ux_i}{k}} e^{\frac{uDx}{k}} = 0 \end{aligned}$$

Luego de un poco de álgebra, se llega a una expresión depurada:

$$\text{Ap. -11-} \quad -Pe e^{2Pe} + aPe e^{2Pe} + e^{2Pe} - 2aPe - 2 + Pe e^{-2Pe} + aPe e^{-2Pe} + e^{-2Pe} = 0$$

Reagrupando los términos con del otro lado del igual resulta:

$$\text{Ap. -12-} \quad Pe(e^{-2Pe} - e^{2Pe}) + (e^{2Pe} + e^{-2Pe} - 2) = aPe(2 - (e^{2Pe} + e^{-2Pe}))$$

Despejando se observa que el segundo término del primer miembro es igual a  $-1$ , mientras que el primer término es necesario trabajarlo un poco más:

$$\text{Ap. -13-} \quad a = \frac{e^{-2Pe} - e^{2Pe}}{2 - (e^{2Pe} + e^{-2Pe})} \cdot \frac{1}{Pe} = \frac{2\text{sh}(2Pe)}{2 - 2\text{ch}(2Pe)} \cdot \frac{1}{Pe}$$

Por las propiedades de las funciones hiperbólicas se tiene que:

$$\text{Ap. -14-} \quad \text{sh}(2Pe) = \sqrt{\text{ch}^2(2Pe) - 1} \quad \text{coth}(Pe) = \sqrt{\frac{\text{ch}(2Pe) + 1}{\text{ch}(2Pe) - 1}}$$

Utilizando las **Ap. -14-** y reemplazándolas en **Ap. -13-**, y escribiendo la diferencia de cuadrados para la expresión del seno hiperbólico, se obtiene la ya conocida expresión del valor óptimo del parámetro de estabilización dado en **-14-**:

$$\text{Ap. -15-} \quad a_{op} = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe}$$

### Ap1.III. El principio de trabajos virtuales:

Partiendo de la ecuación diferencial que modela el problema vista en -2-, se pudo conocer la forma que la interpreta como residuo ponderado -21-, que se repite a continuación para mayor comodidad:

$$\text{Ap. -16-} \quad \int_{\Omega} w_i \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} + Q \right) d\Omega = 0$$

$$T @ \hat{T} = \mathring{a} \sum_{i=1}^n f_i T_i$$

Se desea integrar por partes esta expresión con el fin de reducir el orden de derivación que sobre las funciones  $w_i$  se requiere. Para esto distribuimos la función  $w_i$  observando que el único término que precisa tratamiento especial es el que contiene la divergencia del gradiente de la temperatura. Por propiedad de la derivación en cadena podemos escribir lo siguiente:

$$\text{Ap. -17-} \quad \tilde{N}^T (w_i D \tilde{N} \hat{T}) = \tilde{N}^T w_i D \tilde{N} \hat{T} + w_i \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T}$$

$$w_i \tilde{N}^T D \tilde{N} \hat{T} = \tilde{N}^T (w_i D \tilde{N} \hat{T}) - \tilde{N}^T w_i D \tilde{N} \hat{T}$$

Reemplazando Ap. -17- en Ap. -16- resulta:

$$\text{Ap. -18-} \quad \int_{\Omega} w_i \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T (w_i D \tilde{N} \hat{T}) - \tilde{N}^T w_i D \tilde{N} \hat{T} + Q \right) d\Omega = 0$$

Ahora aplicando el teorema de la divergencia, podemos enviar el segundo término de Ap. -18- a la frontera:

$$\text{Ap. -19-} \quad \int_{\Omega} \text{div}(w_i D \tilde{N} \hat{T}) d\Omega = \int_G w_i n^T D \tilde{N} \hat{T} dG$$

Reordenando Ap. -18- y reemplazando Ap. -19- se tiene lo siguiente:

$$\text{Ap. -20-} \quad \int_{\Omega} w_i \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T w_i D \tilde{N} \hat{T} \right) d\Omega = \int_{\Omega} w_i Q d\Omega + \int_G w_i n^T D \tilde{N} \hat{T} dG$$

y sabiendo que  $\bar{q}_n = -n^T D \tilde{N} \hat{T}$ , y que esta condición de Neumann está presente solamente en  $N$ , se llega a la formulación débil presentada en -22-:

$$\text{Ap. -21-} \quad \int_W \left( u^T \tilde{N} \hat{T} + \tilde{N}^T w_i D \tilde{N} \hat{T} \right) dW = \int_W Q dW - \int_{G_N} \bar{q}_n dG$$

### Ap1.IV. Fundamentos matemáticos del MEF:

En esta sección se demostrará como, partiendo de la ecuación diferencial que modela el problema, en este caso de la transferencia de calor estacionaria, puede probarse la factibilidad del modelado a través del principio de trabajos virtuales del problema ó, lo que es lo mismo, que el problema puede tener sus orígenes en una formulación variacional, incluso se probará como el método de los elementos finitos puede nacer de la idea de minimizar un funcional determinado.

