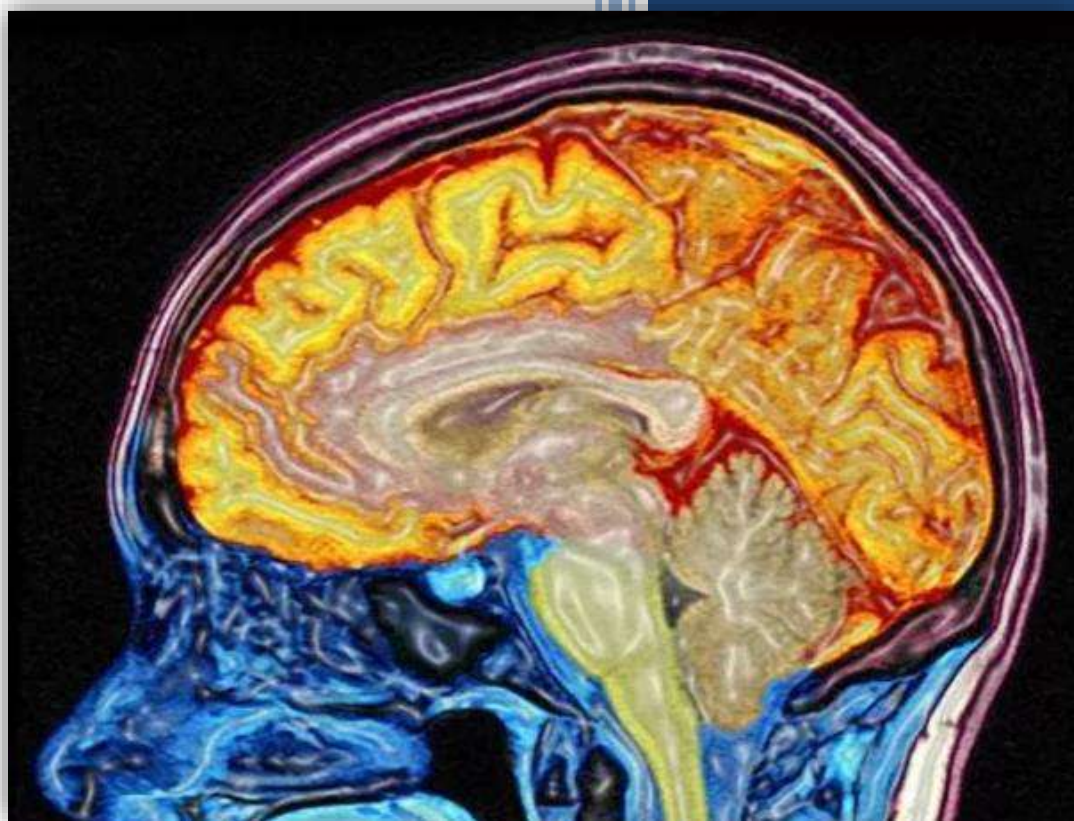


Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas



Universidad Nacional de Mar del Plata, Facultad de Ingeniería
Tesis para optar al título de Doctor en Ingeniería, orientación Electrónica

Ing. Diego Sebastián Comas

Director: Dr. Gustavo Javier Meschino

Codirectora: Dra. Virginia Laura Ballarin

Año 2016



RINFI es desarrollado por la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

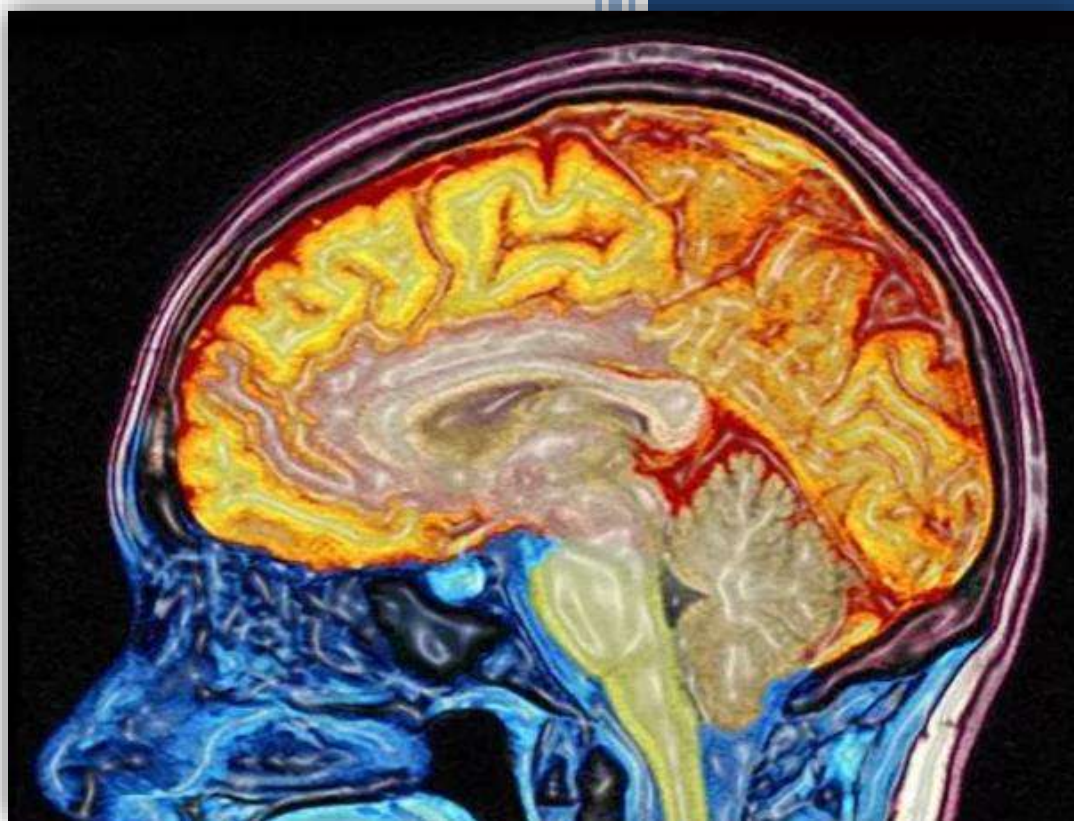
Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución- NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas



Universidad Nacional de Mar del Plata, Facultad de Ingeniería
Tesis para optar al título de Doctor en Ingeniería, orientación Electrónica

Ing. Diego Sebastián Comas

Director: Dr. Gustavo Javier Meschino

Codirectora: Dra. Virginia Laura Ballarin

Año 2016

A mis padres, a mis hermanas, a Maia.

Mar del Plata, marzo de 2016.

“Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto, y pensar lo que nadie más ha pensado”.

Albert Szent-Györgi (1893-1986), bioquímico húngaro-estadounidense.

***“A medida que la complejidad aumenta, los enunciados precisos pierden significado y los
enunciados significativos pierden precisión”.***

*Lotfi A. Zadeh (1921), científico iraní-estadounidense, padre de la Lógica Difusa y de la Teoría de la
Posibilidad.*

“Si tu intención es describir la verdad, hazlo con sencillez y la elegancia déjasela al sastre”.

Albert Einstein (1879-1955), científico alemán nacionalizado estadounidense.

***“Un científico debe tomarse la libertad de plantear cualquier cuestión, de dudar de cualquier
afirmación, de corregir errores”.***

Julius Robert Oppenheimer (1904-1967), físico estadounidense.

***“En Ciencia el reconocimiento se concede al hombre que convence al mundo, no a aquel a quien
se le ocurre la idea”.***

William Osler (1849-1919), médico canadiense.

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido.....	4
Tabla de Acrónimos	8
Índice de Tablas.....	10
Índice de Figuras.....	12
Capítulo 1: Introducción.....	17
1.1. Motivación y presentación del problema	17
1.2. Antecedentes	25
1.3. Objetivos y aportes de esta Tesis.....	29
1.4. Publicaciones que sustentan esta Tesis	31
1.5. Estructura de la Tesis	33
Capítulo 2: Procesamiento de Imágenes Médicas	36
2.1. Introducción	36
2.2. Modalidades de Imágenes Médicas: utilidad en Diagnóstico Médico.....	38
2.2.1 Imágenes de Resonancia Magnética	38
2.2.2 Imágenes de Tomografía Computada	42
2.2.3 Angiografías.....	44
2.2.4 Imágenes de fondo de ojo.....	45
2.2.5 Imágenes de microscopia de biopsias de médula ósea	47
2.2.6 Mamografías	49
2.3. Otros tipos de imágenes utilizadas en Diagnóstico Médico	50
2.4. Observaciones finales.....	50
Capítulo 3: Reconocimiento de Patrones	53
3.1. Introducción	53
3.2. Métodos de Agrupamiento	58
3.2.1 <i>K-means</i>	58
3.2.2 <i>Fuzzy C-Means</i>	60
3.2.3 Mapas auto-organizados.....	61
3.2.4 <i>Expectation-Maximization</i>	65
3.2.5 Determinación automática del número de <i>clusters</i> : Método basado en el Criterio de Información Bayesiana.....	66
3.3. Métodos de Clasificación	68
3.3.1 K vecinos más próximos	68

3.3.2 Redes Neuronales Supervisadas	68
3.3.2.1 Redes neuronales multicapa.....	68
3.3.2.2 Redes neuronales probabilísticas	70
3.4. Enfoques basados en ensambles	71
3.5. Observaciones finales.....	74
Capítulo 4: Lógica Difusa	76
4.1. Introducción	76
4.2. Conceptos de Lógica Difusa.....	79
4.2.1 Conjuntos Difusos y funciones de pertenencia	79
4.2.1.1. Conjuntos Difusos tipo 1	79
4.2.1.2. Conjuntos Difusos tipo 2 de intervalos	83
4.2.2 Diferencia entre probabilidad y posibilidad	89
4.2.3 Interpretación lingüística de los Conjuntos Difusos y las funciones de pertenencia	91
4.2.4 Operaciones entre Conjuntos Difusos.....	94
4.2.4.1. Operaciones entre Conjuntos Difusos tipo 1	99
4.2.4.2. Operaciones entre Conjuntos Difusos tipo 2 de intervalos	101
4.3. Lógica Difusa Compensatoria	103
4.4. Lógica Difusa aplicada al Reconocimiento de Patrones	106
4.4.1 Sistemas de Lógica Difusa basados en inferencia difusa	107
4.4.2 Sistemas de Lógica Difusa basados en predicados difusos	110
4.4.2.1. Sistemas de Lógica Difusa tipo 1 basados en predicados difusos.....	111
4.4.2.2. Sistemas de Lógica Difusa tipo 2 de intervalos basados en predicados difusos	114
Capítulo 5: Métodos propuestos	120
5.1. Introducción	120
5.2. Orden de intervalos de valores de verdad	128
5.2.1 Planteo del problema y estado de la cuestión	128
5.2.2 Orden entre intervalos de valores de verdad: Conceptos y métodos propuestos	136
5.2.3 Análisis del método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados	153
5.2.3.1. Análisis gráfico de las medidas de intervalos de valores de verdad propuestas	154
5.2.3.2. Partición generada por sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados difusos: Análisis gráfico.....	162
5.3. Generación automática de sistemas difusos	167
5.3.1 Planteo general y estado de la cuestión	167
5.3.2 Generación de la función de pertenencia a partir de datos: Enfoque propuesto	172
5.3.3 Generación automática de sistemas difusos para agrupamiento de datos: Métodos propuestos	185
5.3.3.1. <i>Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering (T2-DFPC)</i>	185

5.3.3.2. <i>Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering</i> (T2-SFPC).....	190
5.3.4 Generación automática de sistemas difusos para clasificación de datos: Método propuesto.....	196
5.3.4.1. <i>Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification</i> (T2-LFPC)	196
5.3.5 Análisis general de los métodos propuestos para la generación automática de sistemas difusos	204
5.3.6 Extracción de conocimiento desde los sistemas difusos generados por métodos automáticos	206
5.3.7 Métodos análogos propuestos para la generación automática de sistemas difusos basados en LD tipo 1	209
5.3.8 Resumen de los métodos propuestos para la generación automática de sistemas difusos.....	211
5.4. Métodos y medidas de validación utilizados	211
5.4.1 Medidas de validación.....	212
5.4.1.1. Medidas externas	213
5.4.1.2. Medidas internas	217
5.4.2 Métodos de validación	218
Capítulo 6: Resultados	221
6.1. Introducción	221
6.2. Segmentación de imágenes médicas	223
6.2.1 Conjunto de prueba #1: IRM reales	223
6.2.2 Conjunto de prueba #2: IRM de simulaciones	234
6.2.2.1. Resultados de los métodos de clasificación.....	236
6.2.2.2. Resultados de los métodos de <i>clustering</i>	246
6.2.2.3. Robustez frente al ruido de la LD tipo 2 de intervalos versus la LD tipo 1	256
6.2.2.4. Extracción de conocimiento a partir de los sistemas difusos automáticamente generados	258
6.3. Bases de datos generales	263
6.3.1 Resultados de los métodos de clasificación	264
6.3.2 Resultados de los métodos de <i>clustering</i>	270
6.3.3 Robustez frente al ruido de la LD tipo 2 de intervalos versus la LD tipo 1	276
6.4. Observaciones finales.....	281
Capítulo 7: Conclusiones	284
Apéndice A: Librería desarrollada para Lógica Difusa	289
A.1. Introducción	289
A.2. Descripción general.....	289
Apéndice B: Funciones gaussianas.....	295
B.1. Introducción	295

B.2. Solución a la función gaussiana que pasa por tres puntos	295
B.3. Solución al punto de cruce de máxima ordenada entre dos funciones gaussianas	298
Agradecimientos	302
Referencias	305

Tabla de Acrónimos

BIC	=	<i>Bayesian Information Criterion</i> , Criterio de información bayesiana.
BMU	=	<i>Best Matching Unit</i> .
CD	=	Conjunto Difuso.
EM	=	<i>Expectation Maximization</i> .
FCM	=	<i>Fuzzy C-Means</i> .
fMRI	=	<i>functional Magnetic Resonance Imaging</i> , Imagen de resonancia magnética funcional.
KDD	=	<i>Knowledge Discovery in Databases</i> , Descubrimiento de conocimiento en bases de datos.
kNN	=	<i>k-Nearest Neighbors</i> , K vecinos más próximos.
IRM	=	Imágenes de Resonancia Magnética.
LCR	=	Líquido Cefalorraquídeo.
LD	=	Lógica Difusa.
LDC	=	Lógica Difusa Compensatoria.
LDCMA	=	Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética.
LDCMG	=	Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica.
MB	=	Materia Blanca.
MG	=	Materia Gris.
MLP	=	<i>Multi-Layer Perceptron</i> , Perceptrón multicapa.
PDI	=	Procesamiento Digital de Imágenes.
PET	=	<i>Positron Emission Tomography</i> , Tomografía por emisión de positrones.
PNN	=	<i>Probabilistic Neural Network</i> , Red neuronal probabilística.

RM	=	Resonancia Magnética.
RNA	=	Redes Neuronales Artificiales.
SOM	=	<i>Self-Organizing Maps</i> , Mapas Auto-organizados.
SPECT	=	<i>Single Photon Emission Computed Tomography</i> , Tomografía computada por emisión de fotón único.
T1-DPFC	=	<i>Type-1 Data-based Fuzzy Predicate Clustering</i> . Método de agrupamiento de datos propuesto en esta Tesis, basado en predicados difusos generados a partir de datos y LD Tipo 1.
T1-LPFC	=	<i>Type-1 Label-based Fuzzy Predicate Classification</i> . Método de clasificación de datos propuesto en esta Tesis, basado en predicados difusos generados a partir de datos previamente etiquetados y LD Tipo 1.
T1-SPFC	=	<i>Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering</i> . Método de agrupamiento de datos propuesto en esta Tesis, basado en predicados difusos generados a partir de Mapas Auto-Organizados y LD Tipo 1.
T2-DPFC	=	<i>Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering</i> . Método de agrupamiento de datos propuesto en esta Tesis, basado en predicados difusos generados a partir de datos y LD Tipo 2 de Intervalos.
T2-LPFC	=	<i>Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification</i> . Método de clasificación de datos propuesto en esta Tesis, basado en predicados difusos generados a partir de datos previamente etiquetados y LD Tipo 2 de Intervalos.
T2-SPFC	=	<i>Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering</i> . Método de agrupamiento de datos propuesto en esta Tesis, basado en predicados difusos generados a partir de Mapas Auto-Organizados y LD Tipo 2 de Intervalos.
TC	=	Tomografía Computada.

Índice de Tablas

Tabla 5.1. Resumen de los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos en esta Tesis.....	211
Tabla 5.2. Matriz de confusión normalizada del ejemplo de la Figura 5.23.	214
Tabla 6.1. Medidas de validación obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #1 con diferentes métodos de clasificación, para ruido nulo ($\sigma_R = 0$).	226
Tabla 6.2. Medidas de validación obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #1 con diferentes métodos de clasificación, para máximo nivel de ruido ($\sigma_R = 1$).	229
Tabla 6.3. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T2-LFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM del conjunto de prueba #1, considerando diferentes niveles de ruido (σ_R).	230
Tabla 6.4. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T1-LFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM del conjunto de prueba #1, considerando diferentes niveles de ruido (σ_R).	230
Tabla 6.5. Medidas de validación obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #2 con diferentes métodos de clasificación, para ruido nulo (0%).	238
Tabla 6.6. Medidas de validación obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #2 con diferentes métodos de clasificación, para el máximo nivel de ruido disponible (9%).	240
Tabla 6.7. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T2-LFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de las IRM del conjunto de prueba #2, considerando diferentes niveles de ruido.	242
Tabla 6.8. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T1-LFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de las IRM del conjunto de prueba #2, considerando diferentes niveles de ruido.	243
Tabla 6.9. Medidas de validación externas obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #2 para diferentes métodos de clustering y para ruido nulo (0%).	248
Tabla 6.10. Medidas de validación externas obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #2 para diferentes métodos de clustering y ruido máximo (9%).	251
Tabla 6.11. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T2-DFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM correspondientes al conjunto de prueba #2 considerando diferentes niveles de ruido.	252
Tabla 6.12. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T2-SFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM correspondientes a conjunto de prueba #2 considerando diferentes niveles de ruido.	252
Tabla 6.13. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T1-DFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM correspondientes a conjunto de prueba #2 considerando diferentes niveles de ruido.	253

Tabla 6.14. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T1-SFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM correspondientes a conjunto de prueba #2 considerando diferentes niveles de ruido.	253
Tabla 6.15. Valores de exactitud obtenidos del análisis de robustez frente al ruido de la LD tipo 2 de intervalos versus la LD tipo 1.	277
Tabla A.1. Funciones de la librería <i>Fuzzy 2 Toolbox</i>	290
Tabla A.1 (Continuación). Funciones de la librería <i>Fuzzy 2 Toolbox</i>	291
Tabla A.1 (Continuación). Funciones de la librería <i>Fuzzy 2 Toolbox</i>	292
Tabla A.1 (Continuación). Funciones de la librería <i>Fuzzy 2 Toolbox</i>	293

Índice de Figuras

Figura 1.1. Diagrama general de la segmentación de imágenes mediante Reconocimiento de Patrones.....	19
Figura 2.1. Diferentes modalidades de imágenes médicas obtenidas con diferentes equipos de adquisición (basados en diferentes principios físicos).....	37
Figura 2.2. IRM de cerebro, pesada en T1, en la cual puede ser claramente identificada una anomalía (tumor).	39
Figura 2.3. IRM en secuencias PD, T1 y T2 y segmentación de un corte transversal de cerebro.	41
Figura 2.4. Ejemplo de IRM de hombro típica para el estudio de los músculos del manguito rotador utilizada en [Meschino <i>et al.</i> , 2015].....	42
Figura 2.5. Ejemplos de imágenes de TC utilizadas en Diagnóstico por Imágenes.....	44
Figura 2.6. Ejemplos de angiografías obtenidas mediante diferentes técnicas.	45
Figura 2.7. Ejemplos de imágenes de fondo de ojo, extraídas de las bases de datos DRIVE [Staal <i>et al.</i> , 2004].	46
Figura 2.8 Segmentación de vasos sanguíneos en imágenes de fondo de ojo, obtenidas de la base de datos DRIVE [Staal <i>et al.</i> , 2004].	47
Figura 2.9. Ejemplos de imágenes de microscopia de biopsia de médula ósea.	48
Figura 2.10. Ejemplo mamografía de mama.....	49
Figura 2.11. Imágenes de líquido resultante de diálisis peritoneal, contenidas en cápsulas de Petri, utilizadas en [Comas <i>et al.</i> , 2015].	51
Figura 3.1. Diagrama del proceso de Reconocimiento de Patrones.....	54
Figura 3.2. Aplicación de SOM para representación pseudo-color de imágenes.	65
Figura 3.3. Diagrama en bloques de una neurona artificial.....	69
Figura 3.4. Esquema general de una red neuronal probabilística.	70
Figura 4.1. Diferentes formas de funciones de pertenencia tipo 1.	81
Figura 4.2. Función de pertenencia tipo 2 de intervalos para un universo de discurso $U = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$	87
Figura 4.3. Función de pertenencia tipo 2 de intervalo correspondiente al CD NIVEL DE GRIS MEDIO, considerando un nivel de gris normalizado entre -1 (negro) y 1 (blanco).....	92
Figura 4.4. Método de consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 1 para la clasificación y el agrupamiento de datos.....	115
Figura 5.1. Ejemplo típico de IRM de cerebro.	121
Figura 5.2. CDs tipo 2 de intervalos para el análisis de IRM de cerebro, utilizando secuencias PD, T1 y T2.....	122
Figura 5.3. Esquema general del proceso del KDD.	126

Figura 5.4. Posibles casos que pueden presentarse al comparar intervalos de valores de verdad.	131
Figura 5.5. Representación de los intervalos de valores de verdad $A=[0,3;0,5]$ y $B=[0,25;0,95]$	134
Figura 5.6. Método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados para la clasificación y el agrupamiento de datos.	153
Figura 5.7. Medida de intervalos de valores de verdad f adoptando la función propuesta #1 para g y analizando todos los posibles valores del espacio de intervalos de valores de verdad, con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.	156
Figura 5.8. Medida de intervalos de valores de verdad f adoptando la función propuesta #2 para g y analizando todos los posibles valores del espacio de intervalos de valores de verdad, con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.	158
Figura 5.9. Medida de intervalos de valores de verdad f adoptando la función propuesta #3 para g y analizando todos los posibles valores del espacio de intervalos de valores de verdad, con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.	160
Figura 5.10. Conjunto de datos generados sintéticamente para analizar un clasificador basado en LD tipo 2 de intervalos y predicados.	163
Figura 5.11. Funciones de pertenencia definidas heurísticamente para los sistemas difusos utilizados en la clasificación del conjunto de datos sintéticos analizados en esta Sección.	165
Figura 5.12. Particiones generadas por diferentes clasificadores, para el conjunto de datos sintéticos estudiado en esta sección.	166
Figura 5.13. Función de pertenencia tipo 1 definida a partir de prototipos siguiendo el enfoque propuesto en esta Tesis, para una característica genérica i .	176
Figura 5.14. Forma de las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos utilizadas en esta Tesis, formada por tramos de funciones gaussianas.	180
Figura 5.15. Diagrama general del método propuesto en esta Tesis para la generación de funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de los datos prototipos. Para este ejemplo $K=2$ y $M=3$.	184
Figura 5.16. Esquema general de las etapas del método T2-DFPC.	186
Figura 5.17. Diagrama detallado de las etapas A y B del método T2-DFPC.	188
Figura 5.18. Esquema general de las etapas del método T2-SFPC.	191
Figura 5.19. Diagrama detallado de las etapas A, B y C del método T2-SFPC.	194
Figura 5.20. Esquema general de las etapas del método T2-LFPC.	197
Figura 5.21. Diagrama detallado de las etapas A y B del método T2-LFPC.	200
Figura 5.22. Funciones de pertenencia obtenidas utilizando el método T2-DFPC para un conjunto de datos genérico.	208
Figura 5.23. Ejemplo de segmentación de una imagen en 2 etiquetas.	214
Figura 6.1. IRM en cortes #59, #79 y #99 representativos de las imágenes del conjunto de prueba #1.	224

Figura 6.2. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para diferentes métodos de clasificación en la segmentación de las IRM reales del conjunto de prueba #1, para ruido nulo ($\sigma_R = 0$).....	227
Figura 6.3. Exactitud promedio en función del nivel de ruido para todos los métodos de clasificación considerados.....	229
Figura 6.4. IRM reales correspondientes al corte #59 del conjunto #1 para $\sigma_R = 0$ y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.	231
Figura 6.5. IRM reales correspondientes al corte #59 del conjunto #1 para $\sigma_R = 0,5$ y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.	232
Figura 6.6. IRM reales correspondientes al corte #59 del conjunto #1 para $\sigma_R = 1$ y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.	233
Figura 6.7. IRM en cortes #33, #90 y #125 de las imágenes del conjunto de prueba #2.	235
Figura 6.8. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para diferentes métodos de clasificación en la segmentación de las IRM provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2, para ruido nulo (0%).	239
Figura 6.9. Exactitud promedio en función del nivel de ruido para todos los métodos de clasificación considerados.....	241
Figura 6.10. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #90 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 0% y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.	244
Figura 6.11. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #90 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 5% y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.	245
Figura 6.12. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #90 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 9% y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.	246
Figura 6.13. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para diferentes métodos de <i>clustering</i> en la segmentación de las IRM provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2, considerando ruido nulo (0%).....	249
Figura 6.14. Exactitud promedio en función del nivel de ruido para todos los métodos de <i>clustering</i> considerados.....	251
Figura 6.15. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #80 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 0% y resultados obtenidos para los distintos métodos de <i>clustering</i> en los casos óptimos.	254
Figura 6.16. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #80 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 5% y resultados obtenidos para los distintos métodos de <i>clustering</i> en los casos óptimos.	255
Figura 6.17. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #80 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 9% y resultados obtenidos para los distintos métodos de <i>clustering</i> en los casos óptimos.	256

Figura 6.18. Exactitud promedio considerando IRM con distintos niveles de ruido en la consulta de sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos.....	258
Figura 6.19. Funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos obtenidas utilizando el método T2-DFPC sobre las IRM de cerebro provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2 para la secuencia PD.....	260
Figura 6.20. Funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos obtenidas utilizando el método T2-DFPC sobre las IRM de cerebro provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2 para la secuencia T1.....	260
Figura 6.21. Funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos obtenidas utilizando el método T2-DFPC sobre las IRM de cerebro provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2 para la secuencia T2.....	261
Figura 6.22. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de clasificación, considerando datos sin ruido.	267
Figura 6.22 (Continuación). Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de clasificación, considerando datos sin ruido.	268
Figura 6.22 (Continuación). Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de clasificación, considerando datos sin ruido.	269
Figura 6.23. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de <i>clustering</i> , considerando datos sin ruido.	273
Figura 6.23 (Continuación). Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de <i>clustering</i> , considerando datos sin ruido.	274
Figura 6.23 (Continuación). Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de <i>clustering</i> , considerando datos sin ruido.	275
Figura 6.24. Exactitud promedio considerando datos con distintos niveles de ruido en la consulta de sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos.....	278
Figura 6.24 (Continuación). Exactitud promedio considerando datos con distintos niveles de ruido en la consulta de sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos.	279
Figura 6.24 (Continuación). Exactitud promedio considerando datos con distintos niveles de ruido en la consulta de sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos.	280

Capítulo 1: Introducción

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Capítulo 1: Introducción

1.1. Motivación y presentación del problema

El avance tecnológico de los últimos años permitió mejorar las tecnologías de adquisición de imágenes médicas, generando, cada vez con mayor impulso, imágenes con altísima resolución¹ y, por lo tanto, gran nivel de detalle.

Las imágenes médicas contienen información que el especialista médico debe saber descubrir e interpretar para arribar exitosamente a un diagnóstico. Éstas pueden ser adquiridas utilizando principios físicos diferentes, dando lugar a distintos tipos o modalidades de imágenes médicas entre las cuales se pueden mencionar: Imágenes de Resonancia Magnética (IRM), imágenes de Tomografía Computada (TC), ecografías, angiografías, radiografías, imágenes de microscopio óptico, entre otras [Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2008; Withey y Koles, 2007]. Cada modalidad es útil para el análisis de un tipo específico de tejido o una región o proceso anatómico particular y se utiliza a su vez con un fin específico, como por ejemplo: evaluación preventiva, planificación de terapias de radiación y cirugías, detección de tejidos anormales, diagnóstico de patologías, *screening*², entre otros [Meschino, 2008].

El Procesamiento Digital de Imágenes (PDI) consiste en la utilización de un medio de tratamiento digital de información, por ejemplo una computadora, aplicado en una imagen con el fin de convertirla en información útil, que pueda ser interpretada [Ballard y Brown, 1992; Gonzalez y Woods, 2002]. El uso de medios informáticos puede asistir al especialista médico en el análisis de la información contenida en una imagen médica. Dentro del PDI, la **segmentación de imágenes** constituye uno proceso de suma importancia, debido a la gran cantidad de información útil que puede obtenerse a partir de sus resultados, y se define como el proceso de partición de la imagen según sus componentes estructurales más importantes para detectar regiones o un objetos de especial interés [Bezdek *et al.*, 1993; Bouchet *et al.*, 2007; Comas *et al.*, 2010; Meschino, 2008; Zhang *et al.*, 2008; Zhang, 1996].

En imágenes médicas, la segmentación representa en la actualidad uno de los más importante aportes al Diagnóstico Médico [Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2015b]. En este tipo de imágenes, la segmentación busca una partición tal que las regiones obtenidas correspondan a

¹En Procesamiento Digital de Imágenes (PDI), la **resolución** de una imagen está definida por la su cantidad total de píxeles. Los objetos reales son representados por píxeles (puntos), cada uno representando la información de color de una región del objeto. A mayor resolución, mayor cantidad de píxeles y, en consecuencia, mayor nivel de detalle en la imagen digital.

²En medicina, **screening** es una estrategia aplicada para detectar una enfermedad en individuos sin síntomas de tal enfermedad.

distintas estructuras anatómicas o regiones de especial interés para su posterior análisis. La información obtenida de esta partición es utilizada por médicos especialistas para comparar volúmenes, morfologías y características de los tejidos detectados con estudios normales u otras regiones de la misma imagen; así como también, en la planificación de terapias de radiación y cirugías y en la detección de tejidos anormales [Ballarin, 2001; Bouchet *et al.*, 2007; Comas *et al.*, 2011c; Courchesne *et al.*, 2007; Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2015b; Moler, 2003]. Debido a su importancia en medicina, es requisito indispensable que el resultado obtenido represente con la mejor exactitud posible las estructuras anatómicas reales. Debido a esto y al avance continuo de las tecnologías de adquisición de imágenes médicas, continuamente se proponen nuevos enfoques.

Existen distintos paradigmas para la segmentación de imágenes. La elección entre uno u otro depende esencialmente del tipo de imagen a segmentar y de la disponibilidad de conocimiento previo respecto al cómo resolver el problema de segmentación. De esta manera, pueden distinguirse [Ballard y Brown, 1992; Ballarin, 2001; Gonzalez y Woods, 2002; Meschino, 2008]:

- **Segmentación manual:** En este paradigma, un especialista identifica los objetos o tejidos de interés dentro de la imagen, realizando la partición manualmente; generalmente a través de un *mouse* en una computadora, aunque también se realiza delimitando el contorno en la impresión de la imagen. Este tipo de segmentación requiere por lo general mucho tiempo y los métodos no son siempre reproducibles³, por lo que no son siempre conmensurables⁴.
- **Segmentación basada en técnicas de PDI:** En ésta, se pueden distinguir los enfoques de: detección de discontinuidades (para detectar puntos aislados, bordes, líneas o contornos) y detección de similitudes (donde se analizan y detectan los píxeles que tengan alguna propiedad común). En este paradigma, el método se implementa computacionalmente combinando diferentes técnicas propias del PDI, por lo que es reproducible.
- **Segmentación a través de Reconocimiento de Patrones o de Inteligencia Computacional:** Este tipo de segmentación se realiza en dos etapas. Primero se realiza un procesamiento de las imágenes mediante el cual se extraen características (*features*) para cada píxel; es decir, números que describen la textura, información de color, información de posición, tamaño, forma u otros rasgos característicos [Comas *et al.*, 2010; Meschino *et al.*, 2008; Meschino *et al.*, 2006b; Moler *et al.*, 1999]. Luego, las características son ingresadas a un algoritmo de

³En el contexto de segmentación de Imágenes, se entiende que un proceso de segmentación es **reproducible** si, basándose en su descripción puede ser reproducido o replicado.

⁴En el mismo contexto que la definición anterior, si un proceso llevado a cabo para realizar la segmentación de una imagen es reproducible, sus resultados son **conmensurables**, es decir, pueden ser medidos y calculados y por lo tanto comparados.

Reconocimiento de Patrones [Duda *et al.*, 2001], mediante el cual a cada píxel se le asigna una etiqueta, realizando la segmentación. El algoritmo de Reconocimiento de Patrones agrupa o clasifica datos, dependiendo respectivamente si se utiliza un paradigma de agrupamiento o de clasificación. Los vectores de características corresponden a píxeles o regiones de las imágenes a segmentar. Una vez ajustados sus parámetros, el método se implementa computacionalmente, por lo que es reproducible. En la Figura 1.1 se presenta un diagrama genérico de la segmentación de imágenes mediante Reconocimiento de Patrones.

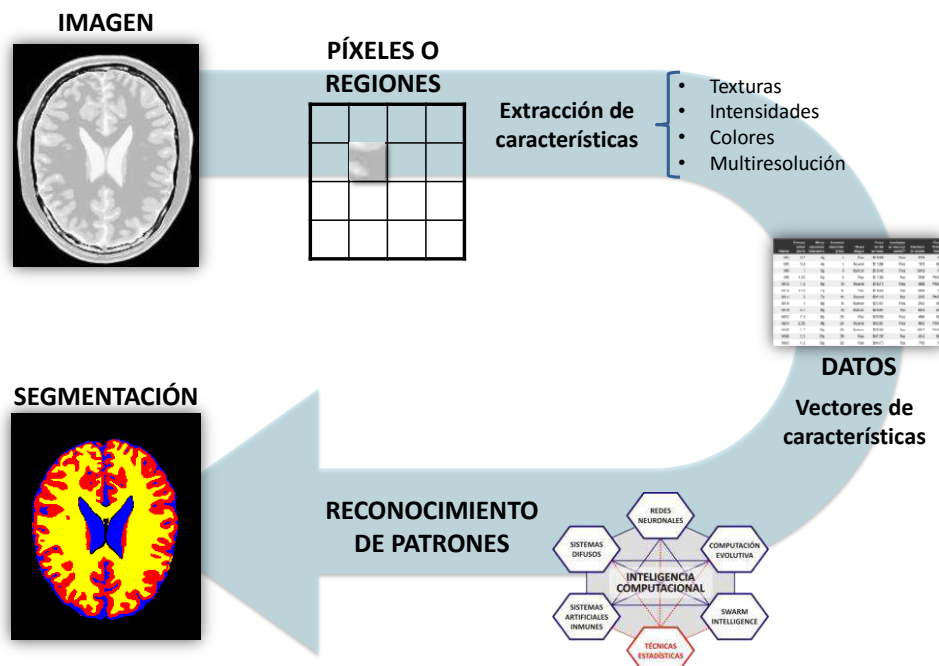


Figura 1.1. Diagrama general de la segmentación de imágenes mediante Reconocimiento de Patrones.

De la imagen original se extraen diferentes características que luego se procesan mediante un algoritmo de Reconocimiento de Patrones, obteniendo la imagen segmentada.

La imagen de ejemplo corresponde a una IRM de cerebro. Con la técnica de Reconocimiento de Patrones, los píxeles de esta imagen son asignados a los diferentes tejidos de interés, los cuales se muestran en diferentes colores.

Dentro del **Reconocimiento de Patrones** existe una gran cantidad de métodos que han sido utilizados exitosamente en segmentación siguiendo diferentes enfoques. Entre los más relevantes, pueden mencionarse:

- **Métodos basados en agrupamiento de datos**, como *K-means*, *Fuzzy C-Means* (FCM), *Expectation Maximization* (EM), mapas auto-organizados (SOM, del inglés *Self-Organizing Maps*) [Ballarin, 2001; Comas *et al.*, 2010; Duda *et al.*, 2001; Li y Chi, 2005; Meschino *et al.*, 2006b; Zhang *et al.*, 2008]. En este tipo de métodos, no se utiliza información respecto al resultado esperado, es decir, no se requieren

ejemplos de la segmentación deseada. En este sentido, los parámetros de los métodos de agrupamiento se ajustan de **modo no supervisado**.

- **Métodos basados en clasificación de datos**, como Redes Neuronales Artificiales⁵ (RNA) o el método de K vecinos más próximos (*k*NN, del inglés *k-Nearest Neighbors*) [Benalcázar *et al.*, 2013b; Duda *et al.*, 2001; Jain *et al.*, 1999; Meschino *et al.*, 2015b; Rajini, 2011], entre otros. Para el uso de este tipo de métodos se requiere información respecto al resultado esperado, es decir, ejemplos de la segmentación deseada, algunos píxeles etiquetados como *Gold Standard*, generalmente provenientes de una segmentación manual (que podría ser parcial) realizada por especialistas. En este sentido, los métodos de clasificación corresponden a **métodos supervisados**.

Dentro del Reconocimiento de Patrones pueden distinguirse las aplicaciones basadas en **Lógica Difusa** (LD) [Zadeh, 1965, 1975], una sub-disciplina de la Inteligencia Computacional, que ha permitido desarrollar modelos con excelentes capacidades tanto para el agrupamiento como para la clasificación de datos y han sido exitosamente aplicados en segmentación; entre otros pueden señalarse los métodos propuestos en [Comas *et al.*, 2012; Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2008; Pizzi y Pedrycz, 2012; Rokach, 2005].

El éxito de los métodos basados en LD en problemas de Reconocimiento de Patrones en general y de segmentación de imágenes en particular, se debe principalmente a que la LD remueve la idea clásica según la cual una expresión lingüística, por ejemplo “*los niveles de gris de la imagen son brillantes*”, es o totalmente verdadera o totalmente falsa. La LD aplica el llamado **principio de gradualidad**, según el cual una expresión tiene un cierto grado de veracidad y de falsedad asignado [Bellman y Giertz, 1973; Dubois y Prade, 1980; Zadeh, 1965].

A partir del principio de gradualidad, la LD se volvió esencial para modelar matemáticamente la **imprecisión**⁶ propia de los términos utilizados en las expresiones del lenguaje humano, por ejemplo aquellos empleados por los médicos al describir cómo debe interpretarse la información contenida en una imagen médica para realizar su segmentación [Meschino, 2008]. En este sentido, la característica más relevante de la LD es la de proporcionar herramientas que permiten modelar conocimiento expresado lingüísticamente. La LD define un mecanismo formal que permite reproducir las capacidades humanas de razonar y tomar decisiones [Comas *et al.*, 2011c; Meschino, 2008; Zadeh, 1989, 2008].

⁵Las **Redes Neuronales Artificiales** (RNA) son arreglos de procesadores básicos (neuronas), que se encuentran interconectados por pesos (sinapsis), adaptables iterativamente para reflejar un conjunto de datos de entrada y sus respectivas salidas.

⁶En esta Tesis, el término **imprecisión** es utilizado en referencia a la falta de precisión respecto al significado de los términos utilizados comúnmente en expresiones lingüísticas. Por ejemplo, para entender completamente el significado de la expresión lingüística “*el nivel de gris en la imagen es brillante*”, es necesario definir más completamente qué entiende la persona que la emite como nivel de gris “*brillante*”. En este sentido, si no se brinda una aclaración adicional, puede decirse que el término “*brillante*” es impreciso o vago. Los términos **imprecisión** y **vaguedad** serán utilizados aquí como sinónimos.

En **aplicaciones de LD en Reconocimiento de Patrones**, el conocimiento es modelado a través de Conjuntos Difusos (CDs) y reglas de inferencia o predicados difusos [Comas *et al.*, 2012]. Habitualmente, un especialista en el campo define, por medio de descripciones del tipo lingüístico: las variables o características (y sus atributos asociados) que permiten discriminar adecuadamente las diferentes etiquetas, con lo cual se definen los CDs; y las condiciones bajo las cuales un dato pertenece a una determinada etiqueta, lo cual se expresa lógicamente a través de predicados difusos o reglas de inferencia [Comas *et al.*, 2012]. En el contexto de segmentación de imágenes médicas, el médico cumple el rol de especialista y con su conocimiento se determinan qué rasgos observa en las imágenes para determinar a qué tejidos o región de interés corresponde cada parte de una imagen [Meschino, 2008]; donde los datos, como ya se mencionó, son vectores de características (valores numéricos) que describen información correspondiente a cada píxel o región de la imagen [Comas *et al.*, 2010; Moler *et al.*, 1999].

Una vez definidos los CDs y las reglas de inferencia o los predicados difusos se tiene completamente generado un sistema de LD para Reconocimiento de Patrones. Entonces, el sistema se aplica al agrupamiento o clasificación de los datos en un proceso conocido como proceso de consulta, en el cual se evalúan los CDs y reglas de inferencia o predicados difusos para cada dato. En este proceso, se reproducen computacionalmente y por medio del modelo generado, los mecanismos que el especialista utiliza para agrupar o clasificar datos, definiendo para cada dato una etiqueta.

En la LD, como característica esencial, los valores de verdad de una expresión lingüística no están restringidos a $\{0,1\}$ como en la Lógica *Booleana* [Comas *et al.*, 2014c; Zadeh, 1975]. La mayoría de las aplicaciones de LD utilizan LD tipo 1, en la que el valor de verdad de una proposición es un valor en el intervalo $[0,1]$ [Zadeh, 1975]. En la Tesis de [Meschino, 2008] se han desarrollado y aplicado con éxito sistemas de LD tipo 1 generados a partir de conocimiento de especialistas médicos para la segmentación de IRM. En ese enfoque, se utilizaron sistemas de LD basados en predicados difusos.

De acuerdo a enfoques recientes [Comas *et al.*, 2011c; Melin y Castillo, 2013; Mendel, 2000, 2007b], definir un valor de verdad mediante un valor en $[0,1]$ puede no ser suficiente al modelar conocimiento en problemas donde existe gran **imprecisión** e **incertidumbre**⁷. En 1975, Lotfi Zadeh [Zadeh, 1975] definió los **CDs valuados en intervalos** para dar lugar a la **LD valuada en intervalos**, la cual brinda una forma sencilla para definir valores de verdad en los casos de gran imprecisión e

⁷El concepto de **incertidumbre** está asociado a la falta de certeza respecto a la ocurrencia de un suceso o la veracidad de una afirmación. Con estas consideraciones, en esta Tesis el término incertidumbre se utiliza con relación a dos circunstancias posibles: a) la falta de certeza respecto a los valores que componen un vector de características debido a la presencia de ruido; y b) en referencia a la falta de certeza respecto al significado de un término, y en especial respecto al valor de verdad de una expresión, debida a la falta de acuerdo en la interpretación que puedan tener distintos especialistas respecto a un mismo término o expresión lingüística.

incertidumbre: utilizar **intervalos de valores de verdad**, es decir, intervalos cerrados $[a,b]$ con $a,b \in [0,1]$. Posteriormente, Jerry Mendel presentó a la LD valuada en intervalos como una simplificación de la LD tipo 2, la cual también había sido introducida por Zadeh en ese mismo artículo de 1975; y que Mendel denominó **LD tipo 2 de intervalos** [Mendel, 2001]. Debido a esto, en esta Tesis los términos “LD valuada en intervalos” y “LD tipo 2 de intervalos” se utilizan referidos al mismo concepto.

La LD tipo 2 de intervalos tiene potencialmente mayor capacidad que la LD tipo 1 para modelar la imprecisión e incertidumbre propias de las expresiones lingüísticas, especialmente en las situaciones en las cuales estos rasgos tienen valores significativos [Mendel, 2007b]. La LD tipo 2 de intervalos supera a la de tipo 1 al ser capaz de tratar con: a) **imprecisión**, asociada a la falta de precisión que una persona tiene sobre el significado de una expresión y b) **incertidumbre**, asociada tanto a la diferencia de interpretación entre varios especialistas respecto a una misma expresión como a la falta de certeza respecto a los valores en un vector de características ante la presencia de ruido. Ante estas situaciones, la definición de un único valor de verdad puede no ser suficiente, por lo que la LD tipo 1 puede no ser adecuada [Mendel, 2007a; Mendel, 2007b]. En cambio, en estos casos, los intervalos de valores de verdad se presentan como herramientas simples y adecuadas para representar valores de verdad.

La mayoría de las aplicaciones de LD tipo 2 de intervalos es en los **modelos tradicionales de inferencia difusa** de: Mamdani, originalmente introducido para LD tipo 1 en [Mamdani, 1974], y de Takagi–Sugeno–Kang, originalmente introducido para LD tipo 1 en [Sugeno y Kang, 1988]. La extensión del uso de estos modelos para operar con LD tipo 2 de intervalos fue realizada, entre otros, por Jerry Mendel [Liang y Mendel, 2000; Mendel, 2001; Mendel, 2007b; Mendel *et al.*, 2006]. En los últimos años se han presentado aplicaciones concretas de LD tipo 2 de intervalos en PDI, algunas de ellas pueden consultarse en: [John *et al.*, 1998; Mendoza *et al.*, 2009; Mendoza *et al.*, 2007; Yldrm *et al.*, 2008; Yuksel y Borlu, 2009; Zarandi *et al.*, 2011]. Asimismo, en [Comas *et al.*, 2011c] y [Melin y Castillo, 2013] se realizan revisiones bibliográficas de las aplicaciones existentes de LD tipo 2 de intervalos en Reconocimiento de Patrones, especialmente en Procesamiento de Imágenes y de Señales Biomédicas.

Sin embargo, pese a su uso extendido, los sistemas de LD basados en inferencia difusa pueden no ser adecuados en Reconocimiento de Patrones. Esto se debe a que en éstos las operaciones lógicas están formadas por una combinación pragmática de operadores sin un vínculo axiomático claro y su salida es una variable continua [Comas *et al.*, 2014c; Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2015a]. Esto dificulta la interpretación de la forma en que las variables de entrada se combinan en el sistema mediante las relaciones difusas y también cómo debe interpretarse la salida para tomar una decisión, es decir, definir la etiqueta a asignar a un dato [Comas *et al.*, 2014c].

Sumado a esto, los algoritmos de defuzzificación existentes para trabajar con LD tipo 2 de intervalos en modelos de Mamdani [Liang y Mendel, 2000; Mendel, 2001; Mendel, 2007b] tienen un elevado costo computacional, lo que agrega una dificultad para su aplicación práctica, especialmente en segmentación de imágenes. Esto se fundamenta principalmente en la cantidad de información a procesar para cada imagen, dado que, en este campo, cada píxel es origen de un vector de datos, lo que determina que, aun en pequeñas imágenes, el costo computacional sea alto. Por ejemplo, una imagen de 200x200 píxeles, típica (y pequeña teniendo en cuenta las resoluciones alcanzables actualmente), involucra 40.000 vectores de datos.

Como alternativa a los modelos de inferencia, los **sistemas de LD basados en predicados difusos** constituyen modelos de sencilla interpretación e implementación, con bajo costo computacional, que facilitan la implementación lógica de expresiones lingüísticas por ser una extensión directa de la Lógica *Booleana* [Zadeh, 1975]. Éstos han sido exitosamente aplicados previamente en segmentación de imágenes médicas utilizando LD tipo 1 [Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2006a; Meschino *et al.*, 2008]. En particular, en [Meschino, 2008] se presentan sistemas de LD basados en predicados difusos para la segmentación de IRM; y se propone el enfoque basado en predicados como un enfoque más apropiado para el Reconocimiento de Patrones que el tradicional enfoque basado en modelos de inferencia.

En los sistemas de LD basados en predicados difusos, los predicados “explican” las etiquetas a obtener mediante una combinación lógica de los diferentes atributos que un dato debe cumplir para ser asignado a una determinada etiqueta, utilizando expresiones lingüísticas. Por ejemplo, en el contexto de IRM, un predicado típico puede ser: “*El píxel es Materia Gris si el píxel es blanco en la imagen PD Y es oscuro O gris en la imagen T1 Y es brillante en la imagen T2*”; donde Materia Gris es una de las sustancias (etiqueta) que se buscan segmentar y PD, T1 y T2 corresponden a diferentes tipos de IRM entregadas por el resonador [Meschino, 2008]. Para este ejemplo, los atributos “*Blanco*”, “*Oscuro*”, “*Gris*” y “*Brillante*” se describen mediante CDs. En el proceso de consulta, mediante el uso de los operadores lógicos de conjunción, disyunción y complemento se define el valor de verdad con el cual cada dato pertenece a cada etiqueta. En el caso del ejemplo los operadores lógicos permiten determinar el valor de verdad de los conectivos lógicos “Y” y “O”. Al conocer el valor de verdad con el cual cada dato corresponde a cada etiqueta, como enfoque habitual, la asignación de la etiqueta se realiza considerando la etiqueta descrita por el predicado difuso con mayor valor de verdad.

Pese a su potencial capacidad para trabajar adecuadamente ante la presencia de imprecisión e incertidumbre, que fue anteriormente descrita, **la extensión de los sistemas de LD basados en predicados difusos para su uso con LD tipo 2 de intervalos requiere de una metodología completa**

que permita comparar y ordenar⁸ intervalos de valores de verdad. En este tipo de LD, los valores de verdad de los predicados difusos están representados por intervalos de valores de verdad. Al poder comparar intervalos de valores de verdad, es posible determinar el predicado con mayor valor de verdad y, por lo tanto, asignar la etiqueta tal como se realiza en LD tipo 1 [Comas *et al.*, 2014c]. **Esta metodología completa para comparar y ordenar intervalos, que hasta el momento no ha sido desarrollada, es propuesta en esta Tesis a través del concepto, también propuesto aquí, de medida de intervalo de valores de verdad.**

Por otro lado, ya se ha señalado que, en el enfoque habitual, los sistemas de LD se generan a partir del conocimiento de uno o más especialistas. En este sentido, la LD es una herramienta óptima para implementar conocimiento expresado lingüísticamente en un modelo computacional. El sistema de LD, una vez generado, es capaz de reproducir computacionalmente el razonamiento que el especialista utiliza al realizar una segmentación o clasificación manual de una imagen.

Sin embargo, **una limitación importante en el uso de sistemas de LD aparece en el hecho de que el conocimiento necesario para generar el sistema**, es decir las descripciones lingüísticas a partir de las cuales se definen los CDs y los predicados difusos, **no siempre está disponible.** En muchos casos, sólo se dispone de algunos ejemplos de la segmentación deseada, algunos píxeles etiquetados como *Gold Standard*. En otros casos, estos ejemplos no están disponibles.

Desde un punto de vista inverso al enfoque habitual de generación y uso de sistemas de LD, **en esta Tesis se propone la generación automática de sistemas de LD para Reconocimiento de Patrones utilizando la información intrínseca contenida en las imágenes** (y en las imágenes *Gold Standard* cuando se disponga de ellas), es decir los datos a etiquetar. La generación automática de sistemas de LD directamente a partir de datos permite:

- Utilizar sistema de LD incluso cuando no se dispone de conocimiento de parte de un especialista respecto al problema de segmentación.
- Descubrir conocimiento oculto contenido en los datos, explotando las capacidades de interpretación de los sistemas de LD, al permitir analizar los atributos, las relaciones difusas encontradas (predicados) y los CDs definidos.

Por lo tanto, a partir del planteo realizado en esta Sección, surgen las siguientes necesidades:

- **El desarrollo de una metodología completa para comparar y ordenar intervalos de valores de verdad que habilite al uso de sistemas de LD basados en predicados y**

⁸En esta Tesis, las expresiones **ordenar intervalos de valores de verdad** y **orden entre intervalos de valores de verdad** no son utilizadas con el sentido matemático formal del concepto de orden, sino que, se refieren a cualquier metodología que permita comparar intervalos de valores de verdad entre sí, determinando el intervalo que representa mayor valor de verdad.

LD tipo 2 de intervalos, buscando con esto mejorar la interpretación y exactitud de métodos previamente utilizados en segmentación de imágenes médicas.

- **El análisis objetivo de las ventajas que la LD tipo 2 de intervalos ofrece debido a su mayor capacidad para el manejo de imprecisión e incertidumbre** (incluyendo datos con ruido proveniente de diferentes fuentes).
- **El estudio y desarrollo de métodos de generación automática de sistema de LD basados en predicados y LD tipo 2 de intervalos, para la segmentación de imágenes médicas en particular y para Reconocimiento de Patrones en general.** El uso de este tipo de métodos sería de enorme importancia, considerando la potencial capacidad de interpretación y extracción de conocimiento que podría realizarse a partir de sistemas de LD automáticamente generados.

1.2. Antecedentes

Continuamente se proponen nuevos métodos para la segmentación de imágenes. En general, cada método se propone para resolver un problema en particular. Una vez definido el método, este puede ser extendido para la solución de problemas similares.

En el paradigma de **segmentación basada en técnicas de PDI**, es común que se utilicen en forma combinada varias técnicas de PDI que, en conjunto, permiten obtener una solución satisfactoria. En la bibliografía, este paradigma se suele dividir según el tipo de análisis que se realice sobre las imágenes [Bouchet *et al.*, 2007; Gonzalez y Woods, 2002; Meschino y Moler, 2004; Pastore *et al.*, 2011]:

- **Detección de similitudes:** La segmentación se realiza analizando los píxeles que tengan alguna propiedad común, esencialmente sus valores de intensidad. Entre las técnicas más comunes que siguen este paradigma pueden mencionarse: umbralamiento, técnicas basadas en análisis de histogramas de niveles de gris, algoritmos de crecimiento de regiones y algoritmos de partición de regiones.
- **Detección de discontinuidades:** La segmentación se realiza detectando cambios abruptos dentro de la imagen y se utiliza para detectar puntos aislados, bordes, líneas o contornos. El método general consiste en aplicar filtros (máscaras de convolución o filtros basados en Morfología Matemática) que permitan detectar variaciones de intensidad de un píxel en relación con los píxeles próximos (vecinos) dentro de la imagen y luego analizar los valores de intensidad obtenidos.

En particular las técnicas de umbralamiento y las basadas en análisis de histogramas de niveles de gris se aplican habitualmente en procesamiento globales sobre imágenes completas. Las imágenes médicas no poseen en general histogramas bimodales o multimodales que permitan distinguir fácilmente los píxeles correspondientes a tejidos o regiones de interés del resto de ellos. Incluso es habitual que regiones de un mismo tejido presenten píxeles con distintos niveles de gris y que algunos de ellos a su vez coincidan con los de otros tejidos que también son de interés. En este sentido, estas técnicas globales no se utilizan directamente para realizar la segmentación de este tipo de imágenes [Meschino *et al.*, 2015b], aunque sí pueden formar parte de métodos de segmentación más complejos.

Para el caso particular del umbralamiento, se han propuesto variantes para la segmentación de imágenes médicas, las cuales incorporan información local de los niveles de gris para la determinación del valor de umbral realizando umbralamientos por zonas, y se han aplicado a la detección de tumores en mamografías [Li *et al.*, 1995; Rejani y Selvi, 2009]. En otros casos, se han utilizado enfoques basados en el análisis de conectividad entre los píxeles, esto es, el análisis de las diferencias entre los niveles de gris de píxeles espacialmente cercanos en combinación con la técnica de umbralamiento [Pham *et al.*, 2000].

Las técnicas de partición y de crecimiento de regiones extraen regiones conectadas, es decir, píxeles espacialmente cercanos y cuyos valores de niveles de gris sean también cercanos. En la forma más simple, los algoritmos de crecimiento de regiones requieren de la intervención manual, para definir un píxel semilla a partir de cual determinar las regiones conectadas [Gonzalez y Woods, 2002]. Se han utilizado con éxito, en combinación con otras técnicas de PDI, para la detección de trabéculas en imágenes correspondientes a biopsias de médula ósea [Pastore *et al.*, 2005a]. Sin embargo, no son técnicas útiles para la detección simultánea de múltiples tejidos.

La detección de bordes, realizada desde diferentes enfoques, es de suma utilidad para la delimitación de regiones, en particular en el caso de imágenes médicas. En [Comas *et al.*, 2013], un trabajo previo en colaboración con otros autores, se utilizaron técnicas basadas en análisis de regiones mediante Morfología Matemática para segmentar células en cultivo y técnicas de detección de bordes para la delimitación de las células segmentadas.

Las técnicas basadas en Morfología Matemática [Serra, 1982] se basan en un análisis de las imágenes basado en operadores de la teoría de conjuntos, conceptos geométricos y topológicos. Se definen operaciones no lineales básicas de erosión y dilatación, relacionadas respectivamente al grado de inclusión y de intersección de un conjunto de estructura conocida llamado elemento estructurante, centrado de cada píxel de la imagen, que se desplaza a lo largo de la misma. Combinando las operaciones básicas se obtienen filtros que permiten detectar bordes, realzar estructuras que sean de interés y analizar la forma, tamaño y orientación de las estructuras presentes en una imagen.

Se han aplicado filtros secuenciales alternativos, basados en operaciones de la Morfología Matemática, para la extracción de la región del encéfalo, quitando cráneo y meninges en IRM de cerebro [Pastore *et al.*, 2005b]. Sin embargo, estos métodos no han sido exitosos para la detección de tejidos. La Morfología Matemática también fue utilizada con éxito en segmentación de los vasos sanguíneos en imágenes de fondo de ojo [Bouchet *et al.*, 2007].

En el paradigma de **segmentación a través de Reconocimiento de Patrones**, como se mencionó, se combinan técnicas de extracción de características con técnicas de Reconocimiento de Patrones.

La extracción de características consiste en definir para cada píxel o cada región a segmentar valores numéricos que describan rasgos característicos de los diferentes tejidos que permitan discriminarlos adecuadamente en una etapa posterior de Reconocimiento de Patrones. Dependiendo de cada problema en particular, puede ser necesario el uso de características de textura, información de color, información de posición, tamaño, forma u otras características.

Particularmente, en el contexto de imágenes médicas que se aborda en esta Tesis, comúnmente se utiliza el análisis de texturas. La **textura** es generalmente definida como una región de píxeles mutuamente relacionados, que siguen un patrón regular a lo largo de una imagen [Gonzalez y Woods, 2002]. Existe una gran cantidad de métodos para la caracterización de texturas. Pueden consultarse en la bibliografía varios trabajos en los cuales se realiza un análisis de los diferentes enfoques existentes para el análisis de texturas, entre ellos [Ballarin, 2001; Comas *et al.*, 2010; Moler *et al.*, 1999; Muneeswaran *et al.*, 2006].

En [Ballarin, 2001] se utilizan características granulométricas de textura en combinación con la técnica de agrupamiento *K-means* para la segmentación de tejidos en IRM de cerebro. En [Tesar *et al.*, 2008] se propone un método para la segmentación de imágenes de TC 3D para la detección de órganos y diagnóstico de enfermedades, utilizando matrices de co-ocurrencia y EM como algoritmo de agrupamiento de datos. En [Kassner y Thornhill, 2010] se presenta una revisión de las técnicas de texturas comúnmente utilizadas en la segmentación de IRM de cerebro y se detallan específicamente métodos utilizados para la caracterización de tumores cerebrales, predicción de ataques de epilepsia y el diagnóstico de esclerosis múltiple. En [Meschino *et al.*, 2015b], un trabajo propio realizado en colaboración con otros autores, se utilizan características de textura y el algoritmo *kNN* para la detección de los músculos del manguito rotador, realizando la segmentación de IRM de hombro y determinando, además, las características de textura óptimas para la detección en dichas imágenes.

En [Zexuan *et al.*, 2014] se propone un nuevo algoritmo de agrupamiento basado en el FCM para la segmentación de tejidos en IRM, buscando aumentar la exactitud de las segmentaciones

obtenidas, especialmente considerando la existencia de ruido y variaciones en la homogeneidad del campo magnético que produce la IRM de cerebro.

También se han utilizado exitosamente enfoques con RNA. En [Meschino *et al.*, 2006b], se utilizaron SOM para la representación pseudo-color de imágenes de biopsias de médula ósea. En [Rajini, 2011] se propone un nuevo método para el diagnóstico automatizado a partir de la segmentación de IRM utilizando en forma combinada dos clasificadores: RNA y kNN.

En enfoques de **Reconocimiento de Patrones basados en LD** hay en la actualidad una gran cantidad de aplicaciones. Si bien existen en la bibliografía muchísimos trabajos donde se proponen métodos para el agrupamiento y la clasificación de datos en general, a continuación, se presentarán sólo algunos de los métodos relevantes para esta Tesis relacionados específicamente con segmentación de imágenes médicas. Sin embargo, pueden consultarse [Comas *et al.*, 2011c] y [Melin y Castillo, 2013] como artículos con revisiones detalladas de aplicaciones de LD tipo 2 de intervalos en Reconocimiento de Patrones y en Procesamiento de Imágenes Médicas.

En [Zarandi *et al.*, 2011] se propone un sistema de LD diseñado a partir de conocimiento de especialistas para la segmentación de IRM y la asistencia en el diagnóstico de tumores cerebrales, en el cual se utiliza LD tipo 2 de intervalos. Para la segmentación se utiliza un modelo de inferencia difusa, al que se ingresan IRM pre-procesadas con filtros tradicionales de PDI que permiten la disminución del ruido.

En [John *et al.*, 1998] se presenta un sistema de LD basado en LD tipo 2 de intervalos y reglas de inferencia para el procesamiento de radiografías de tibia y su posterior clasificación con RNA. En este caso, la LD tipo 2 de intervalos se utiliza para modelar las imprecisiones propias del análisis de este tipo de imágenes. Se modelan, además, opiniones de diferentes especialistas obtenidas a través de encuestas. El método en conjunto, provee una asistencia en el diagnóstico de las lesiones de los huesos, determinando la localización y longitud líneas en las imágenes pre-procesadas y el tipo de lesión.

En [Chumklin *et al.*, 2010] se utiliza un sistema de LD basado en LD tipo 2 de intervalos e inferencia difusa para la detección de micro-calcificaciones en mamografías. En este trabajo, los CDs se generan automáticamente utilizando un algoritmo de agrupamiento llamado *Possibilistic C-Means*. Los resultados se comparan con un método equivalente donde los CDs se diseñan utilizando FCM.

En la Tesis de [Meschino, 2008] se presenta un enfoque de segmentación de IRM en el que se utiliza un sistema de LD basado en LD tipo 1 y predicados difusos. Los CDs son inicialmente definidos a partir de descripciones realizadas por especialistas y luego son optimizados utilizando Algoritmos Genéticos. Se realiza un análisis completo del uso de sistemas de LD para el Reconocimiento de Patrones y la segmentación de imágenes y se propone el uso de métodos

basados en predicados difusos como un enfoque más apropiado, rápido e interpretable para este tipo de aplicaciones que los tradicionales modelos de inferencia difusa de Mamdani y Takagi–Sugeno–Kang.

Es a partir de este último desarrollo y de las capacidades potenciales ya analizadas de la LD tipo 2 de intervalos para el manejo de imprecisión e incertidumbre, que en la presente Tesis se proponen el análisis y la implementación de sistemas de LD tipo 2 de intervalos para la segmentación de imágenes médicas utilizando predicados difusos. A partir de esta propuesta, se presentan, como ya se explicó, las necesidades de: definir una metodología para comparar intervalos de valores de verdad que habilite la utilización de predicados difusos y LD tipo 2 de intervalos en Reconocimiento de Patrones y desarrollar métodos de generación automática de sistemas de LD a partir de datos.

1.3. Objetivos y aportes de esta Tesis

Dada la complejidad de los problemas de segmentación de imágenes, especialmente de imágenes médicas, continuamente existe la necesidad del desarrollo de nuevos métodos que mejoren el desempeño de otros previamente desarrollados.

Por su capacidad para trabajar en problemas con imprecisión e incertidumbre, la LD tipo 2 de intervalos se presenta como un interesante campo de estudio para el desarrollo de tales métodos. Sin embargo, hasta el momento, este tipo de LD se ha aplicado en sistemas basados en inferencia difusa, con un elevado costo computacional y con la dificultad adicional de la determinación de la etiqueta para cada dato, dada la salida continua de estos modelos [John *et al.*, 1998; Mendoza *et al.*, 2009; Mendoza *et al.*, 2007; Yildrm *et al.*, 2008; Yuksel y Borlu, 2009; Zarandi *et al.*, 2011]. Sumado a esto, pese a haber demostrado excelentes propiedades en segmentación de imágenes con LD tipo 1 [Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2008], no existe hasta el momento una metodología formal completa para el uso de predicados difusos con LD tipo 2 de intervalos.

A su vez, se ha analizado en la Sección 1.1 el potencial aporte del desarrollo de métodos que permitan generar automáticamente, a partir de datos, sistema de LD para Reconocimiento de Patrones. Éste es, esencialmente, utilizar LD aun cuando no se dispone de la asistencia de un especialista y extraer conocimiento a partir de los sistemas generados.

En este contexto, esta Tesis plantea como **objetivo principal** el análisis y la implementación de sistemas de LD basados en LD tipo 2 de intervalos aplicados específicamente a la segmentación de imágenes médicas. Dado su potencial aporte, se pondrá especial énfasis en métodos de generación automática de sistemas de LD a partir de imágenes previamente segmentadas y la

extensión de estos métodos a otros problemas de segmentación donde no se disponga del resultado esperado (descubrimiento de conocimiento).

Asimismo, considerando los trabajos previos existentes que plantean la potencial capacidad de la LD tipo 2 de intervalos en el manejo de imprecisión e incertidumbre, **en esta Tesis se plantea la siguiente hipótesis de trabajo:** *“La LD tipo 2 de intervalos aplicada a la segmentación de imágenes mejora el desempeño de la LD tipo 1”*.

La concreción del objetivo propuesto en esta Tesis comprende:

- Proponer una metodología formal completa para el uso de predicados difusos con LD tipo 2 de intervalos.
- Desarrollar nuevos métodos de segmentación de imágenes médicas que estén basados en sistemas de LD tipo 2 de intervalos y evaluar su desempeño respecto a modelos análogos basados en LD tipo 1, y a otras técnicas robustas de segmentación propuestas en los últimos años.
- Estudiar e implementar nuevos métodos de generación automática a partir de datos de sistemas de LD para Reconocimiento de Patrones.
- Explorar las ventajas que la LD tipo 2 de intervalos ofrece debido a su mayor capacidad para el manejo de imprecisión e incertidumbre.

A partir de su concreción, los **aportes directos** de esta Tesis son:

- La extensión de la LD de predicados para su uso con LD tipo 2 de intervalos, a través de la propuesta de una metodología que permite comparar y ordenar intervalos de valores de verdad, utilizando el concepto también propuesto de **medida de intervalos de valores de verdad**.
- El análisis cuantitativo de la performance de métodos basados en LD tipo 2 de intervalos para segmentación de imágenes médicas y su comparación con LD tipo 1 y otras técnicas de segmentación basadas en Reconocimiento de Patrones.
- El estudio y desarrollo de nuevos métodos de segmentación, combinando LD tipo 2 de intervalos y otras técnicas de Inteligencia Computacional, implementando enfoques híbridos.
- El desarrollo de nuevos métodos de generación automática de sistemas de LD a partir de datos, tanto para agrupamiento como para clasificación de datos, permitiendo utilizar LD aun cuando no se dispone de la asistencia de un especialista.

- El avance sobre técnicas de **extracción de conocimiento desde datos**, utilizando las capacidades de interpretación de los sistemas de LD basados en predicados y los métodos de generación automática propuestos en esta Tesis.

Respecto a los métodos de generación automática, éstos resuelven la segmentación de imágenes y brindan, como característica principal, la capacidad de extraer conocimiento de los sistemas de LD, los cuales son generados a partir de datos, por lo que no es necesario conocimiento de un especialista. Por el contrario, el conocimiento extraído desde el sistema de LD aporta nuevo conocimiento al especialista médico respecto al tipo de imágenes estudiadas, o al problema de segmentación, lo que puede redundar en aportes significativos al estudio y la solución de problemas con imágenes médicas, contribuyendo a la mejora y optimización de las técnicas de diagnóstico, evaluación y detección de patologías a partir imágenes. Con una adecuada cantidad de imágenes, los modelos logrados pueden ser también fuente de información para la medicina basada en la evidencia [Villar, 2011].

1.4. Publicaciones que sustentan esta Tesis

Esta Tesis se enmarca dentro de los proyectos de investigación “Análisis y Clasificación de Imágenes y Señales Biomédicas” (15G268), “Morfología matemática y modelos de textura para la extracción de características y segmentación en imágenes biomédicas” (15G328) y “Segmentación y Análisis de Imágenes Biomédicas” (15G387); desarrollados en el Laboratorio de Procesamiento Digital de Imágenes del Instituto de Investigaciones Científicas y Tecnológicas en Electrónica (ICyTE), dependiente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata y de CONICET.

Los métodos desarrollados y propuestos en esta Tesis, y las aplicaciones directas derivadas de ellos, se encuentran publicados o han sido enviados a revisión en revistas, capítulos y secciones de libro y en congresos nacionales e internacionales, en todos los casos con referato. La presentación en congresos de los enfoques propuestos redundó en interesantes discusiones con especialistas reconocidos del área y de otras áreas (matemática, bioingeniería, lógica) que aportaron significativos avances para los sucesivos trabajos, cuyos frutos se resumen en la presente Tesis. A continuación, se presenta una lista detallada de los trabajos publicados:

Revistas:

- “Automatic design of interpretable fuzzy predicate systems for clustering using Self-Organizing Maps”.
Gustavo J. Meschino, **Diego S. Comas**, Virginia L. Ballarin, Adriana G. Scandurra y Lucía I. Passoni.

Neurocomputing, Elsevier, Volumen: 147, Nro: 0. ISSN 0925-2312, pp. 47–59. Año de publicación: 2015.

- ***“Fuzzy Mathematical Morphology Toolbox and Graphical Interface”***.
Agustina Bouchet, **Diego S. Comas**, Juan I. Pastore, Marcel Brun y Virginia L. Ballarin.
IEEE Latin America Transactions, Volumen: 11, Nro: 4. ISSN 1548-0992, pp. 1090–1096. Año de publicación: 2013.
- ***“A survey of medical images and signal processing problems successfully solved with the application of Type-2 Fuzzy Logic”***.
Diego S. Comas, Gustavo J. Meschino, Juan I. Pastore y Virginia L. Ballarin.
Journal of Physics: Conference Series, Volumen: 332, Nro: 2011. ISSN 1742-6588 (Print), ISSN: 1742-6596 (Online). Año de publicación: 2011.

Capítulos y secciones de libro:

- ***“Type-2 Fuzzy Logic in Decision Support Systems”***.
Diego S. Comas, Juan I. Pastore, Agustina Bouchet, Virginia L. Ballarin y Gustavo J. Meschino.
Capítulo del libro: Soft Computing for Business Intelligence. Eds: Rafael A. Espin Andrade, Rafael Bello Pérez, Angel Cobo, Jorge Marx Gómez y Ariel Racet Valdéz. Serie: Studies in Computational Intelligence, Volumen: 537. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014. ISBN 978-3-642-53736-3, pp. 267–280. Año de publicación: 2014.
- ***“Using SOM as a tool for automated design of clustering systems based on fuzzy predicates”***.
Gustavo J. Meschino, **Diego S. Comas**, Virginia L. Ballarin, Adriana G. Scandurra y Lucía I. Passoni.
Sección del libro: Advances in Self-Organizing Maps. Eds: P. Estévez, J. Príncipe y P. Zegers. Serie: Advances in Intelligent Systems and Computing, Volumen: 198. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013. ISBN 978-3-642-35229-4, pp. 85–94. Año de publicación: 2013.

Congresos:

- ***“Knowledge discovering in data clustering by self-discovered type-2 fuzzy predicates”***.
Diego S. Comas, Gustavo J. Meschino, Ann Nowé y Virginia L. Ballarin.
Fifth International Workshop on Knowledge Discovery, Knowledge Management and Decision. 20 al 24 de abril de 2015. Ciudad México, México.
- ***“Discovering type-2 fuzzy predicates in data guided by automatic clustering algorithms”***.
Diego S. Comas, Gustavo J. Meschino y Virginia L. Ballarin.
Eureka International Virtual Physical Meeting 2014. 26 al 28 de noviembre de 2014. Culiacan, México.
- ***“Label-based Type-2 Fuzzy Predicate Classification applied to the design of morphological W-operators for image processing”***.
Diego S. Comas, Gustavo J. Meschino, Marcel Brun y Virginia L. Ballarin.
First Latin American Congress on Computational Intelligence. 11 al 13 de junio de 2014. San Carlos de Bariloche, Argentina. pp. 55–60.

- ***“Using SOM as a tool for automated design of clustering systems based on fuzzy predicates”.***
Gustavo J. Meschino, **Diego S. Comas**, Virginia L. Ballarin, Adriana G. Scandurra y Lucía I. Passoni.
9th Workshop on Self-Organizing Maps (WSOM 2012). 12 al 14 de diciembre de 2012. Santiago, Chile. ISBN 978-3-642-02397-2, pp. 85–94.
- ***“Diseño automático de Sistemas de Lógica Difusa Tipo 2 mediante Mapas Auto-organizados”.***
Diego S. Comas, Juan I. Pastore, Agustina Bouchet, Virginia L. Ballarin, Lucía I. Passoni y Gustavo J. Meschino.
Quinto Torneo Regional de Inteligencia Computacional (TRIC V), Argencon 2012. 15 de junio de 2012. Córdoba, Argentina.
- ***“Lógica Difusa Tipo 2 en Sistemas de Soporte a las Decisiones”.***
Diego S. Comas, Juan I. Pastore, Agustina Bouchet, Virginia L. Ballarin y Gustavo J. Meschino.
Tercer Taller Internacional de Descubrimiento de Conocimiento, Gestión del Conocimiento y Toma de Decisiones. 26, 27 y 28 de octubre de 2011. Santander, España.
- ***“A survey of medical images and signal processing problems successfully solved with the application of Type-2 Fuzzy Logic”.***
Diego S. Comas, Gustavo J. Meschino, Juan I. Pastore y Virginia L. Ballarin.
XVIII Congreso Argentino de Bioingeniería (SABI 2011). 28, 29 y 30 de septiembre de 2011. Mar del Plata, Argentina. ISBN 978-987-27301-0-9.

1.5. Estructura de la Tesis

Se describe a continuación la estructura de la Tesis y los contenidos principales de cada uno de sus Capítulos.

En el Capítulo 2 “Procesamiento de Imágenes Médicas”, se presentan los principales tipos de imágenes médicas utilizadas en diagnóstico médico. Se analizan las características más relevantes de cada tipo de imagen, sus capacidades para detección, identificación y seguimiento de patologías y sus tratamientos, así como su uso para planificación de cirugías. Se describen los principales problemas de PDI en imágenes médicas y algunos de los métodos típicos y las limitaciones de los mismos, que inspiraron las propuestas de esta Tesis.

En el Capítulo 3 “Reconocimiento de Patrones”, se definen los conceptos de clasificación y de agrupamiento de datos y se describen los algoritmos con mayor aplicación en la segmentación de imágenes. Se analizan las características esenciales de éstos, analizando ventajas y limitaciones. Se detallan especialmente los algoritmos de agrupamiento de datos utilizados en los métodos propuestos en esta Tesis para la generación automática de sistemas de LD.

En el Capítulo 4 “Lógica Difusa”, se presentan los conceptos relacionados a la LD tipo 1 y LD tipo 2 de intervalos, necesarios para la comprensión de los temas abordados en esta Tesis. Se realiza una introducción a la LD como herramienta para modelar conocimiento expresado

mediante descripciones lingüísticas. Se definen los conceptos esenciales de la LD y se presenta la LD tipo 2 de intervalos como una extensión de la LD tipo 1, que permite abordar problemas con imprecisión e incertidumbre. Además, se introduce el problema de comparar intervalos de valores de verdad para poder utilizar LD tipo 2 de intervalos en sistemas de LD basados en predicados.

En el Capítulo 5 “Métodos propuestos”, se presentan todos los métodos propuestos en esta Tesis. En primer lugar, se describe la metodología propuesta para comparar intervalos de valores de verdad mediante la propuesta de la **medida de intervalos de valores de verdad**. En segundo lugar, se presentan los métodos de generación automática de sistemas de LD tanto para agrupamiento como para clasificación de datos, lo cuales aplicados a imágenes permiten su segmentación. En primer lugar, se presentan los métodos propuestos para la generación automática de sistemas de LD para agrupamiento de datos: el **Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering** y el **Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering**; y, en segundo lugar, el método propuesto para la generación automática de sistemas para clasificación: **Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification**. Posteriormente, se presentan métodos análogos a los anteriores pero basados en LD tipo 1: el **Type-1 Data-based Fuzzy Predicate Clustering**, el **Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering** y el **Type-1 Label-based Fuzzy Predicate Classification**. Se analizan las características esenciales de cada uno y se presenta la metodología utilizada para la validación de las segmentaciones obtenidas.

En el Capítulo 6 “Resultados”, se presentan y analizan los resultados obtenidos de la aplicación de los métodos propuestos en la segmentación de distintas imágenes médicas, en primer lugar, y a base de datos generales en segundo lugar. Se analizan problemas de segmentación de imágenes y se comparan los resultados con los métodos generales de Reconocimiento de Patrones utilizados habitualmente para esta aplicación.

En el Capítulo 7 “Conclusiones” se analizan las características principales de los métodos propuestos en esta Tesis y se presentan las conclusiones.

Capítulo 2: Procesamiento de Imágenes Médicas

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Capítulo 2: Procesamiento de Imágenes Médicas

2.1. Introducción

El Procesamiento de Imágenes Médicas constituye una disciplina de especial importancia en Diagnóstico por Imágenes. Con el avance de las diferentes tecnologías de adquisición de imágenes, continuamente se plantean nuevos desafíos respecto a cómo procesar e interpretar la gran cantidad de información contenida en ellas, los cuales se traducen en una continua necesidad de nuevos métodos de PDI.

El análisis e interpretación de las imágenes asiste al especialista médico en el diagnóstico de patologías como así también, desde un punto de vista más general, al estudio de la anatomía humana. Además, las nuevas modalidades (tipos) de imágenes dinámicas brindan información sobre el funcionamiento de diferentes sistemas del cuerpo.

En la actualidad, existe una enorme cantidad de diferentes modalidades de imágenes médicas. Cada una es útil para el análisis de un sistema anatómico particular y se utiliza con un fin específico. A su vez, cada equipamiento médico que genera estas imágenes se basa en un principio físico diferente. Se pueden mencionar: Resonancia Magnética (RM), Tomografía Computada (TC), tomografía computada por emisión de fotón único (SPECT, del inglés *Single Photon Emission Computed Tomography*), tomografía de emisión de positrones (PET, del inglés *Positron Emission Tomography*), resonancia magnética funcional (fMRI, del inglés *functional Magnetic Resonance Imaging*), ecografías, angiografía, radiografías, imágenes de microscopio óptico, entre otras modalidades. En la Figura 2.1 se presentan ejemplos de algunas de las utilizadas en la actualidad.

Como se mencionó en el Capítulo 1, los métodos de segmentación de imágenes constituyen actualmente herramientas de gran relevancia que permiten avanzar en la interpretación de la información contenida en las imágenes médicas. Uno de los principales objetivos de estos métodos consiste en obtener una partición de las imágenes tal que las regiones detectadas representen estructuras anatómicas reales del cuerpo humano. En este sentido, el requisito principal de los métodos de segmentación que se utilicen en el campo de las imágenes médicas es que tengan la menor tasa de error posible. El resultado de la segmentación asiste al médico en su tarea y permite comparar volúmenes, estudiar la distribución de los diferentes tejidos dentro del cuerpo humano, detectar lesiones, comprender la anatomía, planificar cirugías, entre muchas otras aplicaciones.

Dada la enorme cantidad de modalidades de imágenes médicas disponibles, en este Capítulo se presentan las principales y se describe su utilidad en diagnóstico. A su vez, se presentan algunos de los problemas de segmentación típicos para estas imágenes. El análisis presentado busca dar una noción general de la complejidad del problema, sin pretensión de que constituya un análisis exhaustivo del uso actual de las imágenes médicas.

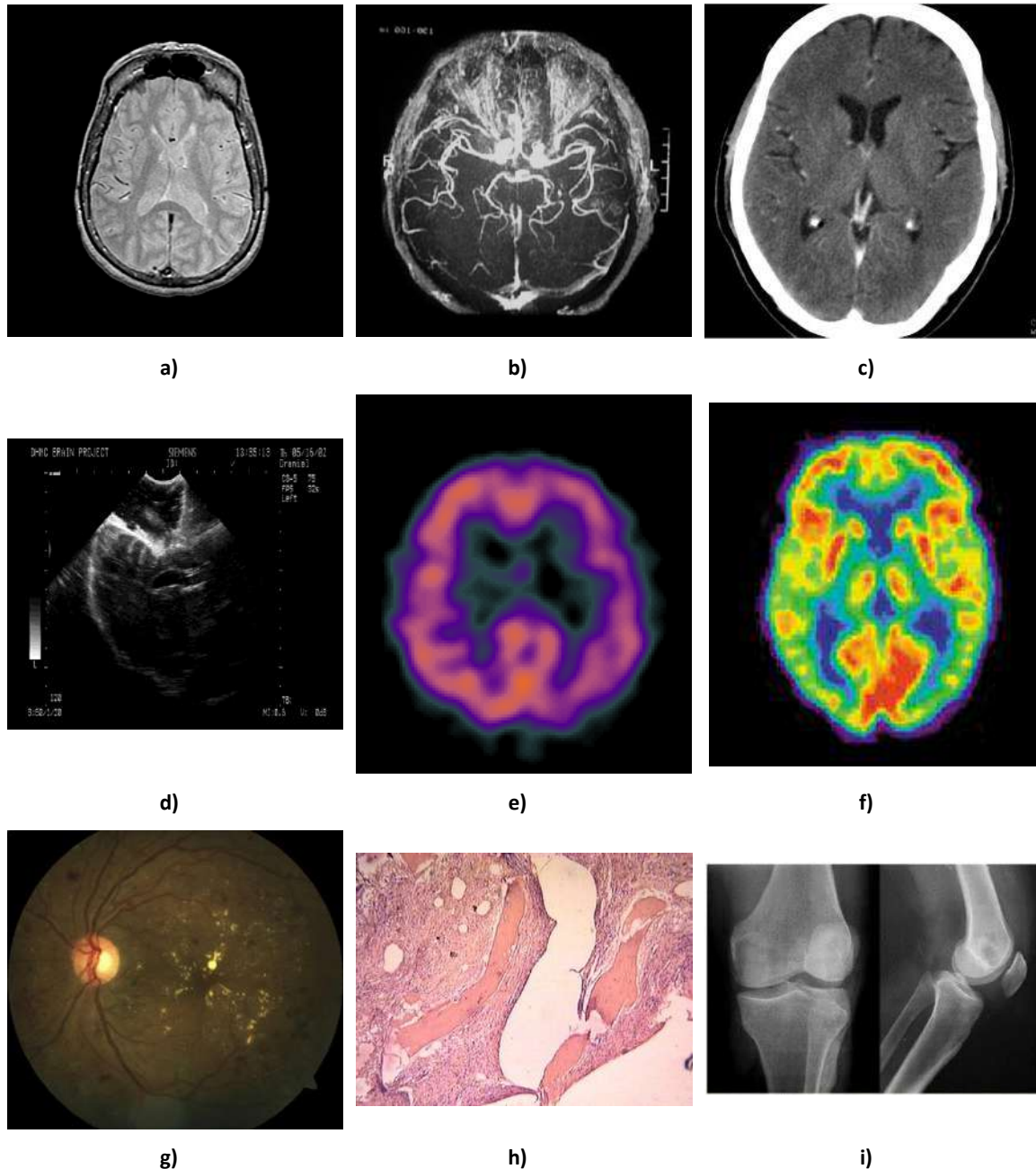


Figura 2.1. Diferentes modalidades de imágenes médicas obtenidas con diferentes equipos de adquisición (basados en diferentes principios físicos).

IRM: Imagen de Resonancia Magnética; TC: Tomografía Computada; SPECT: *Single Photon Emission Computed Tomography*, Tomografía computarizada por emisión de fotón único; PET: *Positron Emission Tomography*, tomografía de emisión de positrones.

a) IRM. b) Angiografía. c) TC. d) Ecografía. e) SPECT. f) PET. g) Imagen de fondo de ojo (angiografía). h) Imagen microscópica de médula ósea. i) Radiografía.

2.2. Modalidades de Imágenes Médicas: utilidad en Diagnóstico Médico

2.2.1 Imágenes de Resonancia Magnética

Una de las modalidades más utilizadas en el Diagnóstico por Imágenes es la RM, desde su inclusión en 1971. A diferencia de otras modalidades existentes, las **Imágenes de Resonancia Magnética** (IRM) permiten diferenciar tejidos con densidades muy próximas entre sí, o incluso similares, pero de distinta composición, y son adquiridas en forma no invasiva y sin radiación ionizante. Debido a esto, las IRM se utilizan principalmente para el estudio del sistema nervioso central y del sistema musculo-esquelético donde, excepto el hueso, las densidades de los tejidos están prácticamente comprendidas entre la de la grasa y la del agua.

El procedimiento físico detrás de la RM es sumamente complejo y requiere un conocimiento relativamente completo de los fenómenos que suceden cuando diferentes tejidos se ubican en campos magnéticos intensos y, al mismo tiempo, se someten a la acción de ondas de radiofrecuencia. Existen en la bibliografía numerosos artículos y libros que se dedican a explicar en detalle los fenómenos físicos involucrados en la adquisición de IRM y los avances desarrollados en este proceso desde sus inicios, entre otros pueden citarse [Blink, 2004; Coussement, 2000; Edelman *et al.*, 1996; Hornak, 2007; Storey, 2006].

Para generar las IRM, se irradia energía en forma de ondas de radiofrecuencia dentro del paciente y se detecta la energía que emerge, luego de la radiación, del propio paciente. En este aspecto, la tecnología de producción y adquisición de la RM es sustancialmente diferente de la de las radiografías y las imágenes de TC [Liang *et al.*, 2000].

El análisis de la información contenida en las IRM es también relativamente complejo. Cada tipo de tejido aparece en las IRM con diferentes intensidades de niveles gris dependiendo de los parámetros seleccionados en la adquisición [Coussement, 2000] y del tipo de IRM visualizada (dependiendo de las secuencias de ondas de radiofrecuencia suministradas). Las IRM pesadas en PD, en T1 y en T2 son ejemplos de diferentes secuencias de IRM comúnmente utilizadas. Por lo tanto, pese a su capacidad para diferenciar prácticamente cualquier tipo de tejido, el análisis de las IRM requiere de un entrenamiento especial del observador.

Dada su relevancia en el Diagnóstico por Imágenes, existe una gran cantidad de aplicaciones de IRM. Como el fin del presente Capítulo es presentar ejemplos que ayuden a comprender la importancia de las imágenes en el diagnóstico de patologías, el resto de esta Sección tratará solamente sobre dos de las posibles aplicaciones de la RM: IRM de cerebro e IRM de hombro; por considerarlas representativas y contar con experiencia previa en su análisis.

Las IRM de cerebro tienen un rol importante en el diagnóstico clínico de enfermedades tales como el Alzheimer, la demencia vascular y la demencia asociada con atrofia cortical [Ballarin, 2001; Meschino, 2008]. El estudio de patrones normales en la anatomía del cerebro mediante IRM es continuo y permite, mediante un control de seguimiento, la detección temprana de enfermedades. En este sentido, uno de los objetivos principales de estos estudios diagnósticos es la detección de los primeros cambios en el cerebro que producen las diferentes enfermedades, lo que permitiría su tratamiento temprano.

A su vez, la utilización de IRM permite la rápida identificación de anomalías en los tejidos, por ejemplo, la detección de tumores. En la Figura 2.2 se muestra una IRM de cerebro pesada en T1, en la cual puede ser identificada una anomalía (tumor). En este caso, las técnicas tradicionales de PDI, tales como las basadas en Morfología Matemática, pueden ser utilizadas para identificar el tumor. En el ejemplo, es clara la necesidad de que la segmentación pueda identificar de la forma más exacta posible los límites del mismo.

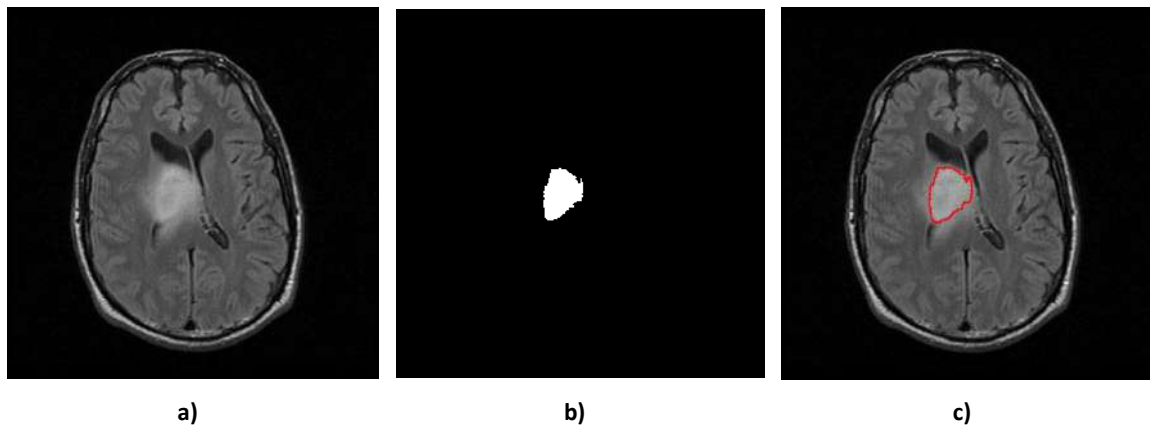


Figura 2.2. IRM de cerebro, pesada en T1, en la cual puede ser claramente identificada una anomalía (tumor).

En este caso, las técnicas tradicionales de PDI, tales como las basadas en Morfología Matemática, pueden ser utilizadas para identificar el tumor y delimitarlo.

a) IRM pesada en T1. **b)** Segmentación del tumor (en blanco). **c)** Límites del tumor representados sobre IRM original.

La IRM provee una representación anatómica del cerebro que permite la diferenciación de los distintos tejidos y la identificación de estructuras neuroanatómicas y puede utilizarse para descartar lesiones e identificar patrones de atrofia en distintas enfermedades neurodegenerativas [Manes, 2000]. Por ejemplo, en la enfermedad de Alzheimer se observa un patrón de hipometabolismo bitemporoparietal, detectable mediante *fMRI*, pero este estudio no es realizado en la totalidad de las instituciones médicas de Argentina. En cambio, el acceso a las IRM anatómicas está mucho más extendido. Al tener una alta resolución y detectar mejor las diferencias entre los tejidos blandos, incluso respecto a la TC, las IRM se presentan como una herramienta adecuada y suficientemente sensible para detectar los cambios neurodegenerativos de esta enfermedad.

En el estudio y diagnóstico de demencias, a partir del año 2001 el Subcomité de Estándares de Calidad de la Academia Americana de Neurología (*Quality Standards Subcommittee of the American Academy of Neurology*) incluyó los estudios con IRM como esenciales para la evaluación inicial de pacientes con demencia [Knopman *et al.*, 2001], agregándose éstos al examen neurológico estándar y los análisis de laboratorio ya sugeridos por el mismo comité desde 1994.

Con relación a la medición de atrofia global, en 1992 el *Multicentre Consortium to Establish a Registry for Alzheimer's Disease* demostró que la evaluación visual de la atrofia generalizada era insatisfactoria y que se requerían técnicas de mayor exactitud [Davis *et al.*, 1992].

Pese a esto, en la práctica habitual en Argentina, se utiliza en la clínica de rutina el análisis visual de las IRM por parte de especialistas, quienes determinan visualmente si los surcos o el volumen ventricular están fuera del rango de normalidad. El uso de este procedimiento, frente al de los actuales métodos automáticos disponibles, está motivado posiblemente por el elevado costo y la alta complejidad de las herramientas de *software* que permiten realizar este tipo de análisis [Meschino, 2008]

Con el avance en la disponibilidad de equipos informáticos cada vez más potentes, se ha avanzado en el desarrollo de métodos automáticos y semiautomáticos de segmentación, los cuales han permitido estudiar objetivamente los niveles normales de Materia Gris (MG), Materia Blanca (MB) y Líquido Ceforraquídeo (LCR). A partir de estos estudios y utilizando nuevos métodos de segmentación, es posible detectar en forma temprana signos que pueden estar relacionados a enfermedades.

Diversos estudios determinaron el rol de la IRM en ayudar a establecer un patrón normal de los cambios en el espacio intracraneal, del cerebro completo, la MG, la MB y el LCR; el cual resulta elemental para la detección de anormalidades [Courchesne *et al.*, 2000]. Por otro lado, el análisis cuantitativo de los porcentajes de MG y MB ayuda a la determinación de patologías cuando se tiene un patrón de cambio normal debido a la edad [Ge *et al.*, 2002].

En otros estudios, se ha detectado un patrón anormal del crecimiento del cerebro, específicamente hiperplasia en la MG cerebral y la MB del cerebelo, en los primeros años de vida en pacientes diagnosticados con autismo [Courchesne *et al.*, 2001; Courchesne *et al.*, 2007].

Un estudio adecuado de los volúmenes de los diferentes tejidos tiene gran valor predictivo en el diagnóstico temprano de la esquizofrenia, la cual se ha asociado en diversos estudios con carencias leves de los diferentes tejidos cerebrales [Ho, 2007; Hulshoff Pol y Kahn, 2008; Hulshoff Pol *et al.*, 2002; Narr *et al.*, 2003].

Por lo tanto, el desarrollo de nuevos métodos de segmentación de IRM de cerebro es un problema vigente y su importancia para la cuantificación de los volúmenes de MG, MB y LCR y la

utilización de éstos para el diagnóstico temprano de enfermedades están bien establecidas. En [Meschino, 2008] y [Ballarin, 2001] pueden encontrarse análisis más detallados respecto a la importancia de procesamiento de IRM de cerebro; en particular de la segmentación de MB, MG y LDR; para la detección de lesiones cerebrales y el diagnóstico temprano de enfermedades neurodegenerativas.

A modo de ejemplo de la segmentación de tejidos en IRM de cerebro, en la Figura 2.3 se muestran IRM en secuencia PD, T1 y T2, para un corte transversal de cerebro. Estas secuencias son las habitualmente utilizadas para la segmentación de MG, MB y LCR. La segmentación esperada (*Gold Standard*) se muestra en la misma Figura.

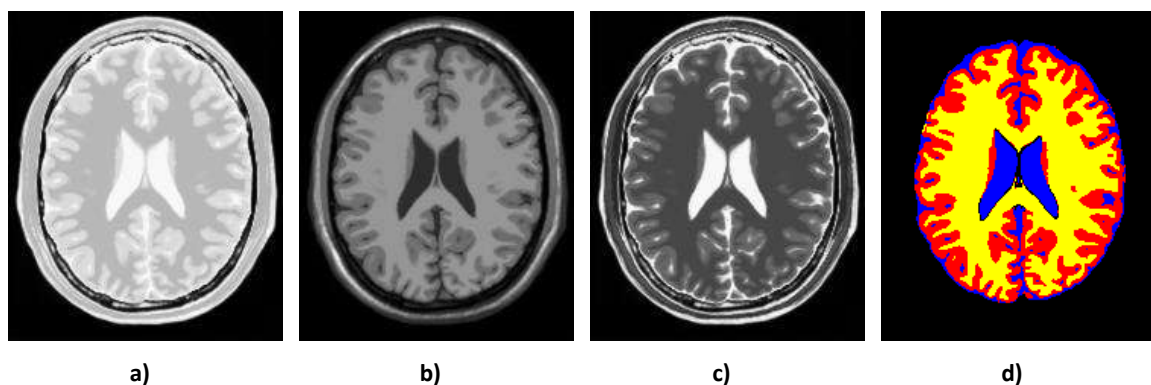


Figura 2.3. IRM en secuencias PD, T1 y T2 y segmentación de un corte transversal de cerebro.
El objetivo es la detección de los píxeles que corresponden a MG (rojo), MB (amarillo) y LCR (azul).
a) IRM en secuencia PD. **b)** IRM en secuencia T1. **c)** IRM en secuencia T2. **d)** Segmentación *Gold-Standard*.

Con relación a las IRM de hombro, éstas se han utilizado en un trabajo previo en colaboración con otros autores [Meschino *et al.*, 2015b] para la identificación y el análisis de los músculos del manguito rotador.

El manguito rotador es un grupo de músculos y tendones, pegados a los huesos de la articulación del hombro, que lo estabiliza y ayuda a levantar y rotar el brazo, y es la unión de cuatro músculos: el supraespinoso, el infraespinoso, el redondo menor y el subescapular. Para el análisis de los estos músculos, habitualmente se utilizan además de IRM, imágenes de TC y ecografías [Khoury *et al.*, 2008; Sande *et al.*, 2005].

En el artículo desarrollado previamente en conjunto con otros autores, se propuso el uso de IRM en secuencias T1 y T2 como una etapa del diseño e implementación de una herramienta de *software* para contribuir con la evaluación de los músculos del manguito rotador; mediante un método de segmentación que permite una evaluación más sencilla, reproducible y confiable. En este sentido, en el trabajo se propone la segmentación de la IRM detectando 9 tejidos diferentes: Grasa, Hueso Cortical, Hueso Medular, Líquido, Médula Ósea, Músculo, Músculo con grasa intramuscular, Músculo con algunas líneas de grasa intramuscular y Mayormente músculo (poca

grasa intramuscular). Los tejidos correspondientes a músculo con diferentes grados de infiltración de grasa son los tejidos de especial interés para ese trabajo.

En una etapa posterior, y utilizando los resultados obtenidos de la segmentación, se realizará la estimación del grado de infiltración de grasa y atrofia muscular, relacionados al riesgo de fracaso en la regeneración del tendón ante una lesión y a la artroplastia de hombro. Cuanto mayor sea la infiltración de grasa en el músculo, mayor será el riesgo de fracaso en su regeneración [Zanneti *et al.*, 1998].

Las clasificaciones de los grados de infiltración grasa y de atrofia muscular utilizadas hasta el momento tienen poca precisión y gran variabilidad inter e intra observador. En particular, las escalas utilizadas no son sensibles a cambios musculares poco significativos y son altamente subjetivas y cualitativas [Spencer *et al.*, 2008]. Se presenta la misma necesidad que en el caso de la cuantificación de MG, MB y LCR en IRM de cerebro. Esto es, obtener una segmentación de los músculos suficientemente exacta y reproducible desde la cual poder estimar correctamente el grado de infiltración de grasa. En la Figura 2.4 se muestran ejemplos de las IRM en secuencias T1 y T2 que fueron utilizadas para la segmentación de los tejidos de interés.

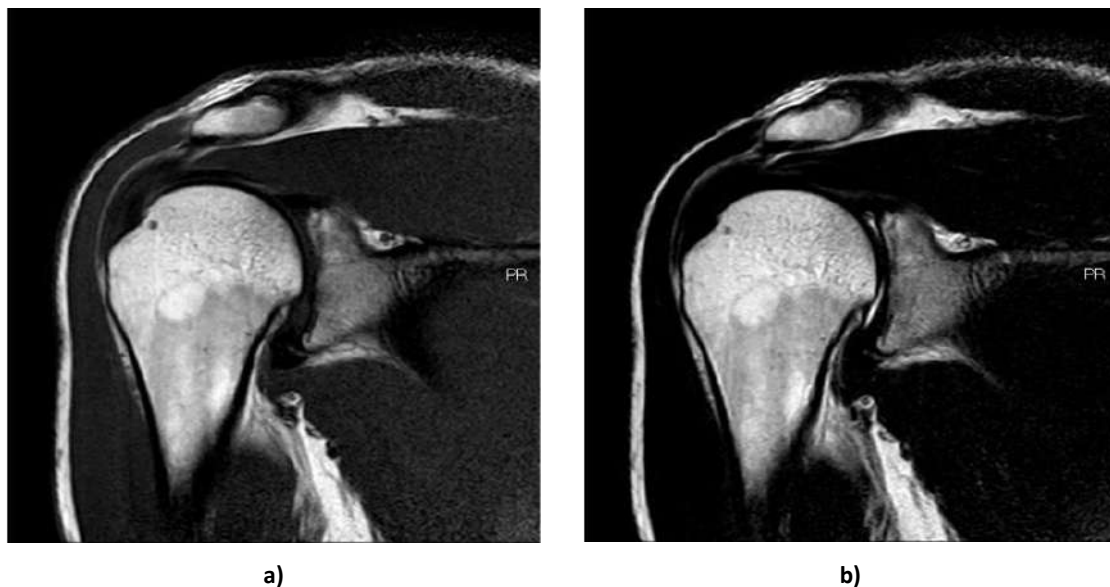


Figura 2.4. Ejemplo de IRM de hombro típica para el estudio de los músculos del manguito rotador utilizada en [Meschino *et al.*, 2015b].
a) IRM en secuencia T1. **b)** IRM en secuencia T2.

2.2.2 Imágenes de Tomografía Computada

A diferencia de la RM, la TC se basa en la radiación con rayos X y la imagen se genera detectando la energía no absorbida por el paciente [Meschino, 2008]. Es posiblemente la más sofisticada de las técnicas que aplican rayos X en Diagnóstico por Imágenes y permite la

visualización de ganglios y huesos con mayor nitidez que las IRM. Sin embargo, en general requiere del uso de contraste intravenoso, con lo cual se transforman en técnicas invasivas, y las dosis de radiación de rayos X absorbidos por los pacientes pueden en muchos casos ser significativas.

Las **imágenes de TC** representan un mapa bidimensional de los coeficientes de atenuación lineal de un cuerpo tridimensional, que se obtiene a partir de un número muy grande de medidas de transmisión, llamadas proyecciones. Si se ensambla en secuencia un conjunto de mapas bidimensionales generados por la TC, puede obtenerse una imagen tridimensional que es una representación tridimensional de la anatomía del paciente.

La intensidad de la imagen es proporcional a la de los rayos X que los tejidos atravesados han dejado pasar; con lo cual la interpretación de los niveles de gris de las imágenes guarda una total relación con la densidad y las características de reflexión de las partes anatómicas del paciente. Los dispositivos de TC más modernos pueden producir imágenes con diferencias en densidad de hasta el 0,5% y resoluciones espaciales de hasta 0,5mm.

Las imágenes de la TC permiten analizar las estructuras internas del organismo y son útiles para detectar hemorragias, fracturas, tumores o infecciones. También se utilizan para analizar la morfología de la médula espinal y de la columna vertebral, y medir la densidad ósea, por lo que suele ser utilizada para el diagnóstico de osteoporosis. Específicamente, permite el estudio de la extensión de cáncer de mama, cáncer de pulmón y cáncer de próstata o la detección de cualquier cáncer en la zona nasal, que en su etapa inicial suelen presentar síntomas de alergia o rinitis. Además, pueden obtenerse imágenes tridimensionales que permiten la generación de modelos anatómicos, imprescindibles en tratamientos de radioterapia y planificación de cirugías.

En este sentido, la TC puede ser utilizada en casos en que la RM no permitiría obtener imágenes con suficiente nitidez. En función de tipo de análisis que se esté efectuando en cada caso, es decir, del tipo de tejidos estudiados, las técnicas de segmentación de imágenes pueden asistir al especialista en la detección de tejidos normales y de anomalías, tal como ocurre en el caso de las IRM. También para esta modalidad, es posible y sumamente utilizado el control periódico de pacientes para evaluar cambios a lo largo del tiempo.

En la Figura 2.5 se muestran dos ejemplos de imágenes de TC típicas utilizadas en Diagnóstico por Imágenes: una imagen de TC de cerebro y una imagen de TC de mediastino. Puede apreciarse para la imagen de TC de cerebro de la Figura 2.5a la presencia de un tumor representado con niveles de intensidad altos (niveles claros cercanos al blanco). En este caso, los niveles de intensidad del tumor son muy cercanos al de otros tejidos anatómicos presentes. A su vez, comparando con las IRM de cerebro mostradas en la Figura 2.3, puede verse que no se aprecia una gran diferencia entre los niveles de gris correspondientes a MB y MG.

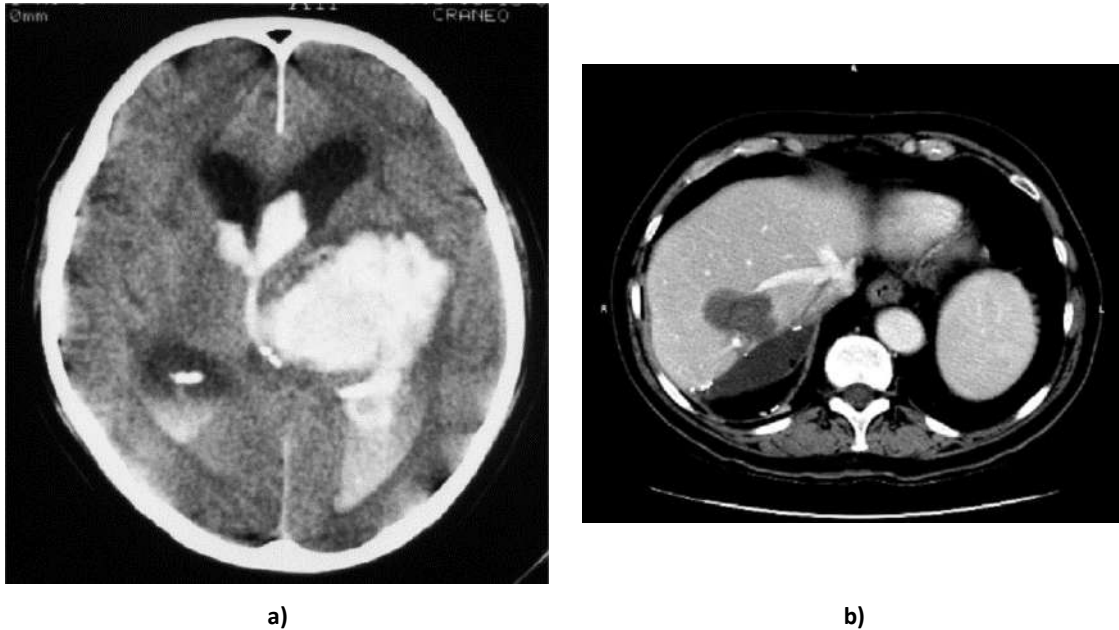


Figura 2.5. Ejemplos de imágenes de TC utilizadas en Diagnóstico por Imágenes.

a) Imagen de TC de cerebro (puede visualizarse claramente la presencia de un tumor). **b)** Imagen de TC de mediastino.

2.2.3 Angiografías

Las **angiografías** son imágenes obtenidas mediante técnicas radiológicas que se utilizan para obtener representaciones de los vasos circulatorios, permitiendo analizar el diámetro, aspecto, número y estado clínico de los mismos. Para obtener las angiografías existen técnicas invasivas, en las cuales se introduce un catéter en una arteria periférica, y técnicas no invasivas basadas en TC, que fueron mencionadas en la Sección anterior.

Las patologías vasculares son unas de las principales causas de morbilidad y mortalidad en el mundo occidental y constituyen un importante problema en salud pública. Las causas son múltiples. Pueden estar relacionadas a lesiones traumáticas (por accidente); a enfermedades vasculares genéticas, por ejemplo algunas malformaciones arteriovenosas; o pueden ser debidas a enfermedades vinculados a la obesidad y el estrés, como la ateromatosis⁹ y la diabetes [Tankyevych *et al.*, 2011]. Una anomalía que afecte a los vasos puede provocar perturbaciones en la circulación del órgano, así como en los tejidos suministrados por la red vascular implicada. Si se reduce el lumen de las arterias, como en la ateromatosis, el flujo sanguíneo se ve afectado y el órgano asociado tiene poca irrigación sanguínea generando, en el peor de los casos, isquemia y luego muerte de tejido. Por otro lado, la ruptura de un vaso, normal (como en un trauma) o patológica (como en una ruptura de aneurisma), puede causar hemorragias.

⁹La **ateromatosis** es una enfermedad caracterizada por la degeneración de las paredes arteriales, con producción de masas amarillentas de induración y reblandecimiento.

En la Figura 2.6 se muestran dos ejemplos de angiografías obtenidas mediante diferentes técnicas. En la Figura 2.6a se muestra una angiografía obtenida con la introducción de un catéter y uso de contraste. En la Figura 2.6b se presenta una angiografía de tórax obtenida utilizando TC. Como puede observarse en éstas imágenes, los vasos sanguíneos representados en ellas se muestran, en general, con niveles de gris con un elevado contraste respecto al resto de los tejidos en las imágenes (una diferencia significativa en los niveles de gris).

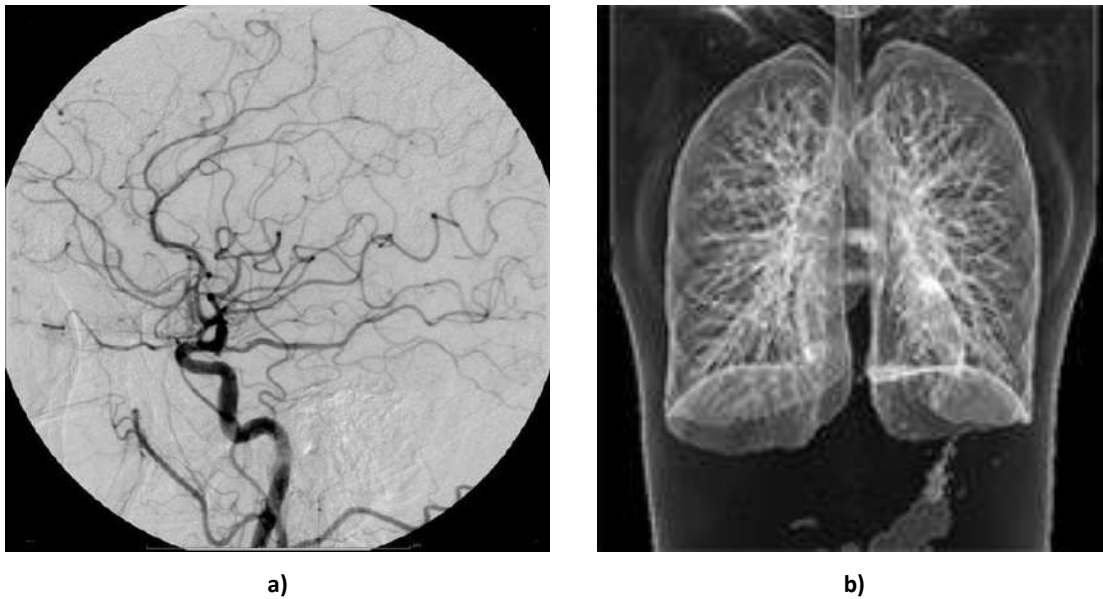


Figura 2.6. Ejemplos de angiografías obtenidas mediante diferentes técnicas.

a) Angiografía obtenida con la introducción de un catéter y uso de contraste. **b)** Angiografía obtenida con TC correspondiente al tórax de un paciente.

A partir de las angiografías, el especialista debe analizar la forma y espesores de los vasos sanguíneos y la posible presencia de obstrucciones. El análisis visual, que es el método comúnmente utilizado, representa un gran insumo de tiempo y una relativa complejidad dependiendo de las estructuras circulatorias que se estén estudiando. En este sentido, se presenta la necesidad del desarrollo y uso de método de Segmentación implementados computacionalmente que permitan una correcta identificación de los vasos sanguíneos y también la posibilidad de realizar reconstrucciones tridimensionales de los mismos. En [Tankyevych *et al.*, 2011] se presenta un análisis detallado tanto de las técnicas de adquisición de angiografías, como de los métodos de Segmentación de vasos sanguíneos existentes actualmente.

2.2.4 Imágenes de fondo de ojo

Las **imágenes de fondo de ojo** permiten un análisis rápido del estado de salud de una persona. Estas imágenes permiten analizar la retina, que es un tejido sensible a la luz ubicado en la parte posterior del ojo [Cree y Jelinek, 2011]. Hay una serie de enfermedades, particularmente, enfermedades vasculares (vasculopatías) que dejan marcas en el interior de la retina. La ventaja de

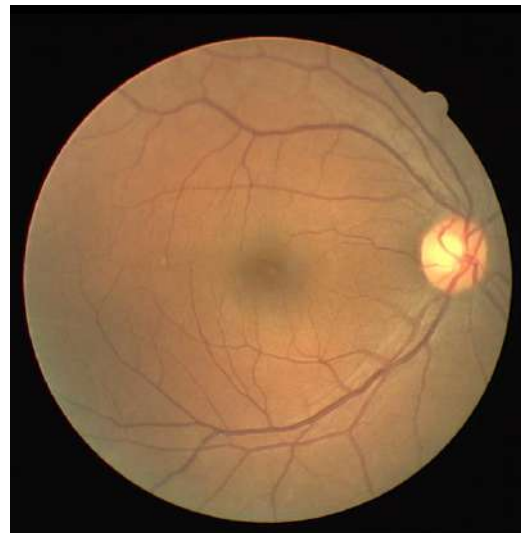
analizar la retina para determinar la salud de un paciente, está en que puede ser fácilmente fotografiada digitalmente con una cámara de fondo de ojo [Staal *et al.*, 2004].

Como ejemplo, en la actualidad existe un constante interés en el análisis de imágenes de fondo de ojo para la identificación y cuantificación de los efectos de la diabetes. Los principales signos del edema macular diabético son la presencia de exudados¹⁰ duros y blandos. La segmentación de ambos tipos de exudados genera información valiosa, no sólo para el diagnóstico de edema macular, sino también para el tratamiento, lo que ayuda a evitar la ceguera y la disminución de la visión.

Miembros del Laboratorio en que se desarrolló esta Tesis han trabajado en problemas de segmentación con este tipo de imágenes. Específicamente, en [Benalcázar *et al.*, 2013a] y [Benalcázar *et al.*, 2014] se propusieron métodos de segmentación basados técnicas de Reconocimiento de Patrones para detección de exudados. En la Figura 2.7 se presentan ejemplos de imágenes de fondo de ojo con y sin la presencia de exudados, ambas extraídas de las bases de datos DRIVE [Staal *et al.*, 2004]. Además, en [Bouchet *et al.*, 2010] se presentó un método basado en Morfología Matemática Difusa para la segmentación de vasos sanguíneos. Un ejemplo de esta segmentación de presenta en la Figura 2.8.



a)



b)

Figura 2.7. Ejemplos de imágenes de fondo de ojo, extraídas de las bases de datos DRIVE [Staal *et al.*, 2004].

a) Imagen de fondo de ojo con presencia de exudados (corresponden a las regiones pequeñas y brillantes mostradas en color amarillo). **b)** Imagen de fondo de ojo sin presencia de exudados.

¹⁰En medicina un **exudado** es el conjunto de elementos extravasados en el proceso inflamatorio, que se depositan en el espacio existente entre los tejidos o cavidades del organismo. Provoca el edema, diferenciándose del transudado por la mayor riqueza de proteínas y células

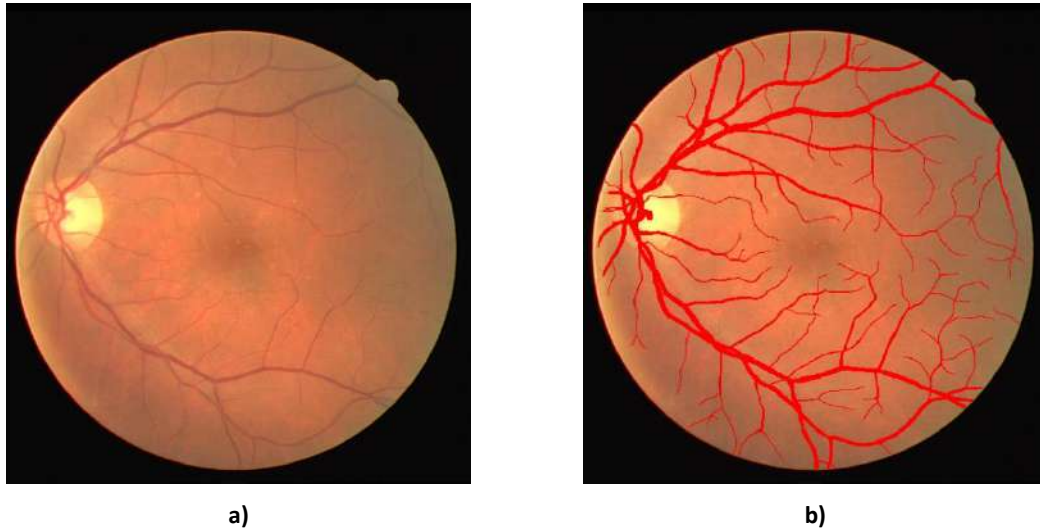


Figura 2.8 Segmentación de vasos sanguíneos en imágenes de fondo de ojo, obtenidas de la base de datos DRIVE [Staal *et al.*, 2004].

a) Imagen de fondo de ojo original. **b)** Segmentación de vasos sanguíneos (en rojo) superpuesta a la imagen de fondo de ojo original.

El análisis de imágenes de fondo de ojo es particularmente interesante, debido a la cantidad de información que puede obtenerse de éstas y de su complejidad. Hay muchas lesiones distintivas y rasgos que pueden ser detectados y analizados a partir de la segmentación. Sin embargo, muchas de estas lesiones y marcas distintivas son complejas de segmentar y aún existen problemas sin resolver. En este aspecto, la búsqueda de soluciones a estos problemas presenta una enorme oportunidad de impactar positivamente en la salud de millones de personas [Cree y Jelinek, 2011]. En particular, en este último trabajo se presenta un análisis detallado de los problemas de segmentación relacionados a las imágenes de fondo de ojo y se realiza un *review* de los métodos de segmentación existentes.

2.2.5 Imágenes de microscopia de biopsias de médula ósea

La **microscopia de biopsia de médula ósea** es un análisis patológico de muestras de médula ósea obtenidas a partir de aspiración y su posterior biopsia, que es utilizado para el diagnóstico de enfermedades tales como leucemia, mieloma múltiple, linfoma, anemia y pancitopenia.

En la médula se generan los elementos celulares que componen la sangre, incluyendo plaquetas, eritrocitos y leucocitos. Si bien los análisis sanguíneos de rutina permiten extraer información importante relacionada a la composición de la sangre, en ocasiones es necesario analizar la médula ósea y los procesos de formación de células sanguíneas.

El estudio bajo microscopio de las biopsias de médula ósea incluye las mediciones porcentuales de la celularidad medular, indicando la presencia de trabéculas, células adiposas y hematopoyéticas, que permiten evaluar la presencia y/o el grado de algún desorden metabólico,

estableciendo comparaciones entre los valores normales y los patológicos. Estas mediciones en general se realizan por simple inspección visual [Pastore *et al.*, 2005a].

A partir del estudio bajo microscopio de las biopsias de médula ósea pueden obtenerse imágenes digitales. A través de su segmentación por métodos computacionales que detecten la presencia de tejido hematopoyético, células grasas y trabéculas, podría realizarse en forma automática la medición de la celularidad medular. En la Figura 2.9 se muestran ejemplos de imágenes de microscopía de biopsia de médula ósea. En las Figuras 2.9a y 2.9b se presentan respectivamente una microscopía original en escala de gris y su segmentación *Gold Standard* generada por un especialista. Las Figuras 2.9c y 2.9d presentan una microscopía original en color y la segmentación *Gold Standard* de la trabécula, también definida por un especialista.

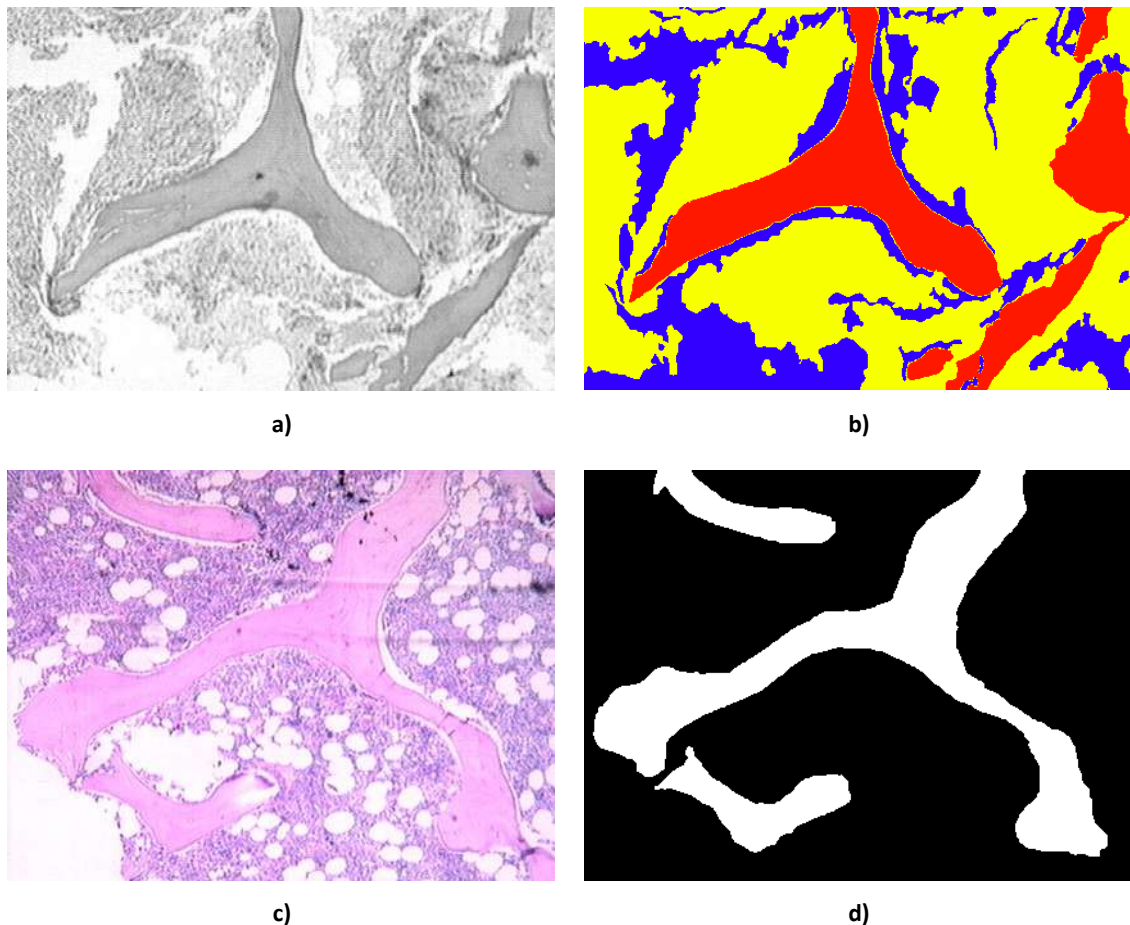


Figura 2.9. Ejemplos de imágenes de microscopía de biopsia de médula ósea.

a) Imagen inicial de una microscopía en escala de gris. **b)** Segmentación *Gold Standard* de la imagen de la Figura 2.9a definida por un especialista (tejido hematopoyético en amarillo, células grasas en azul y trabéculas en rojo). **c)** Imagen inicial de una microscopía en color. **d)** Segmentación *Gold Standard* de las trabéculas de la Figura 2.9c definida por un especialista (en blanco).

Existen antecedentes de trabajos previos de miembros del Laboratorio en el que se desarrolló esta Tesis, en los cuales se han propuesto métodos semiautomáticos para la segmentación de este tipo de imágenes médicas. En [Meschino y Moler, 2004] y [Pastore *et al.*, 2005a] se presentaron métodos semiautomáticos de segmentación, utilizando filtros de la

Morfología Matemática y técnicas de umbralamiento. En estos casos, la segmentación de las trabéculas se realiza con intervención del usuario. Por otro lado, en [Pastore *et al.*, 2013] se propone un método basado en Morfología Matemática Color para la segmentación de los píxeles correspondientes a trabéculas.

La segmentación de imágenes de microscopia de biopsia de médula ósea es un problema que continúa vigente. Principalmente debido a la complejidad de los tejidos, aún no se ha propuesto ningún método que permita la segmentación completa de manera automática, es decir, detectando correctamente los tres tejidos sin intervención del usuario.

2.2.6 Mamografías

La **mamografía** es el procedimiento más efectivo para el diagnóstico temprano de cáncer de mama [Sahakyan y Sarukhanyan, 2012]. El estudio se basa en la aplicación de rayos X sobre la glándula mamaria, al igual que se hace en una radiografía. Por medio de las mamografías, puede detectarse rápidamente la presencia de masas, a partir de lo cual se procede en general a una biopsia para determinar la naturaleza de la anomalía. En la Figura 2.10 se muestra un ejemplo de una imagen típica obtenida a partir de una mamografía.

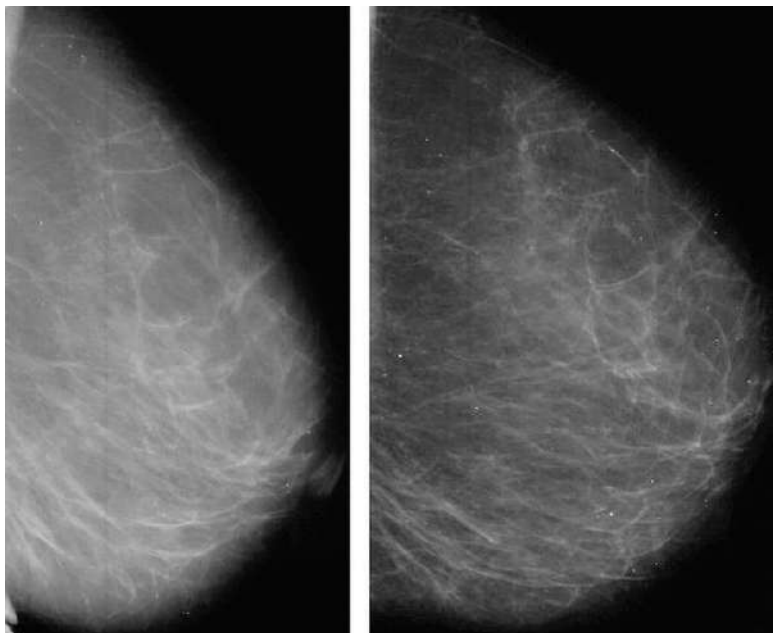


Figura 2.10. Ejemplo mamografía de mama.

Utilizando este tipo de estudios, puede detectarse rápidamente la presencia de masas que podrían indicar la ocurrencia de cáncer.

En este tipo de imágenes, los métodos de segmentación permiten la detección automática de masas asistiendo al especialista para su rápida detección y delimitación. Se han propuesto

diversos métodos. Algunos de ellos pueden consultarse en [Don *et al.*, 2011], [Sahakyan y Sarukhanyan, 2012] y [Iacomi *et al.*, 2014].

2.3. Otros tipos de imágenes utilizadas en Diagnóstico Médico

En el Diagnóstico Médico pueden presentarse problemas en los cuales imágenes comunes, tales como fotografías estándar (por ejemplo, de muestras de una sustancia en una cápsula de Petri), no adquiridas mediante equipamiento médico específico, pueden ser de utilidad en la asistencia al diagnóstico.

A su vez, el objetivo de los procedimientos aplicados sobre imágenes en Diagnóstico Médico no siempre es necesariamente su segmentación, es decir, la partición de las imágenes. En este sentido, podría ser necesario un pre-procesamiento, sin llegar a la segmentación, o una clasificación entre diferentes imágenes, en donde por ejemplo se etiquetan imágenes completas correspondientes a casos patológicos o casos normales.

A modo de ejemplo, una aplicación de procesamiento y clasificación de imágenes fue propuesta y aplicada a fotografías de líquido resultante de diálisis peritoneal dentro de una cápsula de Petri en un trabajo propio en colaboración con otros autores [Comas *et al.*, 2015a]. Se propuso un método automático con el fin detectar precozmente complicaciones asociadas a la diálisis peritoneal ambulatoria por medio de las fotografías, clasificándolas en “muestras normales” y “muestras patológicas”. En la Figura 2.11 se muestran ejemplos de las fotografías utilizadas en el trabajo citado.