El problema modelado por la ecuación diferencial (ED) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Ap. -22-} \quad & -u^T \tilde{N} T + \tilde{N}^T D \tilde{N} T + Q = 0 && \text{en } W \\ & T = \bar{T} && \text{sobre } G_D \\ & \bar{q}_n = -n^T D \tilde{N} T && \text{sobre } G_N \end{aligned}$$

visto previamente en -2-.  $W$  es el dominio donde se quiere resolver el problema mientras que  $G_D$  y  $G_N$  son las fronteras de Dirichlet y de Neumann, debiendo satisfacerse que  $G_D \cup G_N = G$  y que  $G_D \cap G_N = \emptyset$ . La condición de Dirichlet representa la temperatura impuesta sobre la parte de la frontera correspondiente, mientras que la de Neumann, representa un flujo térmico impuesto sobre el resto de la frontera.

La solución de este problema se denomina solución fuerte y debe ser por lo menos dos veces diferenciable. A la formulación ED se la llama también formulación fuerte.

Sea  $V$  el conjunto de funciones de cuadrado integrable definidas sobre  $W$  tal que sean nulas en  $G_D$ , pudiendo reinterpretarse como el conjunto de movimientos virtuales que es compatible con los vínculos. Si multiplicamos la ecuación diferencial por una función cualquiera  $w \in V$  e integramos en el dominio  $W$  resulta:

$$\text{Ap. -23-} \quad \int_W \left( u^T \tilde{N} T + \tilde{N}^T D \tilde{N} T + Q \right) dW = 0$$

Integrando por partes el segundo término, ver el apartado Ap.III, se obtiene:

$$\text{Ap. -24-} \quad \int_W \left( \nabla u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T D \nabla u \right) dW = \int_W Q dW - \int_{\Gamma_N} \bar{q}_n dG$$

Se introduce la siguiente notación compacta:

$$\text{Ap. -25-} \quad a(T, w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_W \left( \nabla u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T D \nabla u \right) dW$$

$$L(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_W Q dW - \int_{\Gamma_N} \bar{q}_n dG$$

y por lo tanto:

$$\text{Ap. -26-} \quad a(T, w) = L(w)$$

Esta expresión es la versión del principio de trabajos virtuales (conocido en mecánica), para el problema de la transferencia de calor estacionaria, por esto es que se le puede denominar el principio de “potencias virtuales”.

Aquí se demuestra que toda solución del problema ED, lo es también del problema denominado formulación variacional FV que se desarrolla a continuación.

El problema formulación variacional, conocido como formulación débil, plantea encontrar T tal que se cumpla la siguiente relación:

$$\text{Ap. -27-} \quad a(T, w) = L(w) \quad \forall w \in V$$

donde se deben verificar las siguientes propiedades

- a)  $a(T, w)$  y  $L(w)$  son lineales en sus argumentos T y w.
- b)  $a(T, w)$  y  $L(w)$  son continuas en sus argumentos
- c)  $a(T, w)$  es definida positiva, es decir que

$$\text{Ap. -28-} \quad \begin{aligned} a(T, w) &\geq 0 \quad \forall w \in V \\ a(w, w) &= 0 \quad \hat{U} \quad w = 0 \end{aligned}$$

Se debe aclarar que para satisfacer la propiedad c) se deben eliminar los “movimientos rígidos” en el sistema, por esto la necesidad de establecer las condiciones de Dirichlet.

Se demuestra a través del teorema de Lax-Milgram que bajo las condiciones estipuladas anteriormente, el problema FV tiene solución única, denominándola solución débil. Nótese que la solución débil tiene menos restricciones que la solución fuerte debido a que debe ser por lo menos una vez diferenciable. De aquí que se puede afirmar que toda solución fuerte (solución de ED) es también solución débil (solución de FV).

Ahora se considera que la solución débil de FV es tal que pueda realizarse el procedimiento inverso, es decir, lo siguiente:

$$\text{Ap. -29-} \quad a(T, w) - L(w) = \int_W (w u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T w D \tilde{N}^T) dW - \int_W w Q dW + \int_{G_N} w \bar{q}_n dG$$

El segundo término de la primera integral se integra por partes nuevamente:

$$\begin{aligned} \text{Ap. -30-} \quad \tilde{N}^T (w_i D \tilde{N}^T) &= \tilde{N}^T w_i D \tilde{N}^T + w_i \tilde{N}^T D \tilde{N}^T \\ \tilde{N}^T w_i D \tilde{N}^T &= \tilde{N}^T (w_i D \tilde{N}^T) - w_i \tilde{N}^T D \tilde{N}^T \end{aligned}$$

Reemplazando **Ap. -30-** en **Ap. -29-** se obtiene:

$$\text{Ap. -31-} \quad \int_W (w u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T (w_i D \tilde{N}^T) - w_i \tilde{N}^T D \tilde{N}^T) dW - \int_W w Q dW + \int_{G_N} w \bar{q}_n dG = 0$$

y llevando el término de la divergencia a la frontera resulta:

$$\text{Ap. -32-} \quad \int_W (w u^T \tilde{N}^T - w_i \tilde{N}^T D \tilde{N}^T) dW - \int_W w Q dW + \int_{G_N} (\bar{q}_n + n^T D \tilde{N}^T) dG = 0$$

Reordenando los términos:

$$\text{Ap. -33-} \quad \int_W (w u^T \tilde{N}^T + w_i \tilde{N}^T D \tilde{N}^T + w Q) dW - \int_{G_N} (\bar{q}_n + n^T D \tilde{N}^T) dG = 0$$

La suma algebraica de las dos integrales debe ser nula para cualquier función  $w$  del espacio  $V$ . Si los paréntesis de los integrandos son continuos se demuestra fácilmente que para que la expresión **Ap. -33-** se cumpla, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \text{Ap. -34-} \quad - u^T \tilde{N}^T + \tilde{N}^T D \tilde{N}^T + Q &= 0 && \text{en } W \\ \bar{q}_n + n^T D \tilde{N}^T &= 0 && \text{sobre } G_N \end{aligned}$$

las cuales son las que definen el problema ED ya presentado, demostrando así, que toda solución de FV suficientemente regular (suficientemente suave) satisface también el problema ED, ó lo que es lo mismo, que toda solución débil suficientemente regular es también solución fuerte.