En esta aplicación, se utilizó PDI y Reconocimiento de Patrones en forma combinada, con el fin de obtener una clasificación global de las fotografías en lugar de su segmentación. En este aspecto, el uso Reconocimiento de Patrones, y en particular el de los métodos basados los sistemas de LD propuestos en esta Tesis, no está restringido a la segmentación de imágenes, sino que puede utilizarse con diversos enfoques en PDI en general y, específicamente, en métodos de diagnóstico basados en el uso de imágenes con diferente origen.

2.4. Observaciones finales

La motivación de este Capítulo fue presentar una mirada general del uso de imágenes médicas como herramientas de apoyo al Diagnóstico Médico; y mostrar la manera en que la segmentación y otros procesos relacionados al PDI pueden asistir al especialista en la tarea de diagnóstico.



Figura 2.11. Imágenes de líquido resultante de diálisis peritoneal, contenidas en cápsulas de Petri, utilizadas en [Comas *et al.*, 2015a].

El análisis tuvo por objetivo la clasificación de las imágenes entre “muestra normal” y “muestra patológica”.

a) Fotografía de una “muestra normal”. **b)** Fotografía de una “muestra patológica”.

Existen muchas otras modalidades de imágenes médicas. Como se mencionó, cada una permite analizar regiones anatómicas o procesos biológicos particulares y, a su vez, los requerimientos del procesamiento de las imágenes dependen del tipo de diagnóstico que se esté realizando. En esencia, los tejidos o regiones a detectar variarán dependiendo de la modalidad y del tipo de análisis que necesite realizar el especialista.

A su vez, la evolución en el desarrollo de tecnologías de adquisición de imágenes médicas seguramente generará en el futuro nuevos problemas y requerimientos de segmentación.

Un aspecto a destacar de los métodos de segmentación basados en Reconocimiento de Patrones es que tienen mayor capacidad, en comparación con los métodos basados en PDI, para la segmentación de múltiples tejidos en las imágenes, lo que es un rasgo deseable y necesario en la mayoría de las tareas con imágenes médicas. En realidad, la gran mayoría de las técnicas existentes de segmentación basadas en PDI son desarrolladas para la detección de un tejido o componente específico, o bien requieren la intervención del especialista para ejecutar el proceso completo de segmentación.

Se concluye que, a partir de todo lo explicado, se presenta la necesidad de una continua actualización y mejora de los algoritmos de PDI existentes, buscando obtener métodos cada vez más potentes, exactos y eficientes. En este sentido, los métodos que se proponen en esta Tesis, por ser métodos generales de Reconocimiento de Patrones, tienen la ventaja de poder ser aplicados a todo tipo de imágenes médicas.

Capítulo 3: Reconocimiento de Patrones

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Capítulo 3: Reconocimiento de Patrones

3.1. Introducción

El **Reconocimiento de Patrones** es una disciplina en la que se definen métodos mediante los cuales se asignan etiquetas a una colección de elementos, que pueden ser de diversa naturaleza, mediante un mecanismo de decisión [Duda *et al.*, 2001; Jain *et al.*, 1999]. En este sentido, el Reconocimiento de Patrones se utiliza en gran número de aplicaciones tales como reconocimiento de voz, reconocimiento de caracteres escritos, reconocimiento de gestos, análisis geológico, búsqueda de documentos, análisis de datos genómicos, clasificación y segmentación de imágenes, entre muchas otras [Duda *et al.*, 2001].

El mecanismo de decisión mediante el cual se asignan etiquetas depende del método que se utilice y define, por lo tanto, la técnica de Reconocimiento de Patrones. Típicamente, los elementos a etiquetar están representados por vectores de datos, que consisten en valores numéricos que describen diferentes rasgos. Cada componente de un vector de datos se denomina característica o *feature*. Para mayor claridad y especificidad, a lo largo de esta Tesis los vectores de datos serán denominados vectores de características y en los casos que se requiera mayor simplicidad se denominarán simplemente como “datos”.

En la bibliografía se divide la aplicación de los métodos de Reconocimiento de Patrones en cuatro Etapas [Duda *et al.*, 2001; Jain y Chandrasekaran, 1982; Jain *et al.*, 1999]:

- 1) **Representación de patrones:** Incluye etapas de selección y extracción de características. La selección del tipo de característica depende del problema particular a resolver. El objetivo de las técnicas de extracción de características es obtener valores numéricos que describan adecuadamente los diferentes rasgos de los elementos a asignar a etiquetas, tarea a realizar con la técnica de Reconocimiento de Patrones. De esta Etapa se define el vector de características que representa a cada elemento.
- 2) **Aplicación de la técnica de Reconocimiento de Patrones:** Se elige la técnica de Reconocimiento de Patrones apropiada para el problema bajo estudio, definiendo con esto el mecanismo de decisión a través del cual se asignarán las etiquetas.

- 3) **Evaluación del desempeño:** Es una etapa muy importante al utilizar métodos de Reconocimiento de Patrones. Permite evaluar la calidad de la técnica utilizada en la Etapa anterior. Al final del Capítulo 5 se explicarán en detalle los métodos más utilizados para la evaluación.
- 4) **Interpretación de resultados:** En esta Etapa se analizan los resultados obtenidos, básicamente cómo fueron etiquetados los elementos, con el fin de obtener información útil que pueda traducirse en conocimiento relativo al problema particular que se está resolviendo. En problemas generales, esto no suele ser considerado, es decir, generalmente sólo interesa la asignación de etiquetas para los elementos. Sin embargo, y como se explicará en detalle en el Capítulo 5, esta Etapa del Reconocimiento de Patrones es especialmente considerada en los métodos propuestos en esta Tesis.

En la Figura 3.1 se presenta un diagrama del proceso de Reconocimiento de Patrones. Los pasos previos a la aplicación de la técnica en sí incluyen todos los procesos necesarios que permitan caracterizar los elementos a etiquetar por medio de vectores de características que describan adecuadamente los rasgos de los elementos. La Etapa posterior a la aplicación de la técnica, incluye la aplicación de métodos que permitan extraer conocimiento respecto al problema bajo estudio.

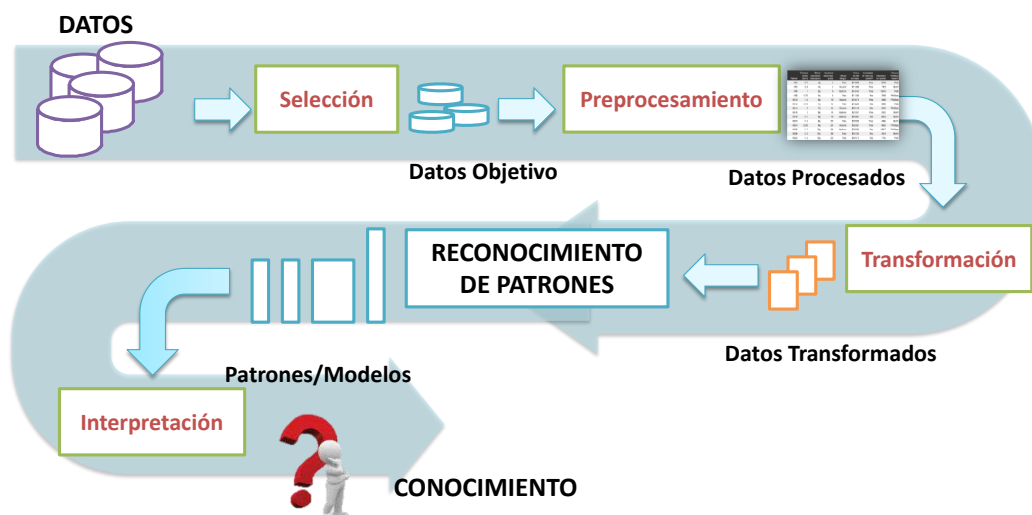


Figura 3.1. Diagrama del proceso de Reconocimiento de Patrones.

Previamente a la aplicación de la técnica de Reconocimiento de Patrones, se realizan todos los procesos necesarios para caracterizar los elementos a etiquetar, describiendo adecuadamente los rasgos de los elementos. Luego de aplicar la técnica, se pueden aplicar métodos que permitan extraer conocimiento relativo al problema bajo estudio, proceso especialmente considerado en los métodos propuestos en esta Tesis.

Al estudiar la gran cantidad de métodos existentes para Reconocimiento de Patrones, surge una primera taxonomía, con relación a la manera en que los parámetros internos de las técnicas

son ajustados. Se distingue claramente entre **enfoques supervisados** y **enfoques no supervisados** [Duda *et al.*, 2001; Haykin, 1999; Jain *et al.*, 1999]:

- **Enfoque supervisado:** En este enfoque, los parámetros internos del algoritmo de Reconocimiento de Patrones se ajustan de acuerdo a un conjunto de vectores de características previamente etiquetados con las etiquetas deseadas (un conjunto de datos *Gold Standard*), conocido habitualmente como conjunto de entrenamiento. Esencialmente, durante el ajuste de los parámetros internos, conocido como proceso de entrenamiento, se presentan los vectores de características del conjunto de entrenamiento y se analizan las etiquetas obtenidas. Los parámetros se ajustan de tal manera que las etiquetas obtenidas coincidan, en la mayor cantidad de casos posible, con las etiquetas definidas en el *Gold Standard*. El conjunto de técnicas correspondientes a este enfoque se denomina habitualmente técnicas o **métodos de clasificación supervisada, análisis discriminante** o, simplemente, **técnicas de clasificación**. A su vez, el proceso de entrenamiento se denomina generalmente entrenamiento supervisado o aprendizaje supervisado.
- **Enfoque no supervisado:** En este enfoque, los parámetros internos del algoritmo de Reconocimiento de Patrones se ajustan a partir de un conjunto de vectores de características, también conocido como conjunto de entrenamiento, pero no se utiliza ningún tipo de información respecto a las etiquetas que se espera obtener, es decir, no se utiliza *Gold Standard*. Las técnicas correspondientes a este enfoque se denominan habitualmente técnicas o **métodos de agrupamiento (*clustering*)**. A su vez, el proceso de entrenamiento se denomina generalmente entrenamiento no supervisado o aprendizaje no supervisado. Se espera que en un algoritmo no supervisado los datos se agrupen iterativamente según un criterio de similaridad.

La división entre enfoques supervisados y no supervisados da lugar a dos tipos de métodos de Reconocimiento de Patrones sustancialmente diferentes. Esto es, los métodos de clasificación y los métodos de *clustering* son métodos distintos que, a su vez, se utilizan para problemas diferentes [Bishop, 2006a; Duda *et al.*, 2001].

En general, al utilizar **métodos de clasificación** se tiene un conjunto de vectores de características previamente etiquetados y se busca ajustar un algoritmo (un clasificador) que permita predecir la etiqueta correspondiente a un nuevo vector de características, no incluido en el conjunto de entrenamiento. En estos métodos las etiquetas representan clases.

En contraste, los **métodos de *clustering*** se utilizan para establecer etiquetas para los vectores de características dentro de un conjunto de datos, definiendo grupos (*clusters*) de

vectores, buscando que vectores asignados a un mismo grupo compartan rasgos o propiedades similares. En estos métodos las etiquetas representan grupos (*clusters*).

Formalmente se establece una diferencia sustancial entre los métodos de clasificación y los métodos de *clustering*:

- Los **métodos de clasificación definen una partición del espacio de características** a partir del proceso de entrenamiento/diseño del clasificador. A partir de esta partición, puede clasificarse un nuevo vector de características que se ingrese al clasificador.
- Los **métodos de *clustering* agrupan un conjunto de vectores de características**; sin conocer cuál es el agrupamiento deseado, es decir, sin datos previamente etiquetados; **buscando que datos de un mismo grupo compartan valores similares de sus características**. Esta “similitud” de los valores de las características está asociado a la cercanía en el espacio de características de los datos asignados a un mismo grupo.

A partir de las aclaraciones anteriores, es importante señalar una ventaja significativa de los métodos de *clustering* sobre los métodos de clasificación, la cual es de suma utilidad para los métodos propuestos en esta Tesis. **Al no requerir de datos previamente etiquetados, es decir, no ser necesario un *Gold Standard*, los métodos de *clustering* pueden utilizarse para analizar conjuntos de datos sobre los que no se tenga ninguna información previa, descubriendo agrupamientos naturales. El análisis de los resultados de los métodos de *clustering* puede brindar información relativa al problema que se está abordando.** Este rasgo distintivo de los métodos de *clustering* se ha utilizado en una gran cantidad de trabajos existentes en la bibliografía [Drobics *et al.*, 2002; Fayyad *et al.*, 1996; Pedrycz, 2004; Sarlin y Eklund, 2011; Vesanto, 1999, 2002; Vesanto y Alhoniemi, 2000]; entre los cuales pueden destacarse los siguientes trabajos propios y en colaboración, relacionados a los métodos estudiados y propuestos en esta Tesis: [Comas *et al.*, 2014a; Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2013] en el que se utilizan métodos de *clustering* para generar sistemas de LD y, posteriormente, extraer información sobre el problema de Reconocimiento de Patrones en forma de descripciones lingüísticas.

Se ha hecho mención a lo largo de los Capítulos 1 y 2 de esta Tesis, de los modos en que se utilizan métodos de Reconocimiento de Patrones, tanto para la clasificación como para la segmentación de imágenes. Cualquiera de los métodos de Reconocimiento de Patrones existentes en la bibliografía puede utilizarse con estos fines. En este sentido, en [Comas *et al.*, 2010] se presenta un completo *software* de desarrollo propio, que permite la utilización mediante interfaces gráficas de una gran cantidad de técnicas de Reconocimiento de Patrones específicamente para la segmentación de imágenes.

En los trabajos siguientes pueden encontrarse ejemplos de la aplicación de diferentes técnicas de Reconocimiento de Patrones para la segmentación de imágenes: [Ballarin, 2001; Benalcázar *et al.*, 2013a; Benalcázar *et al.*, 2014; Comas *et al.*, 2012; Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2015b]. La característica distintiva en estas aplicaciones es que los elementos a caracterizar serán: píxeles o regiones de una imagen (para el caso de segmentación de imágenes); o imágenes completas (para el caso de clasificación de imágenes), por ejemplo en el trabajo previo propio [Comas *et al.*, 2015a] presentado en el Capítulo 2.

Uno de los desafíos que se presentan al utilizar Reconocimiento de Patrones en segmentación y clasificación de imágenes es la selección adecuada de las características. Como se mencionó en el Capítulo 1, existe una gran cantidad de diferentes características. La elección depende del tipo de problema abordado y, en general, se realiza en forma heurística. Como este tema escapa a los objetivos de esta Tesis, el cálculo de características en imágenes no se analizará aquí. Sin embargo, si es de particular interés, pueden consultarse los siguientes trabajos como referencias a la extracción de características en imágenes: [Ballarin, 2001; Comas *et al.*, 2010; Changjiang *et al.*, 2009; Kassner y Thornhill, 2010; Moler *et al.*, 1999; Tesar *et al.*, 2008].

Los sistemas obtenidos a través de los métodos de generación automática de sistemas de LD propuestos en esta Tesis incluyen tanto métodos de agrupamiento como de clasificación de datos utilizando LD y predicados difusos. El detalle de todos estos métodos propuestos será presentado exhaustivamente en el Capítulo 5. Sin embargo, es importante señalar en este punto que, aunque los métodos propuestos están orientados para su uso en segmentación de imágenes por medio de Reconocimiento de Patrones, al ser métodos generales, pueden potencialmente ser aplicados al Reconocimiento de Patrones en general.

En el resto de este Capítulo, se presentarán algunas de las técnicas más utilizadas en Reconocimiento de Patrones, incluyendo técnicas de *clustering* y de clasificación. En particular, los SOM y el algoritmo FCM son de especial interés para esta Tesis debido a que son utilizados en los métodos de generación automática propuestos. En el análisis que sigue se hará especial énfasis en las capacidades de los métodos para su aplicación en segmentación de imágenes y para la interpretación de los resultados, con el objetivo de extraer conocimiento sobre el problema abordado. Estas dos capacidades fueron propuestas como necesarias en el campo de segmentación de imágenes al definir el problema abordado en esta Tesis.

El análisis que sigue no pretende ser estrictamente riguroso matemáticamente. Pero sí, se prestará especial atención a los fundamentos de las técnicas que se analizarán.

En este Capítulo y a lo largo de esta Tesis, en toda referencia a algoritmos de Reconocimiento de Patrones, se utilizarán las siguientes definiciones y consideraciones:

- Un **vector de características** es un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, donde d es la cantidad de características, las cuales son valores en el conjunto de los números reales, es decir $x_i \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, d$.
- Debido a que muchos métodos de Reconocimiento de Patrones operan calculando distancias entre los vectores de características, se consideran en general valores normalizados en $[-1, 1]$ para las características, con lo cual $x_i \in [-1, 1]$, con $i = 1, \dots, d$. En el caso en que el rango de los valores que toman las características no sea $[-1, 1]$, se procede en general a una normalización lineal de sus valores, característica a característica.
- El espacio de todos los posibles vectores de características se denomina **espacio de características** y está definido por el conjunto $[-1, 1]^d$.
- El conjunto de vectores de características (datos) a agrupar o clasificar será representado por el conjunto $\mathbf{X} \subset [-1, 1]^d$, formado por datos representativos del problema. Cada dato será un d -upla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, con $x_i \in [-1, 1]$, $i = 1, \dots, d$, donde d es la dimensión del espacio de características.
- La cantidad de vectores de características en $\mathbf{X}$ será representado por N y la cantidad de *clusters* o clases definidos para el problema de Reconocimiento de Patrones será representado por la letra K .
- En los casos en que esté definido un conjunto de etiquetas para los vectores de características en $\mathbf{X}$, éste será representado por el conjunto $\mathbf{Y} = \{y_r\}_{r=1, \dots, N}$, $y_r \in \{1, \dots, K\}$. En este caso, el conjunto de entrenamiento estará formado por los vectores de características y sus etiquetas, es decir, formalmente $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ definirá un conjunto de entrenamiento para un algoritmo correspondiente a un enfoque supervisado.

3.2. Métodos de Agrupamiento

3.2.1 K-means

En el algoritmo **K-means** se define inicialmente el número de *clusters* K a obtener. Por cada *cluster*, se define un centro de *cluster*, también llamado “centroide”, $\mathbf{Z}_k \in [-1, 1]^d$ en el espacio de

características, con $k = 1, \dots, K$. Los datos son asignados a uno de los K *clusters* según su distancia al centroide sea la menor. El algoritmo se basa en la minimización de la suma de los cuadrados de las distancias de todos los puntos de un *cluster* a su centroide, es decir, en la minimización de una función de costo definida como el error cuadrático medio.

Los pasos del algoritmo pueden definirse como sigue [Duda *et al.*, 2001; Jain *et al.*, 1999]:

- 1) Se toman K centros de *cluster* iniciales $\{\mathbf{Z}_k\}_{k=1, \dots, K}$. El criterio para asignar los centros iniciales suele ser arbitrario.
- 2) En la j -ésima iteración se distribuyen el total de los vectores de característica en $\mathbf{X}$ entre los K centroides de *cluster*, asignando cada vector al *cluster* cuyo centroide sea el más cercano. Para esta asignación pueden utilizarse diferentes definiciones de distancia: distancia euclidiana, suma del valor absoluto de las diferencias, entre otras.
- 3) Se calcula el error cuadrático de la iteración j como sigue:

$$E_j = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}_{j,k}} \|\mathbf{x} - \mathbf{Z}_k(j)\|^2, \quad (3.1)$$

donde E_j es el error cuadrático; $\mathbf{x} \in \mathbf{S}_{j,k}$ es conjunto de vectores de características asignados al *cluster* k en la iteración j y $\mathbf{Z}_k$ es el centroide del *cluster* k .

- 4) Se calculan los nuevos centroides, correspondientes a la iteración $j+1$, que minimizan el índice dado por la Ecuación (3.1), como el promedio característica a característica entre los datos asignados a cada *cluster*, formalmente:

$$\mathbf{Z}_k(j+1) = \frac{1}{N_{j,k}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}_{j,k}} \mathbf{x}, \quad (3.2)$$

donde $k \in \{1, \dots, K\}$ es el índice del *cluster*; $\mathbf{S}_{j,k}$ representa al conjunto de vectores de características asignados al *cluster* k en la iteración j ; $N_{j,k}$ es el número de datos en $\mathbf{S}_{j,k}$.

- 5) Si $\mathbf{Z}_k(j+1) = \mathbf{Z}_k(j) \forall k \in \{1, \dots, K\}$ el algoritmo se detiene. En otro caso se vuelve al paso 2).

Como ejemplo, el algoritmo *K-means* ha sido utilizado con éxito en la segmentación de tejidos en IRM de cerebro [Ballarin, 2001], utilizando características de textura.

Además de definir los centroides iniciales; lo que habitualmente se hace tomando como centroides K vectores de características en $\mathbf{X}$ seleccionados aleatoriamente; el único parámetro que debe definirse para utilizar este algoritmo es el número de *clusters*, lo que supone conocer de antemano la cantidad de etiquetas a asignar. Sin embargo, como se detallará en la Sección 3.2.5, existen métodos que permiten definir la cantidad adecuada de *clusters*.

3.2.2 *Fuzzy C-Means*

El algoritmo de *clustering Fuzzy C-Means* (FCM) fue originalmente propuesto en [Ruspini, 1969] y, a diferencia del *K-means*, en este método cada vector de características tiene asignado un grado de pertenencia a cada uno de los *clusters*, en lugar de pertenecer completamente a sólo uno de ellos. Con este concepto, los vectores de características más alejados de un centroide de un *cluster* pertenecen a ese *cluster* en un grado menor que los vectores más cercanos a dicho centroide.

En este método, cada vector de características $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ tiene asignado un conjunto de coeficientes que representan su grado de pertenencia al k -ésimo *cluster*, notado $w_k(\mathbf{x})$. En FCM, el centroide de un *cluster* es el promedio característica a característica de todos los vectores de características, ponderados por su grado de pertenencia al *cluster*, es decir:

$$\mathbf{Z}_k = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{x} w_k(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} w_k(\mathbf{x})}, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{Z}_k \in [-1, 1]^d$ es el centroide del *cluster* k , con $k = 1, \dots, K$.

Los pasos del algoritmo pueden definirse como sigue [Duda *et al.*, 2001; Ruspini, 1969]:

- 1) Asignar al azar los grados de pertenencia de los datos a cada *cluster*.
- 2) Calcular los centroides de cada *cluster* utilizando la ecuación:

$$\mathbf{Z}_k(j) = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{x} w_k(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} w_k(\mathbf{x})}, \quad (3.4)$$

donde j representa la iteración.

- 3) Calcular para todos los vectores de características en $\mathbf{X}$ el grado de pertenencia al *cluster* usando la ecuación:

$$w_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sum_l \left(\frac{g(\mathbf{Z}_k, \mathbf{x})}{g(\mathbf{Z}_l, \mathbf{x})} \right)^{\frac{2}{\lambda-1}}}, \quad (3.5)$$

donde $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función distancia y $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$ es un parámetro del algoritmo que permite definir el grado de “fuzzificidad” de los *clusters*.

- 4) En la iteración $j+1$ recalcular los centroides con la ecuación descrita en el paso 2).
- 5) Repetir los pasos 3) y 4) hasta que el cambio en los coeficientes $\{w_k\}_{k=1,\dots,K}$ entre 2 iteraciones consecutivas sea menor que un valor ε definido como parámetro.

Este algoritmo de *clustering* ha sido utilizado ampliamente en segmentación de imágenes, por ejemplo para la segmentación de IRM en [Zexuan *et al.*, 2014], y ha sido aplicado también para la extracción de información sobre el *clustering* en combinación con otras técnicas tales como SOM [Kiang, 2001; Vesanto y Alhoniemi, 2000].

Para este método de *clustering*, el único parámetro que debe definirse es el número de *clusters*. Al igual que ocurre con *K-means*, existen métodos que permiten definir la cantidad adecuada de *clusters* para un determinado problema y que serán detallados en la Sección 3.2.5.

3.2.3 Mapas auto-organizados

Los **mapas auto-organizados** (SOM, del inglés *Self-Organizing Maps*) fueron presentados por Teuvo Kohonen en 1982 [Kohonen, 1982]. Son redes neuronales no supervisadas inspiradas en observaciones sobre la organización topológica de las neuronas en la corteza cerebral. Están formados por una grilla regular de celdas distribuidas en forma de mapa [Haykin, 1999; Meschino *et al.*, 2015a]. Cada celda está asociada a un vector, llamado vector prototipo, cuyas dimensiones son iguales a la del espacio de características. El conjunto de todos los vectores prototipo se llama *codebook*. Las celdas están relacionadas a sus adyacentes en el mapa por una relación de vecindad. Tanto la exactitud como la capacidad de generalización del SOM están determinadas por el número de celdas en el mapa, la cual típicamente varía de algunas docenas a varios miles [Meschino *et al.*, 2015a; Sarlin y Eklund, 2011].

Durante la fase de entrenamiento, el SOM crea una red que copia la distribución de los vectores de características en el conjunto de entrenamiento $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$. Así, vectores de características cercanos uno del otro en el espacio de características, se asignan a regiones cercanas en el espacio del mapa. El *codebook* se modifica de acuerdo a la información contenida en el conjunto de entrenamiento $\mathbf{X}$ y se inicializa antes del entrenamiento mediante algún método,

aunque típicamente se considera inicialización aleatoria e inicialización lineal, que son los más utilizados [Attik *et al.*, 2005].

Los SOM son empleados en esta Tesis en uno de los enfoques propuestos para la generación automática de sistemas de LD para Reconocimiento de Patrones, específicamente, se utilizan en los métodos propuestos: *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* y *Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering*. Dada su importancia para el desarrollo de éstos, que serán explicados en el Capítulo 5, a continuación, se presentan las definiciones más relevantes relacionadas a los SOM.

DEFINICIÓN 3.1: Dado un vector de características $\mathbf{x}$, la celda cuyo vector prototipo es el más cercano, de acuerdo a algún criterio de distancia, es llamada *Best Matching Unit* (BMU), notada $b_{\mathbf{x}}^1$, de $\mathbf{x}$ [Kohonen, 1982].

Por extensión de la Definición 3.1, la celda cuyo vector prototipo es la k más cercana a un vector de características $\mathbf{x}$ es llamada k -BMU de $\mathbf{x}$, notada $b_{\mathbf{x}}^k$, y su vector prototipo será indicado como $w_{b_{\mathbf{x}}^k}$.

DEFINICIÓN 3.2: Dada una celda j en un SOM con M celdas, las celdas más cercanas a j en el espacio del mapa son llamadas celdas adyacentes a j [Bauer y Pawelzik, 1992].

Por extensión de esta definición, las celdas k -adyacentes a una celda j son las celdas k más cercanas en el espacio del mapa, simbolizadas como ad_j^k .

En un SOM correctamente entrenado, el *codebook* es un conjunto reducido de vectores de características, representativo del conjunto de entrenamiento $\mathbf{X}$, con una función densidad de probabilidad similar a la de los datos en $\mathbf{X}$ [Meschino *et al.*, 2015a]. Si se aplica un algoritmo de *clustering* al *codebook* del SOM, lo que es habitualmente denominado *clustering* de segundo nivel, pueden obtenerse grupos de vectores prototipos, y por lo tanto celdas, esperando que celdas de un mismo *cluster* se encuentren topográficamente cercanas en el mapa [Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2015a; Vesanto y Alhoniemi, 2000].

Para evaluar la calidad del mapa entrenado, se utilizan típicamente tres tipos de errores: el error de cuantificación, el error topográfico y el producto topográfico. Estos errores se definen como sigue [Bauer y Pawelzik, 1992; Pözlbauer, 2004]:

DEFINICIÓN 3.3: El **error de cuantificación** E_Q es útil para analizar si los vectores prototipo de un SOM previamente entrenado son buenos representantes de los vectores de características del conjunto de entrenamiento $\mathbf{X}$ y se calcula como sigue:

$$E_Q = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \|\mathbf{x} - \mathbf{w}_{b_{\mathbf{x}}^l}\|, \quad (3.6)$$

donde los $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ representan datos de entrenamiento, $\mathbf{w}_{b_{\mathbf{x}}^l}$ es el vector prototipo de la BMU correspondiente al vector de características $\mathbf{x}$ y N es la cantidad de datos en $\mathbf{X}$.

DEFINICIÓN 3.4: El **error topográfico** E_T permite saber si la topología del espacio de características fue preservada después del entrenamiento y se calcula como sigue:

$$E_T = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} u(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

donde $u(\mathbf{x}) = 1$ si la BMU del dato $\mathbf{x}$ no es adyacente a su segunda BMU, y $u(\mathbf{x}) = 0$ en caso contrario.

DEFINICIÓN 3.5: El **producto topográfico** P_T permite conocer si las relaciones de vecindad en un SOM son preservadas, analizando las distancias entre los vectores del *codebook* y los vectores de características en el conjunto de entrenamiento $\mathbf{X}$. Éste puede utilizarse para analizar cuál es el mejor tamaño de un mapa para un dado conjunto de entrenamiento [Pözlbauer, 2004]. Se define como sigue [Bauer y Pawelzik, 1992]:

$$P_T = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \log(P(j,k)), \quad (3.8)$$

donde $P(j,k)$ es $P(j,k) = \left(\prod_{l=1}^k Q_1(j,l) Q_2(j,l) \right)^{1/2k}$, $Q_1(j,l)$ y $Q_2(j,l)$ son definidas respectivamente como:

$$Q_1(j,l) = \frac{f(w_j, w_{b_{w_j}^l})}{f(w_j, w_{ad_j^l})}, \quad (3.9)$$

$$Q_2(j,l) = \frac{g(j, b_{w_j}^l)}{g(j, ad_j^l)}, \quad (3.10)$$

donde $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una función distancia en el espacio de características y $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función distancia en el espacio del mapa. Desviaciones de P_T respecto a cero significan que el tamaño del SOM no es adecuado para los datos de entrenamiento [Bauer y Pawelzik, 1992].

Es importante señalar que, si el SOM realiza una proyección organizada de los datos de entrenamiento de acuerdo con un criterio de similaridad, entonces los errores definidos anteriormente tienden a minimizarse.

Los SOM generan un mapeo que reduce la dimensionalidad de los datos en el conjunto de entrenamiento, que es coherente con su función densidad de probabilidad y que puede observarse en un mapa de celdas, generalmente bidimensional. El objetivo de este tipo de redes es representar topográficamente los datos. De esta manera, durante la etapa de consulta se presentan nuevos vectores de características al mapa. Datos similares, considerando un criterio de proximidad en el espacio de características, tendrán celdas BMU en regiones próximas en el mapa.

Generalmente, se busca que el número de celdas de los SOM sea significativamente menor al número de datos con el que se entrenan [Meschino *et al.*, 2015a]. En este sentido, los SOM constituyen herramientas interesantes para trabajar con grandes cantidades de vectores de características, donde analizar grupos de celdas en lugar del conjunto completo de datos puede llevar a una significativa reducción del costo computacional. Sumado a esto, al ser promedios de los datos de entrenamiento, los SOM remueven ruido, vectores de características aislados (*outliers*) y completan datos faltantes. Por lo tanto, son herramientas útiles para analizar la distribución de vectores en el espacio de características.

Estas capacidades de los SOM son explotadas en los métodos propuestos en esta Tesis: *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* y *Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering*, para la generación automática de sistemas de LD para *clustering* de datos. Como se explicará en detalle en el Capítulo 5, en estos métodos se entrenan automáticamente SOM, descubriendo patrones relevantes (vectores de características representativos), prototipos de los *clusters*. A partir de estos prototipos se generan los sistemas de LD.

Se han desarrollado diversas aplicaciones de los SOM en segmentación de imágenes [Li y Chi, 2005; Meschino *et al.*, 2006b]. Una aplicación puede consistir en representar cada píxel de la imagen con un color asociado a la celda del SOM que es más cercana al vector de características del píxel (BMU) [Meschino *et al.*, 2006b]. Si el *codebook* del SOM fue previamente agrupado, puede representarse cada píxel directamente con un color asociado al *cluster* al cual corresponde su BMU. En la Figura 3.2 se observa una representación pseudo-color de una imagen correspondiente a una microscopia de biopsia de médula ósea que ha sido procesada con un SOM y características de textura, correspondientes a matrices de co-ocurrencia de niveles de gris [Comas *et al.*, 2010].

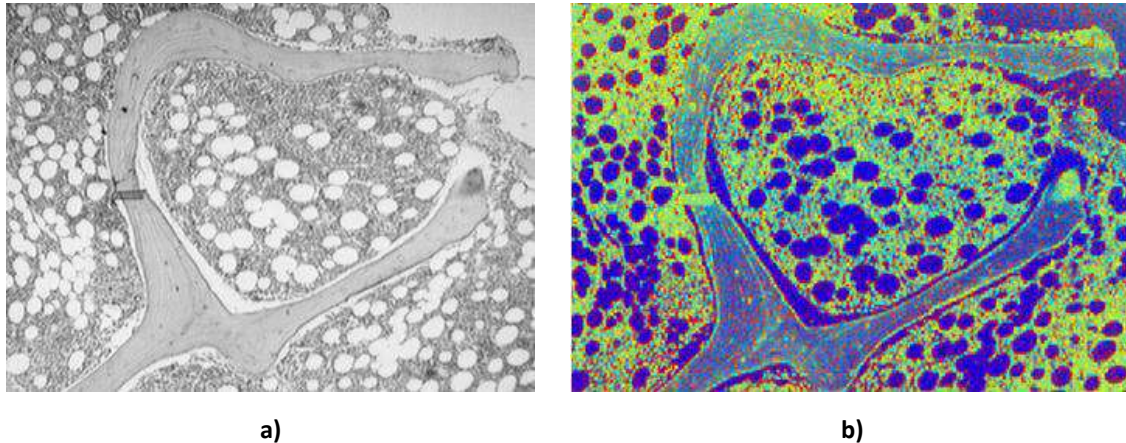


Figura 3.2. Aplicación de SOM para representación pseudo-color de imágenes.

Los mapas auto-organizados permiten observar la distribución de patrones y facilitan tareas de segmentación al permitir extraer datos de entrenamiento.

a) Imagen microscópica de una biopsia de médula ósea. **b)** Imagen mostrada en **a)** procesada con un mapa auto-organizado.

A diferencia de los métodos de *clustering* explicados anteriormente, la parametrización de los SOM requiere la definición de la cantidad de celdas, topología, funciones vecindad, tipo de inicialización y tipo de entrenamiento. En [Meschino *et al.*, 2013; Meschino *et al.*, 2015a], los cuales son trabajos previos propios realizados en colaboración con otros autores, se ha avanzado en un método que permite definir automáticamente el conjunto de parámetros óptimos para un conjunto de entrenamiento X , por medio de la minimización de la suma de los valores absolutos del error de cuantificación, el error topográfico y el producto topográfico. El detalle de este método se presenta en el Capítulo 5, donde se desarrollan los métodos propuestos para la generación automática de sistemas de LD.

Además, en el caso de aplicar un algoritmo de *clustering* sobre el *codebook* del SOM, en general será necesario definir la cantidad de *clusters* a obtener. Como se ha mencionado, existen métodos que permiten definir la cantidad adecuada de *clusters*, los cuales serán detallados en la Sección 3.2.5.

3.2.4 Expectation-Maximization

El algoritmo **Expectation-Maximization** (EM) forma parte de un conjunto de métodos de *clustering* conocidos como *clustering* basados en modelos [Fraley y Raftery, 1998], que asume que los vectores de características en cada *cluster* tienen una función densidad de probabilidad gaussiana.

El método consta esencialmente de dos Etapas, definidas como sigue [Duda *et al.*, 2001; Fraley y Raftery, 1998]:

- 1) En la primera Etapa, llamada *Expectation*, se asume un modelo formado por funciones densidad de probabilidad gaussianas para los diferentes *clusters* y se halla, utilizando las funciones de densidad de probabilidad definidas, la probabilidad de que cada vector de características en el conjunto $\mathbf{X}$ pertenezca a cada uno de los *clusters*. Cada dato en $\mathbf{X}$ se asigna al *cluster* al que pertenece con mayor probabilidad.
- 2) En la segunda Etapa, llamada *Maximization*, los parámetros de las funciones densidad de probabilidad gaussianas se ajustan para maximizar la verosimilitud del modelo, es decir, la función densidad de cada *cluster* se ajusta a los vectores de características que en el paso anterior le fueron asignados, probabilísticamente, al *cluster*. A partir de este nuevo modelo de funciones densidad de probabilidad para los *clusters*, se procede iterativamente con los pasos de la primera Etapa. El proceso se detiene al alcanzar un criterio de convergencia asociado en general al grado de verosimilitud del modelo estadístico obtenido para los datos en $\mathbf{X}$.

El algoritmo EM se usa frecuentemente para ajustar una mezcla de modelos gaussianos a un conjunto de vectores de características. La determinación del modelo tiene un costo computacional importante en comparación con otros algoritmos de *clustering* tales como *K-means* o FCM.

3.2.5 Determinación automática del número de *clusters*: Método basado en el Criterio de Información Bayesiana

Los algoritmos de *clustering* presentados en las Secciones anteriores, y en general la gran mayoría de los métodos existentes, requieren de la definición del número de *clusters* a obtener, que fue notado como K .

Sin embargo, existen metodologías que permiten obtener automáticamente la cantidad de *clusters* óptima para un determinado problema. En los métodos de generación automática de sistemas de LD que se proponen en esta Tesis, y en base a la experiencia obtenida de desarrollos previos propios [Comas *et al.*, 2014b; Comas *et al.*, 2015b; Meschino *et al.*, 2015a], se utiliza el **Criterio de Información Bayesiana** (BIC, del inglés *Bayesian Information Criterion*) definido en [Fraley y Raftery, 1998] por medio del método propuesto en [Zhao *et al.*, 2008] para la determinación automática del número de *clusters*.

El BIC, se basa en el enfoque de *clustering* basado en modelos y supone distribuciones esféricas de los vectores de características en cada *cluster*. Esta suposición coincide con la premisa

utilizada en los algoritmos *K-means* y FCM, por lo cual el BIC puede ser utilizado en combinación con estos algoritmos.

Considerando los datos asignados a un *cluster* mediante algún algoritmo de *clustering*, y utilizando esta premisa de que los datos que corresponden a este *cluster* tienen una distribución esférica, el BIC define una medida de qué tanto se adecua el modelo supuesto a la distribución real de los vectores de características asociado a ese *cluster*.

Se ha estudiado en [Zhao *et al.*, 2008] que si la premisa supuesta es falsa, debido a que se asignaron a un único *cluster* datos que corresponden realmente a dos *clusters*, es decir, se hizo una subvaloración de la cantidad de *clusters* en el problema; o si se definieron más *clusters* que la cantidad adecuada para el problema estudiado, el valor de la medida BIC en estos casos es menor que en los casos en que el número de *clusters* obtenidos coincide con la cantidad real de *clusters* para el problema. Se probó que, si se analizan las diferencias en los valores de BIC obtenidas sobre agrupamientos definidos con un número creciente de cantidad de *clusters*, puede definirse un criterio para determinar el número adecuado de *clusters*. Debido a la complejidad de las ecuaciones involucradas, a continuación, se presenta solamente el fundamento del método propuesto por Zhao *et al.* y su detalle completo puede ser consultado en el trabajo original. El método propuesto por los autores para la determinación automática del número adecuado de *clusters* es el siguiente:

- 1) Aplicar el método de *clustering* sobre el conjunto de vectores de características $\mathbf{X}$, incrementando consecutivamente el número de *clusters* K a obtener, entre un valor mínimo K_1 y un valor máximo K_2 .
- 2) Obtener la medida BIC, definida en el trabajo citado, para cada uno de los agrupamientos obtenidos en el paso 1), obteniendo un conjunto de valores del BIC, representado por: $\{BIC_k\}_{k=K_1, \dots, K_2}$.
- 3) Calcular las diferencias dos a dos, de los valores obtenidos para las medidas BIC entre dos cantidades de *clusters* consecutivas, obteniendo el conjunto $\{dif_{BIC,k}\}_{k=K_1+1, \dots, K_2}$, donde:

$$dif_{BIC,k} = BIC_{k+1} - BIC_k. \quad (3.11)$$

- 4) Obtener el punto de inflexión de máximo ángulo de la curva correspondiente a $dif_{BIC,k}$ tomando k como variable independiente, utilizando el método aproximado definido en dicho trabajo. El valor de $k \in \{K_1 + 1, \dots, K_2\}$ correspondiente a este punto de inflexión, será el valor óptimo para el número de *clusters*.

3.3. Métodos de Clasificación

3.3.1 K vecinos más próximos

El algoritmo **K vecinos más próximos** (kNN, del inglés *k-Nearest Neighbors*) es un método de clasificación que se basa en la estimación de la probabilidad de que un vector de características pertenezca a alguna de las clases definidas dentro del conjunto de datos de entrenamiento, también denominado en este algoritmo conjunto de datos prototipo. El método puede enunciarse como sigue [Duda *et al.*, 2001; Warfield, 1996]:

- 1) Se definen N_p datos prototipo, que son datos previamente etiquetados en alguna de las K clases a clasificar, definiendo el conjunto $\mathbf{X}_p = \{\mathbf{x}_{p,i}\}_{i=1,\dots,N_p}$ donde cada dato tiene dimensión d .
- 2) Para cada vector de características $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ se obtienen los k vecinos más próximos dentro del conjunto de prototipos, calculando la distancia del vector de características a todos los vectores de características en el conjunto de prototipos $\mathbf{X}_p$. La función distancia a utilizar se elige en general de acuerdo al tipo de características utilizadas.
- 3) La clase correspondiente al vector de características $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ es asignada a la que más ocurra entre los k vecinos más próximos obtenidos en el paso 2).

Este método requiere la definición de un conjunto de vectores de características etiquetados y, además, del ajuste de la cantidad de vecinos más próximos (k) a utilizar.

3.3.2 Redes Neuronales Supervisadas

3.3.2.1 Redes neuronales multicapa

Las **redes neuronales multicapa** (MLP, del inglés *Multi-Layer Perceptron*) están formadas en Reconocimiento de Patrones por d entradas (una por cada característica), capas de neuronas ocultas y una capa de salida de K neuronas (una por clase) de características *feed-forward* [Haykin, 1999]. Las neuronas son unidades básicas en esta arquitectura, cuya salida se obtiene al aplicar una función, conocida como función de transferencia, a la suma pesada de los valores de entrada a la neurona. La selección de la cantidad de capas ocultas y el número de neuronas de cada capa oculta es realizada, en general, por métodos heurísticos.

En este esquema, un conjunto de valores de entrada $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ representan el conjunto de entradas a la neurona. Para cada neurona ω se definen pesos, llamados pesos sinápticos, $\{w_{\omega,1}, w_{\omega,2}, \dots, w_{\omega,n}\}$ que representan el peso que tienen los valores de las diferentes entradas de ω en la determinación del valor de su salida. La salida de la neurona ω , notada $y(v_\omega)$, está dada por [Haykin, 1999]:

$$y(v_\omega) = \varphi(v_\omega) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{\omega,i} x_i - \theta_\omega\right), \quad (3.12)$$

donde $\varphi(v_\omega)$ es la función de activación de la neurona, θ_ω su umbral de activación y $\sum_{i=1}^n w_{\omega,i} x_i$ es su nivel de activación. En la Figura 3.3 se presenta un diagrama en bloques para una neurona artificial.

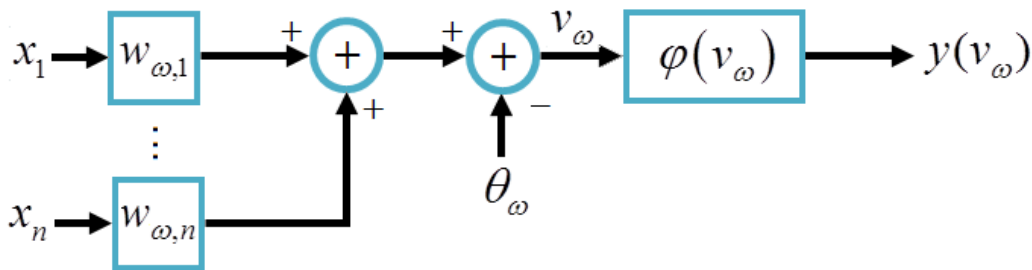


Figura 3.3. Diagrama en bloques de una neurona artificial.

Los pesos de las conexiones sinápticas se inicializan en forma aleatoria. El aprendizaje constituye un proceso supervisado en que los vectores de características y las salidas deseadas (etiquetas definidas en el *Gold Standard*) se presentan a la red. En cada iteración del proceso de aprendizaje, los parámetros libres de la red (pesos sinápticos y umbrales de activación) son ajustados acercando la respuesta de la red a la deseada. La velocidad de cambio de los parámetros libres (conocida como constante de aprendizaje) disminuye a medida que el entrenamiento avanza. La selección del algoritmo de entrenamiento constituye uno de los parámetros de diseño de la red junto con su arquitectura y las funciones de activación a utilizar.

Una vez entrenada la red, en la etapa de consulta, se presentan nuevos vectores de características a clasificar. Usualmente, se determina que la neurona de la capa de salida con mayor valor de salida será la que indica la clase del vector de características, aunque pueden utilizarse otras metaheurísticas para este fin.

Este tipo de redes ha sido aplicado con éxito a la segmentación de imágenes. Entre muchos otros, pueden señalarse los trabajos [Benalcázar *et al.*, 2013b; Rajini, 2011; Triñanes *et al.*, 1994] como ejemplos de este tipo de aplicaciones.

3.3.2.2 Redes neuronales probabilísticas

Las **redes neuronales probabilísticas** (PNN, del inglés *Probabilistic Neural Network*) están constituidas por tres capas: una capa de entrada (una entrada por cada característica), una única capa intermedia y una capa de salida (con una neurona por clase) [Haykin, 1999].

Las celdas de la capa oculta en este modelo se activan en función de la distancia que separa al vector de características de entrada con respecto al vector sináptico que cada celda almacena (denominado centroide), a la que se le aplica una función radial con forma gaussiana. En la Figura 3.4 se muestra un esquema de una red neuronal probabilística general, con d entradas y una única salida.

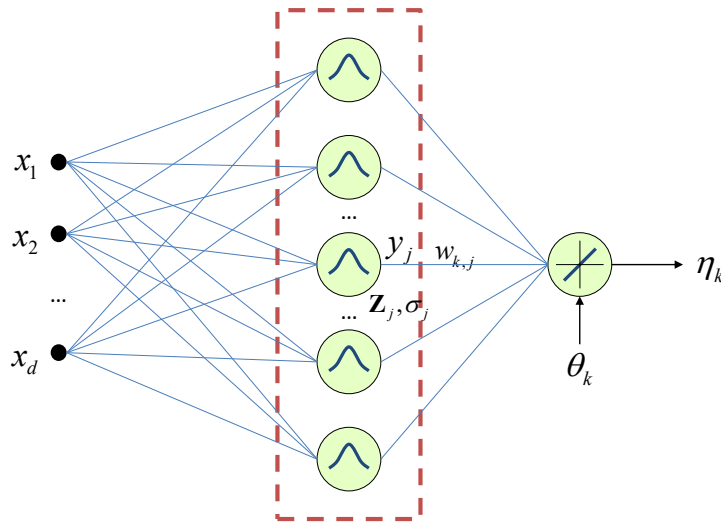


Figura 3.4. Esquema general de una red neuronal probabilística.

En este tipo de RNA aplicadas a Reconocimiento de Patrones, las neuronas de la capa de salida tienen función de activación lineal.

Cada neurona j de la capa oculta almacena un vector centroide $\mathbf{Z}_j = (z_{j,1}, \dots, z_{j,d})$, cuya distancia r_j se calcula como la distancia euclidiana que separa al vector de entrada $\mathbf{x}$ del centroide:

$$r_j = \|\mathbf{x} - \mathbf{Z}_j\|^2 = \sum_u (x_u - z_{j,u})^2. \quad (3.13)$$

La salida de la neurona oculta y_j se calcula aplicando una función radial, término que se aplica a funciones simétricas, usualmente la función gaussiana. La salida de la neurona oculta j será:

$$y_j = e^{\frac{-\sum_u (x_u - z_{j,u})^2}{2\sigma_j^2}}, \quad (3.14)$$

donde σ_j es un parámetro interno, conocido como parámetro de difusión o *spread*.

Las salidas y_j de las neuronas ocultas son entradas a las neuronas de la capa de salida. Las salidas de estas últimas, notadas $\{\eta_k\}_{k=1,\dots,K}$, con K la cantidad de clases, tienen función de activación lineal y presentan una respuesta en función de los pesos $w_{k,j}$, donde θ_k es el umbral de activación, similar al existente en los MLP:

$$\eta_k = \varphi \left(\sum_j w_{k,j} y_j - \theta_k \right). \quad (3.15)$$

El proceso de aprendizaje consta de 2 etapas, una no supervisada y otra similar a la de los MLP [Haykin, 1999]. La cantidad de neuronas de la capa oculta debe ser tal de cubrir el espacio de características. El diseño de la capa oculta puede efectuarse mediante el análisis del error o por métodos automáticos.

En la etapa de consulta, cada neurona de la capa de salida tendrá un determinado valor de salida. Al igual que el criterio utilizado en MLP, la clase es típicamente asignada a la correspondiente a la neurona con mayor nivel de activación. El entrenamiento de las PNN, por lo general, tiene un menor costo computacional que el de los MLP.

3.4. Enfoques basados en ensambles

Dentro de los métodos de Reconocimiento de Patrones presentes en la literatura, existen enfoques basados en el uso combinado de más de una técnica tradicional sobre un mismo conjunto de datos o una misma técnica aplicada sobre distintos subconjuntos de un mismo conjunto de datos a etiquetar. Estos enfoques son conocidos como métodos basados en ensamble de clasificadores o ensamble de *clustering*, dependiendo del tipo de problema abordado, o más en general enfoques de ensamble [Benalcázar *et al.*, 2013a; Benalcázar *et al.*, 2014; Dietterich, 2000; Ghosh y Acharya, 2011; Rokach, 2010].

La característica principal de este tipo de enfoque radica en que por lo general se combina más de un método de clasificación o agrupamiento, o un mismo método se aplica sobre subconjuntos del conjunto de datos original $\mathbf{X}$, obteniendo M clasificaciones o agrupamientos (donde M es el tamaño del ensamble), para finalmente determinar la etiqueta para cada vector de características en $\mathbf{X}$ mediante un mecanismo de consenso que ensamble las diferentes decisiones de los métodos individuales, típicamente a través de votación. Esto asegura que el clasificador o el agrupamiento final, obtenido en el ensamble, es más complejo que los métodos de clasificación o de *clustering* que forman parte del ensamble. Esto significa, que los enfoques basados en ensamble

permiten abordar problemas más complejos que las técnicas tradicionales usadas en forma individual, obteniendo en general mejor performance que estas últimas [Ghosh y Acharya, 2011; Rokach, 2010].

Dado que el objetivo del presente Capítulo es dar las nociones básicas de los principales métodos de Reconocimiento de Patrones, sin pretender que esta descripción sea exhaustiva, e indicar las características más relevantes de las técnicas que están fuertemente relacionadas a los métodos propuestos en esta Tesis, no se presentará aquí un desarrollo formal de los muchos enfoques basados en ensambles existentes en la literatura tanto para clasificación como para agrupamiento de datos. Sin embargo, por ser relevante para el desarrollo de los métodos propuestos para la generación automática de sistemas de LD a partir de datos, se hará mención a continuación a las técnicas principales de partición de datos utilizadas en enfoques de ensamble.

Para ser útil, un ensamble debe tener mejor performance que las técnicas individuales que lo componen, para un dado conjunto de datos $\mathbf{X}$. Esto se logra asegurando el cumplimiento de dos condiciones: que los métodos individuales tengan buena performance para el agrupamiento o la clasificación, y que a su vez sean diversos. Dos métodos son diversos si, ante nuevos vectores de características, el agrupamiento o la clasificación obtenida de ellos puede ser diferente. Un análisis detallado de estas condiciones puede encontrarse en [Dietterich, 2000].

En la práctica, para asegurar la diversidad de los métodos que componen un ensamble, puede recurrirse a la manipulación de las muestras de entrenamiento, generando múltiples subconjuntos de datos del conjunto de datos inicial $\mathbf{X}$, utilizando cada uno de ellos para uno de los métodos componentes del ensamble. Los subconjuntos generados son muestras representativas del mismo conjunto de datos original, pero sus características individuales son diferentes. Esto asegura la diversidad entre los componentes del ensamble. Esta característica es de especial importancia para los métodos de generación automática a partir de datos de sistemas de LD, que son propuestos en esta Tesis. Específicamente, estas técnicas serán utilizadas, como se detalla en el Capítulo 5, para obtener diferentes descripciones de cada etiqueta en un problema de Reconocimiento de Patrones, las cuales serán combinadas para formar sistemas de LD basados en LD tipo 2 de intervalos. Debido a esto, en el resto de esta Sección se presentan los principales métodos para la manipulación de los datos de entrenamiento. Dichos métodos son los siguientes [Dietterich, 2000; Ghosh y Acharya, 2011; Rokach, 2010]:

- *Bagging*: Consiste en la generación de múltiples conjuntos de entrenamiento independientes, obtenidos mediante el muestreo aleatorio con sustitución de los vectores de características en el conjunto inicial $\mathbf{X}$. En general, se generan M subconjuntos independientes a partir de $\mathbf{X}$, de los que se obtienen M clasificadores o agrupamientos, lo que finalmente se combinan. Típicamente, el

muestreo de realiza para formar subconjuntos con de un 80% a un 100% del número total de datos en $\mathbf{X}$, el cual es indicado en esta Tesis como N . Debido a esto, el costo computacional es, en general, mayor que el del uso de técnicas tradicionales aplicadas directamente sobre el conjunto de datos original. A su vez, en cada conjunto de entrenamiento habrá vectores repetidos más de una vez, mientras otros pueden no estar presentes.

- *Cross-validated committees*: Consiste en realizar una partición disjunta del conjunto de datos inicial $\mathbf{X}$, obteniendo M subconjuntos disjuntos y por combinación de éstos generar los conjuntos de entrenamiento. Se toman secuencialmente $M - 1$ subconjuntos disjuntos para generar cada uno de los M conjuntos de entrenamiento. Este enfoque, tiene al igual que el anterior, un alto costo computacional y, además, habrá vectores de características repetidos entre uno y otro conjunto de entrenamiento.

En los métodos descritos anteriormente, la cantidad final de datos a procesar es varias veces la cantidad de datos en el conjunto inicial $\mathbf{X}$, por lo que, en general, estos métodos tienen un elevado costo computacional, no haciéndolos adecuados para trabajar con grandes cantidades de datos.

Dentro de los muchos otros métodos existentes, se ha propuesto el uso de subconjuntos disjuntos del conjunto inicial $\mathbf{X}$, como conjuntos de entrenamiento [Rokach, 2005, 2010]. Al generar M subconjuntos disjuntos a partir de una partición aleatoria sobre $\mathbf{X}$, los subconjuntos resultantes tendrán N/M vectores de características, reduciendo el costo computacional de la aplicación del ensamble, principalmente frente a otros métodos tales como *bagging* y *cross-validated committees*, especialmente cuando se tiene mucha cantidad de datos a procesar. Sin embargo, al usar subconjuntos disjuntos debe existir un equilibrio entre el número de subconjuntos (M) y la exactitud final del ensamble. Esto es, el tamaño de cada subconjunto no puede ser demasiado pequeño, ya que debe tenerse una cantidad suficiente de datos para poder entrenar adecuadamente los métodos que componen el ensamble, es decir, que estos tengan performance adecuadas.

Como se analizará en detalle en el Capítulo 5, este último tipo de particionado, generando M subconjuntos disjuntos es el que se utiliza para los métodos de generación automática de sistemas de LD propuestos en esta Tesis. Como se verá, a partir de los subconjuntos generados, no se aplican métodos de clasificación o agrupamiento, como en los métodos basados en ensamble. En los métodos propuestos, la partición se realiza con el fin de obtener subconjuntos del conjunto inicial $\mathbf{X}$, que contengan vectores de características representativos de los datos en $\mathbf{X}$ pero con

rasgos individuales, en general, diferentes; a partir de los cuales se puedan extraer descripciones de la diversidad o variabilidad de los datos en $\mathbf{X}$, para las distintas etiquetas buscadas.

3.5. Observaciones finales

La característica más relevante de los métodos presentados en este Capítulo, es que pueden ser aplicados al Reconocimiento de Patrones en general y a la segmentación de imágenes en particular.

Como rasgo distintivo de los métodos de *clustering*, éstos permiten descubrir patrones relevantes, es decir, vectores de características representativos de los diferentes *clusters*, definiendo grupos de vectores con rasgos similares, partiendo de un conjunto de datos sobre el que no se tiene ninguna información previa respecto al resultado esperado.

La utilización del método basado en el BIC, propuesto en [Zhao *et al.*, 2008], permite resolver la determinación del número apropiado de *clusters* para un problema de agrupamiento de datos, para los casos en que los algoritmos de *clustering* partan de la premisa de que los vectores de características en cada *cluster* tienen distribución esférica. Este método utilizando el BIC, fue utilizado en trabajos previos propios [Comas *et al.*, 2015b; Meschino *et al.*, 2015a] en los que se ha trabajado con *clustering* de datos y sistemas de LD.

Las técnicas analizadas en esta Sección no aportan herramientas directas que permitan la interpretación de los resultados del Reconocimiento de Patrones, ni el análisis de qué rasgos reúnen los vectores de características asociados a un *cluster* o una clase. A diferencia de estas técnicas, los métodos propuestos en esta Tesis, los cuales serán presentados en el Capítulo 5, generan sistemas de LD basados en predicados difusos para Reconocimiento de Patrones, que además de permitir agrupar o clasificar datos de dominio general (además de segmentar imágenes), como aporte distintivo sobre las técnicas estudiadas, permiten extraer directamente descripciones lingüísticas que explican los rasgos relevantes de los vectores de características asignados a cada etiqueta, permitiendo extraer conocimiento.

Capítulo 4: Lógica Difusa

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Capítulo 4: Lógica Difusa

4.1. Introducción

Una descripción exacta y precisa de cualquier situación del mundo real es virtualmente imposible. Para los seres humanos, uno de los principales inconvenientes al realizar descripciones; esenciales para comunicarse, tomar decisiones y, en un sentido más amplio, para realizar cualquier actividad; es encontrar el balance entre la simplicidad y nivel de detalle suficiente para comprender lo que se está describiendo [Bellman y Giertz, 1973]. Las palabras que se utilizan a diario en los procesos de comunicación y razonamiento no tienen un significado exacto.

Como ejemplo ilustrativo podría analizarse el tipo de expresiones común al describir las características físicas de una persona. Podría decirse, por ejemplo, *“La persona A es alta”*, que es una expresión simple y típica. Sin embargo, sin el nivel de detalle suficiente respecto a lo que se entiende por una persona *“alta”*, no es posible comprender exactamente el significado de la expresión. En este sentido, el adjetivo *“alta”* es impreciso. Es necesario que quien realiza la descripción defina un umbral para el valor de la altura de una persona que indique a partir de qué valor se puede considerarla *“alta”*, elevando el nivel de detalle de la descripción. Sin embargo, este aumento de especificidad aleja a la expresión de aquéllas utilizadas en el lenguaje cotidiano. Desde un punto de vista formal, ese umbral definiría un criterio que implicaría que es posible dividir al total de las personas en dos subconjuntos, uno de *“personas altas”* y otro de *“personas no altas”* (o equivalentemente *“personas bajas”*), donde una persona o bien pertenece al subconjunto de *“personas altas”* o al subconjunto de *“personas bajas”*. Definir un umbral que refleje correctamente el criterio de quien realiza la descripción es sumamente difícil, sino imposible, pues habrá casos en los que una persona no será completamente *“alta”* pero tampoco será completamente *“baja”* [Bellman y Giertz, 1973].

Dificultades como las descritas anteriormente se presentan al intentar definir cualquier conjunto de objetos o sucesos reales con una cierta propiedad en común. En estos casos, no existe una definición precisa de pertenencia y, por lo tanto, no pueden definirse sobre éstos, conjuntos en el sentido matemático habitual. La idea básica de la **Teoría de Conjuntos Clásicos** es la que un objeto pertenece a un conjunto o no pertenece a él, sin poder definir una pertenencia parcial, excluye prácticamente a la mayoría de los objetos del mundo real [Bellman y Giertz, 1973]. Al expresarse, razonar o realizar descripciones, los seres humanos utilizan términos imprecisos sobre los cuales no pueden establecerse criterios completos que permitan definir cuándo son totalmente

verdaderos y cuándo totalmente falsos. En este sentido, el razonamiento y el conocimiento humano son de naturaleza imprecisa [Zadeh, 1975; Zadeh, 1989, 2008].

La Teoría de Conjuntos Clásicos está asociada a la **Lógica Clásica**, conocida también como Lógica Bivaluada o Lógica *Booleana* [Bellman y Giertz, 1973; Zadeh, 1975]. Para esta lógica, la pertenencia de un elemento toma el valor 0 (no pertenece) o el valor 1 (pertenece). Asimismo, las expresiones lógicas pueden tomar solamente los valores: 0 (falso) o 1 (verdadero). A su vez, analizar el valor de verdad de una expresión como “*el elemento x pertenece al conjunto A* ” es equivalente a evaluar el grado de pertenencia del elemento “ x ” al conjunto A , es decir, valor de verdad y grado de pertenencia representan lo mismo. Debido a esto, las tablas de verdad de los operadores de la Lógica Clásica se utilizan para definir las operaciones entre Conjuntos Clásicos.

La dificultad de los Conjuntos y la Lógica Clásica para modelar sucesos del mundo real y, en particular, intentar modelar y reproducir la manera en que el humano razona y expresa conocimiento es estudiada desde hace siglos [Meschino, 2008]. En particular, el concepto de **vaguedad** fue introducido por la escuela filosófica denominada Pragmatismo, al describir cómo el ser humano razona sin considerar algo totalmente verdadero o totalmente falso [Peirce, 1883]. El análisis de la vaguedad como un grado de falsedad o veracidad fue realizado por Bertrand Russell a principios del siglo XX [Garcíadiago, 1992]. Esta definición de vaguedad tiene directa vinculación a la dada en el Capítulo 1, donde ésta fue relacionada a la falta de precisión (a la imprecisión) de los términos utilizados en descripciones lingüísticas. En este sentido, la dificultad para definir un valor de verdad de una expresión en el sentido de la Lógica Clásica, implica que existe vaguedad respecto a los conceptos que quieren ser modelados.

En [Zadeh, 1965], Lotfi A. Zadeh presentó los **Conjuntos Difusos** (CDs) como una generalización de los Conjuntos Clásicos. Los CDs remueven la idea clásica según la cual un elemento pertenece en forma absoluta o no pertenece a un conjunto determinado. De acuerdo al enfoque original, en los CDs los elementos tienen grados de pertenencia representados por valores en el intervalo $[0,1]$, lo cual se conoce como **principio de gradualidad**, pudiendo pertenecer a diferentes CDs con diferentes grados [Bellman y Giertz, 1973; Dubois y Prade, 1980; Zadeh, 1965]. Los operadores de la Lógica Clásica se han extendido para operar con CDs, dando lugar a la una lógica multivaluada que se denominó **Lógica Difusa** (LD) [Zadeh, 1965].

El principio de gradualidad hace a los CDs esenciales para modelar matemáticamente la imprecisión propia de los términos utilizados en las expresiones del lenguaje humano. La LD define un mecanismo formal que permite reproducir las capacidades humanas de conversar, razonar y tomar decisiones, por medio de operadores lógicos aplicados sobre los CDs [Comas *et al.*, 2011c; Meschino, 2008; Zadeh, 1989, 2008].

En [Zadeh, 1972] se formula el llamado **principio de incompatibilidad**, el cual asegura que para ser capaces de crear descripciones significativas sobre el mundo real y, especialmente, sobre el razonamiento humano, puede ser necesario abandonar los estándares de rigor matemático, volviéndose más tolerante a aquéllos que son aproximados en la naturaleza. En esencia, una gran precisión en la definición del modelo es incompatible con una gran complejidad. La motivación original seguida por Zadeh en 1965 al definir los CDs y la LD, fue la de brindar un marco formal para el manejo de conceptos imprecisos del mundo real. La LD define un marco teórico matemático formal para trasladar las expresiones del lenguaje humano dadas generalmente en forma lingüística, en las cuales existe típicamente imprecisión respecto de los términos utilizados.

Posteriormente en 1975, Zadeh extendió el concepto original de CDs modificando las restricciones originales sobre los grados de pertenencia, dando lugar a los CDs valuados en intervalos y a los CDs tipo 2 [Mendel y John, 2002; Zadeh, 1975]. Los primeros permitían utilizar intervalos contenidos en el intervalo $[0,1]$ para definir los grados de pertenencia, dando lugar a la LD valuada en intervalos. Los segundos, introducían la capacidad de definir con un nuevo CD el grado de pertenencia de un elemento, dando lugar a la LD tipo 2. A partir de ese momento, la LD definida originalmente a partir del trabajo de Zadeh en 1965, fue denominada LD tipo 1 y sus CDs como CDs tipo 1, para diferenciarlos de la LD tipo 2 y los CDs tipo 2. Posteriormente, Qilian Liang y Jerry M. Mendel presentaron a los CDs valuados en intervalos como un caso particular de los CDs tipo 2, dando lugar a la LD tipo 2 de intervalos [Liang y Mendel, 2000]. De esta manera, los términos “LD valuada en intervalos” y “LD tipo 2 de intervalos” se refieren a exactamente el mismo concepto, al igual que ocurre con los “CDs valuados en intervalos” y “CDs tipo 2 de intervalos”.

De acuerdo a enfoques recientes, al definir los grados de pertenencia por medio de intervalos, los CDs tipo 2 de intervalos tienen potencialmente mayor capacidad que los CD tipo 1 para modelar la imprecisión e incertidumbre asociada a las expresiones lingüísticas [Comas *et al.*, 2011c; Mendel, 2007b]. En este sentido la LD tipo 2 de intervalos supera a la LD tipo 1 al ser capaz de tratar con: a) **imprecisión**, asociada a la falta de precisión que la propia persona tiene respecto al significado de una expresión y b) **incertidumbre**, asociada tanto a la diferencia de interpretación entre varios especialistas respecto a una misma expresión, como a la falta de certeza respecto a los valores en un vector de características ante la presencia de ruido. Ante tales situaciones, la definición de un único grado de pertenencia en $[0,1]$ no es suficiente, por lo que la LD tipo 1 no resulta adecuada [Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012; Mendel, 2007a; Mendel, 2007b].

En el resto de este Capítulo, se presentan y desarrollan los conceptos relacionados a LD y CDs. Para mayor claridad y para facilitar el análisis comparativo, al presentar un conjunto de conceptos, primero se introducirán los conceptos asociados a la LD tipo 1, para luego extender éstos a la LD tipo 2 de intervalos, que es la utilizada en los métodos propuestos en esta Tesis.

Cuando no sea necesario distinguir entre los términos LD tipo 1 y LD tipo 2 de intervalos o entre CD tipo 1 y CD tipo 2 de intervalos, es decir, cuando las consideraciones que se realicen sean válidas para cualquiera de los pares de términos, se referirá a los mismos como LD y CD respectivamente.

4.2. Conceptos de Lógica Difusa

4.2.1 Conjuntos Difusos y funciones de pertenencia

En esta Sección se definen los CDs tipo 1 y sus características esenciales, partiendo de la definición de los Conjuntos Clásicos. Luego, se presentan los CDs tipo 2 de intervalos (CDs valuados en intervalos) extendiendo los CDs tipo 1.

DEFINICIÓN 4.1: El **universo de discurso**, notado como el conjunto U , es el espacio de todos los puntos (objetos) que pueden pertenecer o no a un conjunto. Un elemento genérico del universo de discurso U será notado como u , $u \in U$ [Zadeh, 1965].

DEFINICIÓN 4.2: Un **Conjunto Clásico**, notado A , definido sobre un universo de discurso U , puede definirse: enumerando los que pertenecen al conjunto (extensión), especificando las propiedades que deben cumplir los elementos que pertenecen a ese conjunto (comprensión), o en términos de la **función de pertenencia** o **función característica** μ_A , donde $\mu_A : U \rightarrow \{0,1\}$ queda definida para todo $u \in U$ por [Dubois y Prade, 1980; Jantzen, 1999]:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A \\ 0 & \text{si } u \notin A \end{cases} \quad (4.1)$$

PROPIEDAD 4.1: El Conjunto Clásico A es matemáticamente equivalente a su función característica μ_A . Por lo tanto, conocer la función característica μ_A es lo mismo que conocer A .

Al extender los Conjuntos Clásicos considerando funciones de pertenencia de U en $[0,1]$, se definen los CDs tipo 1, cuyo conceptos básicos y necesarios para esta Tesis se presentan a continuación.

4.2.1.1. Conjuntos Difusos tipo 1

DEFINICIÓN 4.3: Un **Conjunto Difuso tipo 1** (CD tipo 1), notado $\tilde{A}$ para diferenciarlo del símbolo A utilizado para los Conjuntos Clásicos, definido sobre un universo de discurso U , está caracterizado por una **función de pertenencia tipo 1** (función característica) $\mu_{\tilde{A}} : U \rightarrow [0,1]$, y puede representarse por un conjunto de pares ordenados de un elemento u y su grado de

pertenencia (o nivel de pertenencia) al conjunto $\mu_{\tilde{A}}(u)$, para todo $u \in U$ [Dubois y Prade, 1980; Zadeh, 1965]:

$$\tilde{A} = \{(u, \mu_{\tilde{A}}(u)) / u \in U\}. \quad (4.2)$$

PROPIEDAD 4.2: El CD tipo 1 $\tilde{A}$ es matemáticamente equivalente a su función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$, es decir, conocer $\mu_{\tilde{A}}$ es lo mismo que conocer el CD tipo 1 $\tilde{A}$.

La función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$ de un CD tipo 1 $\tilde{A}$ permite conocer en qué grado un elemento $u \in U$ pertenece a $\tilde{A}$. Concretamente $\mu_{\tilde{A}}(u), u \in U$ indica el grado de pertenencia, o nivel de pertenencia, del elemento u al CD tipo 1 $\tilde{A}$. De esta manera, si $\mu_{\tilde{A}}(u) = 0$, entonces u no pertenece al CD tipo 1 $\tilde{A}$; y si $\mu_{\tilde{A}}(u) = 1$ entonces u pertenece completamente a $\tilde{A}$. Para valores de $\mu_{\tilde{A}}(u), u \in U$ variando entre 0 y 1, el elemento u pertenece parcialmente al CD tipo 1 $\tilde{A}$. Esta característica, como ya se mencionó, representa al **principio de gradualidad**, principio esencial de la LD.

En la introducción de este Capítulo se mencionó la relación lógica entre los grados de pertenencia y los valores de verdad. Específicamente, analizar el grado de pertenencia de un elemento u al CD tipo 1 $\tilde{A}$ dado por $\mu_{\tilde{A}}(u)$, es lógicamente equivalente a evaluar el valor de verdad de una expresión como “*el elemento u pertenece al conjunto $\tilde{A}$* ”. En otras palabras, el valor de verdad de la expresión “*el elemento u pertenece al conjunto $\tilde{A}$* ” es $\mu_{\tilde{A}}(u)$. Por lo tanto, **el grado de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(u)$ define el valor de verdad de que el elemento u pertenezca al CD $\tilde{A}$** .

Las formas de las funciones de pertenencia tipo 1 pueden variar, dependiendo de la naturaleza del suceso u objeto del mundo real que se esté modelando. En la Figura 4.1 se muestran diferentes formas de funciones de pertenencia tipo 1 definidas sobre un mismo universo de discurso. Cada una define un CD tipo 1. El nombre de la forma de función de pertenencia se indica en la parte superior del gráfico.

A partir de la definición de CD tipo 1 dada en la Definición 4.3 y extendiendo los conceptos correspondientes relacionados a los Conjuntos Clásicos, pueden definirse los siguientes conceptos relacionados a CDs tipo 1 [Dubois y Prade, 1980; Zadeh, 1965, 1975]:

DEFINICIÓN 4.3: (Igualdad entre CDs tipo 1) Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos CDs tipo 1 definidos sobre un mismo universo de discurso U . Los CDs tipo 1 $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ **son iguales**, esto es $\tilde{A} = \tilde{B}$, si y sólo si:

$$\mu_{\tilde{A}}(u) = \mu_{\tilde{B}}(u), \forall u \in U. \quad (4.3)$$

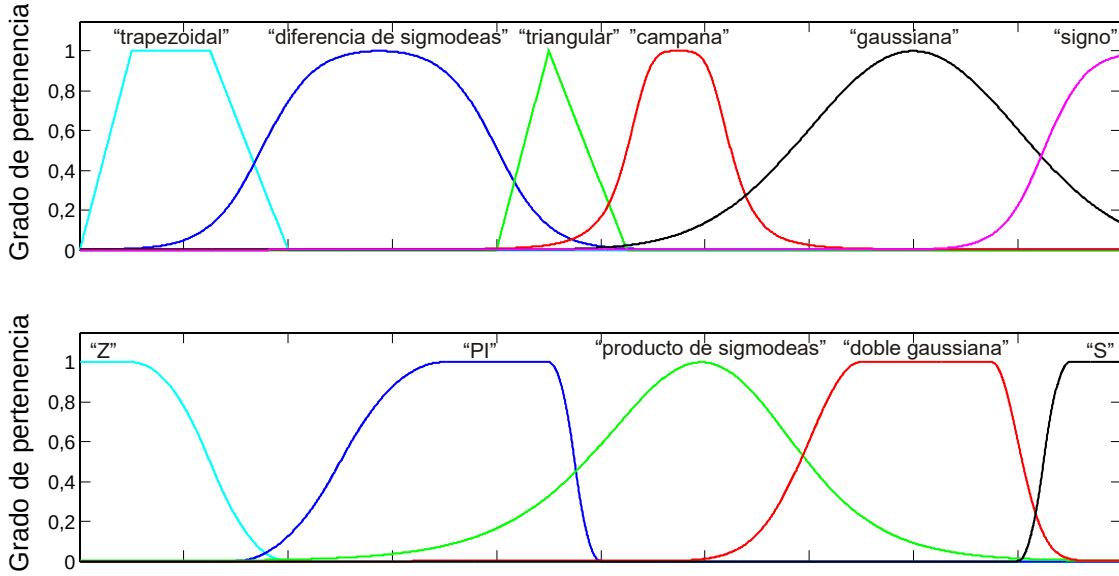


Figura 4.1. Diferentes formas de funciones de pertenencia tipo 1.

El nombre de la forma de cada función de pertenencia se muestra, para cada caso, en la parte superior del trazo. El eje horizontal representa el universo de discurso, para las funciones de pertenencia tipo 1 representadas.

DEFINICIÓN 4.4: (Relación de inclusión entre CDs tipo 1) Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos CDs tipo 1 definidos sobre un mismo universo de discurso U . El CD tipo 1 $\tilde{A}$ **está incluido en** el CD tipo 1 $\tilde{B}$ (o lo que es lo mismo $\tilde{A}$ es un subconjunto de $\tilde{B}$ o $\tilde{A}$ es menor a $\tilde{B}$) si y sólo si $\mu_{\tilde{A}}(u) \leq \mu_{\tilde{B}}(u), \forall u \in U$. Formalmente:

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(u) \leq \mu_{\tilde{B}}(u), \forall u \in U. \quad (4.4)$$

DEFINICIÓN 4.5: El **soporte** del CD tipo 1 $\tilde{A}$ definido en el universo U es un conjunto clásico que contiene todos los elementos de U que tienen un valor de pertenencia distinto de cero en $\tilde{A}$, formalmente:

$$\text{sop}(\tilde{A}) = \{u \in U / \mu_{\tilde{A}}(u) > 0\}. \quad (4.5)$$

DEFINICIÓN 4.6: Un **CD tipo 1** $\tilde{A}$ definido sobre un universo U es el **conjunto vacío difuso**, o simplemente conjunto vacío, si y sólo si:

$$\mu_{\tilde{A}}(u) = 0, \forall u \in U. \quad (4.6)$$

Por lo tanto, si el soporte de un CD tipo 1 no contiene ningún elemento, entonces éste es un conjunto vacío.

DEFINICIÓN 4.7: Un **CD tipo 1** $\tilde{A}$ definido sobre un universo U es el **conjunto universo difuso**, el cual se notará como U , si y sólo si $\mu_{\tilde{A}}(u)$ es igual a 1 para todos los elementos en U , formalmente:

$$\tilde{A} = U \text{ sii } \mu_{\tilde{A}}(u) = 1 \forall u \in U. \quad (4.7)$$

DEFINICIÓN 4.8: El **núcleo** de un CD tipo 1 $\tilde{A}$ es el conjunto de los elementos en el universo U que pertenecen completamente al CD tipo 1 $\tilde{A}$, es decir:

$$\text{Nu}(\tilde{A}) = \{u \in U / \mu_{\tilde{A}}(u) = 1\}. \quad (4.8)$$

DEFINICIÓN 4.9: La **altura** de un CD tipo 1 $\tilde{A}$ definido sobre un universo de discurso U , es el máximo de los grados de pertenencia al conjunto $\tilde{A}$ de los elementos de U , formalmente:

$$h_{\tilde{A}} = \max \{ \mu_{\tilde{A}}(u) / u \in U \}. \quad (4.9)$$

DEFINICIÓN 4.10: Un CD tipo 1 $\tilde{A}$ definido sobre universo de discurso U es **normalizado** si su altura es 1, es decir:

$$\tilde{A} \text{ es normalizado sii } \exists u \in U / \mu_{\tilde{A}}(u) = 1. \quad (4.10)$$

DEFINICIÓN 4.11: El α -**corte** de un CD tipo 1 $\tilde{A}$ definido sobre un universo U es el conjunto clásico $A_{\alpha, \tilde{A}}$ formado por todos los elementos $u \in U$ cuyo grado de pertenencia a es mayor o igual a α :

$$A_{\alpha, \tilde{A}} = \{u \in U / \mu_{\tilde{A}}(u) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4.11)$$

Como se indicó anteriormente, la principal limitación de las funciones de pertenencia tipo 1 es que definen un único grado de pertenencia para cada elemento $u \in U$, el cual es un número perteneciente al intervalo $[0,1]$ y que resulta ser insuficiente ante los siguientes casos:

- Gran **imprecisión** alrededor de un concepto que dificulta la definición de los grados de pertenencia.
- **Incertidumbre** debida a falta de acuerdo entre varias personas que intentar definir un mismo CD o a la falta de certeza en la determinación exacta del elemento $u \in U$ ante la presencia de ruido o perturbaciones.

En los casos anteriores, la imprecisión e incertidumbre alrededor del suceso, objeto o expresión que se está modelando es tal que no es posible definir con un único número en $[0,1]$ el grado de pertenencia de cada elemento al CD [Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012; Mendel,

2007a; Mendel, 2007b].

Puede pensarse en una extensión de las funciones de pertenencia tipo 1 que permita introducir imprecisión e incertidumbre en el grado de pertenencia, en la cual los grados de pertenencia ya no estén representados por valores entre 0 y 1 sino por **intervalos de valores de pertenencia**, los cuales son intervalos cerrados $A = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_R, a \in [0,1]\}$ [Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012]. A partir de esta consideración, se definen las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos (y a partir de éstas los CD tipo 2 de intervalos), cuyos principales conceptos se dan formalmente en los siguientes párrafos.

4.2.1.2. Conjuntos Difusos tipo 2 de intervalos

DEFINICIÓN 4.12: (Región de incertidumbre) Sea $\mu_{\tilde{A}} : U \rightarrow [0,1]$ una función de pertenencia tipo 1 definida sobre un universo U (ver Definición 4.3). Una **región de incertidumbre** (FOU, del inglés *Footprint of Uncertainty*) sobre $\mu_{\tilde{A}}$ está definida por [Comas *et al.*, 2011c; Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012]:

$$\begin{aligned} FOU_{\mu_{\tilde{A}}} &= \bigcup_{u \in U} \left\{ \left[\underbrace{\mu_{\tilde{A}}(u) - \varepsilon_u}_{\varphi_{\mu_{\tilde{A}}}^-(u)}, \underbrace{\mu_{\tilde{A}}(u) + \delta_u}_{\varphi_{\mu_{\tilde{A}}}^+(u)} \right] \right\}, \\ FOU_{\mu_{\tilde{A}}} &= \bigcup_{u \in U} \left\{ \left[\varphi_{\mu_{\tilde{A}}}^-(u), \varphi_{\mu_{\tilde{A}}}^+(u) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(u) - \varepsilon_u \leq \mu_{\tilde{A}}(u) + \delta_u \leq 1$. La $FOU_{\mu_{\tilde{A}}}$ define una región acotada de incertidumbre alrededor de los grados de pertenencia definidos por la función de pertenencia tipo 1 $\mu_{\tilde{A}}$. El intervalo cerrado $\left[\varphi_{\mu_{\tilde{A}}}^-(u), \varphi_{\mu_{\tilde{A}}}^+(u) \right]$ se denomina **intervalo de valores de pertenencia** [Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012].

El concepto de intervalos de valores de pertenencia es de suma importancia para el desarrollo de esta Tesis y será utilizado asiduamente. Éstos se representarán por letras mayúsculas A , B , etc. Dada su relevancia, a continuación, se definen los conceptos principales relacionados a ellos.

DEFINICIÓN 4.13: Un **intervalo de valores de pertenencia** es un intervalo cerrado $A = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_R, a \in [0,1]\}$, donde a_L y a_R son los límites inferior y superior del intervalo.

DEFINICIÓN 4.14: (Número real) Si $a_L = a_R = a$, entonces el intervalo $A = [a, a] = \{a\}$ representa a un **número real** en $[0,1]$. En este caso, no existe incertidumbre alrededor del grado de pertenencia.

DEFINICIÓN 4.15: (Igualdad entre intervalos de valores de pertenencia) Dos intervalos de valores de pertenencia A y B son iguales si y sólo si:

$$a_L = b_L \wedge a_R = b_R. \quad (4.13)$$

La definición anterior establece la igualdad entre A y B formalmente en términos matemáticos.

DEFINICIÓN 4.16: (Relación de inclusión entre intervalos de valores de pertenencia) Sean $A = [a_L, a_R]$ y $B = [b_L, b_R]$ dos intervalos de valores de pertenencia. El intervalo A está incluido en el intervalo B , esto es $A \subseteq B$ si y sólo si:

$$b_L \leq a_L \wedge a_R \leq b_R. \quad (4.14)$$

DEFINICIÓN 4.17: El **espacio de todos los intervalos de valores de pertenencia**, notado por χ , está definido por:

$$\chi = \xi([0,1]), \quad (4.15)$$

donde $\xi([0,1])$ representa al conjunto de todos los intervalos cerrados incluidos en el intervalo cerrado $[0,1]$.

A partir de los conceptos de FOU, dado en la Definición 4.12, y de intervalos de valores de pertenencia, dado en la Definición 4.13, en esta Tesis se define un CD tipo 2 de intervalos, o lo que es lo mismo, un CD valuado en intervalos como sigue:

DEFINICIÓN 4.18: Un **Conjunto Difuso tipo 2 de intervalos** (CD tipo 2 de intervalos), notado $\bar{A}$ para diferenciarlo del símbolo $\tilde{A}$ utilizado para los CDs tipo 1, definido sobre un universo de discurso U , está caracterizado y completamente definido por una función de pertenencia llamada **función de pertenencia tipo 2 de intervalos** $\bar{\mu}_{\bar{A}}$, definida como $\bar{\mu}_{\bar{A}}: U \rightarrow \chi$, y puede representarse como:

$$\bar{A} = \{(u, \bar{\mu}_{\bar{A}}(u)) / u \in U\} = \left\{ \left\{ u, [\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u)] \right\} / u \in U \right\}, \quad (4.16)$$

donde $\bar{\mu}_{\bar{A}}(u) = [\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u)] = A_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)} = [a_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u),L}, a_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u),R}]$ es un **intervalo de valores de pertenencia** que representa el grado de pertenencia de un elemento $u \in U$ al CD tipo 2 de

intervalos $\bar{A}$, $\mathcal{X} = \xi([0,1])$ es el espacio de todos los intervalos de valores de pertenencia y $\varphi_{\bar{\mu}_A}^- : U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_A}^+ : U \rightarrow [0,1]$ son, respectivamente, la **función de pertenencia inferior** y la **función de pertenencia superior** de $\bar{\mu}_A$.

DEFINICIÓN 4.19: Las funciones $\varphi_{\bar{\mu}_A}^- : U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_A}^+ : U \rightarrow [0,1]$ son la **función de pertenencia inferior** (conocida también como *Lower MF*, por su nombre en inglés *Lower Membership Function*) y la **función de pertenencia superior** (conocida también como *Upper MF*, por su nombre en inglés *Upper Membership Function*) de la función de pertenencia tipo 2 de intervalos $\bar{\mu}_A$ y se definen como [Comas et al., 2014c]:

$$\begin{aligned}\varphi_{\bar{\mu}_A}^-(u) &= \min(\bar{\mu}_A(u)), u \in U \\ \varphi_{\bar{\mu}_A}^+(u) &= \max(\bar{\mu}_A(u)), u \in U\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde $\bar{\mu}_A$ es una función de pertenencia tipo 2 de intervalos.

A partir de estas definiciones relacionadas a intervalos de valores de pertenencia, puede trasladarse la consideración realizada al introducir el concepto de región de incertidumbre (FOU) en la Definición 4.12, en la siguiente propiedad:

PROPIEDAD 4.3: (Representación de imprecisión e incertidumbre en intervalos de valores de pertenencia) El rango del intervalo de valores de pertenencia obtenido al evaluar $\bar{\mu}_A$ en un valor específico $u \in U$, es decir, el rango del intervalo $A_{\bar{\mu}_A}(u) = [a_{\bar{\mu}_A}(u),L, a_{\bar{\mu}_A}(u),R] = \bar{\mu}_A(u)$, definido como $r(A_{\bar{\mu}_A}(u)) = a_{\bar{\mu}_A}(u),R - a_{\bar{\mu}_A}(u),L$, representa la imprecisión y la incertidumbre en la definición del grado de pertenencia de u al CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$. Cuanto mayor es el rango del intervalo de valores de pertenencia, mayor la imprecisión y la incertidumbre. Si la incertidumbre respecto al grado de pertenencia fuera nula, entonces $a_{\bar{\mu}_A}(u),L = a_{\bar{\mu}_A}(u),R$, $r(A_{\bar{\mu}_A}(u)) = 0$ y $A_{\bar{\mu}_A}(u) = a_{\bar{\mu}_A}(u)$ definiendo para ese elemento $u \in U$ un grado de pertenencia con un valor en $[0,1]$, es decir, tal como si en ese elemento la función de pertenencia fuera en realidad de tipo 1, en el cual se modela solamente la imprecisión relacionada al concepto que se está modelando.

La propiedad anterior es de enorme relevancia al definir CDs en condiciones de gran imprecisión e incertidumbre; y permite concluir que: **la imprecisión e incertidumbre relacionadas a la definición del grado de pertenencia de un elemento a un CD puede ser adecuadamente representada utilizando CDs tipo 2 de intervalos a través del rango del intervalo de valores de pertenencia** [Comas et al., 2014c; Mendel, 2007b]. En esencia, los intervalos de valores de pertenencia son los elementos más simples y adecuados para modelar conceptos imprecisos y en los que existe incertidumbre.

En este sentido, la función de pertenencia tipo 2 de intervalos $\bar{\mu}_{\bar{A}}$ indica el grado de pertenencia de un elemento $u \in U$ al CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$. **Dicho grado de pertenencia está representado por un intervalo de valores de pertenencia.** La relación entre los posibles intervalos de valores de pertenencia resultante y los grados de pertenencia que éstos representan puede analizarse como sigue:

- Si $\bar{\mu}_{\bar{A}}(u) = A_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)} = [0, 0] = \{0\} = 0$, el elemento u **no pertenece** al CD $\bar{A}$ y este intervalo de valores de pertenencia representa al mínimo grado de pertenencia posible.
- Si $\bar{\mu}_{\bar{A}}(u) = A_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)} = [1, 1] = \{1\} = 1$, el elemento u **pertenece completamente** al CD $\bar{A}$ y este intervalo de valores de pertenencia representa al máximo grado de pertenencia posible.
- Si $\bar{\mu}_{\bar{A}}(u) = A_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)} = [a_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u),L}, a_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u),R}]$ con $0 < a_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u),L} \leq a_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u),R} < 1$, el elemento u pertenece parcialmente al CD $\bar{A}$.

La región de incertidumbre (FOU), introducida en la Definición 4.12, puede ser redefinida al considerar la imprecisión y la incertidumbre representadas por los intervalos de valores de pertenencia, como sigue:

DEFINICIÓN 4.20: Sea $\bar{\mu}_{\bar{A}} : U \rightarrow \chi$ una función de pertenencia tipo 2 de intervalos definida sobre un universo de discurso U , con $\chi = \xi([0, 1])$, y sean $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^- : U \rightarrow [0, 1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+ : U \rightarrow [0, 1]$ respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* de $\bar{\mu}_{\bar{A}}$. La **región de incertidumbre representada por la función de pertenencia tipo 2 de intervalos $\bar{\mu}_{\bar{A}}$** , notada como $FOU_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}$, está definida por:

$$FOU_{\bar{\mu}_{\bar{A}}} = \bigcup_{u \in U} \left\{ \left[\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u) \right] \right\}. \quad (4.18)$$

A partir de la Definición 4.20, la Propiedad 4.3 y las consideraciones realizadas a lo largo de esta Sección, **puede concluirse lo siguiente respecto a los CD tipo 2 de intervalos y las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos:**

- En una función de pertenencia tipo 2 de intervalos, **la imprecisión y la incertidumbre respecto al grado de pertenencia de los elementos al CD está definida por la región de incertidumbre (FOU).**
- El tamaño de la FOU tiene relación con los niveles de imprecisión e incertidumbre: **cuanto mayor sean estos niveles, más grande será la FOU.**

- Una medida de la FOU es el área encerrada entre la *Upper MF* y la *Lower MF*.
- Cuando la incertidumbre se reduce a cero, la *Upper MF* y la *Lower MF* son iguales para todos los elementos del universo de discurso. Por lo tanto, la función de pertenencia tipo 2 de intervalos se convierte en una función de pertenencia tipo 1, y el CD tipo 2 de intervalos en un CD tipo 1; indicando que existe imprecisión respecto al suceso y objeto representado, pero no respecto al grado de pertenencia de cada elemento o resultado del suceso.

En la Figura 4.2 se muestra una función de pertenencia tipo 2 de intervalos, el cual define un CD tipo 2 de intervalos sobre un universo discurso $U = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Los grados de pertenencia están representados por intervalos de valores de pertenencia definidos por los valores de las funciones *Lower MF* y *Upper MF* en cada $u \in U$. El área sombreada representa la FOU.

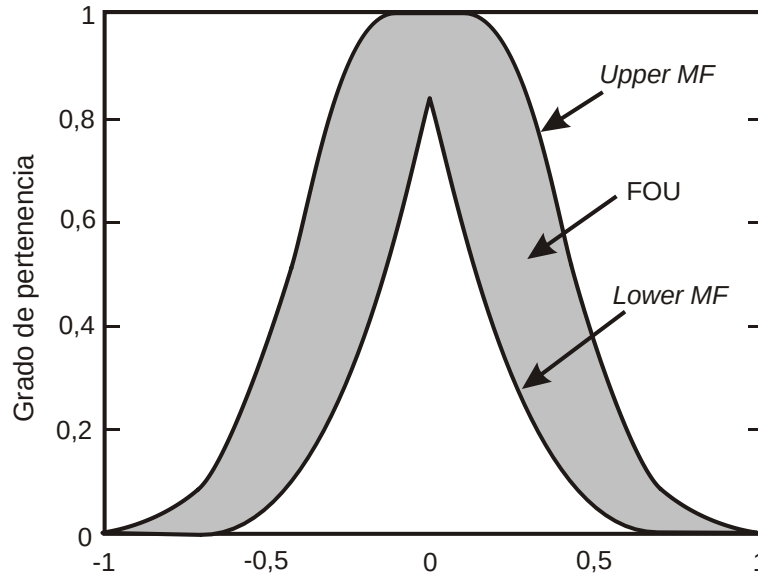


Figura 4.2. Función de pertenencia tipo 2 de intervalos para un universo de discurso $U = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

El grado de pertenencia de cada elemento en el universo U está representado por un intervalo de valores de pertenencia, definido por los límites impuestos por la *Lower MF* y *Upper MF*. El área sombreada representa la FOU.

Al igual que ocurre en el caso de los CDs tipo 1, analizar el grado de pertenencia de un elemento u a un CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ dado por $\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)$, es lógicamente equivalente a evaluar el valor de verdad de la expresión “el elemento u pertenece al CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ ”. De esta manera, el valor de verdad de la expresión “el elemento u pertenece al CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ ” está dado por $\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)$, el cual es representado por un intervalo de valores de pertenencia. Específicamente, el intervalo de valores de pertenencia definido por $\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)$ representa al valor de verdad de la expresión “el elemento u pertenece al CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ ”. Por lo tanto, al considerar CD tipo 2 de intervalos y referirse a valor de verdad en lugar de

grado de pertenencia, **los intervalos de valores de pertenencia pasan a llamarse intervalos de valores de verdad, resultando ambos son conceptos equivalentes.** Los primeros representan grados de pertenencia en CDs tipo 2 de intervalos y los segundos representan valores de verdad de expresiones lógicas cuando se utiliza LD tipo 2 de intervalos.

Partiendo de la definición de CD tipo 2 de intervalos dada en la Definición 4.18, las relaciones de inclusión e igualdad definidas para CD tipo 1 (Definiciones 4.4 y 4.5) pueden extenderse para los CD tipo 2 intervalos.

Previamente, debe enfatizarse una vez más que, **en los CD tipo 2 de intervalos el grado de pertenencia de cada elemento al CD está representado por un intervalo de valores de pertenencia.** En este sentido, **la igualdad y la inclusión entre CDs, requiere comparar los grados de pertenencia, que en este caso son intervalos; es decir, resulta necesario comparar intervalos de valores de pertenencia.** Asimismo, la relación de igualdad entre intervalos de valores de pertenencia dada en la Definición 4.15 no establece la igualdad entre los grados de pertenencia representados por los intervalos, sino sólo la igualdad en términos matemáticos entre los mismos.

La comparación de intervalos de valores pertenencia es uno de los problemas abordados en esta Tesis que será extensamente estudiado en el Capítulo 5, al presentar el método que se propone para comparar y ordenar intervalos de valores de verdad que representen valores de verdad de expresiones lógicas donde se utiliza LD tipo 2 de intervalos. En los métodos existentes en la literatura, dados dos intervalos de valores de pertenencia $A = [a_L, a_R]$ y $B = [b_L, b_R]$, se cumple que $A < B$, esto es, el intervalo A es menor que el intervalo B , si $a_R < b_L$, conocido también como **orden de Moore** [Moore, 1979]. Este criterio de orden está universalmente aceptado, pero no es completo; es decir, no permite analizar todos los posibles casos de intervalos de valores de verdad: intervalos parcialmente solapados o cuando uno de ellos está incluido en el otro, es decir, por ejemplo cuando $A \subset B$ [Ishibuchi y Tanaka, 1990; Moore, 1979; Sengupta y Pal, 2000]. Como se verá en el Capítulo 5, el método propuesto en esta Tesis supera a los existentes, ya que permite ordenar cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad.

En lo que sigue, con el fin de extender en forma general la igualdad e inclusión entre CDs tipo 2 de intervalos, se considerará que existe una función $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que aplicada sobre un intervalo de valores de pertenencia mide y permite determinar el grado de pertenencia que éste representa mediante un número real, donde $\mathcal{X} = \xi([0,1])$ es el conjunto de todos los intervalos cerrados incluidos en el intervalo $[0,1]$. Dicha función, que es propuesta en esta Tesis, se presenta en detalle en el Capítulo 5 y es llamada **medida de intervalos de valores de verdad**. Con esta consideración, y asumiendo el uso de dicha función, las relaciones de igualdad e inclusión para CDs tipo 2 de intervalos se definen como sigue.

DEFINICIÓN 4.21: (Igualdad entre CDs tipo 2 de intervalos) Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ dos CDs tipo 2 de intervalos definidos sobre un mismo universo de discurso U . Los CDs tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son iguales, esto es $\bar{A} = \bar{B}$ si y sólo si:

$$f(\mu_{\bar{A}}(u)) = f(\mu_{\bar{B}}(u)), \forall u \in U. \quad (4.19)$$

donde $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\mathcal{X} = \xi([0,1])$, es la **medida de intervalos de valores de verdad** propuesta en la Sección 5.2.2.

DEFINICIÓN 4.22: (Relación de inclusión entre CDs tipo 2 de intervalos) Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ dos CDs tipo 2 de intervalos definidos sobre un mismo universo de discurso U . El CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ está incluido en el CD tipo 2 de intervalos $\bar{B}$ (o lo que es lo mismo $\bar{A}$ es un subconjunto de $\bar{B}$ o $\bar{A}$ es menor a $\bar{B}$) si y sólo si:

$$\bar{A} \subset \bar{B} \Leftrightarrow f(\mu_{\bar{A}}(u)) \leq f(\mu_{\bar{B}}(u)), \forall u \in U. \quad (4.20)$$

donde $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\mathcal{X} = \xi([0,1])$, es la **medida de intervalos de valores de verdad** propuesta en la Sección 5.2.2.

4.2.2 Diferencia entre probabilidad y posibilidad

Es importante notar que, aunque la función de pertenencia asociada a un CD pueda tener cierto parecido a la función densidad de probabilidad para un variable aleatoria que toma valores sobre el universo de discurso U , existen diferencias esenciales entre estos conceptos. De hecho, la noción de CD es, en esencia, no estadística [Zadeh, 1965].

La noción detrás de los CDs es la de **posibilidad**. Específicamente, las funciones de pertenencia indican la **posibilidad** de que una variable que toma valores en un universo de discurso U pueda tomar un valor específico $u \in U$. En otras palabras, las funciones de pertenencia definen la posibilidad de que un elemento $u \in U$ pertenezca a un CD.

Los CDs se definen a partir de propiedad de los **espacios de posibilidad**, que es un concepto diferente al de los **espacios de probabilidad**. Ambos conceptos se definen a continuación [Dubois y Prade, 2000; Meschino, 2008; Zadeh, 1989]:

DEFINICIÓN 4.23: (Medida difusa) Sea $g: \mathcal{P}(U) \rightarrow [0,1]$, donde $\mathcal{P}(U)$ es el conjunto de partes del universo de discurso U , g es una **medida difusa** si y sólo si:

$$i. \quad g(\emptyset) = 0; \quad g(U) = 1.$$

- ii. $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{P}(U)$, si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, entonces $g(\mathbf{A}) \leq g(\mathbf{B})$.
- iii. Si $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall \mathbf{A}_i \in \mathcal{P}(U)$ y $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos monótona creciente o decreciente, es decir, $\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbf{A}_n \dots \subseteq$ o bien $\mathbf{A}_1 \supseteq \mathbf{A}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathbf{A}_n \dots \supseteq$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\mathbf{A}_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n\right),$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_i$ si $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_i$ si $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es decreciente. Esta propiedad se conoce como continuidad.

Los conceptos de espacio de probabilidad y espacio de posibilidad se definen, partiendo del concepto de medida difusa, como sigue:

DEFINICIÓN 4.24: Un **espacio de probabilidad** es una terna $(U, \mathcal{F}, P)$, donde U es el espacio muestral, $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra sobre $\mathcal{P}(U)$, y P es una **medida de probabilidad** en U que cumple:

- i. $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{P}(U)$, $P(\mathbf{A}) \in [0, 1]$ y $P(U) = 1$.
- ii. Si $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \in \mathcal{P}(U)$ y $\forall i \neq j$ $\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \emptyset$, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(\mathbf{A}_i).$$

Propiedad: Una medida de probabilidad es una medida difusa.

DEFINICIÓN 4.25: Un **espacio de posibilidad** es una terna $(U, \mathcal{P}(U), \Pi)$, donde U es el espacio muestral, $\mathcal{P}(U)$ es el conjunto de partes de U y $\Pi: \mathcal{P}(U) \rightarrow [0, 1]$ es una **medida de posibilidad** que satisface:

- i. $\Pi(\emptyset) = 0$ y $\Pi(U) = 1$.
- ii. Para cualquier colección de subconjuntos de U , $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}_i \in \mathcal{P}(U)$:

$$\Pi\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_i\right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} (\Pi(\mathbf{A}_i)).$$

Propiedad: Una medida de posibilidad es una medida difusa.

A partir de las dos definiciones anteriores queda bien establecida la diferencia entre posibilidad y probabilidad.

4.2.3 Interpretación lingüística de los Conjuntos Difusos y las funciones de pertenencia

Como se mencionó a lo largo de este Capítulo, los CDs, a través de las funciones de pertenencia, permiten definir conjuntos que modelan matemáticamente la imprecisión propia de los objetos, expresiones y sucesos del mundo real. El aspecto formal de la definición de los CDs y las funciones de pertenencia fue presentado en la Sección 4.2.1.

Se mencionó también que para un CD definido sobre un universo de discurso U , la función de pertenencia define el grado en que cada elemento $u \in U$ pertenece a dicho CD. De esta manera, analizar el grado de pertenencia de un elemento u al CD es equivalente a evaluar el valor de verdad de la expresión lógica “el elemento u pertenece al CD”.

Como característica esencial, un CD está asociado a expresiones en lenguaje natural, tales como: “el conjunto de hombres altos”, “el conjunto de días cálidos”, o “el conjunto de todos los números reales mucho mayores que 100”. En estos casos, “hombres altos”, “días cálidos” y “números reales mucho mayores que 100” son expresiones del lenguaje sobre los que pueden definirse subconjuntos de límites difusos.

Estas expresiones relacionadas a los CDs están bien definidas en la LD, a partir de los siguientes conceptos [Zadeh, 1975]:

DEFINICIÓN 4.26: Una **variable lingüística** es una variable cuyos valores son sentencias en lenguaje natural. Por ejemplo: “nivel de gris”, “temperatura”, “altura”.

Una variable lingüística estará representada por una letra minúscula, por ejemplo x . Las variables lingüísticas toman valores dentro de un universo de discurso representado como U , el cual es equivalente al dado en la Definición 4.1. De esta manera, $x = u$, con $u \in U$, representará un valor que toma la variable lingüística en un caso particular.

DEFINICIÓN 4.27: El **conjunto de términos** es el conjunto de valores lingüísticos (atributos) que una variable lingüística puede tomar. Por ejemplo, la variable lingüística “nivel de gris” podría tomar por ejemplo los valores {“alto”, “medio”, “bajo”}.

DEFINICIÓN 4.28: Una **variable difusa** surge de la asociación de una variable lingüística con los atributos definidos en su conjunto de términos. Siguiendo el ejemplo dado en la definición anterior, para la variable lingüística “nivel de gris” y el conjunto de términos {“alto”, “medio”, “bajo”},

pueden formarse las variables difusas: “*nivel de gris alto*”, “*nivel de gris medio*” y “*nivel de gris bajo*”.

PROPIEDAD 4.4: Para cada variable difusa obtenida de la asociación de una variable lingüística x , que toma valores en un universo U , con un conjunto de términos puede definirse un CD. La función de pertenencia del CD define con qué grado un valor $x=u$, con $u \in U$, pertenece al CD, o lo que es lo mismo, con qué valor de verdad cada valor $x=u$ que toma la variable lingüística satisface el atributo considerado al formar la variable difusa.

Por ejemplo, podría considerarse la variable difusa “*nivel de gris medio*”, que asocia la variable lingüística “*nivel de gris*” con el término “*medio*”. El CD definido sobre esta variable difusa puede denominarse como el CD: NIVEL DE GRIS MEDIO. Por lo tanto, para un valor de nivel de gris $x=u$, la función de pertenencia indica en qué grado el nivel de gris $x=u$ pertenece al CD NIVEL DE GRIS MEDIO o, lo que es equivalente, indica el valor de verdad de la expresión lógica “*el nivel de gris x es medio*”. En la Figura 4.3 se presenta el CD NIVEL DE GRIS MEDIO definido utilizando CDs tipo 2 de intervalos, donde la variable “*nivel de gris*” está normalizada entre -1 y 1. En este caso, -1 representa el nivel de gris más bajo (negro) y el valor +1 el nivel de gris más alto (blanco).

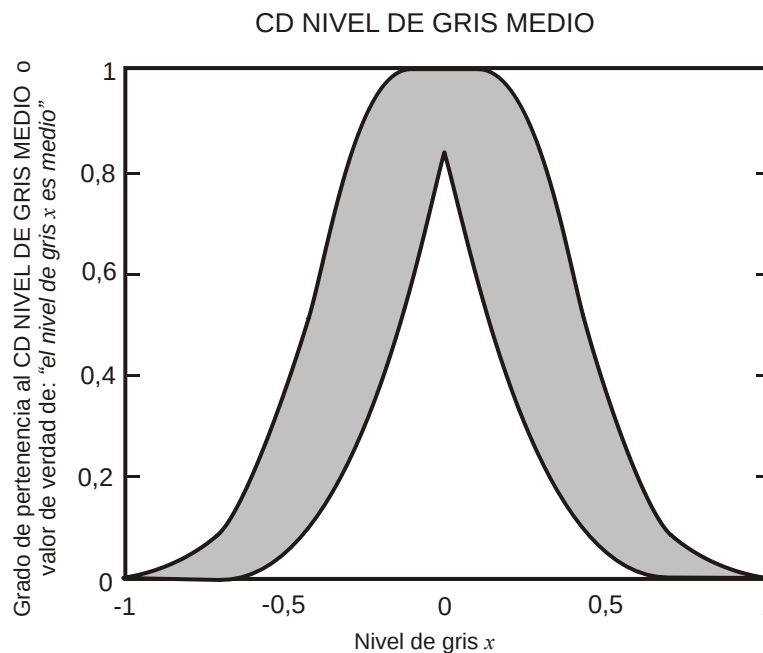


Figura 4.3. Función de pertenencia tipo 2 de intervalo correspondiente al CD NIVEL DE GRIS MEDIO, considerando un nivel de gris normalizado entre -1 (negro) y 1 (blanco).

La función de pertenencia define intervalos de valores de verdad que representan el grado de pertenencia de un valor de cada valor de gris al CD NIVEL DE GRIS MEDIO o, lo que es equivalente, define un intervalo de valores de verdad que representa el valor de verdad de la expresión lógica “*el nivel de gris x es medio*”.

Para mayor claridad, en esta Tesis las expresiones lingüísticas referidas tanto a variables lingüísticas, términos, atributos o expresiones lógicas serán notadas entre comillas (“...”) y los nombres de los CDs con letras mayúsculas.

En forma general, dependiendo del tipo de LD que se considere, el grado de pertenencia al CD y el valor de verdad de la expresión lógica estará representada por:

- **LD tipo 1:** un número real en el intervalo $[0,1]$, donde $\mu_{\tilde{A}}(u)$ con $x=u$, es el grado de pertenencia del valor u que toma la variable lingüística x al CD tipo 1 $\tilde{A}$. De la misma manera, $\mu_{\tilde{A}}(u)$ define para cada posible valor de la variable lingüística x el valor de verdad de la expresión lógica: “ $x=u$ pertenece al CD $\tilde{A}$ ” o más simplemente “ x es $\tilde{A}$ ”; o lo que es lo mismo “el valor $x=u$ de la variable lingüística satisface el atributo asociado al CD $\tilde{A}$ ” o más simplemente “la variable x satisface el atributo asociado al CD $\tilde{A}$ ”.
- **LD tipo 2 de intervalos:** un intervalo de valores de pertenencia, o lo que es lo mismo, un intervalo de valores de verdad, $A_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}(u) = [a_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u),L}, a_{\bar{\mu}_{\bar{A}}(u),R}] = \bar{\mu}_{\bar{A}}(u)$, con $x=u$, que representa el grado de pertenencia del valor u que toma la variable lingüística x al CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$. Asimismo, $\mu_{\bar{A}}(u)$ define para cada posible valor de la variable lingüística x un intervalo de valores de verdad que representa el valor de verdad de la expresión lógica: “ $x=u$ pertenece al CD $\bar{A}$ ” o más simplemente “ x es $\bar{A}$ ”; o lo que es lo mismo “el valor $x=u$ de la variable lingüística satisface el atributo asociado al CD $\bar{A}$ ” o más simplemente “la variable x satisface el atributo asociado al CD $\bar{A}$ ”.

Con esta visión, los CDs, por medio de funciones de pertenencia, permiten modelar valores de verdad de expresiones lingüísticas y grados de pertenencia de variables lingüísticas asociadas a atributos también lingüísticos.

Considerando los grados de libertad que brinda cada tipo de LD; esto es esencialmente: valores en $[0,1]$ para la LD tipo 1 o intervalos de valores de verdad (intervalos de valores de pertenencia) en $\mathcal{X} = \xi([0,1])$ para la LD tipo 2 de intervalos; la LD permite modelar a través de un modelo matemático formal la imprecisión e incertidumbre existente alrededor de variables y atributos lingüísticos que representan a objetos y sucesos del mundo real o a expresiones del lenguaje humano. Por lo tanto, la LD brinda un marco teórico formal que permiten obtener modelos que “acercan” a los modos en que el ser humano realmente se comunica, conversa, razona y toma decisiones [Comas *et al.*, 2011c; Meschino, 2008; Zadeh, 1989, 2008]. El resto de los elementos de la LD que permite reproducir dichos modelos serán introducidos en lo que sigue de este Capítulo.

4.2.4 Operaciones entre Conjuntos Difusos

Entre los CDs se definen operaciones similares a las existentes entre Conjuntos Clásicos, tales como intersección, unión y complemento. Las operaciones entre CDs son conocidas habitualmente como **agregación de CDs** y los operadores utilizados como **operadores de agregación** [Dubois y Prade, 1985; Dubois y Prade, 1980; Zadeh, 1965, 1975].

La agregación entre CDs complementa al uso de CDs para representar conceptos, sucesos y objetos del mundo real, es decir, es junto con los propios CDs la base de todos los modelos que utilizan LD intentando “acercarse” a los modos en que el ser humano se comunica, conversa, razona y toma decisiones. En este sentido, las relaciones y expresiones lógicas propias de las expresiones del lenguaje y los modos en que el humano razona pueden modelarse a través de la interpretación lingüística de los CDs obtenidos al aplicar operadores de agregación, también llamados operadores difusos. Este último punto es sumamente importante para el enfoque de aplicación de LD que se utiliza en esta Tesis y será analizado a continuación.

Considérese que $\bar{A}$ y $\bar{B}$ representan a dos CDs definidos sobre un mismo universo de discurso U , observando que para el análisis que sigue tanto $\bar{A}$ como $\bar{B}$ pueden ser CDs tipo 1 o bien CDs tipo 2 de intervalos. Las funciones de pertenencia $\mu_{\bar{A}}(u)$ y $\mu_{\bar{B}}(u)$ indican respectivamente los grados de pertenencia con los que un valor $u \in U$ pertenece a los conjuntos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ respectivamente. Desde el punto de vista de su significado lingüístico, para una variable lingüística x que toma valores en U , $\mu_{\bar{A}}(u)$, con $x=u$, indica el valor de verdad de “ x es $\bar{A}$ ”. De igual manera, $\mu_{\bar{B}}(u)$ indica el valor de verdad de “ x es $\bar{B}$ ”. Por lo tanto, el significado lingüístico de las operaciones intersección, unión y complemento es el siguiente:

- La **intersección** entre los CDs $\bar{A}$ y $\bar{B}$, notada como $\bar{A} \cap \bar{B}$, tendrá una función de pertenencia $\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}$ que indicará para un valor $x=u, u \in U$ el grado de pertenencia con el que x pertenece al CD $\bar{A} \cap \bar{B}$ o, lo que es mismo, el valor de verdad de las expresiones lógicamente equivalentes: “ x pertenece a $\bar{A} \cap \bar{B}$ ”, “ x pertenece a $\bar{A}$ y a $\bar{B}$ ”, “ x es $\bar{A}$ y es $\bar{B}$ ” o “la variable x satisface conjuntamente los atributos asociados a los CDs $\bar{A}$ y $\bar{B}$ ”. Por lo tanto, **la intersección entre CDs permite agregar funciones de pertenencia, combinando lógicamente con un operador de conjunción “Y” variables difusas asociadas a CDs que modelan conceptos, objetos o sucesos del mundo real, implementando computacionalmente los conectivos de conjunción utilizados en expresiones del lenguaje natural.**

- La **unión** entre los CDs $\bar{A}$ y $\bar{B}$, notada como $\bar{A} \cup \bar{B}$, tendrá una función de pertenencia $\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}$ que indicará para un valor $x = u, u \in U$ el grado de pertenencia con el que x pertenece al CD $\bar{A} \cup \bar{B}$ o, lo que es mismo, el valor de verdad de las expresiones lógicamente equivalentes: “ x pertenece a $\bar{A} \cup \bar{B}$ ”, “ x pertenece a $\bar{A}$ o a $\bar{B}$ ”, “ x es $\bar{A}$ o es $\bar{B}$ ” o “la variable x satisface los atributos asociados al CD $\bar{A}$ o al CD $\bar{B}$ ”. Por lo tanto, **la unión entre CDs permite agregar funciones de pertenencia, combinando lógicamente con un operador de disyunción “O” variables difusas asociadas a CDs que modelan conceptos, objetos o sucesos del mundo real, implementando computacionalmente los conectivos de disyunción utilizados en expresiones del lenguaje natural.**
- El complemento del CD $\bar{A}$, notado como $\neg \bar{A}$, tendrá una función de pertenencia $\mu_{\neg \bar{A}}$ que indicará para un valor $x = u, u \in U$ el grado de pertenencia con el que x pertenece al CD $\neg \bar{A}$ o, lo que es mismo, el valor de verdad de las expresiones lógicamente equivalentes: “ x pertenece a $\neg \bar{A}$ ”, “ x no pertenece a $\bar{A}$ ”, “ x no es $\bar{A}$ ” o “la variable x no satisface el atributo asociado al CD $\bar{A}$ ”. Por lo tanto, **la negación de un CD permite evaluar lógicamente un operador de negación “NO” sobre una variable difusa asociada al CD que modela un concepto, objeto o suceso del mundo real, implementando computacionalmente los conectivos de negación utilizados en expresiones del lenguaje natural.**

Debido a que son las funciones de pertenencia las que definen el grado de pertenencia a los CDs, los grados de pertenencia de la intersección, unión y complemento de CDs se definen operando sobre las funciones de pertenencia.

En LD, las operaciones entre CDs se definen extendiendo las funciones usadas para la intersección, unión y complemento de los Conjuntos Clásicos, que son respectivamente la conjunción, la disyunción y el complemento de la Lógica *Booleana*. Estas funciones están originalmente definidas en $\{0,1\}$. Las respectivas extensiones que dan lugar a la conjunción difusa, la disyunción difusa y el complemento, también llamados operadores difusos, son funciones definidas en $[0,1]$.

Antes de definir formalmente la intersección, unión y complemento de CDs, a continuación se definen formalmente los operadores difusos de conjunción, disyunción y complemento [Dubois y Prade, 1985; Dubois y Prade, 1980; Zimmermann y Zysno, 1980]:

DEFINICIÓN 4.29: Una función $C: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una **conjunción difusa** si es creciente en ambos argumentos, simétrica y satisface:

$$\begin{aligned} C(0,0) &= C(0,1) = C(1,0) = 0 \\ C(1,1) &= 1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Propiedad: La conjunción difusa permite evaluar el valor de verdad de expresiones del lenguaje que utilicen conectivos lógicos de conjunción “Y”.

DEFINICIÓN 4.30: Una función $D: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una **disyunción difusa** si es creciente en ambos argumentos, simétrica y satisface:

$$\begin{aligned} D(1,1) &= D(0,1) = D(1,0) = 1 \\ D(0,0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Propiedad: La disyunción difusa permite evaluar el valor de verdad de expresiones del lenguaje que utilicen conectivos lógicos de disyunción “O”.

DEFINICIÓN 4.31: Una función $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$ es un **complemento difuso** si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $a, b \in [0,1]$:

- i. Condición de frontera: $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$.
- ii. Decrecimiento estricto: Si $a < b$ entonces $c(a) > c(b)$.
- iii. Propiedad involutiva: $c(c(a)) = a$.

Propiedad: El complemento difuso permite evaluar el valor de verdad de expresiones del lenguaje que utilicen conectivos lógicos de negación “NO”.

Las condiciones dadas en las definiciones de los operadores difusos de conjunción, disyunción y complemento surgen de un análisis detallado de las condiciones necesarias para las operaciones entre CDs. Como puede observarse a partir de las definiciones, existe en cada caso más de una función que cumple con estas condiciones. La selección entre una y otra función para aplicar una misma operación difusa, debería estar condicionada no sólo a cuál funciona adecuadamente en la aplicación particular, sino también deberían considerarse las propiedades únicas de esa función que implementa el operador. En [Dubois y Prade, 1985] y [Zimmermann y Zysno, 1980] se analizan en detalle las propiedades que satisfacen casos particulares de conjunciones, disyunciones y complementos difusos. Existen, a su vez, otras definiciones de conjunciones, disyunciones y complementos donde se consideran condiciones adicionales [Drewniak y Król, 2010; Fodor y Keresztfalvi, 1995].

En consecuencia, el uso de una determinada función que cumpla con la definición de conjunción difusa define a una intersección entre CDs particular. Lo mismo ocurre para el caso de la

disyunción difusa al realizar la unión de CDs y el complemento difuso al realizar el complemento (negación) de un CD.

Existe un conjunto de funciones que satisfacen las Definiciones 4.29 a 4.30 dadas para la conjunción y la disyunción difusas, ampliamente utilizadas en aplicaciones de LD, que son conocidas como normas triangulares [Dubois y Prade, 1985; Dubois y Prade, 1980]. Específicamente, una norma triangular o t -norma es una conjunción difusa y una co-norma triangular o s -norma es una disyunción difusa. Ambas funciones se definen y presentan a continuación.

DEFINICIÓN 4.32: Una función $t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una **norma triangular** (t -norma) si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $a, b, c \in [0,1]$:

- i. Condición de frontera: $t(a,1) = a$.
- ii. Simetría: $t(a,b) = t(b,a)$.
- iii. Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $t(a,b) \leq t(c,d)$.
- iv. Asociatividad: $t(t(a,b),c) = t(a,t(b,c))$.

Algunos operadores conocidos que cumplen las condiciones para ser **t -normas** son los siguientes [Meschino, 2008]:

$$\text{Estándar: } t(a,b) = \min(a,b). \quad (4.23)$$

$$\text{Producto algebraico: } t(a,b) = a.b. \quad (4.24)$$

$$\text{Producto acotado: } t(a,b) = \max(0, a+b-1). \quad (4.25)$$

$$\text{Producto drástico: } t(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b=1 \\ b & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}. \quad (4.26)$$

$$\text{Dubois and Prade: } t(a,b) = \frac{a.b}{\max(a,b,\gamma)} \text{ donde } 0 < \gamma < 1. \quad (4.27)$$

$$\text{Producto de Hamacher: } t(a,b) = \frac{a.b}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-a.b)} \text{ donde } \gamma \geq 0. \quad (4.28)$$

$$\text{Producto de Einstein: } t(a,b) = \frac{a.b}{2-a+b-a.b}. \quad (4.29)$$

$$\text{Producto de Yager: } t(a, b) = 1 - \min \left(1, \left((1-a)^\gamma + (1-b)^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right) \text{ donde } \gamma > 0. \quad (4.30)$$

DEFINICIÓN 4.33: Una función $s : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una **conorma triangular** (t -conorma o s -norma) si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $a, b, c \in [0,1]$:

- i. Condición de frontera: $s(a, 0) = a$.
- ii. Simetría: $s(a, b) = s(b, a)$.
- iii. Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $s(a, b) \leq s(c, d)$.
- iv. Asociatividad: $s(s(a, b), c) = s(a, s(b, c))$.

Algunos operadores conocidos que cumplen las condiciones para ser **s-normas** son los siguientes [Meschino, 2008]:

$$\text{Estándar: } s(a, b) = \max(a, b). \quad (4.31)$$

$$\text{Suma algebraica: } s(a, b) = a + b - a.b. \quad (4.32)$$

$$\text{Suma acotada: } s(a, b) = \min(1, a + b). \quad (4.33)$$

$$\text{Suma drástica: } s(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}. \quad (4.34)$$

$$\text{Dubois and Prade: } s(a, b) = 1 - \frac{(1-a).(1-b)}{\max(1-a, 1-b, \gamma)} \text{ donde } 0 < \gamma < 1. \quad (4.35)$$

$$\text{Suma de Hamacher: } s(a, b) = 1 - \frac{a + b + (\gamma - 2).a.b}{1 + (\gamma - 1).a.b} \text{ donde } \gamma \geq 0. \quad (4.36)$$

$$\text{Suma de Einstein: } s(a, b) = \frac{a + b}{1 + a.b}. \quad (4.37)$$

$$\text{Suma de Yager: } s(a, b) = \min \left(1, \left(a^\gamma + b^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right) \text{ donde } \gamma > 0. \quad (4.38)$$

PROPIEDAD 4.5: Las normas triangulares son funciones acotadas, específicamente si $t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ y $s : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ son respectivamente una t -norma y una s -norma (según las Definiciones 4.32 y 4.33), entonces $\forall a, b \in [0,1]$ se cumple:

$$t(a, b) \leq \min(a, b), \quad (4.39)$$

$$s(a, b) \geq \max(a, b). \quad (4.40)$$

La propiedad anterior puede demostrarse a partir de las respectivas definiciones dadas para la t -norma y la s -norma.

A su vez, existen varias funciones que satisfacen la definición de **complemento difuso**, algunas de ellas son [Batyrsin y Kaynak, 1999]:

$$\text{Estándar: } c(a) = 1 - a. \quad (4.41)$$

$$\text{Sugeno: } c(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \text{ donde } \lambda > -1. \quad (4.42)$$

$$\text{Yager: } c(a) = (1-a^\omega)^{\frac{1}{\omega}} \text{ donde } \omega > 0. \quad (4.43)$$

Habiendo definido los operadores difusos, en las siguientes Secciones se definirán las operaciones de agregación entre CDs. En primer lugar, se definirán las operaciones entre CDs tipo 1, para luego definir las operaciones entre CDs tipo 2 de intervalos. Como se mencionó anteriormente, las operaciones entre CDs; y en particular el uso de operadores de conjunción, disyunción y complemento, permiten evaluar lógicamente el valor de verdad de las expresiones del lenguaje donde se utilizan conectivos como “Y”, “O” o “NO”.

4.2.4.1. Operaciones entre Conjuntos Difusos tipo 1

A partir de las definiciones de conjunción, disyunción y complemento difusos dados en las Definiciones 4.29 a 4.31 y considerando las funciones presentadas que cumplen con dichas definiciones, la intersección, unión y complemento de CDs tipo 1 se definen como sigue [Dubois y Prade, 1985; Meschino, 2008]:

DEFINICIÓN 4.34: (Intersección entre CDs tipo 1) Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos CDs tipo 1 definidos sobre un mismo universo de discurso U , con funciones de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$ y $\mu_{\tilde{B}}$ respectivamente. La **intersección** entre los CDs $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, notada $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ es un nuevo CD tipo 1, sobre el mismo universo U , con función de pertenencia $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} : U \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(u) = C(\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)), \forall u \in U, \quad (4.44)$$

donde $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una conjunción difusa que cumple la Definición 4.29.

Puede verse que si la conjunción $\tilde{C}$ de la Ecuación (4.44) se evalúa a través de una t -norma, en virtud de la Propiedad 4.5 puede asegurarse que $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \subset \tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \subset \tilde{\mathbf{B}}$, es decir:

$$\forall u \in U, \mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}}(u) \leq \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(u) \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \subset \tilde{\mathbf{A}}, \quad (4.45)$$

y

$$\forall u \in U, \mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}}(u) \leq \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(u) \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \subset \tilde{\mathbf{B}}, \quad (4.46)$$

considerando la inclusión entre CDs tipo 1 dada en la Definición 4.4.

DEFINICIÓN 4.35: (Unión entre CDs tipo 1) Sean $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$ dos CDs tipo 1 definidos sobre un mismo universo de discurso U , con funciones de pertenencia $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}$ y $\mu_{\tilde{\mathbf{B}}}$ respectivamente. La **unión** entre los CDs $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$, notada $\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$ es un nuevo CD tipo 1, sobre el mismo universo U , con función de pertenencia $\mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}} : U \rightarrow [0,1]$ dada por:

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}}(u) = D(\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(u), \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(u)), \forall u \in U, \quad (4.47)$$

donde $D : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una disyunción difusa que cumple la Definición 4.30.

Puede verse que si la disyunción D de la Ecuación (4.47) se evalúa a través de una s -norma, en virtud de la Propiedad 4.5 puede asegurarse que $\tilde{\mathbf{A}} \subset \tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$ y $\tilde{\mathbf{B}} \subset \tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$, es decir:

$$\forall u \in U, \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(u) \leq \mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}}(u) \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \subset \tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}, \quad (4.48)$$

y

$$\forall u \in U, \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(u) \leq \mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}}(u) \Rightarrow \tilde{\mathbf{B}} \subset \tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}, \quad (4.49)$$

considerando la inclusión entre CDs tipo 1 dada en la Definición 4.4.

DEFINICIÓN 4.36: (Complemento o negación de un CD tipo 1) Sea $\tilde{\mathbf{A}}$ un CD tipo 1 definido sobre un universo de discurso U , con función de pertenencia $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}$. El **complemento** del CD $\tilde{\mathbf{A}}$, notado $\neg \tilde{\mathbf{A}}$ es un nuevo CD tipo 1, sobre el mismo universo U , con función de pertenencia $\mu_{\neg \tilde{\mathbf{A}}} : U \rightarrow [0,1]$ dada por:

$$\mu_{\neg \tilde{\mathbf{A}}}(u) = c(\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(u)), \forall u \in U, \quad (4.50)$$

donde $c : [0,1] \rightarrow [0,1]$ es un complemento difuso que cumple la Definición 4.31.

4.2.4.2. Operaciones entre Conjuntos Difusos tipo 2 de intervalos

A partir de las definiciones de conjunción, disyunción y complemento difusos dados en las Definiciones 4.29 a 4.31 y considerando las definiciones de intersección, unión y completo de CDs tipo 1 definidas en la Sección anterior, las operaciones entre CDs tipo 2 de intervalos pueden definirse como una extensión de las de los CDs tipo 1 de la siguiente forma [Comas *et al.*, 2014c; Zadeh, 1975]:

DEFINICIÓN 4.37: (Intersección entre CDs tipo 2 de intervalos) Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ dos CDs tipo 2 de intervalos definidos sobre un mismo universo de discurso U , con funciones de pertenencia $\bar{\mu}_{\bar{A}} : U \rightarrow \chi$ y $\bar{\mu}_{\bar{B}} : U \rightarrow \chi$ respectivamente, con $\chi = \xi([0,1])$ el conjunto de todos los intervalos cerrados contenidos en $[0,1]$. La **intersección** entre los CDs tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ y $\bar{B}$, notada $\bar{A} \cap \bar{B}$ es un nuevo CD tipo 2 de intervalos, sobre el mismo universo U , con función de pertenencia $\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}} : U \rightarrow \chi$ dada por:

$$\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}(u) = [\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}}^+(u)] = [C(\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^-(u)), C(\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^+(u))], \forall u \in U, \quad (4.51)$$

donde $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^- : U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+ : U \rightarrow [0,1]$ son respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* del CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$; $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^- : U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^+ : U \rightarrow [0,1]$ son respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* del CD tipo 2 de intervalos $\bar{B}$; $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}}^- : U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}}^+ : U \rightarrow [0,1]$ son respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* del CD $\bar{A} \cap \bar{B}$ y $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una conjunción difusa que cumple la Definición 4.29.