Otro punto de discusión es el de las condiciones de contorno, es fácil ver como las condiciones de Neumann nacen naturalmente de la formulación variacional mientras que las condiciones de Dirichlet deben ser necesariamente incluidas en forma externa a través de la definición del espacio de funciones  $w$ . De esto es que a las condiciones de Neumann se las denomina naturales, y a las de Dirichlet, forzadas.



Por último, existe un tercer punto de vista denominado función extremal (FE). Como su nombre lo indica, la idea es encontrar el punto extremo ó punto estacionario de un dado funcional. Siendo funcional cualquier mecanismo por el cual se le asigna un número a una función.

Sea el siguiente funcional:

$$\text{Ap. -35-} \quad J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) \quad " \quad u \in V$$

Acá el objetivo sería encontrar la función  $T \in V$  tal que sea mínimo  $J(T)$ . Esta definición es una especie de Lagrangeano en mecánica ó una energía libre en elasticidad, sin embargo en el problema de la conducción de calor no tiene significado físico.

Para evaluar los puntos estacionarios de  $J(T)$  utilizamos la derivada de Gateaux, conocida como derivada direccional. Para esto introducimos el parámetro real  $\epsilon$  y una dirección  $w$ :

$$\text{Ap. -36-} \quad J(T + \epsilon w) = \frac{1}{2} a(T + \epsilon w, T + \epsilon w) - L(T + \epsilon w)$$

Por las propiedades de las formas bilineales se puede escribir lo siguiente:

$$\text{Ap. -37-} \quad J(T + \epsilon w) = \frac{1}{2} a(T, T) + \frac{1}{2} \epsilon a(T, w) + \frac{1}{2} \epsilon a(w, T) + \frac{1}{2} \epsilon^2 a(w, w) - L(T) - \epsilon L(w) = 0$$

Sabiendo que  $a(T, w) = a(w, T)$ , derivando respecto de  $\epsilon$  y haciendo el límite para éste tendiendo a cero se obtiene:

$$\text{Ap. -38-} \quad \frac{d}{d\epsilon} [J(T + \epsilon w)] = a(T, w) - L(w) = 0$$

que significa lo siguiente:

$$\text{Ap. -39-} \quad a(T, w) = L(w) \quad " \quad w \in V$$

La cual es idéntica a la expresión **Ap. -27-** demostrando la equivalencia entre la formulación extremal y la formulación variacional.

Retomando la **Ap. -37-** si reordenamos los términos y suponemos que  $\epsilon = 1$ , puede escribirse lo siguiente:

$$\text{Ap. -40-} \quad J(T + w) - J(T) = \frac{1}{2} a(w, w) + a(T, w) - L(w) = 0$$

De la formulación variacional podemos asegurar que si  $T$  es la solución débil a ese problema, resulta que los dos últimos términos se anulan entre si por el equilibrio establecido en **Ap. -27-**:

$$\text{Ap. -41-} \quad J(T + w) - J(T) = \frac{1}{2} a(w, w) = 0$$

y por la propiedad mencionada en **Ap. -28-**:

$$\text{Ap. -42-} \quad a(w, w) = 0 \quad \hat{U} \quad w = 0$$

y queda así demostrado que si T es la solución débil del problema FV, T es un mínimo del funcional definido en el problema FE.

De esta manera queda demostrada la equivalencia, ida y vuelta, entre el problema FV y FE, es más, habiendo demostrado la equivalencia entre el problema ED y FV podemos afirmar que para soluciones suficientemente regulares se tiene una unicidad entre los puntos de abordaje del problema en cuestión, habiéndose probado la factibilidad del uso del método de los elementos finitos.

Además se demuestra en [31] que lo explicado anteriormente tiene validez en el caso en el que la forma  $a(T, w)$  no sea simétrica como es en los problemas de transporte debido a la asimetría introducida por los términos convectivos.

### Ap1.V. El Jacobiano de transformación:

Sea una partícula de fluido que ocupa una posición  $\bar{a}$  en el espacio y está en un tiempo  $t + Dt$ , se busca llevar a dicha partícula a través de una transformación de coordenadas a una posición en un tiempo  $t$ . Lo explicado se evidencia en la siguiente igualdad:

$$\text{Ap. -43-} \quad \int_{W(t+Dt)} \phi(a, t + Dt) v(a, t + Dt) dW(t + Dt) = \int_{W(t)} \phi(x + v(x, t)Dt, t + Dt) v(x + v(x, t)Dt, t + Dt) |J| dW(t)$$

donde  $|J|$  es el determinante de la matriz jacobiana de transformación de coordenadas  $\bar{a}$  a  $\mathbf{x}$ , la cuál está dada por:

$$\text{Ap. -44-} \quad J_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

con

$$\text{Ap. -45-} \quad a_i = x_i + v_i Dt$$

Reemplazando **Ap. -45-** en la **Ap. -44-** se obtiene lo siguiente:

$$\text{Ap. -46-} \quad J_{ij} = d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta t \quad \text{p} \quad \frac{\partial a}{\partial x} = I + \tilde{N}^T v \Delta t$$