Como puede verse de la definición anterior, **el intervalo resultante de la conjunción entre intervalos de valores de pertenencia y, lo que es lo mismo, de la conjunción entre intervalos de valores de verdad, se define aplicando separadamente una función conjunción difusa sobre los extremos inferiores y los extremos superiores de los intervalos.**

Para la intersección de CDs tipo 2 de intervalos, si la conjunción C de la Ecuación (4.51) se evalúa a través de una t -norma, en virtud de la Propiedad 4.5, puede asegurarse $\forall u \in U$ que:

$$\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}}^-(u) \leq \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u) \quad \wedge \quad \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}}^+(u) \leq \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u), \quad (4.52)$$

y

$$\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}}^-(u) \leq \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^-(u) \quad \wedge \quad \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}}^+(u) \leq \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^+(u). \quad (4.53)$$

Sin embargo, no puede asegurarse que $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{A}$ y $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{B}$, pues la relación de inclusión entre CDs tipo 2 de intervalos requiere la definición de una medida de intervalos de valores de

verdad f (ver Definición 4.22). Considerando que los CDs tipo 2 de intervalos son una extensión de los CDs tipo 1, debería exigirse a la medida de intervalos de valores de verdad f que, de cumplirse las condiciones definidas por las Ecuaciones (4.52) y (4.53), entonces se cumpla la condición de inclusión $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{A}$ y $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{B}$, según la Definición 4.22, es decir:

$$\forall u \in U, f(\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}) \leq f(\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)) \wedge f(\bar{\mu}_{\bar{A} \cap \bar{B}}) \leq f(\bar{\mu}_{\bar{B}}(u)), \quad (4.54)$$

donde $f: \chi \rightarrow \mathbb{R}$, con $\chi = \xi([0,1])$, es la **medida de intervalos de valores de verdad** propuesta en esta Tesis en la Sección 5.2.2.

DEFINICIÓN 4.38: (Unión entre CDs tipo 2 de intervalos) Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ dos CDs tipo 2 de intervalos definidos sobre un mismo universo de discurso U , con funciones de pertenencia $\bar{\mu}_{\bar{A}}: U \rightarrow \chi$ y $\bar{\mu}_{\bar{B}}: U \rightarrow \chi$ respectivamente, con $\chi = \xi([0,1])$ el conjunto de todos los intervalos cerrados contenidos en $[0,1]$. La **unión** entre los CDs tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ y $\bar{B}$, notada $\bar{A} \cup \bar{B}$ es un nuevo CD tipo 2 de intervalos, sobre el mismo universo U , con función de pertenencia $\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}: U \rightarrow \chi$ dada por:

$$\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}(u) = [\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}}^+(u)] = [D(\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^-(u)), D(\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^+(u))], \forall u \in U, \quad (4.55)$$

donde $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-: U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+: U \rightarrow [0,1]$ son respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* del CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$; $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^-: U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^+: U \rightarrow [0,1]$ son respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* del CD tipo 2 de intervalos $\bar{B}$; $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}}^-: U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}}^+: U \rightarrow [0,1]$ son respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* del CD $\bar{A} \cup \bar{B}$ y $D: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una disyunción difusa que cumple la Definición 4.30.

Como puede verse de la definición anterior, **el intervalo resultante de la disyunción entre intervalos de valores de pertenencia y, lo que es lo mismo, de la disyunción entre intervalos de valores de verdad, se define aplicando separadamente una función disyunción difusa sobre los extremos inferiores y los extremos superiores de los intervalos.**

Para la unión de CDs tipo 2 de intervalos si la disyunción D de la Ecuación (4.55) se evalúa a través de una s-norma, en virtud de la Propiedad 4.5, puede asegurarse que $\forall u \in U$:

$$\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u) \leq \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}}^-(u) \wedge \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u) \leq \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}}^+(u), \quad (4.56)$$

y

$$\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^-(u) \leq \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}}^-(u) \wedge \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{B}}}^+(u) \leq \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}}^+(u). \quad (4.57)$$

Sin embargo, no puede asegurarse que $\bar{A} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ y $\bar{B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, pues la relación de inclusión entre CDs tipo 2 de intervalos requiere, como ya se mencionó, la definición de una medida de intervalos de valores de verdad f (ver Definición 4.22). Considerando que los CDs tipo 2 de intervalos son una extensión de los CDs tipo 1, debería exigirse a la medida de intervalos de valores de verdad f que de cumplirse las condiciones definidas por las Ecuaciones (4.56) y (4.57), entonces se cumpla la condición de inclusión $\bar{A} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ y $\bar{B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, según la Definición 4.22, es decir:

$$\forall u \in U, f(\bar{\mu}_{\bar{A}}(u)) \leq f(\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}) \wedge f(\bar{\mu}_{\bar{B}}(u)) \leq f(\bar{\mu}_{\bar{A} \cup \bar{B}}), \quad (4.58)$$

donde $f: \chi \rightarrow \mathbb{R}$, con $\chi = \xi([0,1])$, es la **medida de intervalos de valores de verdad** propuesta en esta Tesis en la Sección 5.2.2.

DEFINICIÓN 4.39: (Complemento o negación de un CD tipo 2 de intervalos) Sea $\bar{A}$ un CD tipo 2 de intervalos definido sobre un universo de discurso U , con función de pertenencia $\bar{\mu}_{\bar{A}}: U \rightarrow \chi$, con $\chi = \xi([0,1])$ el conjunto de todos los intervalos cerrados contenidos en $[0,1]$. El **complemento** del CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$, notado $\neg \bar{A}$, es un nuevo CD tipo 2 de intervalos, sobre el mismo universo U , con función de pertenencia $\bar{\mu}_{\neg \bar{A}}: U \rightarrow \chi$ dada por:

$$\bar{\mu}_{\neg \bar{A}}(u) = [\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u)] = [c(\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+(u)), c(\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-(u))], \forall u \in U, \quad (4.59)$$

donde $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^-: U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}^+: U \rightarrow [0,1]$ son respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* del CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$; $\varphi_{\bar{\mu}_{\neg \bar{A}}}^-: U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{\neg \bar{A}}}^+: U \rightarrow [0,1]$ son respectivamente la *Lower MF* y la *Upper MF* del CD $\neg \bar{A}$ y $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$ es un complemento difuso que cumple la Definición 4.31.

Como puede verse de la definición anterior, **el intervalo resultante del complemento de un intervalo de valores de pertenencia y, lo que es lo mismo, del complemento de un intervalo de valores de verdad, se define aplicando separadamente el complemento difuso al extremo inferior y al extremo superior del intervalo.**

4.3. Lógica Difusa Compensatoria

Los operadores difusos de conjunción, disyunción y complemento definidos en la Sección 4.2.4 (Definiciones 4.29 a 4.33) han sido empíricamente probados con el fin de analizar si ellos implementan apropiadamente los conectivos lingüísticos “Y”, “O” y “NO” [Dubois y Prade, 1985; Zimmermann y Zysno, 1980]. Se ha detectado que el comportamiento humano habitual es compensatorio [Dubois y Prade, 1985; Zimmermann y Zysno, 1980]. Por ejemplo, al evaluar la

satisfacción de múltiples objetivos, para el ser humano, la disminución en el grado de satisfacción de un objetivo individual siempre es compensada por el aumento en el grado de satisfacción de otro de los objetivos.

Por lo tanto, cuando la LD se utiliza para modelar el modo en que los humanos razonan y toman decisiones, en muchos casos al aplicar los operadores difusos de conjunción, disyunción y complemento es deseable que los valores de verdad (valores de pertenencia) resultantes posean “sensibilidad” a los cambios de los valores de verdad originales y conserven el “significado verbal” de los conectivos lógicos [Dubois y Prade, 1985; Meschino, 2008; Zimmermann y Zysno, 1980]. Por ejemplo, considerando los operadores presentados en la Sección anterior, las t -normas como funciones que implementan la conjunción difusa siempre dan un resultado menor o igual a los valores de sus argumentos. Asimismo, las s -normas como funciones que implementan la disyunción difusa siempre dan un resultado mayor o igual a los valores de sus argumentos. Esto dificulta la obtención de valores de verdad sensibles a las diferencias entre los valores de verdad de las expresiones individuales que se combinan lógicamente.

Existen operadores difusos, llamados operadores compensatorios, que sí son sensibles a las diferencias entre los valores individuales de sus argumentos, los cuales están basados en medias aritméticas y geométricas, que fueron originalmente estudiados en [Dubois y Prade, 1985; Zimmermann y Zysno, 1980]. Partiendo de estos operadores, en esta Tesis se propone usar operadores de la llamada **Lógica Difusa Compensatoria** (LDC) [Bouchet *et al.*, 2011; Espin Andrade *et al.*, 2006] que adoptó parte de los operadores estudiados originalmente en [Zimmermann y Zysno, 1980], definiendo un conjunto de axiomas a partir de los cuales se definen operadores compensatorios. Los conceptos asociados a la LDC se presentan a continuación.

DEFINICIÓN 4.40: Una **Lógica Difusa Compensatoria** (LDC) es una cuarteta (C, D, O, N) de operadores continuos, una conjunción $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, una disyunción $D: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, un orden $O: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ y una negación $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$, que satisface el siguiente conjunto de axiomas [Bouchet *et al.*, 2011; Espin Andrade *et al.*, 2006]:

Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ valores en $[0,1]^n$, los operadores deben satisfacer:

- i. Compensación: $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq C(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- ii. Conmutatividad: $C(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = C(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$.
- iii. Crecimiento estricto: Si $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_{i+1} = y_{i+1}, \dots, x_n = y_n$ no son nulos, y $x_i > y_i$, entonces $C(x_1, x_2, \dots, x_n) > C(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

iv. Veto: Si $x_i = 0$ para algún i , con $1 \leq i \leq n$, entonces $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

v. Reciprocidad Difusa: $O(x, y) = N[O(y, x)]$.

vi. Transitividad Difusa: Si $O(x, y) \geq 0.5$ y $O(y, z) \geq 0.5$, entonces $O(x, z) \geq \max\{O(x, y), O(y, z)\}$.

vii. Leyes de De Morgan: $N[C(x_1, x_2, \dots, x_n)] = D(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n))$ y $N[D(x_1, x_2, \dots, x_n)] = C(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n))$.

La diferencia entre la LDC y la LD está en el axioma de compensación. Se han definido dos conjuntos de operadores que cumplen la Definición 4.40: la **Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica** (LDCMG) [Espin Andrade *et al.*, 2006] y la **Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética** (LDCMA) [Bouchet *et al.*, 2011]. Estos operadores se definen a continuación:

DEFINICIÓN 4.41: La **LDCMG** está definida por la cuarteta de operadores (C, D, O, N) formada por una conjunción $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, una disyunción $D: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, un orden $O: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ y una negación $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que se definen como sigue [Espin Andrade *et al.*, 2006]:

$$\text{Conjunción: } C(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.60)$$

$$\text{Disyunción: } D(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - [(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n)]^{\frac{1}{n}}. \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \text{Orden: } O[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] \\ = 0,5 [C(x_1, x_2, \dots, x_n) - C(y_1, y_2, \dots, y_n)] + 0,5. \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\text{Negación: } N(x_i) = 1 - x_i. \quad (4.63)$$

DEFINICIÓN 4.42: La **LDCMA** está definida por la cuarteta de operadores (C, D, O, N) formada por una conjunción $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, una disyunción $D: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, un orden $O: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ y una negación $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definidos de la siguiente manera [Bouchet *et al.*, 2011]:

$$\text{Conjunción: } C(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.64)$$

$$\text{Disyunción: } D(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \left[\min(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - x_i) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \text{Orden: } O[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] \\ = 0,5 [C(x_1, x_2, \dots, x_n) - C(y_1, y_2, \dots, y_n)] + 0,5. \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\text{Negación: } N(x_i) = 1 - x_i. \quad (4.67)$$

4.4. Lógica Difusa aplicada al Reconocimiento de Patrones

Como se mencionó en el Capítulo 1 de esta Tesis, se han aplicado exitosamente modelos basados en LD al Reconocimiento de Patrones, obteniendo resultados satisfactorios tanto en agrupamiento como en clasificación de datos en general y en segmentación de imágenes médicas en particular. Pueden consultarse revisiones de aplicaciones de LD en Reconocimiento de Patrones en [Comas *et al.*, 2011c; Melin y Castillo, 2013; Meschino *et al.*, 2008].

Al permitir definir CDs, la LD proporciona herramientas que permiten modelar conocimiento expresado lingüísticamente [Meschino *et al.*, 2015a; Zadeh, 1965, 1975; Zadeh, 2008], modelando, esencialmente, expresiones y conceptos del mundo real que son utilizados para discriminar grupos o clases en los datos. A su vez, al permitir evaluar con operadores difusos el valor de verdad de expresiones lingüísticas con conectivos como “Y”, “O” o “NO”, la LD define un mecanismo formal que permite reproducir el mecanismo utilizado por especialistas al agrupar o clasificar datos provenientes de un campo específico de estudio [Comas *et al.*, 2014a; Comas *et al.*, 2014c; Zadeh, 2008].

Concretamente, en aplicaciones de LD en Reconocimiento de Patrones, el conocimiento es modelado a través de CDs y descripciones del tipo lingüístico, las cuales se traducen a reglas de inferencia o a predicados difusos [Meschino, 2008]. En el mecanismo habitual, un especialista en el campo del cual los datos provienen define: las variables o características (y sus atributos asociados) que permiten discriminar adecuadamente los diferentes grupos o clases, determinando con esto los CDs y definiendo las funciones de pertenencia; y los atributos específicos de cada característica que se relacionan con cada una de las etiquetas, lo cual se expresa lógicamente a través de reglas de inferencia o de predicados difusos [Comas *et al.*, 2012].

Una vez definidos los CDs y las reglas de inferencia (o los predicados difusos) se tiene completamente generado un sistema de LD para Reconocimiento de Patrones basado en inferencia difusa (o en predicados). Una vez generado, se aplica al agrupamiento o clasificación de los datos en un proceso conocido como **proceso de consulta**, en el cual se evalúan los CDs y reglas de

inferencia (o predicados difusos) para cada dato. En este proceso, se reproducen computacionalmente, y por medio del modelo de LD generado, los mecanismos que el experto utiliza para agrupar o clasificar los datos, definiendo para cada dato una etiqueta.

En lo que sigue de esta Sección, se analizarán brevemente los enfoques basados en inferencia difusa para posteriormente definir en detalle el enfoque basado en predicados, que es el adoptado en esta Tesis para el Reconocimiento de Patrones.

Pese a que los métodos tradicionales utilizados para generar sistemas de LD se basan en el uso de conocimiento de especialistas (conocimiento experto), en aplicaciones de Reconocimiento de Patrones existen enfoques que permiten generar estos sistemas directa y automáticamente a partir de datos. Estos métodos se estudian en detalle en el próximo Capítulo cuando se presenten los métodos propuestos en esta Tesis para la generación automática de sistema de LD tipo 2 de intervalos para Reconocimiento de Patrones, los cuales serán utilizados posteriormente para la segmentación de imágenes médicas.

Debido al uso frecuente de los términos *clase* y *cluster*, cuya diferencia ya fue presentada en el Capítulo 3, cuando se presenten casos que se apliquen tanto a clases como a *clusters*, de ahora en más se utilizará en su lugar la palabra “etiqueta”, entendiendo que un dato con una etiqueta puede ser un dato que: o bien corresponde o es de una clase determinada, o corresponde o pertenece a un determinado *cluster*.

4.4.1 Sistemas de Lógica Difusa basados en inferencia difusa

Es común encontrar en la bibliografía aplicaciones de sistemas de LD que utilizan los modelos tradicionales de inferencia difusa, basados tanto en el **modelo difuso de Mamdani** [Mamdani, 1974] como en el **modelo difuso de Takagi–Sugeno–Kang** [Sugeno y Kang, 1988].

Estos modelos se caracterizan por el uso de reglas, llamadas reglas de inferencia, del tipo *IF-THEN* (SI-ENTONCES), compuestas por un antecedente y un consecuente. El antecedente consiste en una combinación lógica de variables difusas relacionadas a la asignación de una etiqueta a un dato. Esto es, el antecedente implementa lógicamente las relaciones lógicas y las variables difusas extraídas de la descripción realizada por el especialista para cada una de las etiquetas. Formalmente, considerando una regla R_k que explica a una etiqueta genérica $k \in \{1, \dots, K\}$, con K el número total de etiquetas, el antecedente de la misma tendrá en general la siguiente forma:

$$R_k : IF x_1 \text{ is } \bar{A}_1^{(k)} \text{ AND } x_2 \text{ is } \bar{A}_2^{(k)} \text{ AND } \dots \text{ AND } x_d \text{ is } \bar{A}_d^{(k)} \text{ THEN } \dots, \quad (4.68)$$

donde $\{\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}\}_{i=1,\dots,d}$ son CDs definidos para las características de los datos de entrada. Como se indicó en la Sección 4.2.3, los CDs describen variables difusas, definiendo con qué valor de verdad el valor que toma una característica en un dato satisface un atributo. Dichos atributos se obtienen a partir de las descripciones de especialistas. Al asociar características con atributos, se definen variables difusas relevantes en la determinación de cada etiqueta y CDs.

Siguiendo el análisis efectuado en la Sección 4.2.3, cuando se analizó la interpretación lingüística de los CDs y de las funciones de pertenencia, las expresiones del tipo $x_i \text{ is } \bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}$, con $i \in \{1, \dots, d\}$ y $k \in \{1, \dots, K\}$, en el antecedente de la regla de la Ecuación (4.68), equivalen las expresiones lingüísticas: “ x_i es $\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}$ ”, “el valor de x_i pertenece al CD $\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}$ ” o, lo que es lo mismo, “el valor de x_i satisface el atributo asociado al CD $\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}$ ”. Por lo tanto, para un valor específico $x_i = u$, $\mu_{\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}}(u)$ define el valor de verdad de la expresión lógica “el valor $x_i = u$ de la variable lingüística x_i satisface el atributo asociado al CD $\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}$ ” o más simplemente “la variable x_i satisface el atributo asociado al CD $\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}$ ”.

Partiendo de estas consideraciones generales, en lo que sigue, se analizarán las características principales y las diferencias entre los modelos de inferencia difusa de Mamdani y de Takagi–Sugeno–Kang.

En el **modelo difuso de Mamdani** [Mamdani, 1974] las reglas relacionan variables difusas asociadas a variables (características) de los datos de “entrada”, es decir, los datos a asignar a una etiqueta, y CDs asociados a variables de salida, que en esta aplicación corresponden a cada una de las etiquetas.

Considerando $\mathbf{x} \in [-1, 1]^d$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ un dato de entrada, un vector de características a ser asignado a una etiqueta, y asumiendo una cantidad de etiquetas total K , la regla que “explica” la etiqueta $k \in \{1, \dots, K\}$ queda definida por:

$$R_k : IF x_1 \text{ is } \bar{\mathbf{A}}_1^{(k)} AND x_2 \text{ is } \bar{\mathbf{A}}_2^{(k)} AND \dots AND x_d \text{ is } \bar{\mathbf{A}}_d^{(k)} THEN y \text{ is } \bar{\mathbf{B}}^{(k)}, \quad (4.69)$$

donde $\{\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}\}_{i=1,\dots,d}$ son CDs definidos para las variables de entrada, asociados a la etiqueta k ; $\bar{\mathbf{B}}^{(k)}$ es el CD definido para la variable de salida asociada a la etiqueta k , y es la variable de salida del sistema de LD.

La consulta del sistema de LD con este enfoque (es decir la obtención de un valor de salida dado un conjunto de valores de entrada), consiste en las siguientes etapas [Meschino, 2008]:

- **Fuzzificación:** Los valores $x_1, x_2, \dots, x_d$ de las entradas para un dato $\mathbf{x}$ (utilizadas en los antecedentes de las reglas) se transforman en pertenencias a los CDs $\{\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}\}_{i=1, \dots, d}$, con $k = 1, \dots, K$.
- **Implicación:** Se determina un CD como salida de cada regla, es decir, para cada posible etiqueta a asignar a $\mathbf{x}$.
- **Agregación:** Se combinan los CDs de salida de todas las reglas en un único CD.
- **Defuzzificación:** Se convierte el CD anterior en un valor para la variable de salida, el cual es un número en $\mathbb{R}$.

Como en este caso la variable de salida debería corresponder a una etiqueta, es decir, ser un valor en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, la etiqueta final a asignar al dato $\mathbf{x}$ se suele obtener como el número natural más próximo obtenido para el valor de la salida y en el sistema de inferencia difusa.

A diferencia del modelo difuso de Mamdani, el **modelo difuso de Sugeno** [Sugeno y Kang, 1988], conocido también como de Takagi–Sugeno–Kang, está basado en reglas cuyo consecuente no es una variable lingüística, sino una función lineal de las variables de entrada.

Considerando un dato de entrada $\mathbf{x} \in [-1, 1]^d$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ un vector de características a ser asignado a una etiqueta, con K la cantidad total de etiquetas, la regla que “explica” la etiqueta $k \in \{1, \dots, K\}$ queda definida por:

$$R_k : IF x_1 \text{ is } \bar{\mathbf{A}}_1^{(k)} \text{ AND } x_2 \text{ is } \bar{\mathbf{A}}_2^{(k)} \text{ AND } \dots \text{ AND } x_d \text{ is } \bar{\mathbf{A}}_d^{(k)} \text{ THEN } y_k = g_k(x_1, x_2, \dots, x_d), \quad (4.70)$$

donde $\{\bar{\mathbf{A}}_i^{(k)}\}_{i=1, \dots, d}$ son CDs definidos para las variables de entrada, asociados a la etiqueta k ; $\bar{\mathbf{B}}^{(k)}$ es el CD definido para la variable de salida asociada a la etiqueta k , y_k es el valor de la salida de la regla k para el dato de entrada $\mathbf{x}$ y $g_k : [-1, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ es una función que define la salida de la regla k .

En este modelo, cada regla R_k describe un subespacio difuso del espacio de entrada-salida a través de la función g_k . En estos subespacios, la pertenencia de un dato a ellos es un valor real en el intervalo $[0, 1]$, definido a través de las funciones de pertenencia de los CDs y las operaciones entre ellos. El valor de salida y para el dato $\mathbf{x}$ se obtiene como un promedio pesado de los valores $y_1, \dots, y_k$, de acuerdo al valor de verdad de los antecedentes. Al igual que en el modelo difuso de

Mamdani, la salida es un número real, por lo cual la etiqueta final a asignar al dato x se obtiene como el número natural más próximo al valor de salida y .

Pese a su uso extendido, tanto en aplicaciones generales de Reconocimiento de Patrones [Comas *et al.*, 2011b; Melin y Castillo, 2013] como en aplicaciones específicas en segmentación de imágenes médicas, las operaciones utilizadas en la consulta de los sistemas de LD basados en modelos de inferencia están formadas por una combinación pragmática de operadores sin un vínculo axiomático claro, siendo su salida una variable continua que toma valores en $\mathbb{R}$ [Comas *et al.*, 2014c; Meschino *et al.*, 2015a].

Las características anteriores dificultan la interpretación de la forma en que las variables de entrada se combinan en el sistema de LD mediante las reglas de inferencia y también cómo debe interpretarse la salida para tomar una decisión, es decir, definir la etiqueta a asignar a un dato [Comas *et al.*, 2014c]. Sumado a esto, en el caso de utilizar LD tipo 2 de intervalos, los algoritmos de defuzzificación existentes [Liang y Mendel, 2000; Mendel, 2001; Mendel, 2007b] para los modelos difusos de Mamdani tienen un elevado costo computacional, que dificulta su aplicación práctica a la segmentación de imágenes en problemas reales; donde cada píxel da origen a un vector de datos, originando que, aun para imágenes pequeñas, el costo computacional sea demasiado alto.

4.4.2 Sistemas de Lógica Difusa basados en predicados difusos

A diferencia de los modelos de Mamdani y de Takagi-Sugeno-Kang, los modelos basados en predicados se presentan como una extensión natural de la Lógica *Booleana*. Los predicados “explican” las etiquetas a obtener mediante una combinación lógica de los diferentes atributos que un dato debe cumplir para ser asignado a una determinada etiqueta. Mediante el uso de los operadores lógicos de conjunción, disyunción y complemento (presentados en la Sección 4.2.4) se define el valor de verdad con el cual cada dato pertenece a cada etiqueta.

En [Meschino, 2008] se presenta el uso de sistemas de LD basados en predicados difusos para la segmentación de IRM, operando con LD tipo 1; y se propone el enfoque basado en predicados como un enfoque más apropiado para el Reconocimiento de Patrones que el tradicional enfoque basado en modelos de inferencia [Comas *et al.*, 2014c; Meschino *et al.*, 2008; Meschino *et al.*, 2015a].

En el enfoque basado en predicados difusos, un sistema de LD para Reconocimiento de Patrones está formado por CDs, funciones de pertenencia y predicados difusos. Generar el sistema de LD consiste en definir apropiadamente las funciones de pertenencia, que describen para cada

característica los atributos que permiten discriminar adecuadamente cada una de las etiquetas, y predicados difusos, que expresan lógicamente las relaciones entre los diferentes atributos para cada etiqueta [Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012; Meschino, 2008].

En el resto de esta Sección se definirán formalmente los conceptos relacionados a la lógica de predicados difusos y al uso de los sistemas de LD basados en ésta para Reconocimiento de Patrones. Dada la referencia habitual que se hará a este tipo de sistemas de LD, en adelante, en esta Tesis los sistemas de LD basados en predicados difusos serán referidos para mayor simplicidad como sistemas difusos.

El análisis que sigue se dividirá en dos secciones, una para los sistemas difusos con LD tipo 1 y otra para los sistemas difusos con LD tipo 2 de intervalos. Para este último caso, se presentará el problema de la necesidad de comparar intervalos de valores de verdad, que es uno de los problemas abordados en la Tesis. El desarrollo detallado de este problema será presentado en el Capítulo 5, cuando se presente el método propuesto en esta Tesis para comparar y ordenar intervalos de valores de verdad mediante el concepto propuesto llamado **medida de intervalos de valores de verdad**.

4.4.2.1. Sistemas de Lógica Difusa tipo 1 basados en predicados difusos

DEFINICIÓN 4.43: Un **predicado difuso tipo 1** p es una expresión lingüística (una proposición) con grado de verdad $\nu(p) \in [0,1]$. Este concepto aplica el principio de gradualidad de la LD, el cual considera que enunciado puede ser tanto verdadero como falso, teniendo algún grado de verdad (o falsedad) asignado [Meschino, 2008; Zadeh, 1965, 1975].

DEFINICIÓN 4.44: Dos predicados difusos tipo 1 p y q son **equivalentes**, esto es $p \equiv q$, si y sólo si:

$$\nu(p) = \nu(q). \quad (4.71)$$

DEFINICIÓN 4.45: Un **predicado difuso tipo 1 simple** es un predicado difuso cuyo grado de verdad puede ser obtenido desde una función de pertenencia tipo 1, la cual habitualmente es definida utilizando conocimiento experto o métodos de extracción de conocimiento a partir de datos.

A partir de la interpretación de los CDs y las funciones de pertenencia presentada en la Sección 4.2.3, para un CD tipo 1 $\tilde{A}$ con función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$, el **predicado difuso tipo 1 simple** asociado a $\tilde{A}$, es el predicado notado como $p_{\tilde{A}}$ o $p_{\mu_{\tilde{A}}}$ definido como:

$$p_{\tilde{A}}, p_{\mu_{\tilde{A}}} : \text{"El valor } x = u \text{ de la variable lingüística satisface el atributo asociado al CD } \tilde{A} \text{ ",}$$

o más simplemente:

$$p_{\tilde{A}}, p_{\mu_{\tilde{A}}} : \text{"La variable } x \text{ satisface el atributo asociado al CD } \tilde{A} \text{"};$$

y, por lo tanto:

$$\nu(p_{\tilde{A}}(u)) = \nu(p_{\mu_{\tilde{A}}}(u)) = \mu_{\tilde{A}}(u), u = x. \quad (4.72)$$

Por ejemplo, considerando un CD tipo 1 $\tilde{A}$ asociado a la variable difusa “nivel de gris medio”, el predicado difuso simple $p_{\tilde{A}}$ es lingüísticamente equivalente a:

$$p_{\tilde{A}} : \text{"El nivel de gris } x \text{ es un nivel de gris medio"},$$

o más simplemente:

$$p_{\tilde{A}} : \text{"El nivel de gris } x \text{ es medio"}.$$

DEFINICIÓN 4.46: Un **predicado difuso tipo 1 compuesto** es un predicado difuso tipo 1 obtenido por combinación lógica de predicados difusos tipo 1 simples u otros predicados difusos tipo 1 compuestos, conectados lógicamente por operadores tales como “Y” ($\wedge$), “O” ($\vee$) o “NO” ($\neg$).

DEFINICIÓN 4.47: Los predicados difusos tipo 1 compuestos pueden ser representados por una **estructura de árbol**, teniendo sus nodos asociados a conectivos lógicos y las sucesivas ramas relacionadas a predicados difusos en niveles inferiores de jerarquía [Zadeh, 1975].

Para calcular el valor de verdad de los predicados difusos tipo 1 compuestos, se utilizan los operadores difusos de conjunción, disyunción y complemento definidos en la Sección 4.2.4 (Definiciones 4.29 a 4.33), aplicados sobre los valores de verdad de los predicados intervinientes en la expresión lógica del predicado difuso tipo 1 compuesto.

Por ejemplo, considerando dos CDs tipo 1 $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ asociados, respectivamente, a las variables difusas “nivel de gris medio” y “nivel de gris brillante”; un predicado compuesto p : “El nivel de gris de un pixel es medio o es brillante” es lógicamente equivalente a la disyunción de los predicados difusos simples $p_{\tilde{A}}$ y $p_{\tilde{B}}$, es decir: $p \equiv p_{\tilde{A}} \vee p_{\tilde{B}}$, y por lo tanto:

$$\nu(p(u)) = \nu(p_{\tilde{A}}(u) \vee p_{\tilde{B}}(u)) = D(\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)), u = x$$

donde $D: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una disyunción difusa que cumple la Definición 4.30.

DEFINICIÓN 4.48: Un **modificador** (en inglés *hedge*) es una operación que hace variar el significado de un término en un predicado difuso, o el nombre de un CD. Por ejemplo, si se considera el predicado “El nivel de gris x es brillante”, entonces los predicados “El nivel de gris x es muy brillante”, “El nivel de gris x es más o menos brillante” o “El nivel de gris x es extremadamente

brillante” hacen usos de modificadores aplicados sobre el término “*brillante*”, que puede ser cuantificado por un CD.

Algunos de los modificadores de uso más extendido son el de concentración y el de dilatación, pero otros pueden ser considerados [Dubois y Prade, 1985; Meschino, 2008]. Los modificadores de concentración y de dilatación se definen a continuación:

DEFINICIÓN 4.49: Sea p un predicado difuso tipo 1. Un **modificador de concentración** aplicado sobre p define un nuevo predicado difuso, notado como p_{con} , con valor de verdad:

$$\nu(p_{con}) = (\nu(p))^n. \quad (4.73)$$

Por ejemplo:

$$\nu(\text{“El nivel de gris } x \text{ es muy brillante”}) = (\nu(\text{“El nivel de gris } x \text{ es brillante”}))^2,$$

$$\nu(\text{“El nivel de gris } x \text{ es extremadamente brillante”}) = (\nu(\text{“El nivel de gris } x \text{ es brillante”}))^4.$$

DEFINICIÓN 4.50: Sea p un predicado difuso tipo 1. Un **modificador de dilatación** aplicado sobre p define un nuevo predicado difuso, notado como p_{dil} , con valor de verdad:

$$\nu(p_{dil}) = (\nu(p))^{1/n}. \quad (4.74)$$

Por ejemplo:

$$\nu(\text{“El nivel de gris } x \text{ es más o menos brillante”}) = (\nu(\text{“El nivel de gris } x \text{ es brillante”}))^{1/2},$$

$$\nu(\text{“El nivel de gris } x \text{ es algo brillante”}) = (\nu(\text{“El nivel de gris } x \text{ es brillante”}))^{1/4}.$$

A partir de todas las definiciones anteriores, un sistema difuso basado en LD tipo 1 se define y se consulta como se detalla a continuación:

Sistema difuso basado en LD tipo 1: Definición y método de consulta

DEFINICIÓN 4.51: Un **sistema difuso basado en LD tipo 1 utilizado para clasificación o agrupamiento de datos** está formado por un conjunto de K predicados difusos compuestos $\{p_k\}_{k=1,\dots,K}$ y funciones de pertenencia tipo 1 $\{\mu_{i,k}\}_{\substack{i=1,2,\dots,d \\ k=1,2,\dots,K}}$, donde d es la dimensión del espacio de características. Dependiendo del tipo de aplicación, cada p_k puede ser interpretado como $p_k(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ es de la clase k ” o $p_k(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ pertenece al cluster k ”; describiendo a

cada una de las etiquetas. Dado un nuevo dato $\mathbf{x} \in [-1,1]^d$ a ser asignado a una etiqueta, el **método de consulta** consiste en:

- 1) Calcular los valores de verdad de los K predicados compuestos $\{p_k(\mathbf{x})\}_{k=1,\dots,K}$, usando las funciones de pertenencia del sistema difuso y operadores difusos, dando como resultado un conjunto de valores de verdad $\{v(p_k(\mathbf{x}))\}_{k=1,\dots,K}$, los cuales son números en $[0,1]$.
- 2) Asignar al dato $\mathbf{x}$ la etiqueta que corresponde al predicado difuso con **mayor valor de verdad**, es decir, asignar la etiqueta $k' \in \{1,\dots,K\}$ donde $p_{k'}$ es tal que:

$$v(p_{k'}(\mathbf{x})) = \max \{v(p_k(\mathbf{x}))\}_{k=1,\dots,K}. \quad (4.75)$$

Los operadores difusos utilizados son típicamente definidos y ajustados de acuerdo a cada problema particular, y seleccionados entre los presentados en las Secciones 4.2.3 y 4.3 de este Capítulo. Los resultados variarán dependiendo de la selección de los operadores difusos.

En la Figura 4.4 se presenta un diagrama de la metodología para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 1.

4.4.2.2. Sistemas de Lógica Difusa tipo 2 de intervalos basados en predicados difusos

En esta Sección, se definen los predicados difusos tipo 2 de intervalos y a partir de éstos se establecen los sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos. Este tipo de sistemas difusos constituye el enfoque utilizado en esta Tesis para la segmentación de imágenes. Referencias bibliográficas a estos conceptos pueden ser consultadas, entre otros, en los trabajos previos propios [Comas *et al.*, 2014a; Comas *et al.*, 2014b; Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2014c].

Las definiciones relacionadas a los predicados difusos tipo 2 de intervalos, y sus operaciones asociadas, son extendidas directamente de aquéllas definidas en la Sección 4.4.2.1 para los predicados difusos tipo 1.

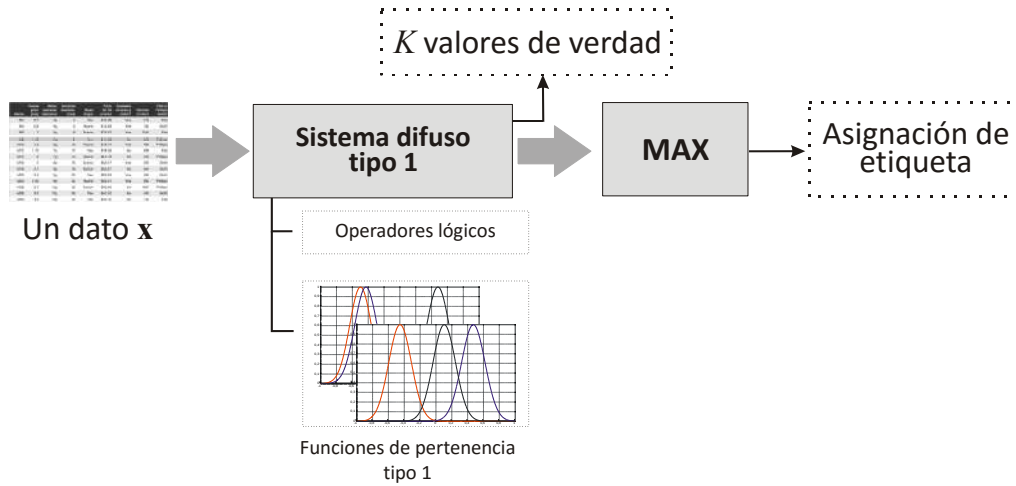


Figura 4.4. Método de consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 1 para la clasificación y el agrupamiento de datos.

Dado un dato x a ser asignado a una etiqueta, se evalúan todos los predicados difusos obteniendo K valores de verdad (uno por etiqueta). El dato x es etiquetado considerando la etiqueta representada por el predicado con mayor valor de verdad.

DEFINICIÓN 4.52: Un **predicado difuso tipo 2 de intervalos** p es una expresión lingüística (una proposición) con un **valor de verdad representado por un intervalo de valores de verdad**, esto es $v(p) = A_p = [a_{p,L}, a_{p,R}]$, $0 \leq a_{p,L} \leq a_{p,R} \leq 1$.

DEFINICIÓN 4.53: Dos predicados difusos tipo 2 de intervalos p y q , con valores de verdad $v(p) = A_p = [a_{p,L}, a_{p,R}]$, $0 \leq a_{p,L} \leq a_{p,R} \leq 1$ y $v(q) = A_q = [a_{q,L}, a_{q,R}]$, $0 \leq a_{q,L} \leq a_{q,R} \leq 1$, son **equivalentes**, esto es $p \equiv q$, si y sólo si:

$$v(p) = A_p = v(q) = A_q. \quad (4.76)$$

Es decir, los intervalos de valores de verdad A_p y A_q son iguales en términos de la Definición 4.15, esto es:

$$a_{p,L} = a_{q,L} \quad \wedge \quad a_{p,R} = a_{q,R}. \quad (4.77)$$

DEFINICIÓN 4.54: Un **predicado difuso simple tipo 2 de intervalos** es un predicado difuso tipo 2 de intervalos cuyo valor de verdad puede obtenerse a partir de una función de pertenencia tipo 2 de intervalos, habitualmente definida mediante conocimiento experto o por métodos de extracción de conocimiento a partir de datos.

Al igual que en el caso de los predicados difusos tipo 1 presentados en la Sección 4.4.2.1, considerando la interpretación de los CDs y las funciones de pertenencia presentada en la Sección 4.2.3 para un CD tipo 2 de intervalos $\bar{A}$ con función de pertenencia $\bar{\mu}_{\bar{A}}$, el **predicado difuso simple tipo 2 de intervalos** asociado a $\bar{A}$, es el predicado notado como $p_{\bar{A}}$ o $p_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}$ definido como:

$p_{\bar{A}}, p_{\bar{\mu}_{\bar{A}}} : \text{“El valor } x = u \text{ de la variable lingüística satisface el atributo asociado al CD } \bar{A} \text{”},$

o más simplemente:

$p_{\bar{A}}, p_{\bar{\mu}_{\bar{A}}} : \text{“La variable } x \text{ satisface el atributo asociado al CD } \bar{A} \text{”};$

y, por lo tanto:

$$\nu(p_{\bar{A}}(u)) = \nu(p_{\bar{\mu}_{\bar{A}}}(u)) = \mu_{\bar{A}}(u), u = x. \quad (4.78)$$

DEFINICIÓN 4.55: Un **predicado difuso compuesto tipo 2 de intervalos** es un predicado difuso tipo 2 de intervalos obtenido por combinación lógica de predicados difusos tipo 2 de intervalos simples o compuestos, conectados lógicamente por operadores tales como “Y” ($\wedge$), “O” ($\vee$) o “NO” ($\neg$).

DEFINICIÓN 4.56: Los predicados difusos compuestos tipo 2 de intervalos pueden ser representados por una **estructura de árbol**, teniendo sus nodos asociados a conectivos lógicos y las sucesivas ramas relacionadas a predicados difusos en niveles inferiores de jerarquía [Zadeh, 1975].

Para calcular el valor de verdad de los predicados difusos tipo 2 de intervalos compuestos se utilizan los operadores difusos de conjunción, disyunción y complemento definidos en la Sección 4.2.4 (Definiciones 4.29 a 4.33), aplicados separadamente sobre los extremos de los intervalos de valores de verdad que representan los valores de verdad de los predicados intervinientes en la expresión lógica del predicado compuesto [Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012]. Con esta consideración la conjunción, disyunción y complemento de predicados difusos Tipo 2 de Intervalos se define a continuación:

DEFINICIÓN 4.57: El valor de verdad de la **conjunción** entre los predicados difusos tipo 2 de intervalos p y q , notada por $p \wedge q$, donde $\nu(p) = A_p = [a_{p,L}, a_{p,R}]$, $0 \leq a_{p,L} \leq a_{p,R} \leq 1$ y $\nu(q) = A_q = [a_{q,L}, a_{q,R}]$, $0 \leq a_{q,L} \leq a_{q,R} \leq 1$, es un nuevo intervalo de valores de verdad definido por:

$$\nu(p \wedge q) = [C(a_{p,L}, a_{q,L}), C(a_{p,R}, a_{q,R})]. \quad (4.79)$$

donde $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una conjunción difusa que cumple la Definición 4.29.

DEFINICIÓN 4.58: El valor de verdad de la **disyunción** entre los predicados difusos tipo 2 de intervalos p y q , notada por $p \vee q$, donde $\nu(p) = A_p = [a_{p,L}, a_{p,R}]$, $0 \leq a_{p,L} \leq a_{p,R} \leq 1$ y $\nu(q) = A_q = [a_{q,L}, a_{q,R}]$, $0 \leq a_{q,L} \leq a_{q,R} \leq 1$, es un nuevo intervalo de valores de verdad definido por:

$$\nu(p \vee q) = [D(a_{p,L}, a_{q,L}), D(a_{p,R}, a_{q,R})]. \quad (4.80)$$

donde $D: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una disyunción difusa que cumple la Definición 4.30.

DEFINICIÓN 4.59: El valor de verdad del **complemento** del predicado difuso tipo 2 de intervalos p , notado por $\neg p$, donde $\nu(p) = A_p = [a_{p,L}, a_{p,R}]$, $0 \leq a_{p,L} \leq a_{p,R} \leq 1$, es un nuevo intervalo de valores de verdad definido como:

$$\nu(\neg p) = [c(a_{p,R}), c(a_{p,L})]. \quad (4.81)$$

donde $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$ es un complemento difuso que cumple la Definición 4.31.

DEFINICIÓN 4.60: Un **modificador** (*hedge*) es una operación que hace variar el significado de un término en un predicado difuso, o el nombre de un CD.

Los **modificadores de concentración** y de **dilatación** para predicados difusos tipo 2 de intervalos se definen a continuación [Dubois y Prade, 1985; Meschino, 2008]:

DEFINICIÓN 4.61: Sea p un predicado difuso tipo 2 de intervalos, con valor de verdad $\nu(p) = A_p = [a_{p,L}, a_{p,R}]$, $0 \leq a_{p,L} \leq a_{p,R} \leq 1$. Un **modificador de concentración** aplicado sobre p define un nuevo predicado difuso, notado como p_{con} , con valor de verdad:

$$\nu(p_{con}) = [(a_{p,L})^n, (a_{p,R})^n]. \quad (4.82)$$

DEFINICIÓN 4.62: Sea p un predicado difuso tipo 2 de intervalos, con valor de verdad $\nu(p) = A_p = [a_{p,L}, a_{p,R}]$, $0 \leq a_{p,L} \leq a_{p,R} \leq 1$. Un **modificador de dilatación** aplicado sobre p define un nuevo predicado difuso, notado como p_{dil} , con valor de verdad:

$$\nu(p_{dil}) = [(a_{p,L})^{1/n}, (a_{p,R})^{1/n}]. \quad (4.83)$$

A partir de todas las definiciones anteriores, un sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos se define como:

Sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos: Definición

DEFINICIÓN 4.63: Un **sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos utilizado para clasificación o agrupamiento de datos** está formado por un conjunto de K predicados difusos $\{p_k\}_{k=1,\dots,K}$ y funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{\substack{i=1,2,\dots,d \\ k=1,2,\dots,K}}$, donde d es la dimensión del espacio de características. Dependiendo del tipo de aplicación, cada p_k puede ser interpretado como

$p_k(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ es de la clase k ” o $p_k(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ pertenece al cluster k ”; describiendo a cada una de las etiquetas.

Extendiendo el método utilizado para los sistemas difusos basados en LD tipo 1, al usar LD tipo 2 de intervalos con predicados difusos, para asignar una etiqueta a un dato $\mathbf{x} \in [-1,1]^d$ es necesario comparar los intervalos de valores de verdad resultantes de evaluar los predicados, para determinar cuál tiene el mayor valor de verdad [Comas *et al.*, 2014b; Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012]. Como se mencionó, dicha comparación debe poder realizarse entre cualesquiera intervalos de valores de verdad que pueden resultar de la evaluación de un sistema difuso. Esto significa que el método que se utilice en la comparación debe ser tal que permita establecer un orden entre los intervalos de valores de verdad, ordenando en todos los casos los intervalos resultantes de la consulta al sistema difuso. Hasta el momento del desarrollo de esta Tesis, no fue desarrollada una metodología que permita establecer tal orden entre intervalos.

El problema anterior es uno de los principales problemas abordados. **A partir del trabajo realizado en esta Tesis, que redundo en la propuesta de un método para comparar y ordenar intervalos de valores de verdad a partir del concepto propuesto de medida de intervalo de valores de verdad; se alcanza una solución completa a la determinación del predicado difuso con mayor valor de verdad al utilizar sistemas difusos con LD tipo 2 de intervalos.** La metodología formal propuesta, la cual constituye uno de los principales aportes de esta Tesis es presentada en la Sección 5.2 del próximo Capítulo, junto con el resto de los métodos propuestos.

Capítulo 5: Métodos propuestos

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Capítulo 5: Métodos propuestos

5.1. Introducción

Como se ha mencionado a lo largo de esta Tesis, la esencia de la LD es el **principio de gradualidad** [Zadeh, 1965], según el cual una expresión puede ser tanto verdadera como falsa. A partir de este principio, la LD se presenta como una herramienta ideal para modelar el conocimiento expresado de forma lingüística. Esto es porque, tanto al expresar conocimiento como al razonar, para los seres humanos las expresiones no son ni totalmente verdaderas ni totalmente falsas, sino que tienen un cierto grado de veracidad o falsedad [Zadeh, 1975; Zadeh, 1989, 2008]. En este sentido, la LD permite modelar formalmente los mecanismos que utilizan los seres humanos para conversar, razonar y tomar decisiones en ambientes de información imprecisa e incierta [Zadeh, 2008].

La segmentación de imágenes biomédicas constituye un importantísimo campo de aplicación de modelos basados en LD. En este campo, sistemas difusos son utilizados para identificar píxeles o regiones que representan estructuras anatómicas o regiones de particular interés; definiendo una etiqueta para cada uno y obteniendo como resultado una imagen segmentada [Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2008; Meschino *et al.*, 2015a]. En el Capítulo 2 se discutió la importancia de la segmentación de imágenes en el campo biomédico.

En el enfoque habitual, los sistemas difusos utilizados en segmentación de imágenes están formados por CDs y predicados difusos [Comas *et al.*, 2012], los cuales son definidos a partir de conocimiento experto. Es decir, un experto en el campo del cual las imágenes provienen explica cuáles son las variables o características (y sus atributos asociados) que deben analizarse para discriminar adecuadamente cada uno de los tejidos o regiones anatómicas de interés y cómo estas variables se relacionan en cada caso.

Dada su relevancia para esta Tesis y a fin de dar mayor claridad al uso de los sistemas difusos en segmentación y cómo éstos se definen a partir de conocimiento experto, a continuación se presenta un ejemplo detallado de la segmentación de los tejidos presentes en IRM de cerebro utilizando sistemas de LD tipo 2 de intervalos [Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2008].

Ejemplo 5.1: Segmentación de IRM de cerebro utilizando sistemas difusos

La segmentación de IRM de cerebro constituye un problema de suma importancia que permite, entre otros, el análisis de lesiones y la identificación de patrones de atrofia de las distintas enfermedades neurodegenerativas. La cuantificación de la presencia de MG, MB y LCR permite analizar cambios a lo largo del tiempo, lo cual facilita la detección de anomalías y la detección temprana de patologías [Courchesne *et al.*, 2000; Ge *et al.*, 2002; Meschino, 2008]. En el Capítulo 2 se presentó en detalle la importancia de este tipo de segmentación.

Para la cuantificación de las diferentes sustancias, es común que los especialistas utilicen IRM en secuencias T1, T2 y PD; analizando visualmente los valores de gris de las imágenes y asociándolos con las diferentes sustancias presentes. Para mayor claridad, un ejemplo típico de IRM de cerebro es mostrado en la Figura 5.1. Así, al consultar al especialista respecto a cuáles rasgos analiza en las distintas secuencias para determinar a qué tipo de sustancia corresponde cada píxel, pueden obtenerse descripciones lingüísticas típicas como las que siguen [Meschino, 2008]:

- “La MG se percibe muy brillante en la imagen PD, oscura o gris en la imagen T1 y brillante en la imagen T2”;
- “La MB se percibe brillante en la imagen PD, brillante en la imagen T1 y oscura o gris en la imagen T2”;
- “El LCR se percibe blanco en la imagen PD, muy oscuro en la imagen T1 y blanco en la imagen T2”.

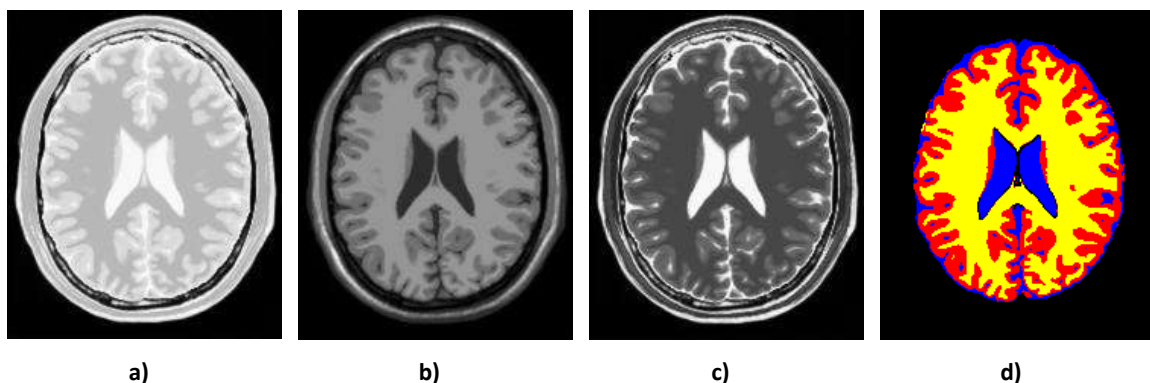


Figura 5.1. Ejemplo típico de IRM de cerebro.

El objetivo es la segmentación de la imagen determinando píxeles que corresponden a MG (rojo), MB (amarillo) y LCR (azul).

a) IRM en secuencia PD. **b)** IRM en secuencia T1. **c)** IRM en secuencia T2. **d)** Segmentación *Gold-Standard*.

En este ejemplo puede analizarse el principal aporte de la LD: a partir de las descripciones lingüísticas dadas por el especialista, la LD brinda mecanismos que permiten reproducir el razonamiento seguido por éste para la clasificación en las distintas sustancias.

Mediante CDs, los niveles de gris de las imágenes PD, T1 y T2 pueden asociarse a los términos (atributos) “*muy oscuro*”, “*oscuro*”, “*gris*”, “*brillante*”, “*muy brillante*” y “*blanco*” que fueron usados por el especialista en su descripción. En una segunda etapa de la consulta al especialista, pueden preguntarse cuáles niveles de gris considera que satisfacen cada uno de los atributos que él mencionó previamente y con qué valor de verdad los hacen; definiendo de esta manera funciones de pertenencia. En la Figura 5.2 se muestran ejemplos de los CDs tipo 2 de intervalos que podrían definirse con ayuda del especialista para este caso, los CDs son: MUY OSCURO, OSCURO, GRIS, BRILLANTE, MUY BRILLANTE y BLANCO.

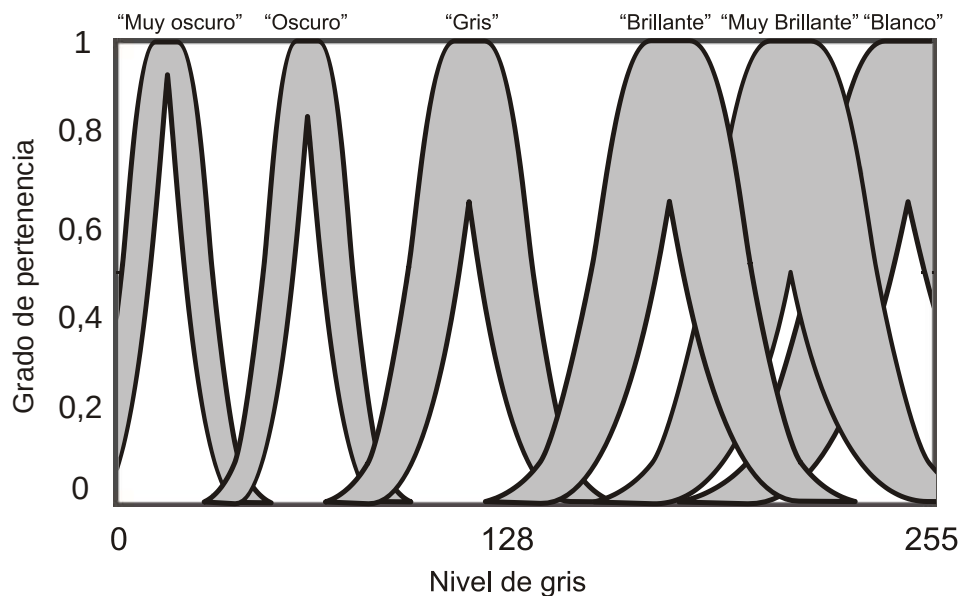


Figura 5.2. CDs tipo 2 de intervalos para el análisis de IRM de cerebro, utilizando secuencias PD, T1 y T2.

Las funciones de pertenencia se definen a partir del conocimiento de especialista. Se relacionan los rasgos que éste observa en los niveles de gris de las imágenes al tener que hacer una segmentación visual de las IRM. Dado un nivel de gris particular, puede obtenerse un valor de verdad para evaluar su pertenencia a cada CD, el cual es un intervalo de valores de verdad.

Dado un nivel gris específico, las funciones de pertenencia cuantifican con qué valor de verdad ese nivel de gris es “*muy oscuro*”, “*oscuro*”, “*gris*”, “*brillante*”, “*muy brillante*” y “*blanco*”, es decir, cuál es el grado de pertenencia de la característica “*nivel de gris*” (que es una variable lingüística) a cada uno de los CDs definidos. Dado que en este ejemplo se consideran CDs valuados en intervalos, los grados de pertenencia son intervalos de valores de verdad. Por ejemplo, el nivel de gris 128 (que coincide con la mitad de la escala de niveles de gris de las imágenes del ejemplo) pertenece al CD GRIS con grado de pertenencia $[0,2, 0,95]$; lo cual es equivalente a decir que el valor de verdad de un predicado difuso q : “*La intensidad del píxel es gris*” es $[0,2, 0,95]$.

Aprovechando el desarrollo de este ejemplo, es preciso aclarar en este punto un aspecto que fue señalado precedentemente. En algunos casos se podría disponer o podría ser necesaria la consulta a más de un especialista; con el fin de obtener la mayor cantidad de información

posible respecto al proceso que se sigue para discriminar cada una de las sustancias. En tal situación, si se usara LD tipo 1 debería buscarse un consenso entre las opiniones de los diferentes especialistas, de acuerdo a alguno de los siguientes criterios:

- definir un único grado de pertenencia para cada nivel de gris de la escala, buscando el acuerdo de los distintos especialistas;
- utilizar más de un CD (más de una función de pertenencia) para describir un mismo atributo del nivel de gris, definiendo un conjunto de CDs según la opinión de cada especialista y combinando luego estas opiniones con ayuda de operadores de la LD.

En [Meschino *et al.*, 2015a] se proponen y discuten soluciones relacionadas a estos dos criterios. Esta situación corresponde al concepto de incertidumbre explicado a lo largo de esta Tesis. Como se discutió previamente, la LD tipo 2 de intervalos, o LD valuada en intervalos, no exige un total consenso a la hora de combinar opiniones de distintos especialistas en un mismo modelo computacional. Esta característica hace de este tipo de LD una solución adecuada al modelar conocimiento de más de un especialista [Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2011c; Comas *et al.*, 2014c; Melin y Castillo, 2013; Mendel, 2007b].

Utilizando las descripciones lingüísticas del especialista, pueden definirse predicados difusos, uno para cada sustancia, de la siguiente manera (los conectores lógicos se muestran en **negrita**):

- $p_{\text{Materia Gris}}$: “El píxel es MG” es equivalente a “El píxel es muy brillante en la imagen PD **Y** es oscuro **O** gris en la imagen T1 **Y** es brillante en la imagen T2”;
- $p_{\text{Materia Blanca}}$: “El píxel es MB” es equivalente a “El píxel es brillante en la imagen PD **Y** es brillante en la imagen T1 **Y** es oscuro **O** gris en la imagen T2”;
- $p_{\text{Líquido Cefalorraquídeo}}$: “El píxel es LCR” es equivalente a “El píxel es blanco en la imagen PD **Y** es muy oscuro en la imagen T1 **Y** es blanco en la imagen T2”.

Como se mencionó en el Capítulo 4, los CDs, y sus funciones de pertenencia asociadas, definen predicados difusos simples que asocian, a través de un valor de verdad, el valor que toma una variable con los atributos vinculados a los CDs. Para el caso del ejemplo, pueden definirse como p_A , p_B , p_C , p_D , p_E y p_F respectivamente a los predicados difusos simples definidos por los CDs MUY OSCURO, OSCURO, GRIS, BRILLANTE, MUY BRILLANTE y BLANCO; para el nivel de gris de una secuencia de IRM. Los predicados compuestos que describen cada sustancia pueden reescribirse en función de los predicados difusos simples anteriores como:

$$p_{\text{Materia Gris}} \equiv p_E \wedge (p_B \vee p_C) \wedge p_D, \quad (5.1)$$

$$p_{\text{Materia Blanca}} \equiv p_D \wedge p_D \wedge (p_B \vee p_C), \quad (5.2)$$

$$p_{\text{Líquido Cefalorraquídeo}} \equiv p_F \wedge p_A \wedge p_F. \quad (5.3)$$

Con el método descripto, el conocimiento aportado por el médico especialista, expresado por medio de descripciones lingüísticas, permite definir con herramientas de la LD funciones de pertenencia y predicados difusos. Las funciones de pertenencia relacionan los valores de una variable analizada, en este ejemplo el nivel de gris de un píxel, con atributos; definiendo el grado en que éstos se satisfacen. Los predicados implementan en forma lógica las relaciones entre variables y atributos puestas de manifiesto por el especialista en su explicación. Las funciones de pertenencia y los predicados difusos constituyen el sistema difuso.

En la consulta al sistema difuso, dado un píxel $\mathbf{x}$ que se quiera etiquetar como perteneciente a alguna de las sustancias de interés, se analizan los niveles de gris de las secuencias PD, T1 y T2 en ese píxel, resultando en vectores de características de 3 componentes. El valor de verdad de los predicados $p_{\text{Materia Gris}}$, $p_{\text{Materia Blanca}}$ y $p_{\text{Líquido Cefalorraquídeo}}$ para el píxel $\mathbf{x}$, es decir los valores de verdad de los predicados $p_{\text{Materia Gris}}(\mathbf{x})$, $p_{\text{Materia Blanca}}(\mathbf{x})$ y $p_{\text{Líquido Cefalorraquídeo}}(\mathbf{x})$, se calculan utilizando operadores de la LD (conjunciones y disyunciones) y las funciones de pertenencia de la Figura 5.2, las cuales definen los valores de verdad de los predicados difusos simples. De esta manera, se obtienen los valores de verdad $v(p_{\text{Materia Gris}}(\mathbf{x}))$, $v(p_{\text{Materia Blanca}}(\mathbf{x}))$ y $v(p_{\text{Líquido Cefalorraquídeo}}(\mathbf{x}))$; que, dado el tipo de LD utilizada para este ejemplo, están representados por intervalos de valores de verdad. Como se explicó el Capítulo 4, la clasificación final se realiza conociendo cuál es la sustancia correspondiente al máximo valor de verdad entre $v(p_{\text{Materia Gris}}(\mathbf{x}))$, $v(p_{\text{Materia Blanca}}(\mathbf{x}))$ y $v(p_{\text{Líquido Cefalorraquídeo}}(\mathbf{x}))$, lo cual requiere la comparación de intervalos de valores de verdad. En la Sección 2 de este mismo Capítulo se presenta el método propuesto en esta Tesis para realizar dicha comparación.

Este ejemplo busca ilustrar, partiendo de una aplicación concreta en segmentación de imágenes médicas, la generación a partir de conocimiento experto de un sistema difuso y la capacidad de la LD para modelar e implementar computacionalmente conocimiento expresado lingüísticamente.

Una vez generado el sistema difuso, las funciones de pertenencia modelan el grado en que los valores de una variable cumplen las condiciones que, a criterio del especialista, son determinantes para discriminar adecuadamente las diferentes etiquetas. Las expresiones lógicas que rigen la relación entre la satisfacción individual de atributos por parte de las características y la correspondencia de este suceso con una etiqueta son expresadas mediante predicados difusos, los cuales son directamente extraídos de las descripciones lingüísticas.

Se han logrado excelentes resultados en segmentación de imágenes con sistemas difusos basados en predicados, generados a partir de conocimiento de especialistas [Comas *et al.*, 2011c;

Melin y Castillo, 2013; Meschino *et al.*, 2006a; Meschino *et al.*, 2008]. Concretamente en [Meschino, 2008] se realiza un análisis completo del uso de sistemas de LD tipo 1 para la segmentación de IRM y se propone el uso de sistemas basados en predicados difusos como un enfoque más apropiado para el Reconocimiento de Patrones con LD que el tradicional enfoque de sistemas basados en inferencia difusa [Comas *et al.*, 2014c; Meschino *et al.*, 2008; Meschino *et al.*, 2015a].

Pese a esta enorme capacidad de la LD para modelar conocimiento, en muchos casos, el conocimiento necesario para generar el sistema difuso no está disponible [Meschino *et al.*, 2015a]. En general, sólo se dispone de algunos ejemplos de la segmentación o clasificación deseada, algunos píxeles preclasificados como *Gold Standard*; sin ninguna información adicional en forma de descripciones lingüísticas que permita definir funciones de pertenencia o predicados. En otros casos, tampoco se dispone del *Gold Standard*. En estas condiciones, el uso de sistemas difusos, pese al potencial desempeño y rapidez que éstos pueden tener, no es posible.

Desde un punto de vista inverso a la metodología tradicional en el cual los sistemas difusos se generan a partir del conocimiento de uno o más especialistas, el conocimiento necesario para generar el sistema difuso podría extraerse directamente de los datos a etiquetar. Existen métodos que permiten la extracción de manera automática del conocimiento oculto en datos, utilizando como elemento central técnicas tradicionales de Reconocimiento de Patrones. Estos métodos forman parte de una disciplina llamada **descubrimiento de conocimiento en bases de datos** (KDD, del inglés *Knowledge Discovery in Databases*) [Fayyad *et al.*, 1996; Maimon y Rokach, 2010].

El KDD se define como [Fayyad *et al.*, 1996]: “*el proceso no trivial de identificar patrones válidos, novedosos, potencialmente útiles y en última instancia comprensibles, a partir de datos*”. De acuerdo al proceso de KDD, los datos son seleccionados, preprocesados y luego transformados en nuevos datos (vectores de características); factibles de analizarse en una etapa de Reconocimiento de Patrones. Como salida de esta última etapa, se obtienen patrones o modelos, es decir, elementos relevantes/representativos del problema bajo estudio. Mediante un procesamiento posterior, se interpreta la información extraída, generando conocimiento.

Con base en el concepto de KDD y en el éxito de métodos propios y de otros trabajos; uno de los **problemas abordados en esta Tesis se orienta hacia el desarrollo de métodos para la generación automática de sistemas difusos a partir de datos, con o sin información previa respecto a la segmentación esperada y con especial énfasis en sistemas que usen LD tipo 2 de intervalos** [Comas *et al.*, 2014b; Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2013; Meschino *et al.*, 2015a]. El desarrollo de tales métodos permite:

- explotar las ventajas de la LD incluso cuando no se dispone de conocimiento de especialistas acerca del problema, principalmente aquellas relacionadas al desempeño y rapidez de la LD en Reconocimiento de Patrones;
- descubrir conocimiento oculto contenido en los datos, explotando las capacidades de interpretación de los sistemas difusos generados automáticamente, al permitir analizar los atributos y relaciones difusas encontradas.

Se proponen algoritmos para generar automáticamente a partir de datos sistema difusos, que permiten descubrir patrones, realizando además la segmentación de la imagen. El sistema difuso obtenido automáticamente constituirá el modelo para el problema abordado, del cual se extrae mediante análisis posteriores conocimiento expresado, por ejemplo, lingüísticamente. En la Figura 5.3 se muestra un esquema general del KDD [Fayyad *et al.*, 1996] y se indica el área dentro de éste en el que intervienen los métodos propuestos en esta Tesis.

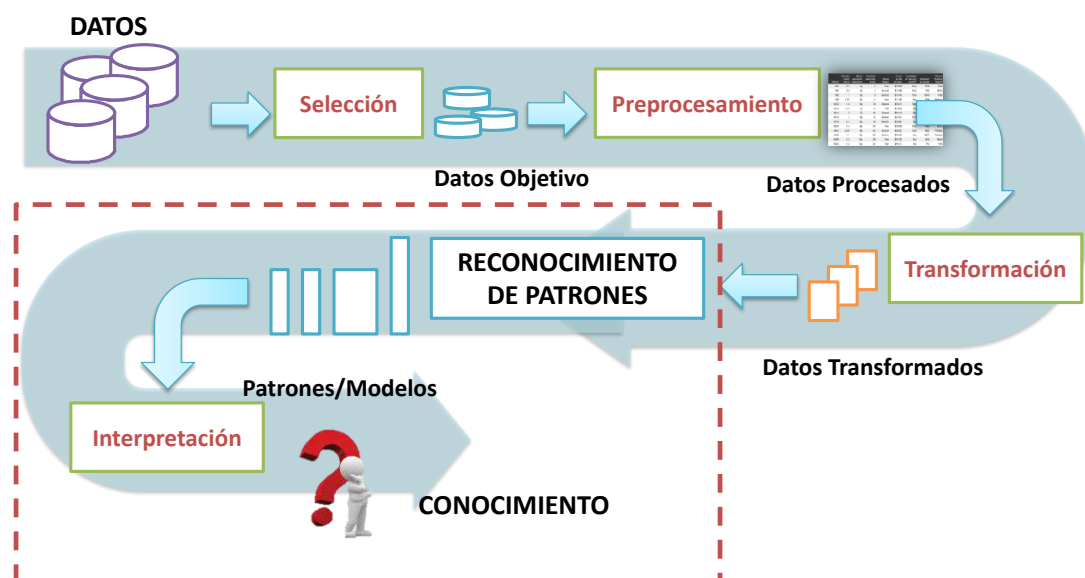


Figura 5.3. Esquema general del proceso del KDD.

Los datos son seleccionados, preprocesados y luego transformados en nuevos datos (características) ingresados a una etapa de Reconocimiento de Patrones. Como salida se obtienen patrones o modelos representativos. Posteriormente se interpreta la información extraída obteniendo conocimiento.

El recuadro rojo indica el área dentro del proceso de KDD que se ha abordado con los métodos propuestos en esta Tesis. A partir de datos, se genera automáticamente un sistema difuso que permite descubrir patrones y que constituye un modelo del problema abordado, del que se extrae conocimiento en forma de expresiones lingüísticas.

A su vez, y con igual relevancia que la generación automática de sistemas difusos a partir de datos, **otro de los problemas abordados en esta Tesis es el desarrollo de un método para la consulta de sistemas difusos basados en predicados con LD tipo 2 de intervalos** (o LD valuada en intervalos), problemática que fue explicada en el Capítulo 4. **Se propone en esta Tesis una solución completa para evaluar globalmente intervalos de valores de verdad, definiendo un orden para cualesquiera dos o más intervalos según su valor de verdad y proponiendo el concepto de**

medida de intervalos de valores de verdad [Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012]. Esta metodología permite resolver la asignación de clases o *clusters* para la segmentación de imágenes en particular, y para el Reconocimiento de Patrones en general, en sistemas difusos que utilicen predicados y LD tipo 2 de intervalos.

Respecto al desarrollo de **métodos de generación automática de sistemas difusos a partir de datos**, en esta Tesis se estudian esencialmente dos enfoques, proponiendo para cada uno de ellos los siguientes métodos:

- **Clasificación de datos.** Se propone el método *Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T2-LPFC), el cual es un método supervisado, que permite generar un sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos y predicados difusos a partir de datos previamente etiquetados (*Gold Standard*) [Comas *et al.*, 2014b].
- **Agrupamiento de datos.** Para los casos en que no se dispone de información previa sobre el resultado esperado (no se dispone del *Gold Standard*), se proponen dos métodos no supervisados: el *Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-DPFC) [Comas *et al.*, 2014a; Comas *et al.*, 2015b], donde se extraen prototipos de *cluster* a partir de datos con los que se genera el sistema difuso; y el *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-SPFC), en el cual se utilizan SOM para la extracción de prototipos de *cluster* [Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2013].

Para todos los métodos de generación automática propuestos se implementaron y analizaron métodos análogos que utilizan LD tipo 1, con el fin de avanzar en pruebas que permitan comparar los resultados de la aplicación de la LD tipo 1 y la LD tipo 2 de intervalos, y **confirmar la hipótesis propuesta en esta Tesis**. Estos métodos se denominan respectivamente: *Type-1 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T1-LPFC), análogo al T2-LPFC y basado en datos previamente etiquetados; *Type-1 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T1-DPFC), análogo al T2-DPFC; y *Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T1-SPFC), análogo al T2-SPFC.

Además de resolver el problema de segmentación de imágenes, las técnicas desarrolladas brindan esencialmente conocimiento que explica con expresiones lingüísticas cómo fue resuelto el problema de segmentación. Las características esenciales de los métodos de generación automática propuestos son: a) el sistema difuso es generado automáticamente a partir de datos, por lo que no es necesario conocimiento de especialistas, y b) el conocimiento es automáticamente descubierto e implementado por medio del sistema difuso. Esta última característica puede aportar nuevo conocimiento al especialista médico respecto al tipo de imágenes estudiadas, o al problema de segmentación, lo que puede significar un aporte sustancial al estudio y la solución de problemas con imágenes biomédicas, lo cual podría contribuir a la mejora y optimización de las técnicas de diagnóstico y detección de patologías usando imágenes.

Si bien esta Tesis está orientada a la aplicación de sistemas difusos en segmentación de imágenes médicas, **las metodologías propuestas aquí pueden ser utilizadas en cualquier problema de Reconocimiento de Patrones**, lo cual constituye un aporte adicional y significativo de esta Tesis.

En el resto de este Capítulo se presentan todos los nuevos métodos y enfoques propuestos en esta Tesis para dar solución a los problemas abordados. En primer lugar, se analiza el problema de ordenar intervalos de valores de verdad y se presenta la medida propuesta con el fin de extender los sistemas difusos basados en predicados para su uso con LD tipo 2 de intervalos. En la Sección siguiente, la cual se encuentra subdividida para mayor claridad, se explican con sumo detalle los métodos de generación automática propuestos, para sistemas difusos tanto basados en LD tipo 2 de intervalos como en LD tipo 1. Se comienza por un análisis de las consideraciones generales de cómo describir una clase o un *cluster* a partir de un conjunto de datos prototipo, para luego presentar los métodos de generación automática, realizar algunas consideraciones generales respecto a la selección de sus parámetros y, finalmente, abordar la extracción de conocimiento desde los sistemas difusos obtenidos. En el final del Capítulo se presentan y explican las medidas y métodos de validación empleados en el análisis de los resultados, el cual será presentado en el Capítulo 6.

Debido al uso frecuente de los términos *clase* y *cluster*, cuya diferencia ya fue presentada en el Capítulo 3; al igual que se hizo en el Capítulo 4, cuando se presenten casos y análisis que se apliquen tanto a clases como a *clusters* se utilizará en su lugar la palabra etiqueta, entendiendo que un dato con una etiqueta puede ser un dato que: o bien corresponde o es de una clase determinada, o corresponde o pertenece a un determinado *cluster*.

5.2. Orden de intervalos de valores de verdad

5.2.1 Planteo del problema y estado de la cuestión

La aritmética de intervalos y su relación con la LD son áreas de investigación activa desde finales de los años cincuenta y principio de los sesenta [Markov y Okumura, 1999; Moore y Lodwick, 2003; Moore, 1966, 1979]. En [Sengupta y Pal, 2000] se presenta una revisión bibliográfica de los métodos existentes para comparar intervalos, principalmente con enfoques orientados a la optimización y a la selección en base a preferencias, tanto en aplicaciones de LD como de modelos probabilísticos.

En LD aplicada al Reconocimiento de Patrones, que es el enfoque de interés para esta Tesis, los intervalos representan la posibilidad de modelar gran imprecisión e incertidumbre en la

especificación de los valores de verdad, esto es, esencialmente, a la hora de definir las funciones de pertenencia [Mendel, 2007b; Sengupta y Pal, 2000; Zadeh, 1975]. De esta manera, los intervalos de valores de verdad se presentan como uno de los mejores recursos para modelar imprecisión e incertidumbre al representar conocimiento, brindando grados adicionales de libertad respecto a la LD tipo 1 [Comas *et al.*, 2011c; Comas *et al.*, 2014c]. Específicamente, al presentarse incertidumbre al combinar opiniones de más de un experto, los intervalos de valores de verdad se presentan como una excelente alternativa, permitiendo definir intervalos que modelan la máxima y mínima valoración entre las diferentes opiniones, generando funciones de pertenencia valuadas en intervalos.

El uso de predicados difusos en combinación con LD tipo 2 de intervalos tiene una limitación: requiere definir un procedimiento para comparar los intervalos de valores de verdad resultantes al evaluar los predicados, que permita definir cuál de ellos tiene mayor valor de verdad [Comas *et al.*, 2014b; Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012]. Este problema es íntegramente abordado en el resto de esta Sección.

La extensión de las operaciones de la LD a intervalos de valores de verdad es directa, a través del principio de extensión de Zadeh [Mendel y John, 2002; Zadeh, 1975], y ha sido completamente desarrollada en el Capítulo 4. A su vez, las operaciones entre intervalos, tales como suma, resta, multiplicación, entre otras; se realizan siguiendo consideraciones similares a las utilizadas al operar lógicamente entre intervalos, es decir, se opera directamente entre los extremos de los intervalos. Como la aritmética de intervalos no es de interés concreto en esta Tesis, y sí lo es la comparación de intervalos, los conceptos y definiciones dados en el resto de esta Sección serán referidos con exclusividad a la comparación de intervalos. Sin embargo pueden consultarse los trabajos de [Moore, 1966; Sengupta y Pal, 2000; Sengupta *et al.*, 2001] como referencias a aritmética de intervalos.

Existen en la bibliografía algunos órdenes para intervalos, los cuales satisfacen distintas propiedades y establecen órdenes parciales, enfocándose en el orden de preferencias, esto es, en la selección entre dos intervalos en términos de la preferencia entre uno y otro y no en una cuestión estricta de obtener un orden o *ranking* de acuerdo al valor representado por cada uno de los intervalos. Tal es el caso de los enfoques propuestos por: Moore [Moore, 1979], Ishibuchi y Tanaka [Ishibuchi y Tanaka, 1990] y Kundu [Kundu, 1997]. En contraste, el llamado **índice de aceptabilidad**, presentado y analizado en [Sengupta y Pal, 2000], es un índice para ordenar intervalos en términos del valor que representan que es aplicado principalmente al ámbito de toma de decisiones. En este ámbito, los intervalos representan, por ejemplo, rangos de variables como costo, consumo, riesgo, ganancia, entre otras; y quien toma la decisión debe seleccionar una entre las diferentes opciones que se le presentan, buscando minimizar (enfoque pesimista) o maximizar (enfoque optimista) las variables estudiadas [Sengupta y Pal, 2000].

Estos órdenes, definidos originalmente sobre intervalos, podrían ser utilizados para ordenar intervalos de valores de verdad en sistemas difusos para Reconocimiento de Patrones. Sin embargo, estos enfoques existentes tienen algunas limitaciones que serán analizadas a continuación en detalle.

Para simplificar el análisis y unificar la notación, primero se definirán conceptos básicos de aritmética de intervalos y, posteriormente, se analizarán los órdenes existentes. Dado el enfoque seguido en esta Sección, todos los conceptos serán orientados a su aplicación a intervalos de valores de verdad. Los intervalos serán representados por letras mayúsculas A , B , etc. Los conceptos introductorios referidos a intervalos de valores de verdad presentados en el Capítulo 4 son retomados aquí, con el fin de dar las siguientes definiciones formales para intervalos **de valores de verdad** [Comas *et al.*, 2012; Sengupta y Pal, 2000]:

DEFINICIÓN 5.1: Un intervalo de valores de verdad es un intervalo $A = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_R, a \in [0, 1]\}$, donde a_L es el límite inferior del intervalo y a_R es el límite superior del intervalo.

DEFINICIÓN 5.2: (Número real) Si $a_L = a_R = a$, entonces el intervalo $A = [a, a] = a$ representa a un número real en $[0, 1]$. En este caso, no existe incertidumbre alrededor del valor de verdad representado por el intervalo, siendo éste el caso en que el valor de verdad puede representarse mediante un número, como en LD tipo 1.

DEFINICIÓN 5.3: (Igualdad entre intervalos) Dos intervalos de valores de verdad A y B son iguales si y sólo si:

$$a_L = b_L \wedge a_R = b_R. \quad (5.4)$$

Esta definición establece la igualdad entre A y B formalmente en términos matemáticos, pero no establece la igualdad entre los intervalos en cuanto al valor de verdad que éstos representan.

DEFINICIÓN 5.4: (Representación alternativa) Un intervalo de valores de verdad A , tal como fue definido en la Definición 5.1, puede ser alternativamente representado como $A = \langle m(A), w(A) \rangle$, donde $m(A)$ es el valor medio del intervalo A y $w(A)$ es el ancho mitad [Sengupta y Pal, 2000], según:

$$m(A) = \frac{1}{2}(a_L + a_R), \quad (5.5)$$

$$w(A) = \frac{1}{2}(a_R - a_L). \quad (5.6)$$

El orden de intervalos de valores de verdad, abordado en esta Sección, puede replantearse de la siguiente manera: **establecer un orden entre intervalos de valores de verdad consiste en definir una metodología que permita ordenar cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad según el valor de verdad que éstos representan.**

Una condición importante derivada del planteo anterior es que debe exigirse al orden de intervalos de valores de verdad que se utilice en sistemas difusos ser capaz de establecer un orden entre intervalos ante cualquiera de los siguientes posibles tres casos (ver Figura 5.4):

- **Caso A: intervalos no solapados**, donde dos intervalos A y B cumplen $a_R < b_L$.
- **Caso B: intervalos parcialmente solapados**, donde dos intervalos A y B cumplen que $a_L < b_L$ y $b_L \leq a_R < b_R$.
- **Caso C: intervalos completamente solapados**, donde dos intervalos A y B cumplen que $a_L \geq b_L$ y $a_R \leq b_R$. Pensando los intervalos como conjuntos, puede decirse que en este caso se cumple $A \subseteq B$ [Moore, 1979].

El caso $b_R < a_L$ es similar al Caso A, intercambiado A y B , por lo cual no aporta ninguna modificación al análisis que se busca realizar aquí.

El análisis anterior se realizó considerando la comparación de dos intervalos, pero su extensión a la comparación de más de dos es inmediata.

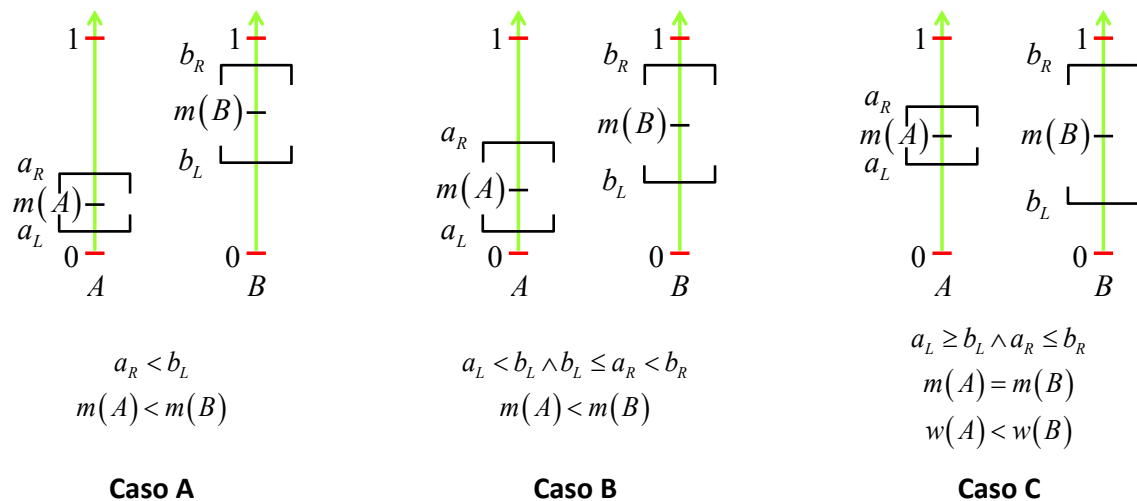


Figura 5.4. Posibles casos que pueden presentarse al comparar intervalos de valores de verdad.

Caso A: intervalos no solapados; Caso B: intervalos parcialmente solapados; Caso C: intervalos completamente solapados.

Pensando en que A y B son intervalos de valores de verdad, los Casos A y B se engloban en la condición en la cual $a_L < b_L \wedge a_R < b_R$ y, como puede verse en la Figura 5.4, para estos casos

$m(A) < m(B)$ y $a_R < b_R$; por lo que puede concluirse que en estos casos el resultado debería ser que A es menor a B .

El criterio a adoptar para resolver el Caso C requiere un análisis más complejo. En particular, el ejemplo del Caso C presentado en la Figura 5.4 representa un caso de suma importancia para la comparación de intervalos de valores de verdad: $m(A) = m(B)$ y $w(A) < w(B)$, es decir, un intervalo está incluido en el otro y ambos tienen igual valor medio, pero el intervalo B contiene una mayor imprecisión o incertidumbre en la definición del valor de verdad. La cuestión que se plantea en este caso es: cuál de los dos representa mayor valor de verdad ya que ambos tienen igual valor medio y el intervalo B , si bien tiene un valor máximo mayor al de A , representa un valor de verdad de mayor imprecisión o incertidumbre que el que representa A , pues $w(B) > w(A)$.

Considerando el ejemplo de la Figura 5.4 para el Caso C, al decidir cuál intervalo A o B representa mayor valor de verdad, pueden utilizarse dos enfoques:

- **Enfoque A:** considerar que un intervalo que tiene mayor precisión, es decir, menor rango, ante iguales valores medios representa uno de mayor valor de verdad global, eligiendo entonces el intervalo A ;
- **Enfoque B:** considerar que un intervalo que tiene mayor valor del límite superior (ante iguales valores medios) es uno que representa mayor valor de verdad global, eligiendo entonces el intervalo B .

Ambos enfoques, tanto el A como el B, son válidos al comparar intervalos de valores de verdad y la preferencia hacia uno u otro depende fuertemente del tipo de problemática que se esté abordando. En principio, una metodología que se utilice para ordenar intervalos de valores de verdad según el valor de verdad global que éstos representan, debería poder considerar alternativamente el uso de uno u otro enfoque. Esta es una segunda condición a tener en cuenta al definir una metodología para ordenar intervalos de valores de verdad.

Habiendo realizado el planteo general del problema de comparar intervalos de valores de verdad, a continuación, se presentan y analizan los principales órdenes para intervalos presentes en la literatura.

DEFINICIÓN 5.5: (Orden de Moore) [Moore, 1979; Sengupta y Pal, 2000] Dos intervalos de valores de verdad A y B pueden ordenarse extendiendo la relación de orden " $<$ " en $\mathbb{R}$, según:

$$A < B \text{ si y sólo si } a_R < b_L. \quad (5.7)$$

El orden de Moore contempla solamente el Caso A detallado anteriormente, es decir, sólo sirve para intervalos no solapados, por lo cual esta solución no establece un orden para cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad y, por tanto, no cumple las condiciones deseadas para una metodología que ordene intervalos de valores de verdad.

DEFINICIÓN 5.6: (Orden #1 de Ishibuchi y Tanaka) [Ishibuchi y Tanaka, 1990] Dos intervalos de valores de verdad A y B pueden ordenarse de acuerdo a la relación de orden $\leq_{LR}$, definida como sigue:

$$A \leq_{LR} B \text{ si y sólo si } a_L \leq b_L \wedge a_R \leq b_R. \quad (5.8)$$

$$A <_{LR} B \text{ si y sólo si } A \leq_{LR} B \wedge A \neq B. \quad (5.9)$$

El orden #1 de [Ishibuchi y Tanaka, 1990] sólo contempla los Casos A y B antes mencionados, sin ser capaz de ordenar dos intervalos completamente solapados (Caso C). Por lo tanto, este orden no permite ordenar cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad, no pudiéndose aplicar al problema de interés en esta Tesis.

Adicional al dado en la Definición 5.6, Ishibuchi y Tanaka proponen un segundo orden:

DEFINICIÓN 5.7: (Orden #2 de Ishibuchi y Tanaka) [Ishibuchi y Tanaka, 1990] Dos intervalos de valores de verdad A y B pueden ordenarse de acuerdo a la relación de orden $\leq_{mw}$ como sigue:

$$A \leq_{mw} B \text{ si y sólo si } m(A) \leq m(B) \wedge w(A) \geq w(B). \quad (5.10)$$

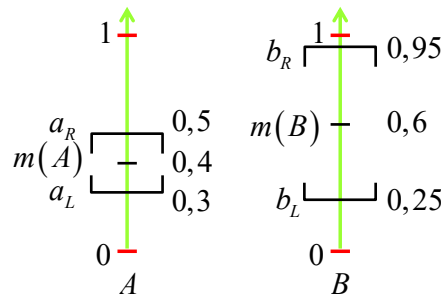
$$A <_{mw} B \text{ si y sólo si } A \leq_{mw} B \wedge A \neq B. \quad (5.11)$$

Los órdenes #1 y #2 de Ishibuchi y Tanaka (Definiciones 5.6 y 5.7) constituyen relaciones de orden anti simétricas, reflexivas y transitivas; que definen órdenes parciales [Sengupta *et al.*, 2001].

El orden #2 de [Ishibuchi y Tanaka, 1990] puede aplicarse, a diferencia del #1, al Caso C; es decir, para intervalos completamente solapados. Este orden aplica el Enfoque B detallado anteriormente: considera que un intervalo que tiene mayor valor del límite superior (ante iguales valores medios) es uno que representa mayor valor de verdad global. En particular, para el ejemplo dado en la Figura 5.4 para el Caso C, se cumple: $m(A) = m(B)$ y $w(A) < w(B)$, tal como está indicado en dicha Figura. Como $m(A) = m(B)$ y $w(A) < w(B)$, las condiciones para asegurar $A \leq_{mw} B$ no se cumplen, por lo tanto tampoco puede decirse que $A <_{mw} B$; pero si la recíproca, es decir, $B <_{mw} A$. De acuerdo con la Definición 5.7, como $m(A) = m(B)$, $w(A) < w(B)$ (condiciones de la Ecuación (5.10)) y $A \neq B$.

Pese a estas limitaciones, podría hacerse un uso combinado de $\leq_{LR}$ y $\leq_{mw}$, utilizando $\leq_{LR}$ cuando los intervalos a comparar cumplan las condiciones de los Casos A o B y $\leq_{mw}$ cuando cumplan las condiciones del Caso C. Sin embargo, pese a que *a priori* esta combinación cubriría todos los casos posibles, estos dos órdenes combinados no permiten ordenar cualesquiera dos intervalos de valores de verdad. Concretamente, existen ejemplos del Caso C donde $\leq_{LR}$ no puede aplicarse y $\leq_{mw}$ no puede establecer un orden. Considérense por ejemplo dos intervalos de valores de verdad $A = [0,3;0,5]$ y $B = [0,25;0,95]$ totalmente solapados (Caso C), cuya representación se presenta en la Figura 5.5 y para los cuales: $a_L = 0,3 > b_L = 0,25$, $a_R = 0,5 < b_R = 0,95$, $m(A) = 0,4 < m(B) = 0,6$ y $w(A) = 0,1 < w(B) = 0,35$. Para este ejemplo, de acuerdo a la Definición 5.7, se puede observar que:

- no puede establecerse que $A \leq_{mw} B$, pues $m(A) \leq m(B)$ pero $w(A) < w(B)$;
- tampoco puede establecerse que $B \leq_{mw} A$, pues $m(B) > m(A)$.



$$\begin{aligned}
 a_L &= 0,3 \geq b_L = 0,25 \\
 a_R &= 0,5 \leq b_R = 0,95 \\
 m(A) &= 0,4 < m(B) = 0,6 \\
 w(A) &= 0,1 < w(B) = 0,7
 \end{aligned}$$

Figura 5.5. Representación de los intervalos de valores de verdad $A = [0,3;0,5]$ y $B = [0,25;0,95]$. Los intervalos A y B están completamente solapados y corresponden al Caso C. Para este ejemplo, el uso combinado de los órdenes #1 y #2 de Ishibuchi y Tanaka no permite determinar si $A = B$, $A < B$ o $B < A$.

El ejemplo anterior demuestra que la combinación de los órdenes propuestos por Ishibuchi y Tanaka ($\leq_{LR}$ y $\leq_{mw}$) no permiten ordenar cualesquiera dos intervalos de valores de verdad, por lo que no pueden ser aplicadas en la consulta de sistemas difusos basados en predicados y LD tipo 2 de intervalos.

Sengupta *et al.* presentan el llamado **índice de aceptabilidad**, el cual permite comparar intervalos tomados de a dos y es aplicado principalmente en el ámbito de toma de decisiones. El mismo se presenta a continuación [Sengupta y Pal, 2000; Sengupta *et al.*, 2001]:

DEFINICIÓN 5.8: Sea $\triangleleft$ una relación de orden extendida sobre los intervalos $A = [a_L, a_R]$ y $B = [b_L, b_R]$, entonces para el caso $m(A) \leq m(B)$ se construye la premisa $A \triangleleft B$, la cual implica que A es menor que B (B es mayor que A).

DEFINICIÓN 5.9: Sea $\chi = \xi([0,1])$ el conjunto de todos los posibles intervalos de valores de verdad, donde $\xi([0,1])$ representa al conjunto de todos los intervalos cerrados incluidos en el intervalo cerrado $[0,1]$, se define una **función de aceptabilidad** $\Lambda: \chi \times \chi \rightarrow [0, +\infty)$, tal que $\Lambda(A \triangleleft B)$ queda definida como:

$$\Lambda(A \triangleleft B) = \frac{m(B) - m(A)}{w(A) + w(B)}, \quad (5.12)$$

donde $w(A) + w(B) \neq 0$, se había asumido que $m(A) \leq m(B)$, y $\Lambda(A \triangleleft B)$ puede ser interpretado como el **índice de aceptabilidad** de la premisa de que A es menor que B , el cual es un índice transitivo. Los diferentes valores que toma $\Lambda(A \triangleleft B)$ para diferentes intervalos A y B pueden analizarse como sigue [Sengupta y Pal, 2000; Sengupta *et al.*, 2001]:

- $\Lambda(A \triangleleft B) = 0$, entonces $m(A) = m(B)$ para cualesquiera $w(A)$ y $w(B)$ y la premisa es rechazada;
- $0 < \Lambda(A \triangleleft B) < 1$, entonces $m(A) < m(B)$ y $a_R > b_L$ y la premisa es parcialmente satisfecha;
- $\Lambda(A \triangleleft B) > 1$, entonces $m(A) < m(B)$ y $a_R \leq b_L$ y la premisa es completamente satisfecha.

Es importante realizar algunas observaciones. Para cualesquiera dos intervalos A y B de acuerdo al **índice de aceptabilidad** presentado en [Sengupta y Pal, 2000; Sengupta *et al.*, 2001]: $\Lambda(A \triangleleft B) > 0$, $\Lambda(B \triangleleft A) > 0$ o $\Lambda(A \triangleleft B) = \Lambda(B \triangleleft A) = 0$. De esta manera:

- Si $\Lambda(A \triangleleft B) > 0$, entonces $\Lambda(B \triangleleft A) < 0$ y $m(A) < m(B)$, por lo cual en este caso se establecería que $A < B$.
- Si $\Lambda(A \triangleleft B) < 0$, entonces $\Lambda(B \triangleleft A) > 0$ y $m(A) > m(B)$, por lo cual en este caso se establecería que $B < A$.
- Sin embargo, si $\Lambda(A \triangleleft B) = \Lambda(B \triangleleft A) = 0$, entonces no se puede asegurar que $A = B$, sino sólo que $m(A) = m(B)$, por lo cual este índice no permite ordenar intervalos de valores de verdad con igual valor medio.

Como se deduce de los párrafos anteriores, ninguno de los órdenes de intervalos presentados y existentes en la bibliografía permite definir un orden para cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad, es decir, para todos los posibles intervalos de valores de verdad. Desde el punto de vista de sistemas difusos aplicados al Reconocimiento de Patrones, poder ordenar cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad es una característica necesaria que permitiría asignar etiquetas a cualquier dato que se aplique al sistema difuso, cualesquiera sean los intervalos de valores de verdad resultantes de la evaluación de los predicados. Asimismo, y como ya se mencionó, sería deseable que el método utilizado para ordenar intervalos de valores de verdad permita, de acuerdo al problema, preferir ante iguales valores medios: el intervalo de menor rango (lo que se había presentado como Enfoque A) o el intervalo de mayor rango (lo que se había presentado como Enfoque B).

A partir de todas las consideraciones analizadas, en la siguiente Sección **se proponen los conceptos de orden entre intervalos de valores de verdad y de medida de intervalos de valores de verdad**, ambos desarrollos de esta Tesis, para finalmente presentar el método propuesto para el uso de LD tipo 2 de intervalos en sistemas difusos basados en predicados, el cual constituye un importante aporte a la LD solucionando el orden entre intervalos de valores de verdad.

5.2.2 Orden entre intervalos de valores de verdad: Conceptos y métodos propuestos

Partiendo de las consideraciones analizadas en la Sección anterior, respecto a las condiciones necesarias para una metodología que se utilice para ordenar intervalos de valores de verdad que sea aplicada a sistemas difusos que utilicen predicados difusos y LD tipo 2 de intervalos, en este Tesis se propone definir dicha metodología como sigue:

DEFINICIÓN 5.10: Una **metodología para ordenar intervalos de valores de verdad** o, más simplemente, un **orden entre intervalos de valores de verdad** debe ser tal que cumpla las siguientes propiedades:

- i. Orden para todos los posibles intervalos de valores de verdad: esto es, para cualesquiera dos intervalos de valores de verdad $A = [a_L, a_R]$ y $B = [b_L, b_R]$, la relación de orden debe definir un mecanismo que permita determinar si $A < B$, $A > B$ o $A = B$ en términos de su valor de verdad.
- ii. Orden cuando los intervalos son números reales: Si $A = [a, a] = a$ y $B = [b, b] = b$ entonces el orden obtenido entre A y B debe ser tal que: $A < B$ si y sólo si $a < b$, $B < A$ si y sólo si $b < a$ y $A = B$ si y sólo si $a = b$.

- iii. Propiedad transitiva: Sean $A=[a_L, a_R]$, $B=[b_L, b_R]$ y $C=[c_L, c_R]$ intervalos de valores de verdad, si de acuerdo a la relación de orden se cumple que $A < B$ y $B < C$, entonces se cumple que $A < C$.
- iv. Condición entre intervalos de igual rango: Si $w(A) = w(B)$ y $m(A) < m(B)$ entonces el orden obtenido debe ser $A < B$.
- v. Orden para los Casos A y B: Si $A=[a_L, a_R]$ y $B=[b_L, b_R]$ y se cumple $a_L < b_L$ y $a_R < b_R$, es decir, los intervalos A y B no se solapan o se solapan en forma parcial; entonces el orden obtenido debe resultar $A < B$.
- vi. Orden de intervalos de igual valor medio: Si $m(A) = m(B)$ y $w(A) < w(B)$ entonces o bien el orden resulta $A < B$ (Enfoque A) o bien $B < A$ (Enfoque B).

Estas propiedades son las que se proponen en esta Tesis como necesarias para un método que sea utilizado para la comparación de intervalos de valores de verdad en la aplicación de predicados difusos y LD tipo 2 de intervalos. Como se ha mencionado previamente, ninguna de los órdenes existentes en la bibliografía y revisadas en la Sección 5.2.1 satisface en forma conjunta las condiciones (i) a (vi). Esencialmente, ninguna de ellas es capaz de definir un orden para cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad.

A continuación, se analizan las condiciones (i) a (vi) propuestas para un orden entre intervalos de valores de verdad.

La condición (ii) garantiza que, en el caso en que toda la incertidumbre en la definición del valor de verdad se vea reducida a cero, coincidiendo las funciones de pertenencia superior e inferior (Definición 4.19 y Propiedad 4.3), el agrupamiento o la clasificación obtenidos sea igual que el obtenido directamente mediante LD tipo 1. Esto tiene directa relación con el hecho de que la LD tipo 2 de intervalos surge como una extensión de la LD tipo 1, en la cual existe gran imprecisión e incertidumbre al definir los valores de verdad de las expresiones.

Las condiciones (iv) a (vi) exigen que el orden de intervalos de valores de verdad cumpla los criterios analizados antes en la Sección 5.2.1 cuando se analizaron los posibles casos que se podían presentar (los Casos A, B y C). En particular:

- La condición (iv) permite establecer que si dos intervalos de valores de verdad tienen la misma imprecisión e incertidumbre, la cual está representada por su rango o su rango mitad w , entonces el intervalo que representa un mayor valor de verdad es aquel que tiene mayor valor medio;

- La condición (v) define que se aplica el criterio previamente mencionado para los Casos A y B, es decir, en esos casos como $m(A) < m(B)$ y $a_R < b_R$, entonces $A < B$;
- La condición (vi), en cambio, abarca el Caso C (cuando ambos intervalos están completamente solapados) y establece que el orden resultante para este caso o bien adopta el Enfoque A o bien el Enfoque B, ambos explicados en la Sección previa.

Las condiciones (i) a (vi) dadas en la Definición 5.10 surgen de un análisis exhaustivo de los métodos existentes en la bibliografía para ordenar intervalos, de los cuales, los más relevantes fueron presentados en la Sección previa; y de la experiencia adquirida durante el desarrollo de esta Tesis, la cual resultó en la formulación de metodologías que satisfacen las condiciones dadas en la Definición 5.10, definiendo órdenes entre intervalos, y han permitido la utilización de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos en diversas aplicaciones [Comas *et al.*, 2014a; Comas *et al.*, 2014b; Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012]. Dichas metodologías y los conceptos relacionados a éstas se desarrollan y analizan a continuación.

DEFINICIÓN 5.11: (Función característica de un intervalo de valores de verdad) Sea $A = [a_L, a_R]$ un intervalo de valores de verdad, con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$, el cual define el valor de verdad de un predicado difuso evaluado con LD tipo 2 de intervalos; $\lambda^{x,y \in [a_L, a_R]}(A) = g(x, y)$ será una función que caracteriza al intervalo de valores de verdad A y $g: [a_L, a_R] \times [a_L, a_R] \rightarrow [0, +\infty)$ será una función llamada **función característica de un intervalo de valores de verdad** que satisface las siguientes condiciones:

- i. No negatividad: $g(x, y) \geq 0 \forall x, y \in [a_L, a_R]$.
- ii. Simetría: $g(x, y) = g(y, x) \forall x, y \in [a_L, a_R]$.
- iii. Crecimiento: Si $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$ entonces $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$ con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a_L, a_R]$.
- iv. Si $|y_1 - x_1| = |y_2 - x_2| \wedge x_1 + y_1 < x_2 + y_2 \Rightarrow g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$, con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a_L, a_R]$.
- v. Si $x_1 = y_1 = \alpha$ y $x_2 = y_2 = \beta$ y a su vez $\alpha < \beta$ con $\alpha, \beta \in [a_L, a_R]$ entonces $g(\alpha, \alpha) \leq g(\beta, \beta)$.
- vi. Si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \wedge |y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|$, entonces o bien $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$ o $g(x_1, y_1) > g(x_2, y_2)$, con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a_L, a_R]$.

A partir del concepto de función característica de un intervalo de valores de verdad propuesto en la Definición 5.11, a continuación, se proponen algunas de las funciones que satisfacen dicho concepto:

PROPOSICIÓN 5.1: *Las siguientes funciones satisfacen la Definición 5.11, siendo por lo tanto funciones características de intervalos de valores de verdad, con $x, y \in [a_L, a_R]$ y $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$:*

Función propuesta #1:

$$g(x, y) = \frac{x+y}{2} \sup(\{x, y\}), \quad (5.13)$$

Función propuesta #2:

$$g(x, y) = 0,5(1 - |y - x|) + 0,5 \sup(\{x, y\}), \quad (5.14)$$

Función propuesta #3:

$$g(x, y) = \delta \frac{x+y}{2} + (1 - \delta) \sup(\{x, y\}), \quad \delta \in [0, 1]. \quad (5.15)$$

A continuación, se realizará la demostración de la Proposición 5.1.

DEMOSTRACIÓN 5.1:

Función propuesta #1: $g(x, y) = \frac{x+y}{2} \sup(\{x, y\})$.

i. *No negatividad:* Como $x, y \in [a_L, a_R]$ y $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$, entonces puede verse que

$\forall (x, y) \in [a_L, a_R]^2$ siempre $\frac{x+y}{2} \geq 0$ y $\sup(\{x, y\}) \geq 0$, por lo tanto se cumple que

$$g(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in [a_L, a_R].$$

ii. *Simetría:* Puesto que tanto la suma como el supremo son operaciones simétricas y $x \geq 0, y \geq 0$, entonces $g(x, y) = g(y, x) \quad \forall x, y \in [a_L, a_R]$.

iii. *Ambos factores de $g(x, y)$ son crecientes.* Es decir, si $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$, con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a_L, a_R]$ y $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$, se verifica que:

$$0 \leq \frac{x_1 + y_1}{2} < \frac{x_2 + y_2}{2} \quad \wedge \quad \sup(\{x_1, y_1\}) < \sup(\{x_2, y_2\}) \quad \Rightarrow \quad g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2).$$

Con lo cual queda demostrado que $g(x, y)$ dada en la función #1 es creciente

$$\forall x, y \in [a_L, a_R] \text{ con } 0 \leq a_L \leq a_R \leq 1.$$

- iv. Si para $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a_L, a_R]$ se cumple que $|y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|$ y que $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ entonces:

$$g(x_1, y_1) = \frac{x_1 + y_1}{2} \sup(\{x_1, y_1\}) < g(x_2, y_2) = \frac{x_2 + y_2}{2} \sup(\{x_2, y_2\}),$$

pues $x_1 + y_1 < x_2 + y_2 \Rightarrow \frac{x_1 + y_1}{2} < \frac{x_2 + y_2}{2}$ y $\sup(\{x_1, y_1\}) < \sup(\{x_2, y_2\})$ pues $|y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|$.

Por lo cual en este caso se cumple $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$.

- v. Haciendo $x_1 = y_1 = \alpha$ y $x_2 = y_2 = \beta$ y $\alpha < \beta$, entonces $g(\alpha, \alpha) \leq g(\beta, \beta)$ pues:

$$\frac{\alpha + \alpha}{2} < \frac{\beta + \beta}{2} \wedge \sup(\{\alpha, \alpha\}) = \alpha < \beta = \sup(\{\beta, \beta\}).$$

- vi. Si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ y $|y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|$ el análisis debe realizarse para diferentes condiciones entre los valores de x_1, x_2, y_1, y_2 .

Si $x_1 < y_1 \wedge x_2 < y_2$ entonces en este caso $x_2 < x_1 < y_1 < y_2$, $\sup(\{x_1, y_1\}) = y_1$ y $\sup(\{x_2, y_2\}) = y_2$ con $y_1 < y_2$, por lo que $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$.

Con un análisis similar para los otros casos posibles: $y_1 < x_1 \wedge x_2 < y_2$, $x_1 < y_1 \wedge y_2 < x_2$ y $y_1 < x_1 \wedge y_2 < x_2$ puede comprobarse que se cumple $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$.

Por lo tanto, para $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ y $|y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|$, $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$.

Por lo tanto, queda demostrado que la función propuesta #1: $g(x, y) = \frac{x + y}{2} \sup(\{x, y\})$

cumple con las condiciones (i) a (vi) de la Definición 5.11 $\forall x, y \in [a_L, a_R]$ con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$ y, por lo tanto, es una función característica de un intervalo de valores de verdad.

Función propuesta #2: $g(x, y) = 0,5(1 - |y - x|) + 0,5 \sup(\{x, y\})$.

- i. No negatividad: Dado que $x, y \in [a_L, a_R]$ y $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$, el máximo valor que puede tomar $|y - x|$ es 1, para $(x, y) = (0, 1)$ o $(x, y) = (1, 0)$, por lo cual el término

$0,5(1-|y-x|) \geq 0$. Por la misma razón el término $0,5\sup(\{x,y\}) \geq 0$; con lo cual que cumple que $g(x,y) \geq 0$.

ii. *Simetría: Puesto que tanto $|y-x|$ como $\sup(\{x,y\})$ son operaciones simétricas, entonces la función propuesta #2 también es simétrica, es decir $g(x,y) = g(y,x) \forall x,y \in [a_L, a_R]$.*

iii. *Partiendo de la función propuesta #2 la demostración de esta propiedad se realiza analizando los posibles valores de x_1, x_2, y_1, y_2 para los cuales $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$:*

Caso I: $x_1 < x_2 < y_1 < y_2$:

$$g(x_1, y_1) = 0,5(1 - y_1 + x_1) + 0,5y_1 = 0,5 + 0,5x_1,$$

$$g(x_2, y_2) = 0,5(1 - y_2 + x_2) + 0,5y_2 = 0,5 + 0,5x_2.$$

Haciendo $g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)$:

$$g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1) = 0,5 + 0,5x_2 - (0,5 + 0,5x_1) = 0,5(x_2 - x_1) > 0 \text{ pues } x_1 < x_2 \text{ (I)}.$$

Caso II: $y_1 < x_1 < x_2 < y_2$:

$$g(x_1, y_1) = 0,5(1 - y_1 + x_1) + 0,5y_1 = 0,5 + 0,5y_1,$$

$$g(x_2, y_2) = 0,5(1 - y_2 + x_2) + 0,5y_2 = 0,5 + 0,5x_2.$$

Haciendo $g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)$:

$$g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1) = 0,5 + 0,5x_2 - (0,5 + 0,5y_1) = 0,5(x_2 - y_1) > 0 \quad \text{pues}$$

$$y_1 < x_1 < x_2 < y_2 \text{ (II)}.$$

Caso III: $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$:

$$g(x_1, y_1) = 0,5(1 - y_1 + x_1) + 0,5y_1 = 0,5 + 0,5x_1,$$

$$g(x_2, y_2) = 0,5(1 - x_2 + y_2) + 0,5x_2 = 0,5 + 0,5y_2.$$

Haciendo $g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)$:

$$g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1) = 0,5 + 0,5y_2 - (0,5 + 0,5x_1) = 0,5(y_2 - x_1) > 0 \quad \text{pues}$$

$$x_1 < y_1 < y_2 < x_2 \text{ (III)}.$$

Caso IV: $y_1 < y_2 < x_1 < x_2$:

$$g(x_1, y_1) = 0,5(1 - x_1 + y_1) + 0,5x_1 = 0,5 + 0,5y_1,$$

$$g(x_2, y_2) = 0,5(1 - x_2 + y_2) + 0,5x_2 = 0,5 + 0,5y_2.$$

Haciendo $g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)$:

$$g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1) = 0,5 + 0,5y_2 - (0,5 + 0,5y_1) = 0,5(y_2 - y_1) > 0 \quad \text{pues} \quad y_1 < y_2$$

(IV).

Con lo cual, en virtud de (I), (II), (III) y (IV) queda demostrado que $g(x, y)$ *definida según la función propuesta #2 es creciente* $\forall x, y \in [a_L, a_R]$ *con* $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.

iv. *Si para* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a_L, a_R]$ *se cumple que* $|y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|$ *y que* $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ *entonces también se cumple que* $\sup(\{x_1, y_1\}) < \sup(\{x_2, y_2\})$, *por lo cual* $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$.

v. *Haciendo* $x_1 = y_1 = \alpha$ *y* $x_2 = y_2 = \beta$ *y* $\alpha < \beta$, *entonces* $g(\alpha, \alpha) \leq g(\beta, \beta)$ *pues:*

$$g(\alpha, \alpha) = 0,5(1 - |\alpha - \alpha|) + 0,5\sup(\{\alpha, \alpha\}) = 0,5 + 0,5\alpha \quad \text{y}$$

$$g(\beta, \beta) = 0,5(1 - |\beta - \beta|) + 0,5\sup(\{\beta, \beta\}) = 0,5 + 0,5\beta$$

y, por lo tanto, $g(\beta, \beta) > g(\alpha, \alpha)$ *pues* $\alpha < \beta$.

vi. *Para* $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ *y* $|y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|$ *el análisis requiere estudiar diferentes posibilidades para las relaciones entre* x_1, x_2, y_1, y_2 .

Caso I: *Si* $x_1 < y_1 \wedge x_2 < y_2$ *entonces:* $|y_1 - x_1| = y_1 - x_1$, $|y_2 - x_2| = y_2 - x_2$, *con lo que* $y_1 - x_1 < y_2 - x_2$ (A) *y*

$$g(x_1, y_1) = 0,5(1 - y_1 + x_1) + 0,5y_1 = 0,5 + 0,5x_1 \quad \text{y}$$

$$g(x_2, y_2) = 0,5(1 - y_2 + x_2) + 0,5y_2 = 0,5 + 0,5x_2.$$

Como $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ *entonces* $y_1 = x_2 + y_2 - x_1$ *y reemplazando* y_1 *en (A) queda que:*

$$\begin{aligned}
x_2 + y_2 - x_1 - x_1 &< y_2 - x_2 \\
-2x_1 &< -2x_2 \\
x_1 &> x_2
\end{aligned}$$

Por lo que $g(x_1, y_1) = 0,5 + 0,5x_1 > g(x_2, y_2) = 0,5 + 0,5x_2$ (I).

Caso II: Si $y_1 < x_1 \wedge x_2 < y_2$ entonces: $|y_1 - x_1| = x_1 - y_1$, $|y_2 - x_2| = y_2 - x_2$, con lo que $x_1 - y_1 < y_2 - x_2$ (B) y

$$g(x_1, y_1) = 0,5(1 - x_1 + y_1) + 0,5x_1 = 0,5 + 0,5y_1 \text{ y}$$

$$g(x_2, y_2) = 0,5(1 - y_2 + x_2) + 0,5y_2 = 0,5 + 0,5x_2.$$

Como $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ entonces $x_1 = x_2 + y_2 - y_1$ y reemplazando x_1 en (B) queda que:

$$\begin{aligned}
x_2 + y_2 - y_1 - y_1 &< y_2 - x_2 \\
-2y_1 &< -2x_2 \\
y_1 &> x_2
\end{aligned}$$

Por lo que $g(x_1, y_1) = 0,5 + 0,5y_1 > g(x_2, y_2) = 0,5 + 0,5x_2$ (II).

Caso III: Si $x_1 < y_1 \wedge y_2 < x_2$ entonces: $|y_1 - x_1| = y_1 - x_1$, $|y_2 - x_2| = x_2 - y_2$, con lo que $y_1 - x_1 < x_2 - y_2$ (C) y

$$g(x_1, y_1) = 0,5(1 - y_1 + x_1) + 0,5y_1 = 0,5 + 0,5x_1 \text{ y}$$

$$g(x_2, y_2) = 0,5(1 - x_2 + y_2) + 0,5x_2 = 0,5 + 0,5y_2.$$

Como $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ entonces $x_2 = x_1 + y_1 - y_2$ y reemplazando x_2 en (C) queda que:

$$\begin{aligned}
y_1 - x_1 &< x_1 + y_1 - y_2 - y_2 \\
-2x_1 &< -2y_2 \\
x_1 &> y_2
\end{aligned}$$

Por lo que $g(x_1, y_1) = 0,5 + 0,5x_1 > g(x_2, y_2) = 0,5 + 0,5y_2$ (III).

Caso IV: Si $y_1 < x_1 \wedge y_2 < x_2$ entonces: $|y_1 - x_1| = x_1 - y_1$, $|y_2 - x_2| = x_2 - y_2$, con lo que $x_1 - y_1 < x_2 - y_2$ (D) y

$$g(x_1, y_1) = 0,5(1 - x_1 + y_1) + 0,5x_1 = 0,5 + 0,5y_1 \text{ y}$$

$$g(x_2, y_2) = 0,5(1 - x_2 + y_2) + 0,5x_2 = 0,5 + 0,5y_2.$$

Como $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ entonces $x_1 = x_2 + y_2 - y_1$ y reemplazando x_1 en (D) queda que:

$$\begin{aligned} x_2 + y_2 - y_1 - y_1 &< x_2 - y_2 \\ -2y_1 &< -2y_2 \\ y_1 &> y_2 \end{aligned}.$$

Por lo que $g(x_1, y_1) = 0,5 + 0,5y_1 > g(x_2, y_2) = 0,5 + 0,5y_2$ (IV).

Por lo tanto, en virtud de (I), (II), (III) y (IV) queda demostrado que para $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ y $|y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|$ la función propuesta #2 cumple siempre que $g(x_1, y_1) > g(x_2, y_2)$ satisfaciendo la condición (vi) de la Definición 5.11.

Por lo tanto, queda demostrado que la función propuesta #2: $g(x, y) = 0,5(1 - |y - x|) + 0,5\sup(\{x, y\})$ cumple con las condiciones (i) a (vi) de la Definición 5.11 $\forall x, y \in [a_L, a_R]$ con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$ y, por lo tanto, es una función característica de un intervalo de valores de verdad.

Función propuesta #3: $g(x, y) = \delta \frac{x+y}{2} + (1-\delta)\sup(\{x, y\})$, $\delta \in [0, 1]$.

- i. **No negatividad:** Como $x, y \in [a_L, a_R]$ y $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$, entonces $\frac{x+y}{2} \geq 0$ y $\sup(\{x, y\}) \geq 0$, por lo tanto siempre se cumple que $g(x, y) \geq 0 \forall x, y \in [a_L, a_R]$, $\forall \delta \in [0, 1]$.
- ii. **Simetría:** Puesto que tanto la suma como el supremo son operaciones simétricas y $x \geq 0, y \geq 0$, entonces se cumple que $g(x, y) = g(y, x) \forall x, y \in [a_L, a_R]$, $\forall \delta \in [0, 1]$.
- iii. **Ambos términos de $g(x, y)$ son crecientes, es decir, si $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$, con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a_L, a_R]$ y $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$, se verifica que:**

$$0 \leq \frac{x_1 + y_1}{2} < \frac{x_2 + y_2}{2} \wedge \sup(\{x_1, y_1\}) < \sup(\{x_2, y_2\}) \Rightarrow g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2).$$

Con lo cual queda demostrado que $g(x, y)$ tal como está definida en la función propuesta #3 es creciente $\forall x, y \in [a_L, a_R]$ con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.

- iv. Si para $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a_L, a_R]$ se cumple que $|y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|$ y que $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$, entonces puede verse que:

$$g(x_1, y_1) = \delta \frac{x_1 + y_1}{2} + (1 - \delta) \sup(\{x_1, y_1\}) < g(x_2, y_2) = \delta \frac{x_2 + y_2}{2} + (1 - \delta) \sup(\{x_2, y_2\})$$

pues $x_1 + y_1 < x_2 + y_2 \Rightarrow \delta \frac{x_1 + y_1}{2} < \delta \frac{x_2 + y_2}{2}$ y como además $|y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|$ entonces $(1 - \delta) \sup(\{x_1, y_1\}) < (1 - \delta) \sup(\{x_2, y_2\})$.

Por lo cual se cumple $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$, $\forall \delta \in [0, 1]$.

- v. Haciendo $x_1 = y_1 = \alpha$ y $x_2 = y_2 = \beta$ y $\alpha < \beta$, entonces $g(\alpha, \alpha) \leq g(\beta, \beta)$ pues:

$$\delta \frac{\alpha + \alpha}{2} < \delta \frac{\beta + \beta}{2} \quad \wedge \quad (1 - \delta) \sup(\{\alpha, \alpha\}) < (1 - \delta) \sup(\{\beta, \beta\}).$$

- vi. Si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ entonces el primer término de $g(x, y)$ cumple que $\delta \frac{x_1 + y_1}{2} = \delta \frac{x_2 + y_2}{2}$, por lo tanto, todo el análisis se debe realizar para el segundo término de la función.

Como también se da como premisa que $|y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|$, deben analizarse diferentes casos para las relaciones entre x_1, x_2, y_1, y_2 .

Caso I: Si $x_1 < y_1 \wedge x_2 < y_2$ entonces: $|y_1 - x_1| = y_1 - x_1$, $|y_2 - x_2| = y_2 - x_2$, con lo que $y_1 - x_1 < y_2 - x_2$ (A) y

$$(1 - \delta) \sup(\{x_1, y_1\}) = y_1 \text{ y } (1 - \delta) \sup(\{x_2, y_2\}) = y_2.$$

Como $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ entonces $x_1 = x_2 + y_2 - y_1$ y reemplazando x_1 en (A) queda que:

$$\begin{aligned} y_1 - (x_2 + y_2 - y_1) &< y_2 - x_2 \\ 2y_1 &< 2y_2 \\ y_1 &< y_2 \end{aligned}.$$

Por lo que $(1 - \delta) \sup(\{x_1, y_1\}) = y_1 < (1 - \delta) \sup(\{x_2, y_2\}) = y_2$ y por lo tanto $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$ (I).

Caso II: Si $y_1 < x_1 \wedge x_2 < y_2$ entonces: $|y_1 - x_1| = x_1 - y_1$, $|y_2 - x_2| = y_2 - x_2$, con lo que $x_1 - y_1 < y_2 - x_2$ (B) y

$$(1-\delta)\sup(\{x_1, y_1\}) = x_1 \text{ y } (1-\delta)\sup(\{x_2, y_2\}) = y_2.$$

Como $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ entonces $y_1 = x_2 + y_2 - x_1$ y reemplazando y_1 en (B) queda que:

$$\begin{aligned} x_1 - (x_2 + y_2 - x_1) &< y_2 - x_2 \\ 2x_1 &< 2y_2 \\ x_1 &< y_2 \end{aligned}.$$

Por lo que $(1-\delta)\sup(\{x_1, y_1\}) = x_1 < (1-\delta)\sup(\{x_2, y_2\}) = y_2$ y por lo tanto $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$ (II).

Caso III: Si $x_1 < y_1 \wedge y_2 < x_2$ entonces: $|y_1 - x_1| = y_1 - x_1$, $|y_2 - x_2| = x_2 - y_2$, con lo que $y_1 - x_1 < x_2 - y_2$ (C) y

$$(1-\delta)\sup(\{x_1, y_1\}) = y_1 \text{ y } (1-\delta)\sup(\{x_2, y_2\}) = x_2.$$

Como $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ entonces $y_2 = x_1 + y_1 - x_2$ y reemplazando y_2 en (C) queda que:

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 &< x_2 - (x_1 + y_1 - x_2) \\ 2y_1 &< 2x_2 \\ y_1 &< x_2 \end{aligned}.$$

Por lo que $(1-\delta)\sup(\{x_1, y_1\}) = y_1 < (1-\delta)\sup(\{x_2, y_2\}) = x_2$ y por lo tanto $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$ (III).

Caso IV: Si $y_1 < x_1 \wedge y_2 < x_2$ entonces: $|y_1 - x_1| = x_1 - y_1$, $|y_2 - x_2| = x_2 - y_2$, con lo que $x_1 - y_1 < x_2 - y_2$ (D) y

$$(1-\delta)\sup(\{x_1, y_1\}) = x_1 \text{ y } (1-\delta)\sup(\{x_2, y_2\}) = x_2.$$

Como $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ entonces $y_1 = x_2 + y_2 - x_1$ y reemplazando y_1 en (D) queda que:

$$\begin{aligned} x_1 - (x_2 + y_2 - x_1) &< x_2 - y_2 \\ 2x_1 &< 2x_2 \\ x_1 &< x_2 \end{aligned}.$$

Por lo que $(1-\delta)\sup(\{x_1, y_1\}) = x_1 < (1-\delta)\sup(\{x_2, y_2\}) = x_2$ y por lo tanto $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$ (IV).

Por lo tanto, en virtud de (I), (II), (III) y (IV) queda demostrado que para $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ y $|y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|$ la función propuesta #3 cumple siempre que $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$ satisfaciendo la condición (vi) de la Definición 5.11

Por lo tanto, queda demostrado que la función propuesta #3: $\delta \frac{x+y}{2} + (1-\delta)\sup(\{x, y\})$, $\delta \in [0, 1]$ cumple con las condiciones (i) a (vi) de la Definición 5.11 $\forall x, y \in [a_L, a_R]$, $\forall \delta \in [0, 1]$ con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$ y, por lo tanto, es una función característica de un intervalo de valores de verdad.

A partir del concepto de **función característica de un intervalo de valores de verdad** dado en la Definición 5.11 y utilizando las funciones propuestas #1 a #3 (Ecuaciones (5.13) a (5.15)), se propone en esta Tesis definir una función llamada **medida de intervalo de valores de verdad**, la cual permitirá ordenar intervalos de valores de verdad de acuerdo al valor de verdad global que representan, definida como sigue:

DEFINICIÓN 5.12: (Medida de intervalo de valores de verdad) Sea $\chi = \xi([0, 1])$ el espacio de todos los intervalos de valores de verdad, donde $\xi([0, 1])$ representa al conjunto de todos los intervalos cerrados incluidos en el intervalo cerrado $[0, 1]$, se llama **medida de intervalo de valores de verdad** a una función $f: \chi \rightarrow [0, +\infty)$ dada por:

$$f(A) = f([a_L, a_R]) = g(a_L, a_R), \quad (5.16)$$

donde $A = [a_L, a_R]$ es un intervalo de valores de verdad tal como se definió en la Definición 5.1 y $g(a_L, a_R)$ es una **función característica del intervalo de valores de verdad** (Definición 5.11) que es evaluada en los extremos del intervalo de valores de verdad A . De esta manera, f caracteriza globalmente el valor de verdad representado por el intervalo de valores de verdad A y define un mapeo del espacio de intervalos de valores de verdad a $\mathbb{R}^+$. Cuanto más alto el valor de $f(A)$, más alto el valor de verdad representado por A .

A partir del concepto de **medida de intervalo de valores de verdad** dado en la Definición 5.12, puede realizarse una observación de suma importancia para la búsqueda de un método que ordene intervalos de valores de verdad y que satisfaga las condiciones de la Definición 5.10:

OBSERVACIÓN 5.1: De acuerdo a la Definición 5.12, la **medida de intervalos de valores de verdad** f permite definir un orden para todos los posibles intervalos de valores de verdad, ya que a cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad: $A, B, \dots \in \mathcal{X} = \xi([0,1])$ se les asignan valores $f(A), f(B), \dots \in \mathbb{R}^+$ donde:

- Se caracterizan globalmente los valores de verdad representados por los intervalos de valores de verdad: la medida f , a través de la función característica de intervalos de valores de verdad g evaluada en los extremos de los intervalos, mide con un número real cuán alto es el valor de verdad representado por el intervalo. Cuanto más alto es el valor de f , más alto es el valor de verdad.
- Como f mapea en $\mathbb{R}^+$ y concretamente $f(A)$ es una medida del valor de verdad global representado por el intervalo de valores de verdad A , **es posible a través de f aplicar la relación de orden completo $\leq$ en $\mathbb{R}^+$ para ordenar los intervalos de valores de verdad según su valor de verdad creciente.**

Como consecuencia de lo observado anteriormente se realiza la siguiente proposición, la cual constituye uno de los más importantes aportes de esta Tesis en el campo de la LD valuada en intervalos:

PROPOSICIÓN 5.2: *La medida de intervalos de valores de verdad f , dada en la Definición 5.12, aplicada a intervalos de valores de verdad, permite establecer un orden entre intervalos de valores de verdad, por medio de la relación $\leq$ en $\mathbb{R}$, constituyendo una metodología para ordenar intervalos de valores de verdad según lo establecido en la Definición 5.10, donde los intervalos son ordenados de acuerdo al valor de verdad global que representan. Cuanto más alto el valor de f , mayor el valor de verdad del intervalo.*

DEMOSTRACIÓN 5.2: *En la Definición 5.10 se propusieron las condiciones que debería satisfacer una metodología para ordenar intervalos de valores de verdad o, más simplemente, un orden entre intervalos de valores de verdad. A continuación, se analizará el cumplimiento de cada una de estas condiciones por parte de la medida de intervalos de valores de verdad f propuesta en la Definición 5.12.*

- Orden para todos los posibles intervalos de valores de verdad: Como f mapea en $\mathbb{R}^+$, cualesquiera dos intervalos de valores de verdad $A = [a_L, a_R]$ y $B = [b_L, b_R]$ tendrán una medida de intervalos de valores de verdad dada por:*

$$f(A) = f([a_L, a_R]) = g(a_L, a_R) = \varepsilon_A$$

y

$$f(B) = f([b_L, b_R]) = g(b_L, b_R) = \varepsilon_B$$

donde $\varepsilon_A, \varepsilon_B \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, es posible usar el orden $\leq$ en $\mathbb{R}$, el cual es un orden completo, para ordenar los intervalos A y B de la siguiente manera:

$$A < B \text{ si y sólo si } f(A) = g(a_L, a_R) = \varepsilon_A < f(B) = g(b_L, b_R) = \varepsilon_B, \quad (5.17)$$

$$A > B \text{ si y sólo si } f(A) = g(a_L, a_R) = \varepsilon_A > f(B) = g(b_L, b_R) = \varepsilon_B, \quad (5.18)$$

$$A = B \text{ si y sólo si } f(A) = g(a_L, a_R) = \varepsilon_A = f(B) = g(b_L, b_R) = \varepsilon_B. \quad (5.19)$$

Es necesario destacar que, de cumplirse las condiciones de la Ecuación (5.19), éstas no aseguran que se cumpla también $a_L = b_L \wedge a_R = b_R$ (la condición de igualdad entre intervalos dada en la Definición 5.3). Por ejemplo, esto no se cumple en el caso en que la medida $\dagger$ se evalúe utilizando la función g dada en la función propuesta #2 (Ecuación (5.14)). Las condiciones dadas en la Ecuación (5.19) sólo aseguran que los intervalos A y B representan el mismo valor de verdad global.

Esto podría parecer contradictorio, pero no es así. La medida de intervalos de valores de verdad definida a través de $\dagger$ mide el valor de verdad global representado por el intervalo. Dos intervalos de valores de verdad podrían ser diferentes, pero representar el mismo valor de verdad global.

Para el caso de la función propuesta #2, por ejemplo, dejando uno de los extremos de los intervalos constante; el aumento en el valor del extremo derecho, que representa mayor valor máximo de valor de verdad, es compensado por el aumento de rango del intervalo, relacionado con una mayor imprecisión o incertidumbre alrededor del valor de verdad; siendo por tanto el valor de la medida $\dagger$ controlado por el extremo inferior del intervalo.

- ii. Orden cuando los intervalos a ordenar son números reales: Puesto que por la Definición 5.11 toda función g cumple que $g(\alpha, \alpha) \leq g(\beta, \beta)$ si $\alpha < \beta$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$, entonces puede asegurarse que si $A = [a, a] = a$, $B = [b, b] = b$ y $a < b$ entonces $f(A) = g(a, a) < f(B) = g(b, b)$.