En forma directa se obtienen las componentes de la matriz **J**:

$$\text{Ap. -47-} \quad J = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Delta t & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \Delta t & \ddot{\circ} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta t & 1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \Delta t & \div \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \Delta t & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \Delta t & 1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Delta t & \div \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \emptyset \end{matrix}$$

donde el determinante de la **Ap. -47-** viene dado por la siguiente expresión donde se despreciaron los términos de mayor orden por considerarse pequeño el desplazamiento **v** t:

$$\text{Ap. -48-} \quad |J| = 1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta t + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Delta t = 1 + \text{div} v \Delta t$$

En caso de reemplazar el producto **v** t por el desplazamiento **h** para adecuarlo a la formulación de dominios desplazados, resulta:

$$\text{Ap. -49-} \quad |J| = 1 + \text{div} h$$

De la misma manera, si se quiere obtener la expresión **Ap. -43-** para t- t el resultado es el siguiente:

$$\text{Ap. -50-} \quad |J| = 1 - \text{div} h$$

## Ap1.VI. Mecanismos de convección-difusión:

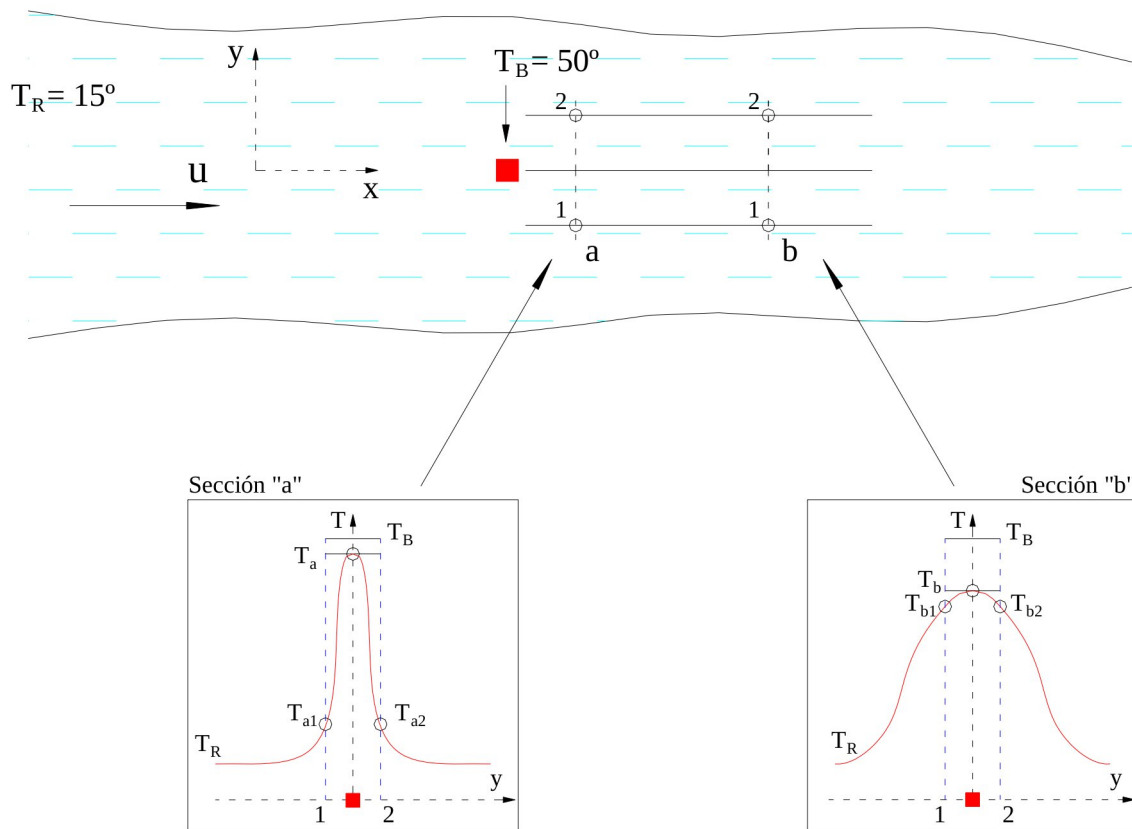
Un ejemplo simple de cómo es un mecanismo de convección-difusión se presenta en la primera parte de este apartado.

Los problemas de la ingeniería abordados luego incorporan mecanismos de convección-difusión en la descripción dinámica de los mismos. Se presentan las ecuaciones gobernantes de cada problema con una breve explicación de cada uno.

### 1Ap.VI.i. Un caso simple, “la brasa caliente”:

Una manera sencilla de ilustrar el funcionamiento del mecanismo de convección-difusión es el siguiente ejemplo simplificado de carácter ideal, supongamos un río a temperatura dada  $T_R$  que corre con una velocidad **u**, en un punto del mismo se coloca, de

alguna forma, una brasa caliente que consideramos puntual frente a las dimensiones del río, cuya temperatura es  $50^\circ$  como muestra la figura:



Los gráficos indicados, se refieren al régimen estacionario del problema, mostrando un corte transversal a la corriente. Dos secciones fueron esquematizadas con el fin de establecer las diferencias entre los campos de temperatura correlacionándolos con los mecanismos de convección-difusión.