- iii. *Propiedad transitiva: Sean $A=[a_L, a_R]$, $B=[b_L, b_R]$ y $C=[c_L, c_R]$ intervalos de valores de verdad, con medidas $f(A)=g(a_L, a_R)=\varepsilon_A$, $f(B)=g(b_L, b_R)=\varepsilon_B$ y $f(C)=g(c_L, c_R)=\varepsilon_C$. Como el orden entre los intervalos A , B y C se realiza ordenando los valores de sus medidas $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C \in \mathbb{R}^+$, entonces si:*

$$f(A)=\varepsilon_A < f(B)=\varepsilon_B \Rightarrow A < B \quad \wedge \quad f(B)=\varepsilon_B < f(C)=\varepsilon_C \Rightarrow B < C,$$

también se cumple:

$$f(A)=\varepsilon_A < f(C)=\varepsilon_C \Rightarrow A < C,$$

por lo que el orden propuesto por medio de la medida de intervalos de verdad dada en la Definición 5.12 es transitivo.

- iv. *Orden entre intervalos de igual rango: De acuerdo a la condición (iv) del concepto de función característica del intervalo de valores de verdad (Definición 5.11), que define la función g , si $|y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|$ y $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ entonces $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$. Por lo tanto, si $A=[a_L, a_R]$ y $B=[b_L, b_R]$ son dos intervalos de valores de verdad, entre los cuales se cumple: $|a_R - a_L| = |b_R - b_L|$ y $m(A) = \frac{a_L + a_R}{2} < m(B) = \frac{b_L + b_R}{2}$, entonces:*

$$f(A)=g(a_L, a_R) < f(B)=g(b_L, b_R),$$

con lo cual resulta $A < B$ según el orden propuesto.

- v. *Orden para los Casos A y B: Debido a la condición de crecimiento definida para la función g (condición (iii) de la Definición 5.11), puede asegurarse para g que: si $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$ entonces $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$.*

Por lo tanto, considerando los intervalos de valores de verdad $A=[a_L, a_R]$ y $B=[b_L, b_R]$, y asumiendo que se cumplen los Casos A o B, es decir $a_L < b_L$ y $a_R < b_R$ (los intervalos A y B no se solapan o se solapan en forma parcial); al evaluar $f(A)$ y $f(B)$, haciendo $x_1 = a_L$, $y_1 = a_R$ y $x_2 = b_L$, $y_2 = b_R$, resulta:

$$f(A)=g(a_L, a_R) \quad \wedge \quad f(B)=g(b_L, b_R),$$

donde $f(A) < f(B)$, con lo cual resulta $A < B$.

- vi. *Orden entre intervalos de igual valor medio: A partir de la condición (vi) establecida para la función g (Definición 5.11), si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ y $|y_1 - x_1| < |y_2 - x_2|$, entonces $g(x_1, y_1) < g(x_2, y_2)$ o $g(x_1, y_1) > g(x_2, y_2)$.*

Nuevamente al evaluar $f(A)$ y $f(B)$ por medio de g , tomando $x_1 = a_L, y_1 = a_R$ y $x_2 = b_L, y_2 = b_R$, y como $m(A) = m(B)$ y $w(A) < w(B)$, puede asegurarse que:

$$a_L + a_R = b_L + b_R \quad \wedge \quad |a_R - a_L| < |b_R - b_L|,$$

por lo cual, para este caso, se obtendrá alguno de los siguientes órdenes:

$$f(A) = g(a_L, a_R) < f(B) = g(b_L, b_R) \Rightarrow A < B \text{ (Enfoque A),}$$

$$f(A) = g(a_L, a_R) > f(B) = g(b_L, b_R) \Rightarrow A > B \text{ (Enfoque B),}$$

con lo cual se demuestra que la medida f cumple con los requerimientos de la condición (vi) propuesta para la relación de orden entre intervalos de valores de verdad.

Por lo tanto, a partir del análisis anterior queda demostrada la Proposición 5.2 que establece que la medida de intervalos de valores de verdad f dada en la Definición 5.12, aplicada a intervalos de valores de verdad, permite establecer un orden entre intervalos de valores de verdad, por medio de la relación $\leq$ en $\mathbb{R}$, constituyendo una metodología para ordenar intervalos de valores de verdad según lo establecido en la Definición 5.10

En virtud del concepto propuesto de medida de intervalos de valores de verdad y el enunciado de la Proposición 5.2, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- **Conclusión #1:** Los intervalos de valores de verdad son completamente caracterizados, en cuanto al valor de verdad global que representan, por la medida de intervalos de valores de verdad f a través del uso de la función de caracterización g aplicada sobre los extremos de los intervalos (Definiciones 5.11 y 5.12).
- **Conclusión #2:** Cuanto más alto es el valor de verdad representado por el intervalo, más alto es el valor de la función f . Esto puede observarse directamente de las condiciones exigidas para la relación de orden entre intervalos de valores de verdad que fueron probadas para f en la Demostración 5.2; según las cuales:

$$A < B \Leftrightarrow f(A) = g(a_L, a_R) < f(B) = g(b_L, b_R),$$

$$A > B \Leftrightarrow f(A) = g(a_L, a_R) > f(B) = g(b_L, b_R),$$

$$A = B \Leftrightarrow f(A) = g(a_L, a_R) = f(B) = g(b_L, b_R).$$

- **Conclusión #3:** La función f define un mapeo en $\mathbb{R}^+$ permitiendo utilizar la relación $\leq$ y establece, por lo tanto, una orden entre intervalos de valores de verdad que satisface las condiciones requeridas para una metodología para ordenar intervalos de valores de verdad, dadas en la Definición 5.10.
- **Conclusión #4:** f puede usarse para definir un orden entre intervalos de valores de verdad, permitiendo ordenar los intervalos en cualquiera de los casos posibles (Casos A, B y C) y constituye, por lo tanto, un enfoque aplicable al uso de sistemas difusos basados en predicados y LD tipo 2 de intervalos, donde no existía, previo al desarrollo de esta Tesis, un método que permitiera ordenar cualquier combinación posible de intervalos de valores de verdad.

En virtud de las conclusiones anteriores y considerando las Definiciones 5.11 y 5.12, puede ahora definirse el método propuesto en esta Tesis para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados:

Método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados:

Considérese un sistema difuso para clasificación o agrupamiento de datos formado por un conjunto de K predicados difusos $\{p_k\}_{k=1,\dots,K}$ y funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1,2,\dots,d, k=1,2,\dots,K}$, donde d es la dimensión del espacio de características. Dependiendo del tipo de aplicación, cada p_k puede ser interpretado como $p_k(\mathbf{x})$: "El dato $\mathbf{x}$ es de la clase k " o $p_k(\mathbf{x})$: "El dato $\mathbf{x}$ pertenece al cluster k "; describiendo cada una de las etiquetas. Dado un nuevo dato $\mathbf{x} \in [-1, 1]^d$ a ser asignado a una etiqueta, el método de consulta propuesto consiste en:

- 3) Calcular los valores de verdad de los K predicados compuestos $\{p_k(\mathbf{x})\}_{k=1,\dots,K}$, usando las funciones de pertenencia del sistema difuso y operadores difusos, dando como resultado un conjunto de valores de verdad $\{v(p_k(\mathbf{x}))\}_{k=1,\dots,K}$ representados por intervalos de valores de verdad, con:

$$v(p_k(\mathbf{x})) = [\varphi_{p_k(\mathbf{x})}^-, \varphi_{p_k(\mathbf{x})}^+] = A_{\mathbf{x},k} = [a_{\mathbf{x},k,L}, a_{\mathbf{x},k,R}]. \quad (5.20)$$

- 4) Aplicar la medida de intervalos de valores de verdad $f(v(p_k(\mathbf{x}))) = f(A_{\mathbf{x},k})$ de acuerdo a la Definición 5.12, utilizando alguna de las funciones g propuestas (funciones propuestas #1 a #3).
- 5) Asignar al dato $\mathbf{x}$ la etiqueta que corresponde al predicado difuso con **mayor valor de medida de intervalos de valores de verdad**, es decir, asignar la etiqueta $k' \in \{1, \dots, K\}$ donde $p_{k'}$ es tal que:

$$f(v(p_{k'}(\mathbf{x}))) = \max \{ f(v(p_k(\mathbf{x}))) \}_{k=1, \dots, K}. \quad (5.21)$$

Los operadores difusos utilizados son típicamente definidos y ajustados de acuerdo a cada problema particular, y seleccionados entre los presentados en el Capítulo 4. Los resultados variarán dependiendo tanto de la selección de los operadores difusos como de la función de característica de intervalos de valores de verdad g (y por tanto la medida f) seleccionada.

En la Figura 5.6 se presenta un diagrama de la metodología propuesta para la consulta de sistemas difusos con LD tipo 2 de intervalos y predicados.

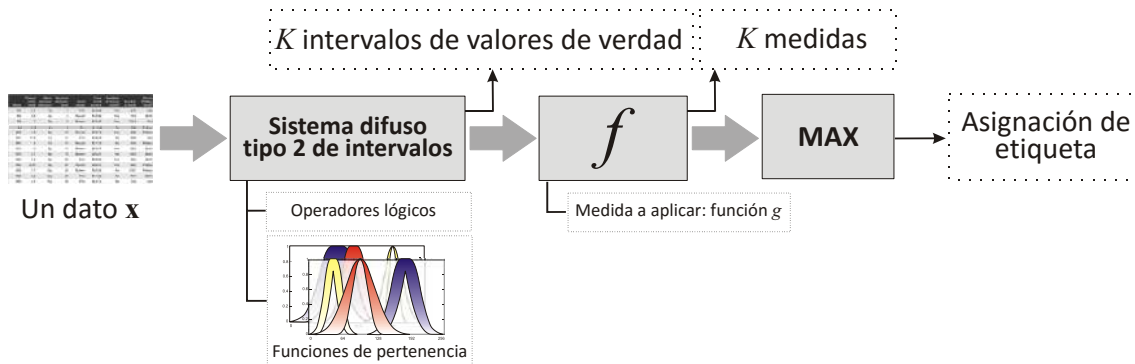


Figura 5.6. Método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados para la clasificación y el agrupamiento de datos.

Dado un dato $\mathbf{x}$ a ser asignado a una etiqueta, se evalúan todos los predicados difusos obteniendo K intervalos de valores de verdad (uno por etiqueta). Luego, el dato $\mathbf{x}$ es etiquetado considerando la etiqueta representada por el predicado con mayor valor de medida de intervalos de valores de verdad.

5.2.3 Análisis del método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados

La relevancia de la utilización de la **medida de intervalo de valores de verdad**, que fue propuesta en la Sección anterior para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados, radica en que esta medida caracteriza (mide) el valor de verdad global que

los intervalos representan y permite la comparación entre éstos; estableciendo un orden y pudiendo, en consecuencia, determinar cual representa mayor valor de verdad.

Como una característica esencial respecto a los otros métodos existentes, presentados y estudiados en detalle en la Sección 5.2.1, **la medida de intervalo de valores de verdad puede aplicarse sobre todo el espacio de intervalos de valores de verdad y, al mapear en $\mathbb{R}^+$, habilita el uso de la relación de orden completo $\leq$ para ordenar los intervalos de valores de verdad según su valor de verdad creciente.**

Por lo tanto, el método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados, presentado al final de la Sección 5.2.1, constituye la solución al problema de asignar etiquetas cuando se utilizan sistemas difusos basados en predicados y LD tipo 2 de intervalos en segmentación de imágenes en particular, y en Reconocimiento de Patrones en general; solucionando, por lo tanto, uno de los problemas abordados en esta Tesis.

Habiendo realizado anteriormente el análisis formal de las propiedades que satisface la metodología para ordenar entre intervalos de valores de verdad propuesta, en esta Sección se realiza un análisis de las medidas de intervalos de valores de verdad propuestas, y del orden resultante, desde dos puntos de vista.

Primero, se presentan y analizan gráficos en todo el espacio de intervalos de valores de verdad, dado por $[0,1]^2$, de los valores tomados por las tres medidas de intervalos de valores de verdad obtenidas al aplicar las funciones propuestas #1 a #3 sugeridas para la función característica g .

Segundo, pensando en la aplicación del método propuesto en la clasificación de datos de dimensión dos (dos características), se presenta un problema de clasificación con tres clases y se analizan gráficamente las particiones generadas por distintos clasificadores tradicionales y por sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y en LD tipo 1.

Para mayor claridad, los análisis se presentan en secciones separadas a continuación.

5.2.3.1. Análisis gráfico de las medidas de intervalos de valores de verdad propuestas

En la Figura 5.7 se presentan representaciones de la medida de intervalos de verdad $\forall (a_L, a_R) \in [0,1]^2$, evaluada de acuerdo a la función propuesta #1 (Ecuación (5.13)), repetida para mayor claridad a continuación:

$$f(A) = f([a_L, a_R]) = g(a_L, a_R) = \frac{a_L + a_R}{2} \sup(\{a_L, a_R\}), \quad (5.22)$$

donde $A = [a_L, a_R]$ es un intervalo de valores de verdad y $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$ es una medida de intervalos de valores de verdad (Definición 5.12), evaluada a través de la función $g: [a_L, a_R] \rightarrow [0, +\infty)$ (Definición 5.11), con $\mathcal{X} = \xi([0, 1])$. En los gráficos de la Figura 5.7, los ejes horizontales representan los valores extremos de los intervalos de valores de verdad (a_L y a_R) y el eje vertical el valor que toma la medida f para cada posible intervalo $[a_L, a_R]$. Dadas las condiciones estudiadas en la Sección 5.2.2 para la función propuesta #1, es esperable que f sea creciente, teniendo su valor mínimo para $[a_L, a_R] = [0, 0]$ y máximo para $[a_L, a_R] = [1, 1]$ y creciendo cuando el valor medio del intervalo y a su extremo superior a_R crecen.

Debido que el espacio de intervalos válidos es aquél donde $a_L \leq a_R$, para mayor claridad en los gráficos, sólo se presentan y analizan dichos valores de a_L y a_R . El plano visualizado en azul (con $f(a_L, a_R) = 0$) representa la zona en la que $a_L > a_R$. Asimismo, se incorporó un plano (visualizado en líneas de color verticales) que corresponde a $a_L = a_R$, estrictamente ese plano está acotado por el plano $f(a_L, a_R) = 0$ y los valores de la medida $f(a_L, a_R)$ para $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$ y busca permitir visualizar mejor la superficie formada por la medida de intervalos de valores de verdad en los puntos que son de particular interés.

Como puede observarse de las distintas vistas presentadas en la Figura 5.7, la medida de intervalos de valores de verdad f evaluada a través de la función propuesta #1 es una función suave con las siguientes características:

- La función es creciente y toma valores en $[0, 1]$ para $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.
- Considerando un valor fijo de $a_L = 0$ y partiendo desde $a_R = 0$, con ayuda de la curva de menor concavidad mostrada en la Figura 5.7c, puede verse que f crece desde 0 hasta un valor máximo de 0,5 para $a_R = 1$, pesando la imprecisión e incertidumbre representada por el intervalo, que para el caso de $A = [a_L, a_R] = [0, 1]$ son máximas.
- Para $a_R = 1$, a medida que crece a_L también lo hace en forma lineal el valor de la medida f , indicando que el valor de verdad global también crece, ya que como a_L se acerca a a_R , el rango del intervalo de valores de verdad disminuye, acercándose el intervalo al valor de verdad máximo $A = [a_L, a_R] = [1, 1]$. En la Figura 5.7b f para $a_R = 1$ corresponde a la recta que une los puntos $(0, 0,5)$ y $(1, 1)$.

- Como se observa en las Figura 5.7a, la zona central del gráfico, es decir, para $a_L = a_R$, la función es creciente, guardando la relación de orden en $\mathbb{R}$ que se obtendría en $a_L = a_R = a$. Esto se puede observar con sumo detalle en las Figuras 5.7b y 5.7c, donde el valor de f para $a_L = a_R$ corresponde a la curva de concavidad positiva en la 5.7b y a la de mayor concavidad en la 5.6b. Para las Figuras 5.7b y 5.7c los ejes a_L y a_R son, respectivamente perpendiculares al dibujo.

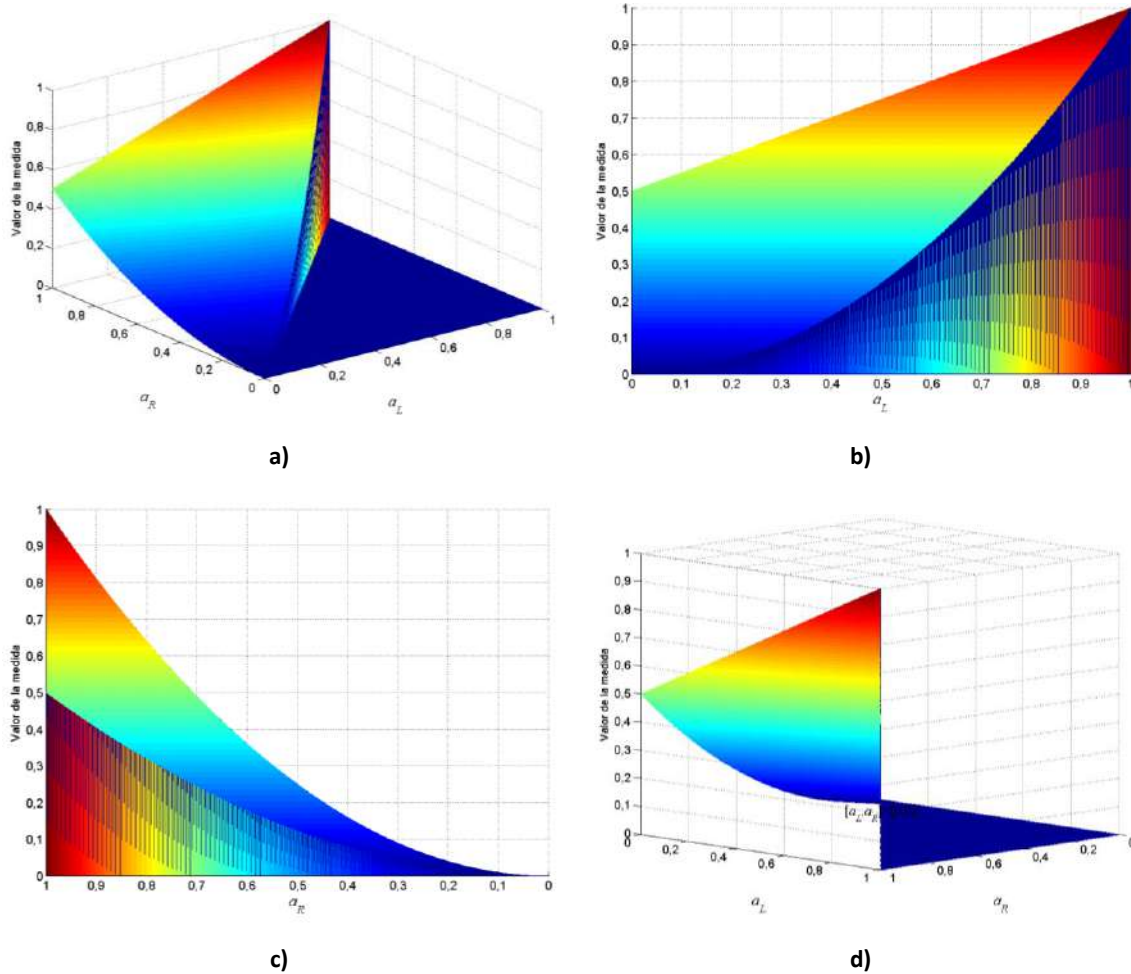


Figura 5.7. Medida de intervalos de valores de verdad f adoptando la función propuesta #1 para g y analizando todos los posibles valores del espacio de intervalos de valores de verdad, con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.

El plano en azul representa al plano $f(a_L, a_R) = 0$. El plano paralelo al eje vertical representa $a_L = a_R$ y busca ayudar a la interpretación del gráfico.

Se muestran cuatro vistas que permiten visualizar la forma de la superficie definida por la función g . **a)** Vista A. **b)** Vista B, eje a_L (el eje a_R es perpendicular al dibujo). **c)** Vista C, eje a_R (el eje a_L es perpendicular al dibujo). **d)** Vista D.

- Partiendo de $a_L = a_R$ y analizando el gráfico de la Figura 5.7c, a medida que a_R crece, se observa que el valor de la medida también crece, lo que permite concluir que la medida compensa de alguna manera el aumento de la imprecisión e

incertidumbre en el valor del intervalo, con el aumento de su valor máximo de valor de verdad a_R .

- Finalmente, observando detenidamente la Figura 5.7c, donde el eje a_L es perpendicular al dibujo, y analizando la variación de la medida f desde el definido por la curva de mayor concavidad (donde $a_L = a_R$) hasta la de menor, correspondiente a $a_L = 0$, el valor de f disminuye para un mismo valor del extremo superior a_R cuando la imprecisión e incertidumbre aumentan debido a que a_L disminuye.

En la Figura 5.8 se presenta gráficos de la medida de intervalos de verdad $\forall (a_L, a_R) \in [0, 1]^2$, evaluada de acuerdo a la función propuesta #2 (Ecuación (5.14)), la cual se repite a continuación:

$$f(A) = f([a_L, a_R]) = g(a_L, a_R) = 0,5(1 - |a_R - a_L|) + 0,5 \sup(\{a_L, a_R\}), \quad (5.23)$$

donde $A = [a_L, a_R]$ es un intervalo de valores de verdad, $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$ una medida de intervalos de valores de verdad (Definición 5.12) y $\mathcal{X} = \xi([0, 1])$. En los gráficos de la Figura 5.8, los ejes horizontales representan los valores extremos de los intervalos de valores de verdad (a_L y a_R) y el eje vertical el valor que toma la medida f para cada posible intervalo $[a_L, a_R]$. A partir de las condiciones analizadas en la Sección 5.2.2 para la función propuesta #2, f es una función creciente con valores mínimo en $[a_L, a_R] = [0, 0]$ y máximo en $[a_L, a_R] = [1, 1]$ que crece proporcionalmente al crecimiento del límite superior a_R del intervalo e inversamente proporcional al aumento de la imprecisión e incertidumbre en el valor de verdad, representada por el rango del intervalo.

Al igual que en el caso de la función propuesta #1, sólo se grafican los casos donde $a_L \leq a_R$. La función propuesta #2 es una función suave, creciente, representada por un plano, y la forma en que mide al intervalo de valores de verdad puede analizarse como sigue:

- La función toma valores en $[0, 5, 1]$ para $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.
- Partiendo de un valor de $a_L = 0$ puede observarse de la Figura 5.8b que f crece en forma lineal desde un valor 0,5 independientemente del valor de a_R , lo que marca que los valores de f están completamente dominados por el valor del extremo inferior del intervalo, es decir, el valor de a_L .

- En el caso de máxima imprecisión o incertidumbre $A = [a_L, a_R] = [0, 1]$, el valor de la medida es el mínimo e igual a 0,5 y crece a partir de este hasta su valor máximo, el cual se da únicamente para $A = [a_L, a_R] = [1, 1]$.
- Para $a_R = 1$, a medida que crece a_L también lo hace en forma lineal el valor de la medida f , indicando que el valor de verdad global también crece, ya que como a_L se acerca a a_R , la imprecisión e incertidumbre representadas por el intervalo de valores de verdad disminuye, acercándose el intervalo al valor de verdad máximo.

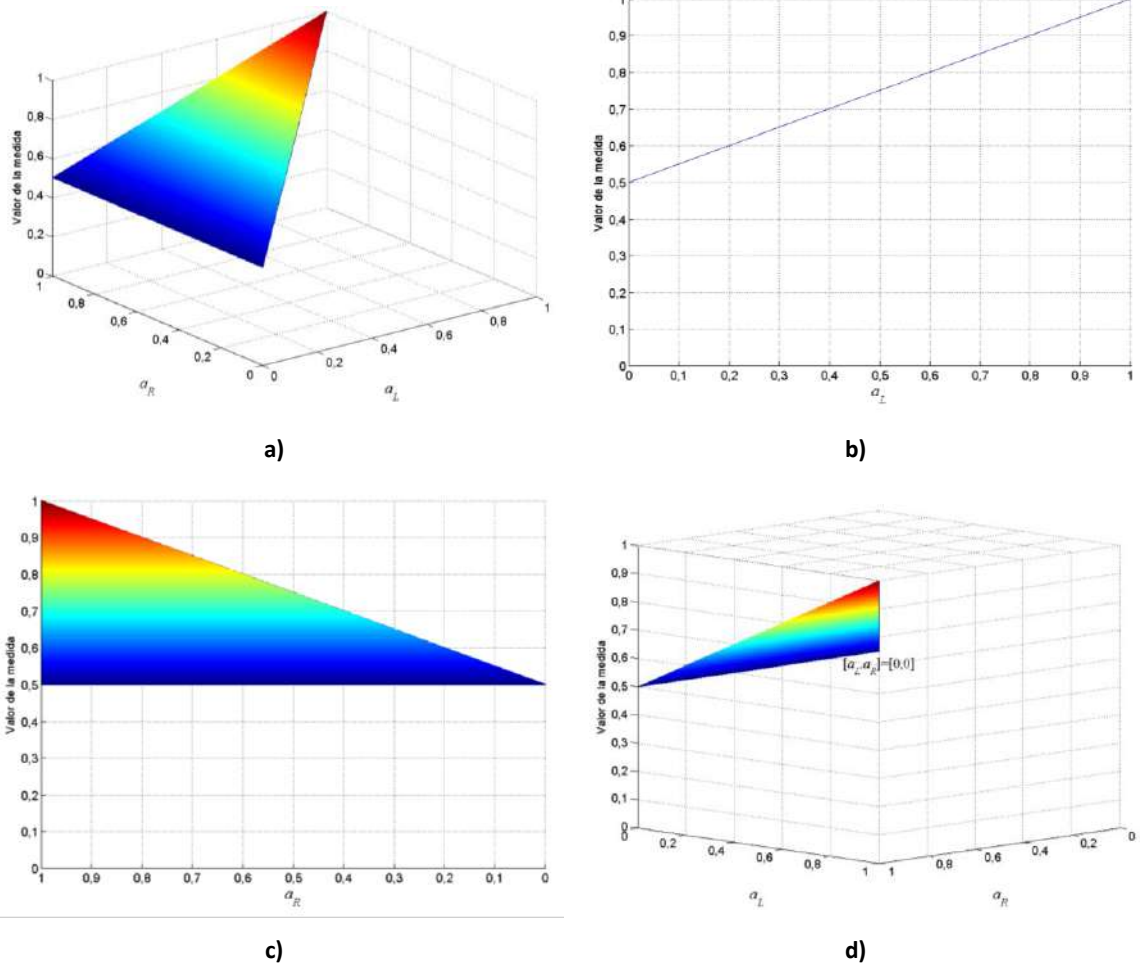


Figura 5.8. Medida de intervalos de valores de verdad f adoptando la función propuesta #2 para g y analizando todos los posibles valores del espacio de intervalos de valores de verdad, con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.

Se muestran cuatro vistas que permiten visualizar la forma de la superficie definida por la función g . **a)** Vista A. **b)** Vista B, eje a_L (el eje a_R es perpendicular al dibujo). **c)** Vista C, eje a_R (el eje a_L es perpendicular al dibujo). **d)** Vista D.

- Como se observa en las Figura 5.8a, la zona central del gráfico, es decir, para $a_L = a_R$, la función es creciente, guardando la relación de orden en $\mathbb{R}$ que se obtendría en $a_L = a_R = a$.

- Partiendo de $a_L = a_R$ y analizando el gráfico de la Figura 5.8c, a medida que a_R crece, se observa que el valor de la medida permanece constante, marcando que para esta medida el aumento en la imprecisión e incertidumbre representadas por el intervalo queda completamente compensado por el aumento de extremo superior a_R .
- Por último, observando detenidamente la Figura 5.8c, donde el eje a_L es perpendicular al dibujo, f crece desde un valor constante en 0,5 (para $a_L = 0$) hasta un valor máximo donde $a_L = a_R$, es decir, f crece a medida a_L se acerca a a_R .

Para terminar este análisis gráfico, en la Figura 5.9 se presentan representaciones gráficas de la medida de intervalos de valores de verdad evaluada de acuerdo con la función propuesta #3, (Ecuación (5.15)), repetida para mayor claridad a continuación:

$$f(A) = f([a_L, a_R]) = g(a_L, a_R) = \delta \frac{a_L + a_R}{2} + (1 - \delta) \sup(\{a_L, a_R\}), \delta \in [0, 1], \quad (5.24)$$

donde $A = [a_L, a_R]$ es un intervalo de valores de verdad, $f: \chi \rightarrow [0, +\infty)$ una medida de intervalos de valores de verdad y $\chi = \xi([0, 1])$. En los gráficos de la Figura 5.9, los ejes horizontales representan los valores extremos de los intervalos de valores de verdad (a_L y a_R) y el eje vertical el valor que toma la medida f para cada posible intervalo $[a_L, a_R]$. Considerando las propiedades analizadas en la Sección 5.2.2 para la función propuesta #3, f es una función creciente con valor mínimo en $[a_L, a_R] = [0, 0]$, máximo en $[a_L, a_R] = [1, 1]$, que crece proporcionalmente a los aumentos del valor medio del intervalo y al de su límite superior a_R .

Los gráficos se realizaron considerando un valor del parámetro $\delta = 0,5$. Vale decir que el parámetro δ permite pesar la importancia relativa del valor medio del intervalo, frente a su valor máximo en el resultado final de la medida. De esta manera, si $\delta = 0$ el valor medio del intervalo no se tiene en cuenta y el valor de la medida queda dominado por el valor del extremo superior a_R . Por el contrario, si $\delta = 1$ el valor de a_R no se tiene en cuenta y sólo importa el valor medio del intervalo. Finalmente, para valores de δ entre 0 y 1, la medida realiza una suma pesada del valor medio y del valor máximo del intervalo. Es importante marcar que, a igual valor medio, esta medida dará prioridad a un intervalo con mayor imprecisión o incertidumbre (con mayor a_R), al contrario de lo que hacen las otras dos funciones propuestas para medir intervalos de valores de verdad.

Nuevamente, al igual que en los casos anteriores, se consideró el espacio de valores $a_L \geq a_R$ para mayor claridad en el gráfico y, sólo se presentan y analizan dichos valores de a_L y a_R . El plano visualizado en azul (con $f(a_L, a_R) = 0$) representa la zona en la que $a_L < a_R$. Asimismo, el plano visualizado en líneas de color verticales corresponde a $a_L = a_R$, buscando con el uso de éste una mejor visualización de la superficie formada por la medida de intervalos de valores de verdad en los puntos que son de particular interés.

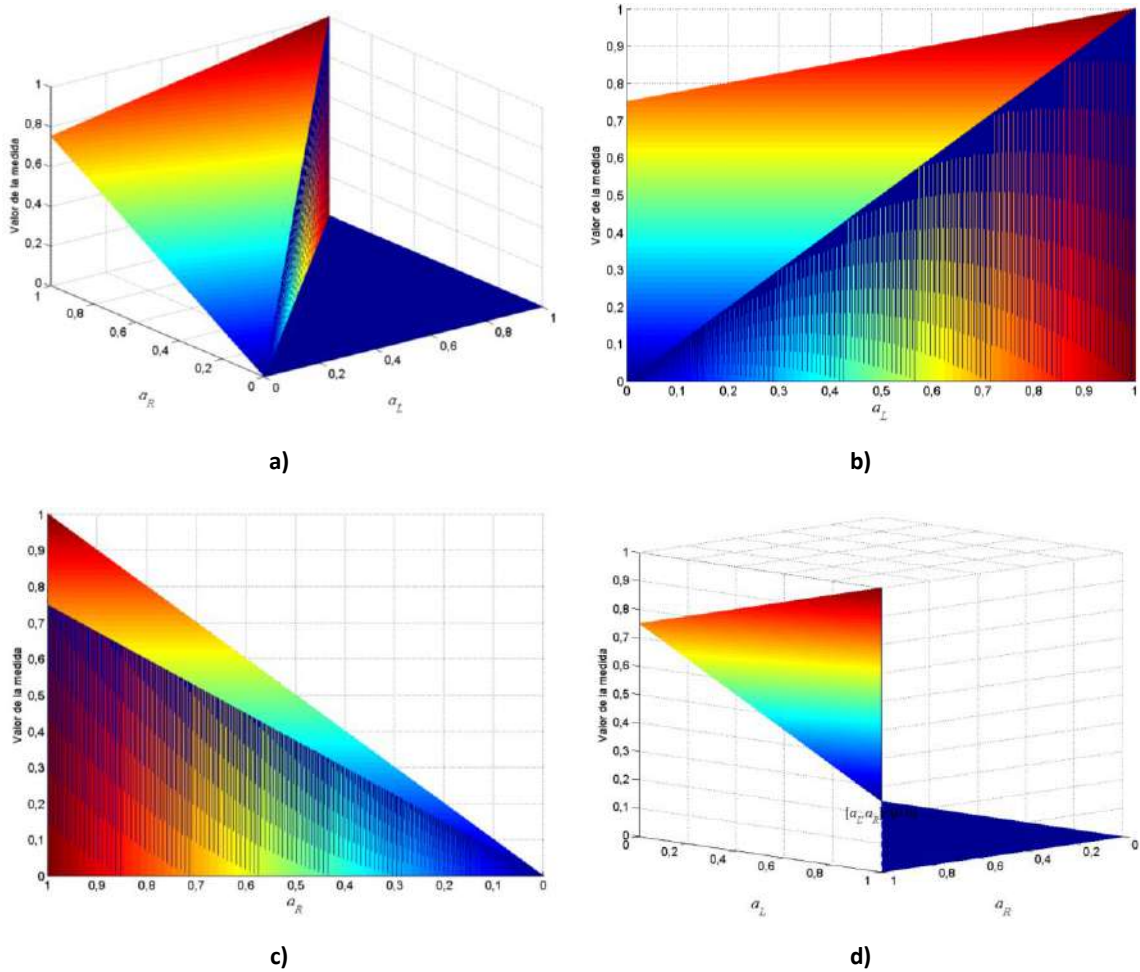


Figura 5.9. Medida de intervalos de valores de verdad f adoptando la función propuesta #3 para g y analizando todos los posibles valores del espacio de intervalos de valores de verdad, con $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$.

El plano en azul representa al plano $f(a_L, a_R) = 0$. El plano paralelo al eje vertical representa $a_L = a_R$ y busca ayudar a la interpretación del gráfico.

Se muestran cuatro vistas que permiten visualizar la forma de la superficie definida por la función g .
a) Vista A. **b)** Vista B, eje a_L (el eje a_R es perpendicular al dibujo). **c)** Vista C, eje a_R (el eje a_L es perpendicular al dibujo). **d)** Vista D.

Como puede observarse de las distintas vistas presentadas en la Figura 5.9, la medida de intervalo de valores de verdad f evaluada a través de la función propuesta #3 es una función suave con las siguientes características:

- La función es creciente y toma valores en $[0,1]$ para $0 \leq a_L \leq a_R \leq 1$. En particular, la función queda representada por un plano, pero de características distintas a las de la función propuesta #2.
- Considerando un valor fijo de $a_L = 0$ y partiendo desde $a_R = 0$, con ayuda de la recta de menor pendiente mostrada en la Figura 5.9c, puede verse que f crece en forma lineal desde 0 hasta un valor máximo de 0,75 para $a_R = 1$, pesando la imprecisión e incertidumbre representada por el intervalo, que para el caso de $A = [a_L, a_R] = [0,1]$ son máximas.
- Para $a_R = 1$ (recta de menor pendiente en la Figura 5.9b), a medida que crece a_L también lo hace en forma lineal el valor de la medida f , indicando que el valor de verdad global también crece, ya que como a_L se acerca a a_R , la imprecisión e incertidumbre representadas por el intervalo de valores de verdad disminuye, acercándose el intervalo al valor máximo $A = [a_L, a_R] = [1,1]$.
- Como se observa en la Figura 5.9a, para $a_L = a_R$, la función es creciente, guardando la relación de orden en $\mathbb{R}$ que se obtendría en $a_L = a_R = a$.
- Partiendo de $a_L = a_R$ y analizando el gráfico de la Figura 5.9a, a medida que a_R crece, el valor de la medida también crece, lo que permite concluir que la medida compensa de alguna manera el aumento de la imprecisión o la incertidumbre en el valor de verdad con el aumento de su valor máximo de valor de verdad a_R .
- Finalmente, observando detenidamente la Figura 5.9c, donde el eje a_L es perpendicular al dibujo, el valor de la medida f varía desde el definido por la recta de mayor pendiente (donde $a_L = a_R$) hasta la de menor, correspondiente a $a_L = 0$, es decir, el valor de f disminuye para un mismo valor del extremo superior a_R , cuando la imprecisión o la incertidumbre aumentan debido a que a_L disminuye.

A partir del análisis anterior realizado sobre los valores que toma la medida de intervalos de valores de verdad f para las distintas funciones g propuestas y comparando los resultados de las distintas funciones, puede concluirse lo siguiente:

- Las funciones propuestas #1 y #3 varían en todo el rango $[0,1]$, mientras que la #2 los hace en el rango $[0,5,1]$.

- Las funciones #2 y #3 son proporcionales a las variaciones de a_L y a_R , mientras que la #1 no es proporcional.
- La función propuesta #2 pesa a través de una suma el valor máximo (a_R) y el rango del intervalo, estando principalmente dominada por los valores que toma a_L .
- Las funciones propuestas #1 y #3 permiten pesar, una a través de un producto y la otra a través de una suma, el valor máximo (a_R) y el valor medio del intervalo.
- En los análisis anteriormente realizados en las Secciones 5.2.1 y 5.2.2, al estudiar los casos posibles al comparar intervalos de valores de verdad (Casos A, B y C), se puso especial énfasis en la evaluación conjunta del valor medio y del rango de los intervalos. En este sentido, las funciones propuestas #1 y #3 pesan directamente el valor medio y evalúan indirectamente el rango del intervalo a través del valor máximo. Al contrario, la función propuesta #2 pesa directamente el rango del intervalo, cuando mayor sea el rango menor será el valor de la medida, e indirectamente el valor medio a través del uso del valor máximo del intervalo.
- Analizando la pendiente de las funciones en forma parcial para a_L y para a_R , la función #2 es la única con pendiente constante. La función #1 varía suavemente para valores pequeños tanto de a_L como de a_R y más bruscamente a medida que a_L y a_R crecen. La función #3, tiene pendiente constante para un valor fijo de a_L o de a_R .
- Pensando en la sensibilidad de las medidas de intervalos de valores de verdad de acuerdo a la pendiente de los gráficos, la más sensible es la función #1 (para valores altos a_L y a_R), siguiéndole por sensibilidad decreciente la función #3 y luego la #2. Sin embargo, dado que la mayor sensibilidad de la función #1 se presenta para valores altos, esencialmente por estar definida como un producto; en aplicaciones generales, las funciones #2 y #3 podrían ser preferibles por su proporcionalidad al crecimiento de los valores medios y los rangos de los intervalos.

5.2.3.2. Partición generada por sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados difusos: Análisis gráfico

En esta Sección se analiza la partición generada por un sistema difuso que sigue el enfoque propuesto en esta Tesis, es decir, combina LD tipo 2 de intervalos y predicados difusos, y que es utilizado para clasificar un conjunto de datos generado sintéticamente en $\mathbb{R}^2$. El análisis tiene como objetivo confirmar si existen diferencias en la frontera de decisión obtenidas con las distintas

funciones propuestas en este Capítulo para evaluar la medida de intervalos de valores de verdad (funciones propuestas #1 a #3) y con las fronteras de decisión obtenidas LD tipo 1 y otros métodos tradicionales de clasificación de datos.

El conjunto de datos sintético, que define en el ámbito de esta prueba el problema de clasificación, consiste en 300 vectores de características (datos) de dimensión 2 (dos características por vector), distribuidos con una frecuencia similar en 3 clases, identificadas por simplicidad como: *Clase 1*, *Clase 2* y *Clase 3*. Las características también son genéricas y serán referidas como: *Característica #1* y *Característica #2*. El conjunto de datos utilizado se muestra en la Figura 5.10.

Durante todo el análisis presentado en esta Sección, el conjunto de datos será tomado como un conjunto de datos a clasificar, siguiendo un enfoque supervisado, que ha sido generado a partir de un proceso desconocido y el objetivo perseguido aquí es analizar la forma de la superficie de separación que genera un clasificador generado para estos datos que utilice LD tipo 2 de intervalos. Para el caso analizado, al tratarse de un conjunto de datos de dimensión 2, la superficie de separación se transforma en una línea en el plano $\mathbb{R}^2$.

El sistema difuso fue generado heurísticamente, a partir de los datos de ejemplo y de lo que se visualiza en el gráfico presentado en la Figura 5.10. Como se ha mencionado a lo largo de esta Tesis, generar un sistema difuso consiste en definir funciones de pertenencia para los atributos relevantes de las distintas características y predicados difusos, que relacionen lógicamente los atributos descritos por las funciones de pertenencia con las clases.

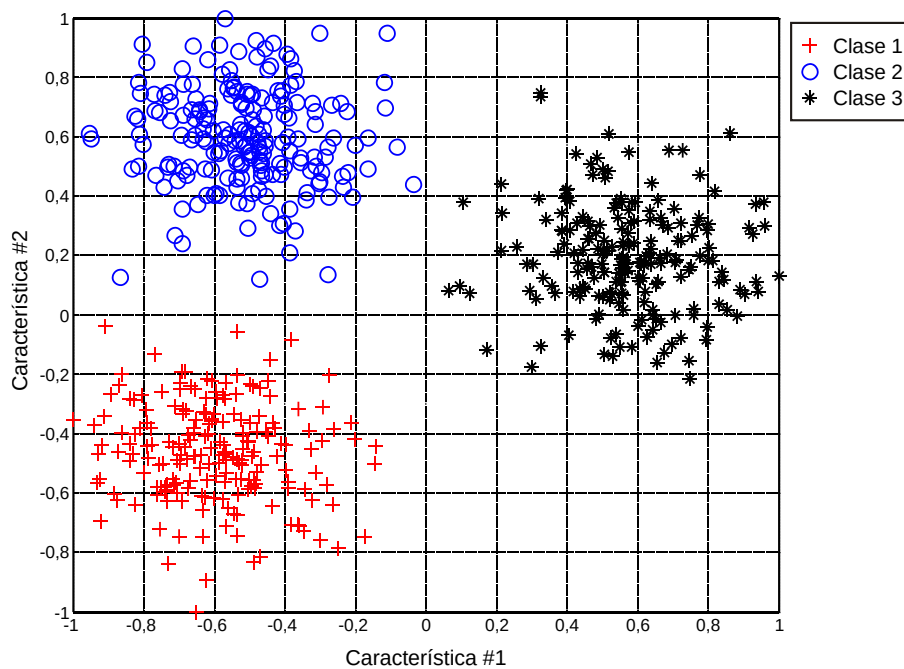


Figura 5.10. Conjunto de datos generados sintéticamente para analizar un clasificador basado en LD tipo 2 de intervalos y predicados.

El conjunto de datos está formado por 300 datos, distribuidos con igual frecuencia entre 3 clases.

Para completar el análisis, se generó un sistema difuso basado en LD tipo 1 y, además, se diseñaron clasificadores basados en métodos tradicionales. Específicamente, se utilizaron redes neuronales artificiales [Haykin, 1999]: perceptrón multicapa (MLP) y redes neuronales probabilísticas (PNN); y el método de K vecinos más próximos (kNN) [Duda *et al.*, 2001; Warfield, 1996]; métodos que fueron presentados y explicados en el Capítulo 3.

Considerando la manera en que los datos se encuentran distribuidos en el espacio, y siguiendo la metodología presentada en el Capítulo 4 para los sistemas difusos utilizados en clasificación y agrupamiento de datos, ampliada de manera detallada en el Ejemplo 5.1 del presente Capítulo, se definieron las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y tipo 1 que se muestran en la Figura 5.11. Como se puede observarse, las funciones de pertenencia generadas para ambos tipos de LD están relacionadas a atributos difusos: “Baja”, “Levemente Baja” y “Alta” para la *Característica #1*; y “Baja”, “Media” y “Alta” para la *Característica #2*; y los predicados que las relacionan con cada una de las 3 clases son los siguientes:

- $p_{\text{Clase 1}}(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ es de la Clase #1” es equivalente a que “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es Baja Y la *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es Baja”;
- $p_{\text{Clase 2}}(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ es de la Clase #2” es equivalente a que “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es Levemente Baja Y la *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es Alta”;
- $p_{\text{Clase 3}}(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ es de la Clase #3” es equivalente a que “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es Alta Y la *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es Media”;

donde $\mathbf{x}$ es un dato del conjunto de datos representado por $\mathbf{X} \subset [-1,1]^2$.

Los predicados difusos simples definidos por las funciones de pertenencia pueden ser notados como:

- $p_{1,1}(\mathbf{x})$: “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es Baja”;
- $p_{1,2}(\mathbf{x})$: “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es Levemente Baja”;
- $p_{1,3}(\mathbf{x})$: “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es Alta”;
- $p_{2,1}(\mathbf{x})$: “La *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es Baja”;
- $p_{2,2}(\mathbf{x})$: “La *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es Media”;
- $p_{2,3}(\mathbf{x})$: “La *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es Alta”;

con lo cual, los predicados difusos compuestos que explican cada una de las clases, los predicados

$p_{\text{Clase 1}}(\mathbf{x})$, $p_{\text{Clase 2}}(\mathbf{x})$ y $p_{\text{Clase 3}}(\mathbf{x})$, pueden ser formalmente escritos como:

$$p_{\text{Clase 1}}(\mathbf{x}) \equiv p_{1,1}(\mathbf{x}) \wedge p_{2,1}(\mathbf{x}), \quad (5.25)$$

$$p_{\text{Clase 2}}(\mathbf{x}) \equiv p_{1,2}(\mathbf{x}) \wedge p_{2,3}(\mathbf{x}), \quad (5.26)$$

$$p_{\text{Clase 3}}(\mathbf{x}) \equiv p_{1,3}(\mathbf{x}) \wedge p_{2,2}(\mathbf{x}), \quad (5.27)$$

definiendo completamente el sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos y el basado en LD tipo 1.

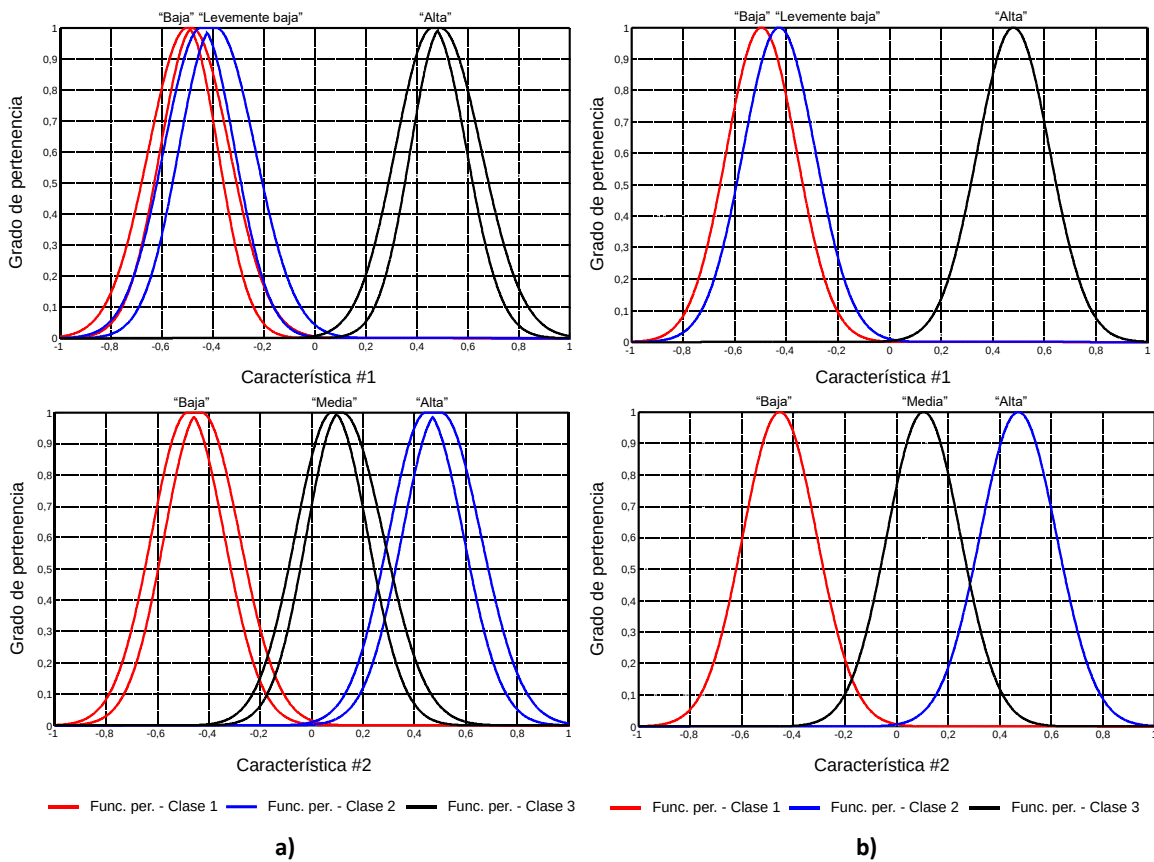


Figura 5.11. Funciones de pertenencia definidas heurísticamente para los sistemas difusos utilizados en la clasificación del conjunto de datos sintéticos analizados en esta Sección.

Se determinó que las clases definidas para el conjunto de datos están relacionadas a los atributos "Baja", "Levemente Baja" y "Alta" para la Característica #1 y "Baja", "Media" y "Alta" para la Característica #2. Las funciones de pertenencia relacionadas a cada clase son representadas con un trazo de un color diferente: el rojo representa a la Clase 1, el azul representa a la Clase 2 y el negro representa a la Clase 3.

a) Funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos. **b)** Funciones de pertenencia tipo 1.

Respecto al diseño de los clasificadores tradicionales, las redes neuronales artificiales MLP y PNN fueron entrenadas con el conjunto de datos inicial $\mathbf{X}$ y, para el algoritmo k NN, el conjunto de datos prototipo se formó con un muestreo aleatorio de 50 vectores de características de cada clase del conjunto $\mathbf{X}$. El resto de los parámetros y arquitecturas utilizados fueron definidos heurísticamente considerando el análisis gráfico que se pretende realizar aquí. Específicamente

para cada clasificador se utilizó:

- **MLP.** Se utilizó una red *feed-forward* con 4 capas de neuronas ocultas; con 15, 10, 5, y 3 neuronas ocultas respectivamente y funciones transferencias sigmoidea para las neuronas ocultas y lineal para las neuronas de las capas de salida. Se utilizó un entrenamiento *back-propagation*, con ajustes de los parámetros internos por época de entrenamiento y con un criterio de finalización al obtener un error de validación menor a 1%.
- **PNN.** Se ajustó el parámetro de difusión (*spread*) a 0,2, considerando la dispersión de los datos utilizados para este análisis.
- **kNN.** Se utilizó distancia euclidiana fijando el valor del número de vecinos en 1.

Una vez generados todos los clasificadores, éstos fueron utilizados para clasificar puntos distribuidos en todo el espacio $\mathbb{R}^2$, con valores de las características variando entre -1 y 1. Una vez clasificados todos los puntos entre algunas de las 3 clases posibles, se graficó la frontera de decisión obtenida para cada clasificador. Para el caso del sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos, se utilizaron las tres medidas propuestas, basadas en las funciones #1 a #3, con el propósito de poder comparar los resultados obtenidos. En la Figura 5.12 se muestra la frontera de separación obtenida para los distintos clasificadores, utilizando colores distintos para cada uno.

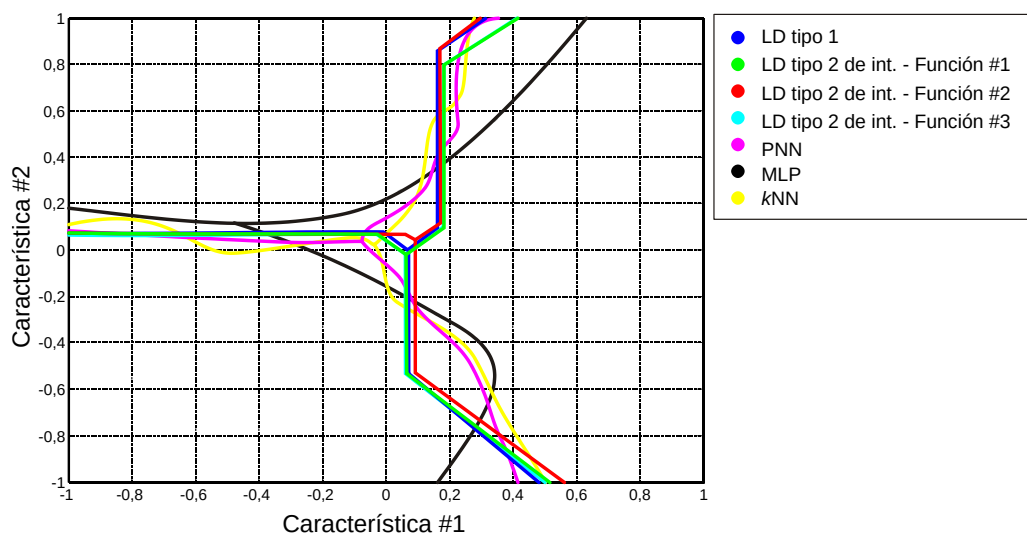


Figura 5.12. Particiones generadas por diferentes clasificadores, para el conjunto de datos sintéticos estudiado en esta sección.

Distintos colores representan distintos clasificadores.

Las fronteras generadas por la LD tipo 2 de intervalos con las funciones propuestas #1 y #3 coinciden en casi todos los casos, es por esto que el trazo correspondiente a la función #1 prácticamente no se distingue del de la #3. Éstas están muy próximas a la obtenida con la LD tipo 1; sin coincidir completamente. La función #2 se diferencia visualmente de las otras fronteras obtenidas para ambos tipos de LD. Existe una diferencia clara en la forma de las fronteras de decisión obtenidas para los enfoques basados en LD y las técnicas tradicionales.

Como puede visualizarse en la Figura 5.12, la frontera de decisión obtenida por la LD tipo 2

de intervalos para las funciones propuestas #1 y #3 coinciden en casi todos sus puntos, por esta razón, el trazo correspondiente a la función #1 prácticamente no se distingue del trazo para la función #3, lo que indica que, para los sistemas difusos generados para este caso, las diferencias existentes entre las funciones #1 a #3 que se analizaron en la Sección anterior no han pesado para esta clasificación. Esto puede ser debido al bajo grado de solapamiento entre las funciones de pertenencia y a la relativamente pequeña región de incertidumbre entre las funciones de pertenencia inferior y superior de los CDs tipo 2 de intervalos utilizados.

Asimismo, si bien las superficies de separación obtenidas con LD tipo 2 de intervalos son próximas a las obtenidas con LD tipo 1 (principalmente las de las funciones #1 y #3), estas superficies no coinciden exactamente. Este hecho indica que, al menos para el caso estudiado aquí, existen diferencias entre los resultados que se obtienen con la LD tipo 1 y los que se obtienen con la LD tipo 2 de intervalos, las cuales serán estudiadas detenidamente en el Capítulo 6. Por otro lado, a partir de la proximidad entre las superficies halladas puede decirse que, en los casos mencionados a lo largo de esta Tesis en los que no fuera posible el uso de LD tipo 1, la LD tipo 2 de intervalos, con la metodología de evaluación y consulta propuesta en esta Tesis, presenta resultados consistentes con los de modelos basados en LD.

La función #2, en particular, se diferencia visualmente de las otras fronteras obtenidas para el resto de los clasificadores basados en LD. Esto puede deberse a la pendiente constante de la función #2 ante variaciones en los valores del intervalo, que fue analizada anteriormente en la Sección 5.2.3.1.

A su vez, existe una diferencia clara en la forma de las fronteras de decisión obtenidas con los enfoques basados en LD respecto a las obtenidas con los otros clasificadores, permitiendo observar que existirá en general una diferencia significativa entre los resultados obtenidos con enfoques basados en LD y predicados y los obtenidos con clasificadores basados en redes neuronales supervisadas y el algoritmo *k*NN. Esta diferencia podría asociarse a la diferencia existente en los fundamentos en los que basa cada uno de estos métodos.

5.3. Generación automática de sistemas difusos

5.3.1 Planteo general y estado de la cuestión

Como se ha mencionado a lo largo de esta Tesis, los sistemas difusos basados en predicados que son utilizados para Reconocimiento de Patrones están formados por funciones de pertenencia y predicados difusos. Las funciones de pertenencia definen con qué valor de verdad los valores que toma una característica en un dato satisfacen un atributo que es relevante a la hora de definir qué

etiqueta corresponde al dato. Los predicados difusos establecen relaciones lógicas entre la satisfacción individual de atributos por parte de las características y la correspondencia de este suceso con una determinada etiqueta [Comas *et al.*, 2014c; Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2008]. Es a través de las funciones de pertenencia y los predicados que los modelos basados en LD permiten implementar conocimiento computacionalmente [Zadeh, 1989].

Alternativamente a la visión habitual según la cual los sistemas difusos son generados a partir del conocimiento de un especialista, en esta Tesis se propone abordar el problema de la generación automática de sistemas difusos a partir de datos, con énfasis en sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos. Como en este enfoque las funciones de pertenencia y los predicados se obtienen automáticamente a partir del análisis de la información contenida en los datos, los métodos de generación automática no sólo permiten generar sistemas difusos para el agrupamiento o la clasificación de datos, sino que, como característica distintiva, permiten descubrir conocimiento oculto en los datos.

Para generar automáticamente sistemas difusos es necesario el análisis de los datos por medio de técnicas que permitan extraer patrones relevantes, es decir, vectores de características dentro de los datos, u obtenidos a partir de éstos, que sean suficientemente representativos de cada una de las etiquetas a determinar con el sistema difuso [Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2013; Meschino *et al.*, 2015a].

La obtención de vectores de características representativos en un problema de clasificación o de agrupamiento de datos está fuertemente relacionada a las técnicas de *clustering*. En este sentido, el *clustering* consiste en descubrir grupos de datos con propiedades comunes, de acuerdo a un criterio de similitud [Jain *et al.*, 1999]. Una vez descubiertos los grupos, los datos de un mismo grupo tienen las mismas propiedades, esto es, se encuentran cercanos en el espacio de características. Las técnicas de *clustering* permiten extraer patrones representativos. Por ejemplo, el centroide de un *cluster* se obtiene como el promedio, componente a componente, de todos los vectores de características pertenecientes a ese *cluster* y es, a su vez, un elemento representativo de los datos de ese *cluster*; debido a que: a) sus componentes son el promedio de las componentes de todos los vectores pertenecientes a ese *cluster* y b) los datos pertenecientes a ese *cluster* son más cercanos a su centroide que a los centroides de los otros *clusters*. Estos patrones representativos son referidos en la literatura como *protoclusters* o prototipos de *clusters* [Lampinen y Oja, 1992; Meschino *et al.*, 2015a; Sarlin, 2013; Sarlin y Eklund, 2011; Vesanto y Alhoniemi, 2000].

Por lo tanto, las técnicas de agrupamiento de datos se presentan como herramientas esenciales para extraer, a partir de datos, la información necesaria para definir las funciones de pertenencia y los predicados difusos. En la literatura existen una gran cantidad de algoritmos de *clustering*, algunos de los cuales fueron revisados en el Capítulo 3 y otros pueden ser consultados

en [Dubey *et al.*, 2010; Luxburg, 2007; Meschino *et al.*, 2015a; Pedrycz, 2004; Sarlin y Eklund, 2011; Yang y Ahuja, 2014; Zexuan *et al.*, 2014].

Un enfoque fuertemente relacionado con los métodos propuestos en esta Tesis para la generación automática de sistemas difusos, es la combinación de SOM con técnicas generales de *clustering*, donde, una vez entrenados, los *codebooks* de los SOM son agrupados en un enfoque de *clustering* de dos niveles (en inglés *two-level clustering*). Como se explicó en el Capítulo 3, los SOM generan un mapeo que reduce la dimensionalidad y que es coherente con la función densidad de probabilidad de los datos de entrenamiento. A su vez, el número de celdas de los SOM es significativamente menor al número de datos con el que se entrenan [Meschino *et al.*, 2015a]. Por lo tanto, los SOM se presentan como una herramienta muy adecuada para trabajar con grandes cantidades de datos, donde analizar grupos de celdas en lugar del conjunto de datos original puede llevar a una significativa reducción del costo computacional, a la hora de obtener datos prototipos de *cluster*. Sumado a esto, al considerar promedios de los datos de entrenamiento, los SOM remueven ruido de los datos, así como datos aislados (*outliers*) y pueden completar valores faltantes.

Existe una gran cantidad de trabajos publicados que exploran el uso del SOM como técnica de *clustering* para la extracción y el análisis de patrones contenidos en datos. A continuación, se presenta una revisión de algunos de estos trabajos.

En [Lampinen y Oja, 1992] se propone un método de *clustering* utilizando un SOM de múltiples capas, llamado HSOM, con el fin de agrupar datos complejos. Los autores argumentan que cuando el nivel de abstracción de la tarea de clasificación aumenta, la forma de las regiones asociadas a las clases se vuelve más compleja, requiriendo de grandes cantidades de datos de entrenamiento para encontrar las fronteras entre las clases. En estos casos, el uso de técnicas de aprendizaje no supervisado puede reducir el entrenamiento requerido. Se argumenta que el objetivo del algoritmo de aprendizaje del SOM no es solamente encontrar el conjunto de vectores prototipos más representativos para el conjunto de entrenamiento en el sentido de valor cuadrático medio, sino, al mismo tiempo realizar un mapeo topológico desde el espacio de entrada a un mapa de neuronas, actualizando los pesos internos de la red, tendiente a preservar el espacio topográfico de entrada. Por lo tanto, celdas en una vecindad del mapa están relacionadas a datos cercanos en el espacio de entrada y un grupo de datos puede ser obtenido a través del SOM, donde celdas cercanas topográficamente se asocian con un mismo *cluster*. En particular, el HSOM es capaz de formar grupos de datos en datos con estructura compleja.

En [Vesanto y Alhoniemi, 2000], se propone un *clustering* de dos niveles utilizando un enfoque SOM-*Clustering* que usa *clustering* aglomerativo en el segundo nivel. Un gran conjunto de prototipos interpretado como *protoclusters*, mayor que el número de *clusters*, es generado por un SOM en el primer nivel. Los *protoclusters* se combinan para formar grupos de datos en el segundo

nivel. Cada vector de características del conjunto de datos original pertenece al mismo *cluster* que su prototipo más cercano. Aunque un mayor nivel de abstracción, debido al *clustering* de segundo nivel, genera mayor distorsión en cuanto al análisis de los patrones, también reduce la complejidad en la tarea de extracción de prototipos de *clusters*.

En [Murtagh, 1995] se presenta un enfoque de *clustering* que aplica un método llamado *contiguity-constrained* en el segundo nivel. Primero, un SOM es entrenado y los vectores prototipos son interpretados como *clusters* definidos por el criterio de mínima distancia, con los centros de los *clusters* localizados en una grilla sobre el SOM, de tal manera que proximidad refleje similitud. Luego, el algoritmo busca la mínima distancia entre vectores prototipos pertenecientes a dos *clusters* diferentes y los combina en un único grupo. Este algoritmo recursivo termina al alcanzar una condición de estabilidad definida por el usuario.

Un estudio de las características del SOM para el análisis de datos faltantes en base de datos es realizado por [Cottrell y Letrémy, 2005]. En este trabajo se argumenta que el uso del SOM es uno de los únicos métodos adecuados para el procesamiento de base de datos con pocos datos, o cuando muchos de ellos faltan. Se presentan varios ejemplos, donde el método estima valores perdidos con buena exactitud.

Otros autores han trabajado sobre la fuzzificación de los SOM. En particular, [Sarlin y Eklund, 2011] aplican un modelo de dos niveles de *clustering* combinando SOM con el algoritmo FCM [Ruspini, 1969]. El algoritmo FCM asocia a cada celda del mapa una pertenencia parcial a los *clusters* identificados, los cuales están solapados. De acuerdo a los autores, el segundo nivel de *clustering* sobre los SOM permite el análisis del grado de pertenencia a los *clusters* auto-descubiertos, el cual no es siempre fácil de analizar. En particular, de acuerdo a los autores, el *clustering* difuso obtenido del FCM permite una representación de problemas del mundo real, donde los datos tienen imprecisión e incertidumbre.