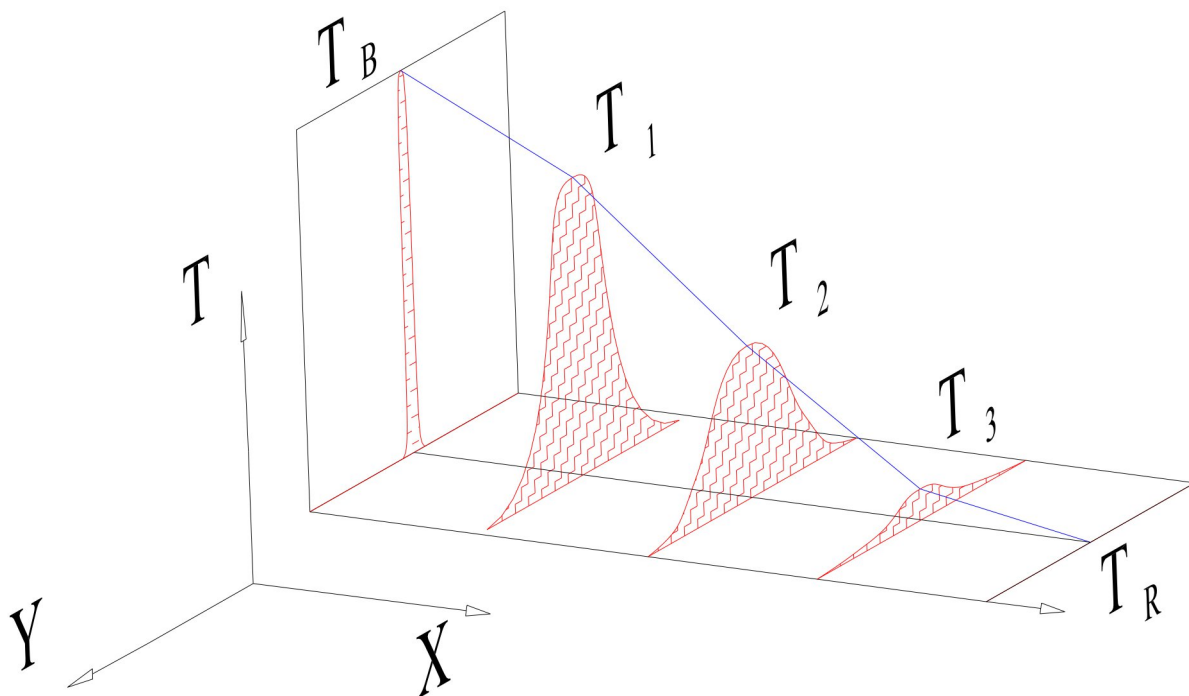
Para figurar claramente el mecanismo convectivo, se asume que la difusividad del agua es nula. Si este fuera el caso, sólo aumentarían su valor de temperatura aquellas partículas que se encuentran en la línea de corriente que atraviesa la brasa, mientras que las partículas vecinas mantendrían su valor de temperatura  $T_R$ , pues no existiría el intercambio de energía entre ellas. En consecuencia los gráficos para las secciones a y b serían idénticos e iguales a un escalón de altura igual a  $T_B$  y de ancho despreciable según la hipótesis de punto caliente.

En el caso opuesto, es decir, velocidad del río nula y difusividad del agua no nula el problema se vuelve radial con centro en la brasa. La difusividad le permite a las partículas realizar el intercambio de energía, aumentando la temperatura de las partículas vecinas a la brasa y así sucesivamente a medida que se aleja de la misma. El resultado es una distribución

de temperaturas que disminuye de  $T_B$  a  $T_R$  en función de la distancia radial una vez alcanzado el equilibrio térmico.

Combinando los dos efectos resultan las distribuciones de temperaturas mostradas anteriormente. Se puede identificar cómo el campo de temperaturas es arrastrado de la sección “a” a la sección “b”, y a medida que va de una a otra, la difusión hace lo propio esparciendo el campo de temperaturas en la dirección transversal a la corriente, lo que da el efecto del aplastamiento de la curva. El mecanismo de difusión también está presente en la dirección de la corriente, por esto es que la curva disminuye su valor máximo. Si se traslada el análisis a una sección muy distante respecto de la brasa, la difusividad habrá esparcido completamente la curva, finalizando, todas las partículas a la misma temperatura  $T_R$ , conforme con lo intuitivo.

Una representación completa de la variación del campo de temperaturas sería la siguiente:



donde se observa como la difusión esparce el campo de temperaturas tanto en el eje  $X$  como en el  $Y$ .

De este ejemplo se desprende que los fenómenos de transporte están asociados a una fuerte dependencia respecto de la “información” que el campo de velocidades trae desde corriente arriba, pues una partículas “ve lo que el campo de velocidades le muestra”, ó lo que es lo mismo “no se entera de la presencia de la brasa hasta que llega a donde está la misma”.

### 1Ap.VI.ii. Otros casos:

#### La dispersión de contaminante en un río:

La ecuación correspondiente es la siguiente:

$$\text{Ap. -51-} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + S$$

donde  $c$  es la concentración promedio,  $S$  es un término fuente,  $\mathbf{v}$  es el campo de velocidades y  $\mathbf{D}$  es la matriz de difusividad que incorpora mecanismos de turbulencia y difusión molecular.

#### Transporte de vorticidad en las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles:

Las ecuaciones de Navier-Stokes permiten obtener el campo  $\mathbf{v}$  visto en el ejemplo anterior como:

$$\text{Ap. -52-} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

donde  $p$  es la presión y  $\eta$  es la viscosidad cinemática. Para coordenadas cartesianas de introduce la vorticidad como un escalar que satisface la **Ap. -52-**, además, en dos dimensiones, se introduce la función corriente, ambas se definen como:

$$\text{Ap. -53-} \quad \mathbf{v} = (u, v) = (\psi_y, -\psi_x)$$

$$x = u_x - v_y$$

donde finalmente resultan dos ecuaciones que se resuelven conjuntamente:

$$\text{Ap. -54-} \quad \frac{\partial x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla x = \eta \nabla^2 x$$

$$\nabla^2 \psi + x = 0$$

siendo un par de ecuaciones no lineales, pero que incluyen el mecanismo de convección-difusión para la vorticidad.

#### Contaminación atmosférica:

Para determinar la posición de elementos radioactivos con una actividad específica  $A^i$  se plantea la siguiente ecuación:

$$\text{Ap. -55-} \quad \frac{\partial A^i}{\partial t} + \mathbf{V}_H \cdot \nabla_H A^i + \frac{\partial}{\partial s} (v_s^i A^i) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\alpha}{\epsilon} K_z \frac{\partial}{\partial s} (A^i) \right) + S^i$$

donde  $s$  es una coordenada vertical que sigue al terreno,  $\mathbf{V}_H$  es la velocidad promedio del viento en el sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ ,  $\nabla_H$  es el operador gradiente correspondiente,  $S^i$

incluye términos fuente donde el decaimiento y la transformación de los isótopos son tenidos en cuenta,  $K_z$  es un coeficiente de difusión vertical que es función del peso y  $v^i$  está compuesto por el movimiento vertical en el sistema y la velocidad de establecimiento gravitatoria.

**Ecuación de Fokker-Planck:**

La misma se deriva de la ecuación de Boltzmann de la teoría cinética para la función de distribución de velocidades  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  de las partículas en un gas:

Ap. -56-

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + a \cdot \nabla_v f = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \right) - \nabla_v \cdot (f \langle D\mathbf{v} \rangle) + \frac{1}{2} \nabla_v \cdot \nabla_v : (f \langle D\mathbf{v} D\mathbf{v} \rangle)$$

donde  $a$  es la aceleración de las partículas y  $\nabla_v$  es el operador gradiente con respecto a la variable velocidad,  $\mathbf{v}$  es la deflexión de la velocidad y las funciones aplicadas son el primer y el segundo momento aplicados a ésta. Algunos modelos incorporan los mecanismos de convección-difusión como sigue:

Ap. -57-

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \cdot \nabla_v (f \nabla_v H) + \frac{1}{2} \nabla_v \cdot \nabla_v : (f \nabla_v \nabla_v G)$$

donde  $H$  y  $G$  son funcionales de colisión, el término  $\nabla_v H$  se denomina coeficiente de fricción dinámica y el término  $\nabla_v \cdot \nabla_v G$  es llamado coeficiente de difusión.

**Ecuaciones de un semiconductor:**

Un modelo básico se desarrolló en términos del potencial eléctrico  $\phi$ , de la concentración electrónica  $n$  y de la concentración de huecos  $p$ , dando un sistema de ecuaciones como el que sigue:

Ap. -58-

$$\begin{aligned} \epsilon \nabla^2 \phi &= q(n - p - D) \\ -q \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_n &= qR \\ q \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p &= -qR \end{aligned}$$

donde  $\epsilon$  es la permitividad del material.  $q$  es la unidad de carga,  $D$  es el dopaje y  $R$  es un término de recombinación. Las corrientes  $\mathbf{J}_n$  y  $\mathbf{J}_p$  están dadas por expresiones como:

Ap. -59-

$$\mathbf{J}_n = q \mu_n (\nabla \phi n - n \nabla \phi)$$

donde  $\mu_n$  es la movilidad de los electrones y  $U_t$  es la barrera de potencial interno. Algo similar se obtiene para  $J_p$

**Transporte en aguas subterráneas:**

Un modelo macroscópico para el transporte de una sustancia en medios porosos está dado por:

$$\text{Ap. -60-} \quad \frac{\partial(\phi c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q}c - \mathbf{D}\nabla c) = S(\phi, c)$$

donde  $\phi$  es la porosidad,  $c$  es la concentración de la sustancia,  $S(\phi, c)$  incluye términos fuente relacionados con el crecimiento y el decrecimiento de la concentración en su interacción con el medio,  $\mathbf{D}$  es la matriz de difusividad que incluye la dispersión mecánica y la difusión molecular y  $\mathbf{q}$  es la descarga de agua que se obtiene de la siguiente expresión:

$$\text{Ap. -61-} \quad \frac{\partial(\rho \mathbf{q})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0$$

donde  $\rho$  es la densidad, mientras que la ley de Darcy define la velocidad de Darcy  $\mathbf{q}$ :

$$\text{Ap. -62-} \quad \mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla h$$

donde  $h$  es la altura hidráulica función de  $x$  y de la altura y  $\mathbf{K}$  es la matriz de conductividad hidráulica.

**Flujo externo compresible:**

En problemas de aeronáutica es común resolver en forma completa las ecuaciones acopladas de Navier-Stokes, que incluyendo los flujos compresibles adquieren la siguiente forma general:

$$\text{Ap. -63-} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(f, g, h) = 0$$

$$f = f^I + f^V$$

donde, en términos de la densidad  $\rho$ , presión  $p$ , componentes de velocidad ( $u, v, w$ ) y energía total  $E$  se tiene:

$$\text{Ap. -64-} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}^I = \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}^V = \begin{pmatrix} 0 \\ -t_{xx} \\ -t_{xy} \\ -t_{xz} \\ \rho u t_{xx} - v t_{xy} - w t_{xz} + q_x \end{pmatrix}$$



con similares expresiones para  $g^I$ ,  $h^I$ ,  $g^V$  y  $h^V$ . Además, para gases adiabáticos con constante adiabática dada por se tiene:

$$\text{Ap. -65-} \quad H = E + \frac{p}{r} = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{gp}{(g-1)r}$$

mientras que las tensiones y los flujos calóricos vienen dados por:

$$\text{Ap. -66-} \quad t_{xx} = \frac{2}{3} m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad t_{xy} = m \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t}$$

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

con  $\frac{p}{r} = RT$ ,  $k$  es la conductividad y  $\mu$  la viscosidad del fluido. En este caso dos mecanismos de convección-difusión están en juego, uno para el campo de velocidades y otro para el campo de temperaturas. Las ecuaciones anteriores son para flujos laminares, a continuación la extensión viene dada para flujos turbulentos.

**Transporte turbulento:**

Un cálculo en base a un modelo turbulento es esencial en determinados casos cuando se quieren resolver las ecuaciones dadas en el apartado anterior. Para esto se utilizan modelos denominados k-  $\epsilon$  pues involucran relaciones entre la energía puesta en juego en la turbulencia  $k$  y la tasa de disipación  $\epsilon$ . Estos modelos establecen lo siguiente:

$$\text{Ap. -67-} \quad \frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{v} k - \mu_k \nabla k) = S_k$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \epsilon)}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{v} \epsilon - \mu_\epsilon \nabla \epsilon) = S_\epsilon$$

donde  $\bar{\rho}$  es la densidad promedio de Reynolds,  $\mathbf{v}$  es la velocidad promedio de masa y  $\mu_k$  y  $\mu_\epsilon$  son difusividades relacionadas con los fenómenos de transferencia en un medio turbulento. El sistema depende fuertemente de los términos fuente  $S_k$  y  $S_\epsilon$ , que se obtienen en forma empírica para cada problema. El conjunto de ecuaciones para fluidos en su forma completa dado por las Ap. -63-, Ap. -64-, Ap. -65-, Ap. -66- y Ap. -67- es uno de los modelos matemáticos más complicados en uso y su comportamiento está regido por diversos mecanismos de convección-difusión.

## **Ap1.VII. Códigos desarrollados:**

Los códigos se desarrollaron en lenguaje Fortran versión 6.0. Estos integran un framework de elementos finitos, cada código representa un “elemento” formando parte del núcleo del mismo. El sentido de la palabra “elemento” implica la formulación propiamente dicha, escrita en formato elemental, es decir, genera los aportes elementales a la matriz global. Luego el ensamblaje realizado por el framework completa el sistema de ecuaciones algebraico que modela el problema global. La resolución es mediante un resolvidor directo.

Los nombres de los códigos implementados son los siguientes:

Cálculo térmico y de los gradientes para el problema de convección-difusión:

**MDDCD\_1D\_T**

Cálculo de los desplazamientos “h” para el problema de convección difusión:

**MDDCD\_1D\_H**

Cálculo térmico y de los gradientes para el problema de convección-difusión-radiación:

**MDDCDR\_1D\_T**

Cálculo de los desplazamientos “h” para el problema de convección-difusión-radiación:

**MDDCDR\_1D\_H**

En las páginas subsiguientes se incluyen los códigos propiamente dichos.







































## Bibliografía:

- [1]. C. Hirsch, Numerical Computations of Internal and External Flow, Vol. 2 (John Wiley, 1990).
- [2]. S. Idelsohn and Oñate, Finite element and finite volumes. Two good friends, Int. J. Num. Methods Engrg. 37 (1994) 3323-3341.
- [3]. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, The Finite Element Method (McGraw Hill, Vol. I-II, 1989-1991).
- [4]. F.G. Basombrio y M.J. Vénere, Notas introductorias al método de elementos finitos, Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche, CNEA-UNdC (1986).
- [5]. A. Brooks and T.J.R. Hughes, Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32 (1982) 199-259.
- [6]. T.J.R. Hughes and M. Mallet, A new finite element formulations for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 58 (1986) 305-328.
- [7]. T.J.R. Hughes, G. Hauke and K. Jansen, Stabilized finite element methods in fluids: Inspirations, origins, status and recent developments, in: T.J.R. Hughes, E. Oñate and O.C. Zienkiewicz, eds., Recent Developments in Finite Element Analysis. A book dedicated to Robert L. Taylor (Intern. Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain, 1994) 272-292.
- [8]. R. Codina, A finite element model for incompressible flow problems, Ph.D. Thesis, Univ. Politècnica de Catalunya, Barcelona, June 1992.
- [9]. J.C. Heinrich, P.S. Hayakorn and O.C. Zienkiewicz, An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations, Int. J. Num. Methods Engrg. 11 (1977) 131-143.
- [10]. D.W. Kelly, S. Nakazawa, O.C. Zienkiewicz and J.C. Heinrich, A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems, Int. J. Num. Methods Engrg. 15 (1980) 1705-1711.
- [11]. L.P. Franca, S.L. Frey and T.J.R. Hughes, Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95 (1992) 253-276.

- 
- [12]. L.P. Franca and S.L. Frey, Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 99 (1992) 209-233.
- [13]. Harari and T.J.R. Hughes, Stabilized finite element methods for steady advection-diffusion with production, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 115 (1994) 165-191.
- [14]. E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow, *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 39 (1996) 3839-3866.
- [15]. E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and C. Sacco, A stabilized finite point method for fluid mechanics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 39 (1996) 315-346.
- [16]. E. Oñate, Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 151 (1998) 233-265.
- [17]. E. Oñate and M. Manzan, Stabilization Techniques for Finite Element Analysis of Convection-Diffusion Problems, Publication CIMNE N° 183, Barcelona, February 2000.
- [18]. R. Codina, E. Oñate and M. Cervera, The intrinsic time for the streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation using quadratic elements, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 94(1992)239-262.
- [19]. F. Brezzi, M.O. Bristeau; L.P. Franca, M. Mallet and G. Rogé, A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 96 (1992) 117-129.
- [20]. O.C. Zienkiewicz, K. Morgan, B.V.K. Satya Sai, R. Codina and M Vázquez, A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part II: Test on the explicit form, *Int. J. Num. Methods Fluids* 20(8-9) (1995) 886-913.
- [21]. F. Brezzi, M.O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet and G. Rogé. A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 96 (1992) 117-129.
- [22]. E. Oñate, On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems, Publication CIMNE N°81, Barcelona, October 1996.
- [23]. S. Kodiyalam, *Topics in Engineering, Volume 12: Advanced Techniques in the Optimum Design of Structures*, Chapter 2: Sensitivity analysis in static and dynamic problems, 33-53.

- 
- [24]. J.S. Arora and E.J. Haug, *Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization*, AIAA Journal (1979), Vol. 17, No. 9, 970-974.
- [25]. A.D. Belegundu and J.S. Arora, *A Sensitivity Interpretation of Adjoint Variables in Optimal Design*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 48 (1985) 81-89.
- [26]. J.Z. Zhu and O.C. Zienkiewicz, *Adaptive Techniques in the Finite Element Method*, *Comp. Appl. Num. Meth.* (1988), Vol. 4, pp. 197-204.
- [27]. F.J. Gould, *Extensions of Lagrange Multipliers in Nonlinear Programming*. *SIAM J. Appl. Math.* (1969),13,6 1280-12297.
- [28]. S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* (Hemisphere Publishing Corporation, 1980).
- [29]. N. Camprubí, I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro, *Galerkin, Lest Squares and GLS numerical approaches for advective-diffusive transport problems in engineering*, ECCOMAS 2000.
- [30]. I. Colominas, R. López-Jato, C. A. Figueroa, F. Navarrina and M. Casteleiro, *Stabilization of numerical formulations for convective-diffusive transport problems*, ECCOMAS 2000.
- [31]. K. W. Morton, *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, *Applied Mathematics and Mathematical Computation* 12 (Chapman and Hall 1996).
- [32]. R. Codina, *On Stabilized Finite Element Methods for Linear Systems of Convection-Diffusion-Reaction equations*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188 (2000) 61-82.
- [33]. E. Oñate, *Possibilities of Finite Increment Calculus in Computational Mechanics*, to be published in *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- [34]. E. Oñate and J. García, *A finite Element Method for Fluid-Structure Interaction with Surface Waves Using Finite Increment Calculus Formulation*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2001) 635-660.
- [35]. E. Oñate, *A Stabilized Finite Element Method for Incompressible Viscous Flows using a Finite Increment Calculus Formulation*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 182 (2000) 355-370.
- [36]. E. Oñate, J. García and S. Idelsohn, *An Alpha-Adaptive Approach for Stabilized Finite Element Solution of Advective-Diffusive Problems with Sharp Gradients*, *New Advances in Adaptive Comput. Methods in Mech.*, Elsevier, P. Ladeveze, J. T. Oden (Eds.), 1998.

- [37]. E. Oñate, J. García and S. Idelsohn, Computation of the Stabilization Parameter for the Finite Element Solution of Advective-Diffusive Problems, *Int. J. Num. Methods Fluids* 25 (1997) 1385-1407.
- [38]. O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 101 (1992) 207-224.
- [39]. R. Codina, A Discontinuity-Capturing Crosswind-Dissipation for the Finite Element Solution of the Convection-Diffusion Equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 110 (1993) 325-342.
- [40]. S.A. Urquiza and M.J. Vénere, An Application Framework Architecture for FEM and Other Related Solvers, *Mecánica Computacional*, Vol. XXI, pp. 3099-3109.