En [Drobics *et al.*, 2002], los autores proponen la extracción de descripciones lingüísticas interpretables a través de un enfoque de tres etapas, el cual combina SOM, FCM y generación de funciones de pertenencia. La característica más relevante detallada en este trabajo, opuesta al enfoque que se utilizará en esta Tesis, es que una vez encontrados los prototipos de *clusters* los autores realizan un análisis de los *protoclusters* característica por característica (variable a variable), dejando de considerar los *clusters* como un conjunto de datos que reúnen ciertas propiedades. Es decir, los autores se apartan de la visión de que en un *cluster* los vectores de características están cercanos en el espacio de características por una combinación de los valores de sus características en forma conjunta, y no en forma individual.

En el análisis característica a característica propuesto en Drobics *et al.*, se predefinen funciones de pertenencia distribuidas en todo el rango que toman las características. Finalmente,

los predicados se forman analizando con un algoritmo de optimización que combinación de funciones de pertenencia y operadores difusos tienen mayor valor de verdad entre todas las posibles, al aplicarlas sobre los prototipos de *clusters* encontrados a través del SOM y el algoritmo FCM.

A partir de esta revisión de trabajos, quedan bien definidos los aportes del *clustering* en general, y los del SOM en particular, a la extracción de patrones representativos de grupos de datos entre el conjunto de vectores de características que define el problema de Reconocimiento de Patrones. Una vez extraídos los prototipos de *clusters*, éstos deben analizarse para definir las funciones de pertenencia y los predicados difusos, para llegar a la creación del sistema difuso.

Resumiendo, el problema de generación automática de sistemas difusos para Reconocimiento de Patrones abordado en esta Tesis, consiste en: a) definir funciones de pertenencia que relacionen atributos de las características con propiedades que satisfacen los datos de una etiqueta y b) encontrar relaciones difusas para llegar a predicados difusos que relacionen lógicamente las funciones de pertenencia y permitan determinar la etiqueta a asignar a un dato.

Como se ha mencionado a lo largo de esta Tesis, las funciones de pertenencia están asociadas a atributos, propiedades que una característica cumple, como, por ejemplo: “*bajo*”, “*alto*”, “*grande*”, “*chico*”, etc. Al generar las funciones de pertenencia automáticamente, estos atributos también deben encontrarse automáticamente. En [Bodenhofer y Bauer, 2000], los autores realizan un análisis general de las formas de interpretación de las funciones de pertenencia y establecen una observación importante: “*cuando se definen funciones de pertenencia, en especial si éstas son generadas automáticamente, es importante preservar el contenido semántico de las expresiones de lenguaje natural; por ejemplo, el atributo ‘bajo’ debe corresponder a valores menores que ‘alto’, para poder alcanzar descripciones interpretables*”. Asimismo, en [Zadeh, 1989] se da especial importancia a los predicados difusos y las funciones de pertenencia, indicando que son éstos los que representan el significado de las expresiones y su interpretación está íntimamente relacionada con el conocimiento.

A partir del análisis realizado en esta Sección, en las siguientes Secciones serán presentados los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos en esta Tesis. En la Sección que sigue, se presenta el enfoque general propuesto para la generación de las funciones de pertenencia a partir de datos.

5.3.2 Generación de la función de pertenencia a partir de datos: Enfoque propuesto

En la Sección anterior se ha hecho hincapié en que la generación de sistemas difusos para Reconocimiento de Patrones requiere la definición de funciones de pertenencia y de predicados difusos. Además, se enfatizó el rol que cumplen las funciones de pertenencia: *definir con qué valor de verdad los valores que toma una característica en un dato satisfacen un atributo que es relevante a la hora de asignar una etiqueta a un dato*. En este sentido, es de especial interés a la hora de definir las funciones de pertenencia encontrar ese “*atributo relevante para la definición de la etiqueta*”. También se mencionó y se explicó, debido a su importancia para el desarrollo de los métodos propuestos aquí, cómo las técnicas de *clustering* permiten extraer vectores de características relevantes y representativos de los *clusters*, los cuales se han denominado *protoclusters*.

Si bien el caso de clasificación de datos no se desarrolló en concreto, en este caso particular, el sistema difuso a generar, el cual es un clasificador, se diseña con un enfoque supervisado a partir de datos preclasificados, es decir, a partir de un *Gold-Standard* definido a través de un vector de etiquetas deseadas para cada dato, y el conjunto de datos es un conjunto de datos etiquetados, tal como se definió en el Capítulo 3. Partiendo de esta observación, los patrones relevantes o representativos de cada clase pueden obtenerse directamente como los vectores de características pertenecientes a cada clase [Comas *et al.*, 2014b].

A modo de resumen, al generar automáticamente sistemas difusos a partir de datos pueden presentarse:

- Un conjunto de datos a agrupar, donde **el sistema difuso se utilizará para agrupar datos**, y los prototipos de *clusters* o *protoclusters* se deberán extraer con técnicas tradicionales de *clustering* o con enfoques basados en *SOM-Clustering*, a partir de los cuales el sistema difuso se generará en forma no supervisada;
- Un conjunto de datos a clasificar, donde **el sistema difuso será un clasificador**, y los prototipos de clases se extraerán directamente a partir de los datos correspondientes a cada clase en el conjunto de datos previamente etiquetados, a partir de los cuales el sistema difuso será generado de manera supervisada.

Con estos dos posibles enfoques, en esta Sección se abordará la generación de funciones de pertenencia a partir de datos, considerando que ya se han extraído los prototipos de *clusters* o los prototipos de clases, según se trate de un problema de agrupamiento o de clasificación. Para facilitar el desarrollo que sigue y siempre que no sea necesario distinguir entre uno u otro, los prototipos de *clusters* y los prototipos de clases serán nombrados simplemente como prototipos o

conjunto de prototipos. El análisis particular de los métodos de extracción de prototipos será tratado en las Secciones siguientes, al presentar en forma completa los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos en esta Tesis.

A diferencia del enfoque propuesto por [Drobits *et al.*, 2002] que fue detallado en la Sección anterior, y con base en los resultados obtenidos en trabajos previos propios [Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2013; Meschino *et al.*, 2015a], **el enfoque propuesto en esta Tesis consiste en el análisis global de los datos en el conjunto de prototipos, considerando la interrelación entre las diferentes características;** manteniendo el foco en que una etiqueta representa, desde el punto de vista de sus prototipos, un conjunto de vectores de características cercanos, es decir, que toman valores “parecidos”, compartiendo las mismas propiedades o atributos. Estos atributos se encuentran implícitos en los prototipos y deben ser descubiertos para darle una interpretación a las funciones de pertenencia generadas.

Por lo tanto, **en esta Tesis se propone analizar y caracterizar la región del espacio de características ocupada por los prototipos para una etiqueta, partiendo del hecho que, cuando un dato pertenece o corresponde a esa etiqueta, los valores de todas sus características son cercanos a los valores de las características representados por los prototipos.** En consecuencia, para definir la función de pertenencia es necesario caracterizar el grado de correspondencia entre los valores de las características en un dato y los valores contenidos en el conjunto de prototipos.

En el resto de este Capítulo, $\Gamma_k \subset [-1,1]^d$ representará un conjunto de prototipos representativos de la etiqueta k , extraído mediante alguno de los métodos propuestos en esta Tesis, los cuales se analizarán en detalle más adelante. Asimismo, $\{\Gamma_k\}_{k=1,\dots,K}$ representará el conjunto de todos los vectores prototipo obtenidos para el total de etiquetas K correspondiente al problema estudiado.

Siguiendo la visión presentada en párrafos anteriores, podría decirse que: un dato genérico $\mathbf{x} \in [-1,1]^d$, el cual es un vector de características $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, pertenece o corresponde a la etiqueta k si los valores de todas sus características $x_i, i = 1, \dots, d$ están cerca de las características observadas en el conjunto de prototipos para esa etiqueta. Con la visión propuesta en esta Tesis, esta correspondencia es cuantificada a través de una función de pertenencia. En este sentido, considerando una función de pertenencia $\bar{\mu}_{i,k}$, la función de pertenencia evaluada en x_i definirá el valor de verdad de la proposición $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$: “La característica i en el dato $\mathbf{x}$ corresponde o pertenece a la etiqueta k ” o “La característica i en el dato $\mathbf{x}$ está cerca de los ejemplos prototipo de la etiqueta k ”.

Siguiendo este enfoque propuesto, puede verse que, si el grado en que los valores de las características del dato $\mathbf{x}$ corresponden a los valores observados en los prototipos de la etiqueta k es cuantificado mediante funciones de pertenencia dando como resultado un valor de verdad; entonces, es posible cuantificar el valor de verdad global de la pertenencia del dato $\mathbf{x}$ a esa etiqueta analizando conjuntamente los valores de verdad de la pertenencia de las características $x_i, i = 1, \dots, d$ a la etiqueta, los cuales están descriptos por las funciones de pertenencia $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1, \dots, d}$. Siguiendo este razonamiento y por medio de operadores de la LD, si se define el predicado $p_k(\mathbf{x})$ como “el dato $\mathbf{x}$ pertenece o corresponde a la etiqueta k ”, entonces puede decirse que $p_k(\mathbf{x})$ es equivalente a:

$$p_k(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mu}_{1,k}(x_1) \wedge \bar{\mu}_{2,k}(x_2) \wedge \dots \wedge \bar{\mu}_{d,k}(x_d), \quad (5.28)$$

es decir, $p_k(\mathbf{x})$ es lingüísticamente interpretado como “La característica 1 en el dato $\mathbf{x}$ corresponde o pertenece a la etiqueta k Y la característica 2 en el dato $\mathbf{x}$ corresponde o pertenece a la etiqueta k Y... la característica d en el dato $\mathbf{x}$ corresponde o pertenece a la etiqueta k ”. El operador de conjunción implica que el valor de verdad con el que un dato $\mathbf{x}$ pertenece a la etiqueta k depende del grado en que los valores de las características de ese dato $x_i, i = 1, \dots, d$ corresponden conjuntamente a esa etiqueta.

Una consecuencia directa es que **si se definen las funciones de pertenencia $\bar{\mu}_{i,k}$ para todas las etiquetas y todas las características, es decir $\forall(i, k), i = 1, \dots, d, k = 1, \dots, K$; y se definen a partir de las funciones de pertenencia $\bar{\mu}_{i,k}$ los predicados $\{p_k(\mathbf{x})\}_{k=1, \dots, K}$, se definiría completamente un sistema difuso basado en predicados**, el cual es el objetivo del análisis desarrollado en esta Sección.

Por lo tanto, para generar los sistemas difusos es necesario determinar cómo definir las funciones de pertenencia $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1, \dots, d, k=1, \dots, K}$. Considerando una característica i y una etiqueta k , el valor de verdad de $\bar{\mu}_{i,k}$ debería variar considerando la cercanía de los valores de la característica a los prototipos de esa etiqueta, ya que $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$ es interpretado como el predicado “La característica i en el dato $\mathbf{x}$ corresponde a la etiqueta k ” o “La característica i en el dato $\mathbf{x}$ está cerca de los ejemplos prototipo de la etiqueta k ”. Considerando que las funciones de pertenencia se definen a partir de prototipos, el centroide del conjunto de prototipos Γ_k guarda una mayor correspondencia, o es el más cercano, a los ejemplos para la etiqueta k . En consecuencia, el valor de verdad representado por $\bar{\mu}_{i,k}$ en el centroide de Γ_k debería ser máximo. De la misma manera, $\bar{\mu}_{i,k}$ debería descender a medida que los valores de la característica se alejan del centroide de Γ_k .

Con esta consideración, **en esta Tesis se propone el uso de funciones de pertenencia suaves, gaussianas, con valor máximo en el centroide de las observaciones en Γ_k y cuyo valor de verdad descende a medida que la característica se aleja del centroide de Γ_k , de acuerdo a la dispersión de los datos en Γ_k para cada característica.** Es importante notar que, tal como se analizó en el Capítulo 4, podrían considerarse otras formas de funciones de pertenencia. La elección de funciones gaussianas para los métodos propuestos en esta Tesis radica en que sólo son necesarios dos parámetros para su completa definición.

En lo que sigue, el centroide de un conjunto de datos prototipos Γ_k será notado $\Omega_k = \{\omega_{i,k}\}_{i=1,\dots,d}$ y la dispersión de cada característica en Γ_k será notada $\Sigma_k = \{\sigma_{i,k}\}_{i=1,\dots,d}$. En el enfoque propuesto, la dispersión en los datos controla el ancho de las funciones de pertenencia, actuando como parámetro de cuán rápido el valor de verdad de $\bar{\mu}_{i,k}$ descende a medida que las características se alejan de los valores prototipos en Γ_k ; reflejando el hecho de que, a medida que la característica en un dato se aleja del centroide Γ_k , el valor de verdad de la correspondencia de ese dato a la etiqueta descende.

Con este enfoque, si los datos en Γ_k están relativamente dispersos, los valores de $\{\sigma_{i,k}\}_{i=1,\dots,d}$ serán en general altos y, en consecuencia, las funciones de pertenencia serán anchas, reflejando que los prototipos para esa etiqueta abarcan un gran rango de los valores posibles de las características, esto es, se encuentran distribuidos a lo largo de una gran región en el espacio de características.

Considerando en primer lugar la definición, a partir de Γ_k , de funciones de pertenencia tipo 1, y siguiendo la visión desarrollada a lo largo de esta Sección, una función de pertenencia tipo 1 que describa la etiqueta k para la característica i está definida como:

$$\mu_{i,k}(x_i) = e^{-(x_i - \omega_{i,k})^2 / 2\sigma_{i,k}^2}, \quad (5.29)$$

donde $\mu_{i,k} : [-1,1] \rightarrow [0,1]$ es una función de pertenencia tipo 1 (como fue definida en el Capítulo 4), $\omega_{i,k}$ es la componente i del centroide de Γ_k y $\sigma_{i,k}$ es la dispersión en la componente i del conjunto Γ_k . En la Figura 5.13 se presenta un esquema general del enfoque propuesto.

Los sistemas difusos propuestos y utilizados en esta Tesis se basan en LD tipo 2 de intervalos. Por esta razón, **debe definirse un método para aplicar todas las consideraciones analizadas anteriormente para la generación de las funciones de pertenencia, con el fin de definir funciones**

de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1,\dots,d}^{k=1,\dots,K}$ (funciones de pertenencia valuadas en intervalos) a partir de los datos en $\{\Gamma_k\}_{k=1,\dots,K}$.

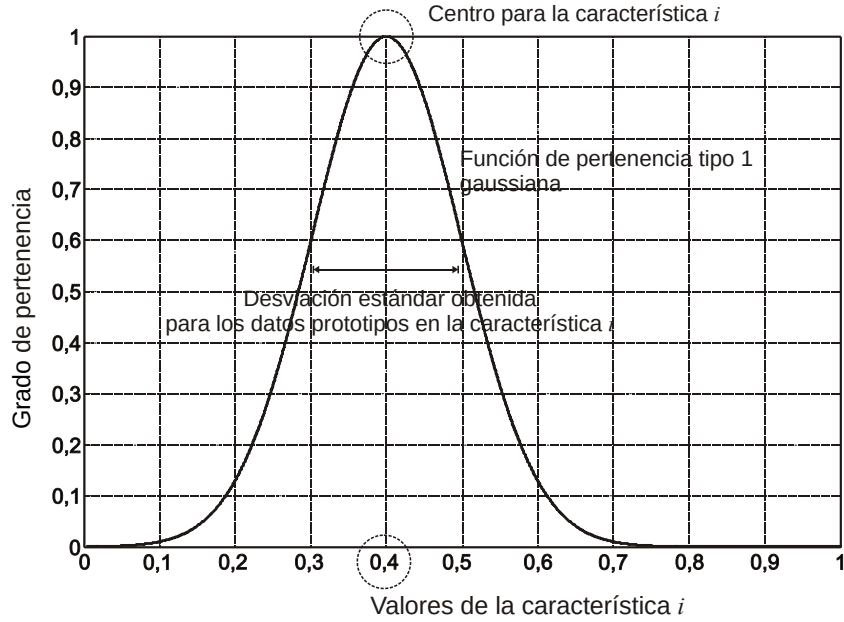


Figura 5.13. Función de pertenencia tipo 1 definida a partir de prototipos siguiendo el enfoque propuesto en esta Tesis, para una característica genérica i .

El centro de la función de pertenencia gaussiana es la componente i del centroide de los datos prototipos en Γ_k . La dispersión de esta componente controla el ancho de la función de pertenencia, reflejando el hecho que a medida que la característica en un dato se aleja del centroide, el valor de verdad de la correspondencia de ese dato a la clase o *cluster* desciende.

Al definir las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos en el Capítulo 4, se introdujo el concepto de región de incertidumbre (FOU) (Definición 4.12), indicando que la FOU define una región acotada de incertidumbre e imprecisión alrededor de valor de verdad definido por una función de pertenencia tipo 1, modelada mediante intervalos de valores de verdad. A partir de la definición de la FOU, una función de pertenencia tipo 2 de intervalos queda completamente definida por las funciones de pertenencia que acotan el área representada por la FOU, esto es:

$$\bar{\mu}(u) = [\varphi_{\bar{\mu}}^-(u), \varphi_{\bar{\mu}}^+(u)], \quad (5.30)$$

donde $\varphi_{\bar{\mu}}^- : U \rightarrow [0,1]$ y $\varphi_{\bar{\mu}}^+ : U \rightarrow [0,1]$ son, respectivamente, las función de pertenencia inferior y la función de pertenencia superior de la función de pertenencia tipo 2 de intervalos $\bar{\mu} : U \rightarrow \chi$, $\chi = \xi([0,1])$ es el espacio de todos los intervalos de valores de verdad y $\bar{\mu}(u)$ es un intervalo de valores de verdad.

Utilizando el concepto de FOU, en esta Tesis **se propone definir la función de pertenencia tipo 2 de intervalos $\bar{\mu}_{i,k}$, la cual describe los prototipos para la etiqueta k en la componente i , agregando [Dubois y Prade, 1985; Zadeh, 1975] dos o más funciones de pertenencia tipo 1**

generadas a partir de los prototipos en $\Gamma_k, k=1, \dots, K$. El enfoque propuesto se explica detalladamente en el resto de esta Sección.

Al describir los métodos basados en ensamble en el Capítulo 3, se mencionaron métodos para la partición de datos a partir de un conjunto de datos inicial, básicamente, por medio de muestreo aleatorio con sustitución o de la definición de una partición aleatoria que genere subconjuntos disjuntos [Dietterich, 2000; Ghosh y Acharya, 2011; Rokach, 2010]. En estos casos, los subconjuntos generados son muestras representativas del mismo conjunto de datos original, pero sus rasgos individuales son diferentes.

A partir de los métodos de partición de datos utilizados en ensambles, se propone utilizar en esta Tesis subconjuntos disjuntos obtenidos por medio de una partición aleatoria, aplicada al momento de generar los conjuntos de datos prototipos. Con esta consideración, la definición de funciones de pertenencia a partir de datos prototipos se redefine considerando M conjuntos de datos prototipos, en lugar de un único conjunto, a partir de los cuales las funciones de pertenencia deben ser obtenidas. Por lo tanto, todos los prototipos, con los cuales debe diseñarse el sistema difuso, estarán distribuidos en $M \times K$ subconjuntos de datos prototipo, notados $\{\Gamma_{m,k}\}_{m=1, \dots, M, k=1, \dots, K}$, donde $\Gamma_{m,k}$ es uno de los M subconjuntos de prototipos para la etiqueta K .

Por lo tanto, en el resto de esta Sección, se explicará el método propuesto para obtener funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de los prototipos en $\{\Gamma_{m,k}\}_{m=1, \dots, M, k=1, \dots, K}$, asumiendo que éstos fueron obtenidos previamente mediante algún procedimiento. Los métodos utilizados en esta Tesis para generar los conjuntos de datos prototipos $\Gamma_{m,k}, m=1, \dots, M, k=1, \dots, K$ varían en cada uno de los métodos de generación automática de sistemas difusos. Los detalles de cada caso serán explicados al presentar métodos de generación automática.

Al considerar particiones sobre los conjuntos de datos, para cada etiqueta $k \in \{1, \dots, K\}$ se tienen M subconjuntos de datos prototipo, con datos representativos de las mismas etiquetas, pero cuyos rasgos individuales varían entre sí, permitiendo caracterizar más ampliamente la etiqueta. Representando como $\Omega_{m,k} = \{\omega_{i,m,k}\}_{i=1, \dots, d}$ y $\Sigma_{m,k} = \{\sigma_{i,m,k}\}_{i=1, \dots, d}$, respectivamente, al centroide y a la dispersión del conjunto de prototipos $\Gamma_{m,k}$, pueden definirse nuevamente funciones de pertenencia tipo 1 gaussianas siguiendo los lineamientos dados anteriormente, es decir, utilizando los parámetros $\omega_{i,m,k}$ y $\sigma_{i,m,k}$; describiendo la correspondencia del valor de la característica i de un dato, con los valores prototipo para la etiqueta k de acuerdo a los prototipos observados. En general, $\omega_{i,m,k}$ y $\sigma_{i,m,k}$ serán diferentes entre los M subconjuntos, debido a que corresponden a un muestreo sin sustitución de los datos iniciales para una misma etiqueta, que fue construido buscando describir la diversidad existente en los prototipos para una misma etiqueta.

Con esta visión, cada función de pertenencia tipo 1 $\mu_{i,m,k}$, de parámetros $\omega_{i,m,k}$ y $\sigma_{i,m,k}$, será distinta y el conjunto de todas las M funciones para una característica i y una etiqueta k modelará la imprecisión y la incertidumbre existentes al definir el valor de verdad del predicado “La característica i en el dato x corresponde a la etiqueta k ” o, lo que es lo mismo, “La característica i en el dato x está cerca de los ejemplos prototipo para la etiqueta k ”. Cada función de pertenencia modelará las observaciones en un subconjunto de prototipos diferentes, operando como “opiniones diferentes” provenientes de diferentes visiones de un mismo problema de clasificación o agrupamiento. Estas “opiniones” pueden reunirse desde el punto de vista de la LD utilizando operadores de agregación, los cuales han sido revisados en el Capítulo 4.

En esta Tesis, se propone utilizar los operadores MIN y MAX, agregando las funciones de pertenencia tipo 1 $\mu_{i,m,k}$ en dos nuevas funciones de pertenencia, las cuales definen la función de pertenencia inferior y la función de pertenencia superior de una función de pertenencia tipo 2 de intervalos $\hat{\mu}_{i,k}$. Formalmente:

$$\hat{\mu}_{i,k}(x) = [\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^-(x), \varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^+(x)], \quad (5.31)$$

$$\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^-(x) = \min \{ \mu_{i,m,k}(x) \}_{m=1,\dots,M}, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad (5.32)$$

$$\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^+(x) = \max \{ \mu_{i,m,k}(x) \}_{m=1,\dots,M}, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad (5.33)$$

donde $k \in \{1, \dots, K\}$, $i \in \{1, \dots, d\}$, $\hat{\mu}_{i,k} : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{X}([0, 1])$ y $\hat{\mu}_{i,k}(x) = [\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^-(x), \varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^+(x)]$ es un intervalo de valores de verdad.

El método propuesto agrega, utilizando operadores de la LD, las funciones de pertenencia tipo 1 generadas, las cuales constituyen descripciones parciales de una etiqueta. Con este enfoque, el intervalo de valores de verdad queda definido por el mínimo y el máximo valor de verdad obtenido entre las M descripciones parciales dadas por las funciones de pertenencia tipo 1 $\{ \mu_{i,m,k} \}_{m=1,\dots,M}$.

Debe notarse que la función de pertenencia tipo 2 de intervalos $\hat{\mu}_{i,k}$, resultante del método anterior, es una aproximación a la función de pertenencia buscada. En ocasiones, los operadores MIN-MAX pueden generar picos en las funciones $\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^-$ y $\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^+$, generando funciones no suaves, que no respetan las observaciones antes realizadas respecto a las características deseadas para funciones de pertenencia obtenidas desde observaciones. Esto es, el uso de funciones suaves tipo gaussiana, con valor máximo en el centroide de las observaciones en $\Gamma_{m,k}$ y cuyo valor de verdad descienda a medida la característica se aleja del centroide de acuerdo a la dispersión de los datos

en $\Gamma_{m,k}$, para cada característica. Además, con el método anterior no se obtiene una expresión funcional de $\hat{\mu}_{i,k}$, lo cual es una característica deseable, particularmente si, luego de diseñar el sistema difuso, se debe realizar su optimización mediante la modificación de los parámetros de las funciones de pertenencia [Meschino, 2008].

Sin embargo, como las funciones de pertenencia tipo 1 $\mu_{i,m,k}$ utilizadas para obtener $\hat{\mu}_{i,k}$ son funciones gaussianas, $\hat{\mu}_{i,k}$ tendrá en general una forma gaussiana. Debido a esto, es posible definir una función de pertenencia buscada $\bar{\mu}_{i,k}$ a partir de $\hat{\mu}_{i,k}$. **Se propone en esta Tesis el uso de una forma de $\bar{\mu}_{i,k}$ formada por tramos de funciones gaussianas definida como:**

$$\bar{\mu}_{i,k}(x) = [\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-(x), \varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+(x)], \quad (5.34)$$

$$\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-(x) = \begin{cases} e^{-(x-\omega_1)^2/2(\sigma_1^2)} & \text{si } x \leq \rho \\ e^{-(x-\omega_2)^2/2(\sigma_2^2)} & \text{si } x > \rho \end{cases}, \quad (5.35)$$

$$\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+(x) = \begin{cases} e^{-(x-\omega_3)^2/2(\sigma_3^2)} & \text{si } x < \omega_3 \\ e^{-(x-\omega_4)^2/2(\sigma_4^2)} & \text{si } x > \omega_4 \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad (5.36)$$

y donde los parámetros $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ y ρ se obtienen a partir de las funciones aproximadas $\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^-$ y $\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^+$. En la Figura 5.14 se muestra una representación genérica de la forma de la función de pertenencia $\bar{\mu}_{i,k}$ propuesta en esta Tesis.

En esta Tesis se propone obtener los parámetros de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$ tomando algunos puntos de las soluciones aproximadas $\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^-$ y $\varphi_{\hat{\mu}_{i,k}}^+$, utilizando **la solución propuesta para una función gaussiana que debe aproximar tres puntos**, cuyo desarrollo completo se realiza para mayor claridad en el Apéndice B, pero cuya solución final se presenta a continuación.

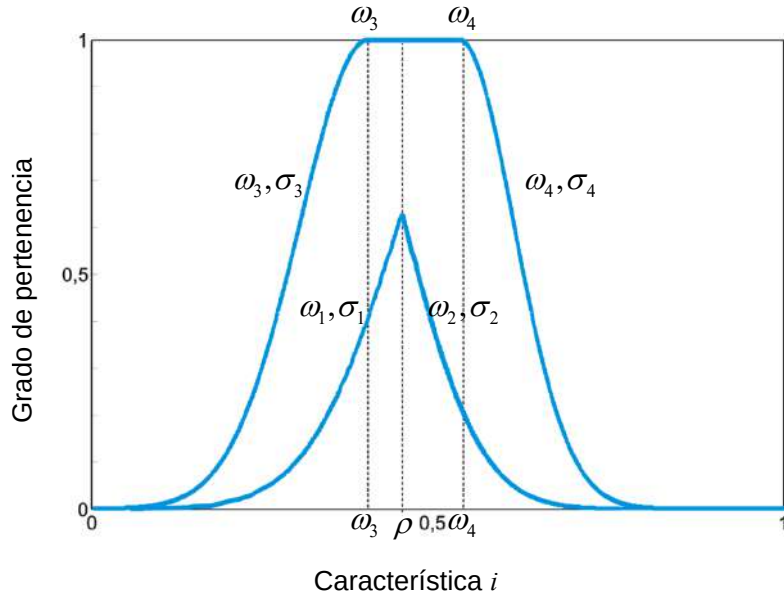


Figura 5.14. Forma de las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos utilizadas en esta Tesis, formada por tramos de funciones gaussianas.

Se muestra una función genérica $\bar{\mu}_{i,k}$, que describe los prototipos para la etiqueta k en la característica i . Los parámetros $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ y ρ se obtienen a partir de las funciones aproximadas $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$.

Solución propuesta para una función gaussiana que debe aproximar tres puntos:

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ puntos que debe aproximar una función de pertenencia gaussiana μ de parámetros ω y σ . Para obtener una única solución para ω y σ se procede de la siguiente manera:

- 1) Se consideran primero dos de los tres puntos, por ejemplo P_1 y P_2 , y se calculan dos posibles soluciones para los valores de ω y σ según la ecuación:

$$\omega_{A,B} = \frac{2x_1 - 2\eta x_2 \pm \sqrt{4\eta(x_1 - x_2)^2}}{2 - 2\eta}, \quad (5.37)$$

$$\sigma_{A,B} = \sqrt{\frac{-(x_2 - \omega_{A,B})^2}{2\ln(y_2)}}, \quad (5.38)$$

donde $\eta = \frac{\ln(y_1)}{\ln(y_2)}$.

- 2) La solución final se obtiene entre (ω_A, σ_A) y (ω_B, σ_B) mapeando x_3 y analizando cuál de las soluciones se aproxima más al valor deseado y_3 .

Partiendo de la solución anterior, **se propone la definición de la función de pertenencia tipo 2 de intervalos** $\bar{\mu}_{i,k}$ formada por tramos de funciones gaussianas de la forma especificada en las Ecuaciones (5.34) a (5.36), utilizando los valores obtenidos previamente para $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$ y $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$ mediante el siguiente método:

Método propuesto para definir una función de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir del resultado de la agregación de funciones tipo 1:

Para $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$:

- 1) Tomar 3 puntos de la rama izquierda de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$, Ecuación (5.32), considerando los puntos en las abscisas x_1 , x_2 y x_3 donde el grado de pertenencia de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$ sea más próximo a 0,05, 0,5 y 0,95 veces el máximo valor de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$, definiendo y_1 , y_2 y y_3 respectivamente. Utilizando P_1 , P_2 como puntos a aproximar y P_3 como punto de control, utilizar la solución propuesta para una función gaussiana que debe aproximar tres puntos para obtener los parámetros ω_1 y σ_1 , correspondientes a la rama izquierda de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$.
- 2) Tomar 3 puntos de la rama derecha de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$, considerando los puntos en las abscisas x_1 , x_2 y x_3 donde el grado de pertenencia de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$ sea más próximo a 0,05, 0,5 y 0,95 veces el máximo valor de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$, definiendo y_1 , y_2 y y_3 respectivamente. Utilizando P_1 , P_2 como puntos a aproximar y P_3 como punto de control, utilizar la solución propuesta para una función gaussiana que debe aproximar tres puntos para obtener los parámetros ω_2 y σ_2 , correspondientes a la rama derecha de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$.
- 3) Obtener el valor de ρ como aquel para el cual la rama izquierda y derecha de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$ se cruzan, según la siguiente ecuación (la solución a este problema es desarrollada en el Apéndice B):

$$\rho = \arg \max_{\rho \in \{\rho_1, \rho_2\}} \left[e^{-(\rho - \omega_1)^2 / 2(\sigma_1^2)} \right], \quad (5.39)$$

$$\text{donde } \rho_{1,2} = \frac{2\omega_1 - 2\theta\omega_2 \pm \sqrt{4\theta(\omega_1 - \omega_2)^2}}{2 - 2\theta} \text{ y } \theta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

Para $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$:

- 1) Tomar 3 puntos de la rama izquierda de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$, Ecuación (5.33), considerando los puntos en las abscisas x_1 , x_2 y x_3 donde el grado de pertenencia de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$ sea más próximo a 0,05, 0,5 y 0,95 veces el máximo valor de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$, definiendo y_1 , y_2 y y_3 respectivamente. Utilizando P_1 , P_2 como puntos a aproximar y P_3 como punto de control, utilizar la solución propuesta para una función gaussiana que debe aproximar tres puntos para obtener los parámetros ω_3 y σ_3 , correspondientes a la rama izquierda de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$.
- 2) Tomar 3 puntos de la rama derecha de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$, considerando los puntos en las abscisas x_1 , x_2 y x_3 donde el grado de pertenencia de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$ sea más próximo a 0,05, 0,5 y 0,95 veces el máximo valor de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$, definiendo y_1 , y_2 y y_3 respectivamente. Utilizando P_1 , P_2 como puntos a aproximar y P_3 como punto de control, utilizar la solución propuesta para una función gaussiana que debe aproximar tres puntos para obtener los parámetros ω_4 y σ_4 , correspondientes a la rama derecha de $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$.

Con este método, se obtienen los parámetros $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ y ρ ; a partir de los cuales se definen completamente las funciones $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^-$, $\varphi_{\bar{\mu}_{i,k}}^+$ y $\bar{\mu}_{i,k}$ especificadas en las Ecuaciones (5.34) a (5.36).

El método propuesto en esta Sección permite definir funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1,\dots,d}^{k=1,\dots,K}$ a partir de un conjunto de datos prototipos dados por $\{\Gamma_{m,k}\}_{m=1,\dots,M}^{k=1,\dots,K}$, donde k indica la etiqueta a describir y m el subconjunto de prototipos. Los prototipos son obtenidos utilizando alguno de los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos en esta Tesis, que serán explicados en detalle en la próxima Sección. Como característica común a todos ellos, los $\{\Gamma_{m,k}\}_{m=1,\dots,M}^{k=1,\dots,K}$ se obtienen por medio de una partición aleatoria que genera, a partir de datos iniciales vinculados a diferentes etiquetas, M subconjuntos disjuntos de datos prototipo, tal que los datos en $\Gamma_{m,k}$, $m=1,\dots,M$, $k=1,\dots,K$ sean datos prototipos de una única etiqueta k .

A modo de resumen y para mayor claridad, **el método propuesto para la generación de una función de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de un conjunto de datos de prototipos**, discutido a lo largo de toda esta Sección, se sintetiza a continuación:

Método propuesto para la generación de una función de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de un conjunto de datos de prototipos:

- 1) Obtener para cada $\Gamma_{m,k}$, $m=1,\dots,M$, $k=1,\dots,K$, el centroide y un vector de dispersiones, notados como $\Omega_{m,k} = \{\omega_{i,m,k}\}_{i=1,\dots,d}$ y $\Sigma_{m,k} = \{\sigma_{i,m,k}\}_{i=1,\dots,d}$, donde $\omega_{i,m,k}$ y $\sigma_{i,m,k}$ son, respectivamente, el valor medio y la dispersión de la característica i , en la etiqueta k , para el subconjunto m .
- 2) Definir M funciones de pertenencia tipo 1 $\{\mu_{i,m,k}\}_{m=1,\dots,M}$ de forma gaussiana, para cada característica i en la etiqueta k , y con parámetros $\omega_{i,m,k}$ y $\sigma_{i,m,k}$, $m=1,\dots,M$.
- 3) Agregar las M funciones de pertenencia tipo 1 definidas en el paso anterior, para cada característica y cada etiqueta, generando las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\hat{\mu}_{i,k}\}_{i=1,\dots,d, k=1,\dots,K}$, agregando con operadores MIN-MAX las descripciones parciales definidas por las funciones Tipo 1.
- 4) Estimar $\bar{\mu}_{i,k}$ a partir de $\hat{\mu}_{i,k}$, utilizando el **método propuesto para definir una función de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir del resultado de la agregación de funciones tipo 1**, los parámetros $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ y ρ , para cada característica i y cada etiqueta k ; obteniendo las expresiones funcionales de las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1,\dots,d, k=1,\dots,K}$ buscadas.

En la Figura 5.15 se muestra un diagrama general del enfoque seguido en el método propuesto en esta Tesis para la generación de funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de datos prototipos.

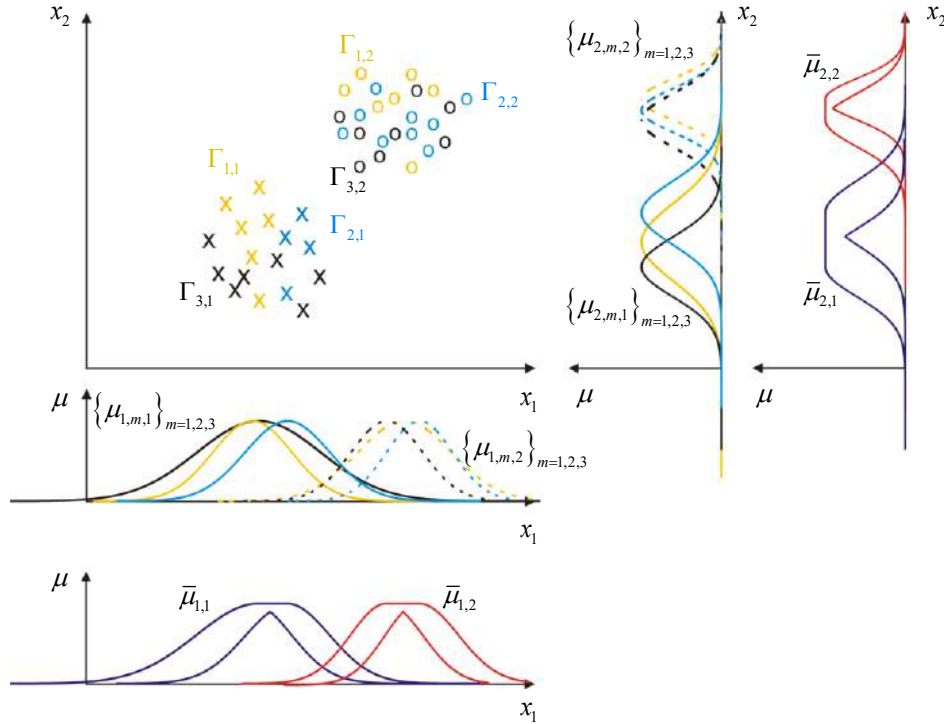


Figura 5.15. Diagrama general del método propuesto en esta Tesis para la generación de funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de los datos prototipos. Para este ejemplo $K=2$ y $M=3$.

Primero, se definen funciones de pertenencia tipo 1 gaussianas para los datos de cada subconjunto de prototipos $\Gamma_{m,k}$, con $m=1,\dots,M, k=1,\dots,K$, generando las funciones: $\{\mu_{i,m,k}\}_{m=1,\dots,M}$, $i=1,\dots,d$. Luego, se realiza una agregación de las funciones de pertenencia $\{\mu_{i,m,k}\}_{m=1,\dots,M}$ para una misma característica i y una misma etiqueta k , generando funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\hat{\mu}_{i,k}\}_{i=1,\dots,d, k=1,\dots,K}$. Asumiendo que la función de pertenencia tipo 2 de intervalos buscada está formada por tramos de funciones gaussianas, en el último paso se extraen los parámetros de ésta a partir de los valores de las funciones $\hat{\mu}_{i,k}$, obteniendo finalmente las funciones buscadas $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1,\dots,d, k=1,\dots,K}$.

Como se explicó a lo largo de esta Sección, las funciones de pertenencia obtenidas describen el valor de verdad con el cual valores de las características corresponden con, o están cerca de, los ejemplos prototipos contenidos en $\{\Gamma_{m,k}\}_{m=1,\dots,M, k=1,\dots,K}$. Específicamente, la función de pertenencia tipo 2 de intervalos $\bar{\mu}_{i,k}$ en x_i puede interpretarse como: "La característica i en el dato $\mathbf{x}$ corresponde a la etiqueta k " o "La característica i en el dato $\mathbf{x}$ está cerca de los ejemplos prototipo para la etiqueta k ". La combinación lógica a través de un predicado difuso compuesto de las funciones de pertenencia $\bar{\mu}_{i,k}$, para $k=1,\dots,K$, permiten obtener predicados de la forma $p_k(\mathbf{x})$: "El dato $\mathbf{x}$ pertenece a la etiqueta k ", donde $p_k(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mu}_{1,k}(x_1) \wedge \bar{\mu}_{2,k}(x_2) \wedge \dots \wedge \bar{\mu}_{d,k}(x_d)$.

Por lo tanto, la aplicación de este enfoque para definir las funciones de pertenencia a partir de vectores prototipos, permite definir completamente sistemas difusos (funciones de pertenencia y predicados) para el agrupamiento o la clasificación de datos. A su vez, las funciones de

pertenencia y los predicados pueden ser analizados, buscando extraer conocimiento sobre cómo los datos son agrupados o clasificados y qué valores de las características son relevantes en dicho mecanismo de agrupamiento o clasificación.

A partir del método propuesto en esta Sección para la generación de funciones de pertenencia a partir de datos, en la Sección siguiente se presentarán, en detalle, los métodos propuestos en esta Tesis para la generación automática de sistemas difusos en agrupamiento y clasificación de datos.

5.3.3 Generación automática de sistemas difusos para agrupamiento de datos: Métodos propuestos

En esta Sección se presentan en detalle los métodos propuestos en esta Tesis para la generación automática de sistemas difusos utilizados para agrupamiento de datos, es decir, aplicados a los casos en que no se dispone de información previa sobre el resultado esperado (no se dispone del *Gold Standard*), los cuales constituyen enfoques no supervisados. Se proponen dos métodos: el *Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-DPFC) [Comas *et al.*, 2014a; Comas *et al.*, 2015b], donde los prototipos de *cluster* se extraen directamente a partir de datos y, con éstos, se genera el sistema difuso; y el *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-SPFC), en el cual se utilizan SOM para la extracción de prototipos de *cluster*, a partir de los cuales se genera el sistema difuso [Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2013]. Ambos métodos son presentados a continuación.

5.3.3.1. Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering (T2-DFPC)

El método *Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-DFPC) [Comas *et al.*, 2015b] está compuesto de tres etapas: A) *Partición aleatoria de datos*, B) *Extracción de prototipos de cluster* y C) *Generación del sistema difuso*.

Analizando los datos a ser agrupados mediante técnicas de *clustering*, se genera automáticamente un sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos y predicados. Primero, se realiza una partición aleatoria sobre los datos. Los datos contenidos en cada subconjunto obtenido de la partición son analizados en la Etapa B, aplicando un esquema de *crisp-clustering* y definiendo automáticamente el número de *clusters* óptimos para cada subconjunto. Este esquema de *clustering* combina BIC [Fraley y Raftery, 1998] con el algoritmo FCM [Ruspini, 1969] siguiendo el método desarrollado en [Zhao *et al.*, 2008], el cual fue presentado en el Capítulo 3. En esta Etapa, el *clustering* permite analizar la variabilidad de los datos dentro de cada *cluster* y extraer prototipos, es decir, datos representativos de cada uno de los *clusters* descubiertos. Analizando los

prototipos obtenidos en la Etapa B, en la Etapa C se definen funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y predicados difusos que explican los *clusters* obtenidos. En la Figura 5.16 se muestra un esquema general del método T2-DFPC. Una descripción detallada del mismo se presenta a lo largo del resto de esta Sección.

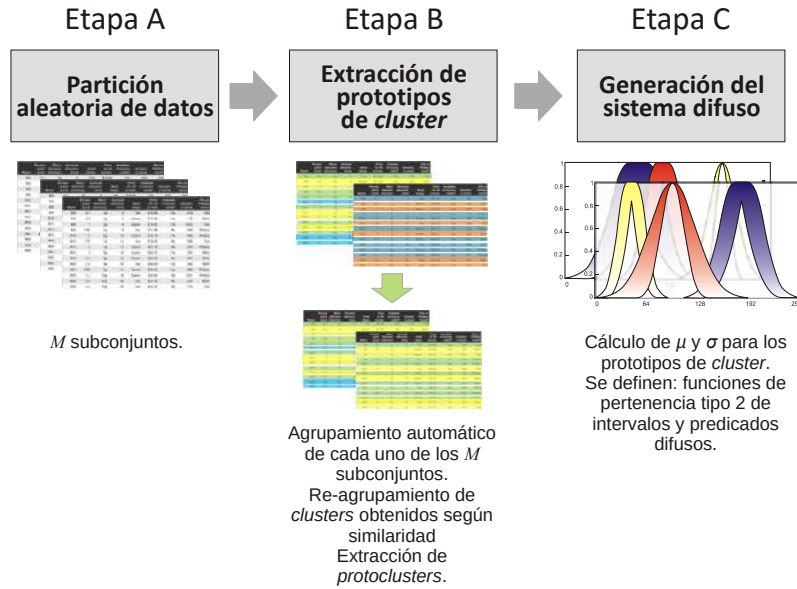


Figura 5.16. Esquema general de las etapas del método T2-DFPC.

Etapa A: Partición aleatoria de datos; Etapa B: Extracción de prototipos de *cluster*; Etapa C: Generación del sistema difuso.

Etapa A: Partición aleatoria de datos

Sea $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ un conjunto de datos a ser agrupado, donde N es el número de datos en $\mathbf{X}$ y d es la dimensión de espacio de características. En esta primera Etapa, se realiza una partición aleatoria sobre los datos en $\mathbf{X}$, generando M subconjuntos disjuntos, notados formalmente como $\{P_m\}_{m=1,\dots,M}$, donde $\mathbf{X} = P_1 \cup P_2 \dots \cup P_M$. El tamaño de la partición M es un parámetro del método. Es deseable que cada partición esté balanceada, es decir, cada P_m tenga aproximadamente el mismo número de vectores de características de cada *cluster*.

Cada partición P_m representa diferentes instancias, diferentes casos, del mismo problema de *clustering*. Así, es esperable que el agrupamiento de los datos en los subconjuntos P_m , con $m=1,\dots,M$, resulte en *clusters* similares, pero no necesariamente en los mismos. Por lo tanto, un agrupamiento realizado sobre los diferentes subconjuntos podría revelar diferentes rasgos del espacio de características. En consecuencia, el agrupamiento sobre cada P_m actúa como una "opinión" diferente de cómo el *clustering* debe ser realizado, capturando la variabilidad de los datos dentro de cada *cluster*. Esto sigue el enfoque detallado en la Sección 5.3.2. y es lo utilizado en

este método para definir las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos, capturando estos aspectos del problema de *clustering*.

Etapas B: Extracción de prototipos de *cluster*

En esta Etapa se realiza el agrupamiento automático de los datos dentro de cada subconjunto P_m , $m = 1, \dots, M$, obtenidos de la partición aleatoria efectuada en la Etapa A. Se utiliza FCM como algoritmo de *clustering* [Ruspini, 1969] combinado con el BIC [Fraley y Raftery, 1998] para la determinación automática del número de *clusters*, siguiendo el método desarrollado en [Zhao *et al.*, 2008] que fue presentado en el Capítulo 3.

El número de *clusters* definido automáticamente podría ser diferente en cada P_m , considerando que éste dependerá de los datos en cada subconjunto P_m , los cuales en general serán diferentes. Así, para un subconjunto específico P_m , el agrupamiento automático obtenido puede ser expresado como $\{\Delta_{m,j}\}_{j=1, \dots, \kappa_m}$, donde $P_m = \Delta_{m,1} \cup \dots \cup \Delta_{m,j} \dots \cup \Delta_{m,\kappa_m}$ y κ_m es el número de *clusters* obtenidos para el subconjunto P_m .

Luego de realizar el agrupamiento automático de los datos en los subconjuntos $\{P_m\}_{m=1, \dots, M}$, un segundo *clustering* es aplicado sobre los centroides de los *clusters* obtenidos, con el objetivo de reagrupar los *clusters* previamente obtenidos según su similitud.

Los centroides obtenidos en el *clustering* de los subconjuntos $\{P_m\}_{m=1, \dots, M}$ serán notados como $\{\Upsilon_{m,j}\}_{m=1, \dots, M, j=1, \dots, \kappa_m}$, donde κ_m es el número de *clusters* descubiertos para el subconjunto m , con $m = 1, \dots, M$. Por lo tanto, en este paso del método se definen K grupos sobre el conjunto completo de centroides; siendo K es el máximo de los números de *clusters* obtenidos para el agrupamiento de los subconjuntos de $\mathbf{X}$, es decir, K es el máximo de $\{\kappa_m\}_{m=1, \dots, M}$. Un FCM clásico con *crisp-clustering* es usado para agrupar los centroides $\{\Upsilon_{m,j}\}_{m=1, \dots, M, j=1, \dots, \kappa_m}$ en K grupos.

Como resultado del paso anterior, se obtienen grupos de los *clusters* previamente obtenidos sobre los subconjuntos definidos en la Etapa A, agrupados según la proximidad de sus centroides. El conjunto de centroides, ahora re-agrupados en K grupos, será notado como $\{\Omega_{l,k}\}_{l=1, \dots, L_k, k=1, \dots, K}$, donde L_k es el número de *clusters* originales de los subconjuntos que fueron reasignados al *cluster* k . Los datos reasignados al *cluster* k serán notados como $\Gamma_{l,k}$, donde $l = 1, \dots, L_k$ y $k = 1, \dots, K$. Los datos en $\Gamma_{l,k}$ constituyen datos prototipos de *cluster* y describen diferentes características de un mismo *cluster* sobre el conjunto inicial $\mathbf{X}$.

Considerando los datos prototipos en $\Gamma_{l,k}$ para un valor k fijo, diferentes descripciones u “opiniones” para el *cluster* k pueden ser extraídas. Estas “opiniones” actúan capturando la variabilidad de los datos dentro de los *clusters* descubiertos, siguiendo el enfoque propuesto en la Sección 5.3.2. A partir de estas descripciones, en la siguiente Etapa se definirán predicados difusos tipo 2 que “expliquen” cada *cluster*.

En la Figura 5.17 se presenta un diagrama detallado de los pasos de las Etapas A y B.

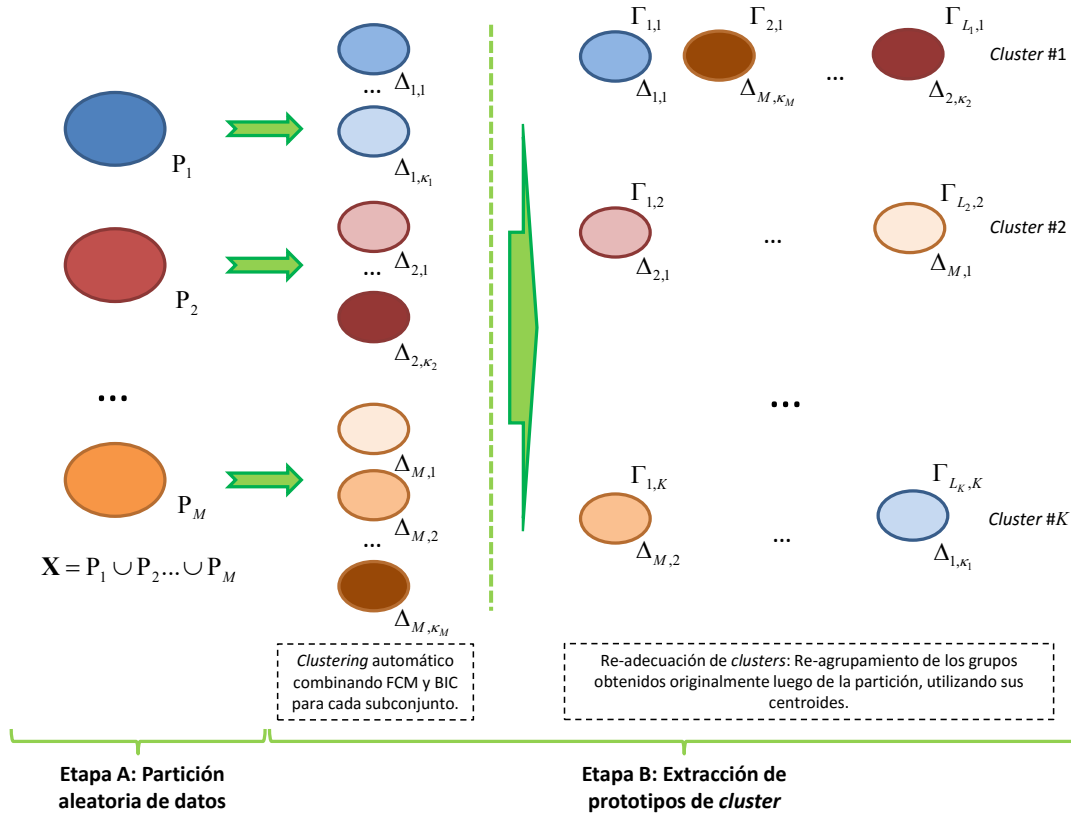


Figura 5.17. Diagrama detallado de las etapas A y B del método T2-DFPC.

En la Etapa A, el conjunto de datos iniciales es particionado en forma aleatoria generando M subconjuntos. En la Etapa B, sobre cada uno de estos subconjuntos se aplica un *clustering* automático con el esquema FCM-BIC, agrupando sus datos. Finalmente, en la Etapa C, los diferentes *clusters* obtenidos en la Etapa B son reagrupados, según sus centroides, extrayendo prototipos de *cluster*.

Etapa C: Generación del sistema difuso

En esta Etapa, se analizan los datos prototipo en $\{\Gamma_{l,k}\}_{l=1,\dots,L_k, k=1,\dots,K}$ definiendo funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y predicados difusos, que permiten agrupar el conjunto de datos iniciales X e interpretar cómo el *clustering* es realizado, generando un sistema difuso para agrupamiento de datos. **El resultado final del agrupamiento es obtenido utilizando el método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados presentado en la Sección 5.2.2.**

La Etapa C consiste en:

- 1) Crear funciones de pertenencia tipo 1, analizando los datos contenidos en los prototipos $\{\Gamma_{l,k}\}_{l=1,\dots,L_k}^{k=1,\dots,K}$. En esta Tesis se utilizan funciones de pertenencia de forma gaussianas, siguiendo el método propuesto en la Sección 5.3.2 para generar funciones de pertenencia a partir de datos. Para cada característica i y cada *cluster* final k , los centros de las funciones de pertenencia tipo 1 gaussianas son los centros de *cluster* de los prototipos, contenidos en $\{\Omega_{l,k}\}_{l=1,\dots,L_k}^{k=1,\dots,K}$, definidos Etapa B. Los anchos de las funciones de pertenencia gaussianas son calculados como la desviación estándar de los datos contenidos en $\{\Gamma_{l,k}\}_{l=1,\dots,L_k}^{k=1,\dots,K}$ en cada *cluster*.

Se definen funciones de pertenencia tipo 1 para cada *cluster* k y cada característica i . Como hay L_k subconjuntos de datos para cada *cluster*, se obtienen L_k funciones gaussianas para cada *cluster* final en cada característica.

Por lo tanto, los centros de las funciones gaussianas son las componentes de los centroides $\Omega_{l,k}$, formalmente $\{\omega_{i,l,k}\}_{l=1,\dots,L_k}^{i=1,\dots,d}$, con $\omega_{i,l,k} \in \Omega_{l,k}$. Asimismo, la desviación estándar de las funciones gaussianas será notada como $\{\sigma_{i,l,k}\}_{l=1,\dots,L_k}^{i=1,\dots,d}$.

Considerando que las funciones de pertenencia tipo 1 creadas; notadas $\{\mu_{i,l,k}\}_{l=1,\dots,L_k}^{i=1,\dots,d}$, donde $\mu_{i,l,k} : [-1,1] \rightarrow [0,1]$; indican la correspondencia entre el valor de la característica i y el *cluster* k , la desviación estándar controla el ancho (sigma) de tales funciones. Tal como se explicó en la Sección 5.3.2, la desviación estándar actúa como parámetro controlando cómo el valor de verdad de las funciones de pertenencia decrece, cuando los valores de la característica para un dato específico se mueven alejándose del centro del *cluster*. Es decir, para valores de la característica cercanos al centro de *cluster*, la correspondencia entre los valores y el *cluster* es alta y decrece a medida que los valores se alejan del centroide.

- 2) Agregar todas las funciones de pertenencia tipo 1 previamente definidas, siguiendo el método propuesto en la Sección 5.3.2 para la generación de una función de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de un conjunto de datos de prototipos, obteniendo una única función de pertenencia tipo 2 de intervalos para cada *cluster* $k \in \{1,\dots,K\}$ y cada característica $i \in \{1,\dots,d\}$, la cual es notada $\bar{\mu}_{i,k}$.

- 3) Finalmente, definir un predicado difuso para cada *cluster* $k \in \{1, \dots, K\}$ (K predicados difusos compuestos), operando lógicamente con los valores de verdad definidos por las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1, \dots, d, k=1, \dots, K}$. Para cada *cluster* k se define:

$$p_k(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mu}_{1,k}(x_1) \wedge \bar{\mu}_{2,k}(x_2) \wedge \dots \wedge \bar{\mu}_{d,k}(x_d), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (5.40)$$

donde $\mathbf{x}$ es un dato genérico, para el cual se evalúa su pertenencia al *cluster* k .

El predicado difuso $p_k(\mathbf{x})$ permite pesar con qué valor de verdad un dato $\mathbf{x}$ corresponde a (está cerca de) las propiedades detectadas alrededor del *cluster* k .

Las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k}\}_{i=1, \dots, d, k=1, \dots, K}$ y los predicados difusos $\{p_k\}_{k=1, \dots, K}$ obtenidos, definen un sistema difuso para agrupamiento de datos, generado a partir de prototipos de *cluster* extraídos del conjunto inicial de datos $\mathbf{X}$. **El sistema difuso puede ser utilizado para el agrupamiento de los datos en $\mathbf{X}$, u otros derivados del mismo proceso que $\mathbf{X}$, utilizando el método propuesto en esta Tesis para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados, que fue presentado en la Sección 5.2.2.**

5.3.3.2. Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering (T2-SFPC)

A diferencia del T2-DFPC, el método *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* utiliza SOM para la extracción de los prototipos de *cluster* [Comas et al., 2012; Meschino et al., 2013; Meschino et al., 2015a]. Las capacidades de los SOM para la extracción de prototipos de *clusters* fueron discutidas previamente en las Secciones 3.2.1 y 5.3.1.

El método T2-SFPC está formado por cuatro Etapas: A) *Partición aleatoria de datos*, B) *Entrenamiento y parametrización de los SOM*, C) *Extracción de prototipos de cluster* y D) *Generación del sistema difuso*.

Utilizando el conjunto inicial de datos, en la primera Etapa (A) se realiza una partición aleatoria de datos, obteniendo M subconjuntos disjuntos, donde cada uno representa diferentes realizaciones del mismo proceso aleatorio que define el problema de *clustering*. Los datos contenidos en cada subconjunto son usados en la Etapa B para el entrenamiento y la parametrización de M SOM. En la Etapa C, un segundo nivel de *clustering* es aplicado sobre los *codebooks* de los M SOM, obteniendo prototipos de *cluster* (*protoclusters*). Finalmente, en la Etapa D, los prototipos de *cluster* son utilizados para crear funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y predicados difusos, definiendo un sistema difuso para agrupamiento de datos. En la

Figura 5.18 se muestra un diagrama del método T2-SFPC. Los pasos que componen cada una de las etapas del método se presentan, en detalle, a continuación.

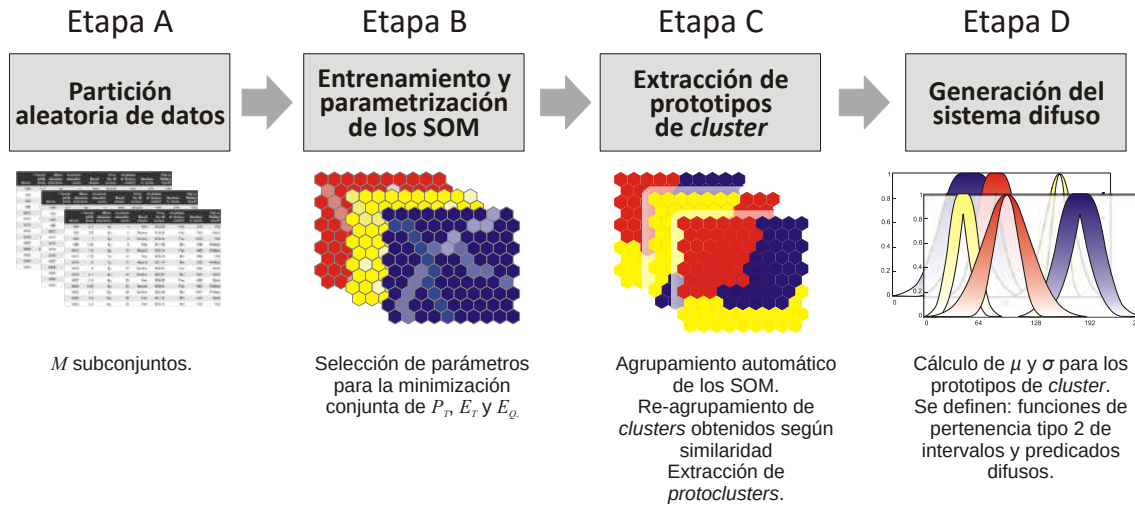


Figura 5.18. Esquema general de las etapas del método T2-SFPC.

Etapa A: Partición aleatoria de datos, generando M subconjuntos disjuntos; Etapa B: Entrenamiento y parametrización de los SOM; Etapa C: Extracción de prototipos de *cluster*; Etapa D: Generación del sistema difuso.

Etapa A: Partición aleatoria de datos

Sea $\mathbf{X} \subset [-1, 1]^d$ un conjunto inicial de datos a ser agrupado, donde N es el número de vectores de características en $\mathbf{X}$ y d es la dimensión de espacio de características. En la esta primera Etapa, una partición aleatoria de datos es aplicada sobre los datos en $\mathbf{X}$, generando M subconjuntos disjuntos, notados formalmente como: $\{\mathbf{P}_m\}_{m=1, \dots, M}$, $\mathbf{X} = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2 \dots \cup \mathbf{P}_M$. El tamaño de la partición M es un parámetro del método. Al igual que en el método T2-DFPC, es deseable que cada subconjunto $\mathbf{P}_m$ tenga aproximadamente el mismo número de vectores de características de cada *cluster*; representando la población original.

Considerando que cada subconjunto $\mathbf{P}_m$, $m = 1, \dots, M$, representa diferentes muestras de un mismo problema de *clustering*, es esperable que ellos conserven similares, pero no iguales, propiedades. Siguiendo el mismo razonamiento que para el método T2-DFPC, un agrupamiento aplicado sobre los diferentes subconjuntos revelará diferentes propiedades del espacio de características, relacionando cómo los *clusters* están distribuidos. Esta consideración es utilizada para generar las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y los predicados difusos, previo entrenamiento de SOM, agregando todas las propiedades descubiertas sobre el agrupamiento del conjunto de datos en $\mathbf{X}$.

Etapa B: Entrenamiento y parametrización de los SOM

En esta Etapa, los datos contenidos en los subconjuntos $\{P_m\}_{m=1,\dots,M}$, obtenidos en la Etapa A, son usados para entrenar y determinar automáticamente los parámetros de M diferentes SOM. Los *codebooks* de los SOM entrenados, estarán formados por los vectores de datos representativos de los datos en cada P_m , esperando que cada uno de ellos revele diferentes propiedades respecto a cómo están distribuidos los *clusters* en el espacio de características.

Para obtener una buena representación de los datos de entrenamiento, es decir, obtener datos con funciones densidad de probabilidad consistentes con los datos de entrenamiento; los parámetros de los SOM son automáticamente ajustados para minimizar la suma en valor absoluto de las medidas de error definidas en la Sección 3.2.3 (Definiciones 3.3 a 3.5). Se propone la determinación automática de los parámetros de los SOM como es detallado a continuación [Meschino *et al.*, 2015a]:

- 1) Para cada subconjunto $P_m, m=1,\dots,M$, se entrenan SOM con diferentes combinaciones de cantidad de celdas, topología, funciones vecindad y tipo de entrenamiento. Los tamaños de los mapas considerados corresponden a 1, 2, 3 y 4 veces el número de celdas obtenidas con la fórmula heurística [Vesanto, 2002]: $\#cells = 5 N_m^{0.5}$, donde N_m es el número de vectores de característica en P_m .
- 2) Para los SOM generados en el paso 1) para cada subconjunto $P_m, m=1,\dots,M$, se selecciona como SOM óptimo para el subconjunto P_m , a aquel para el cual la suma de los valores absolutos de las medidas de error E_Q , E_I y P_T resulta la mínima entre las de todos los SOM generados para P_m (ver Definiciones 3.3 a 3.5, Capítulo 3); realizando, por lo tanto, una minimización con búsqueda exhaustiva. De esta manera, el *codebook* del SOM óptimo para el subconjunto P_m será otro conjunto, notado Φ_m , donde el número de datos Φ_m será en general menor a N_m .

Los vectores prototipos de los M SOM óptimos, es decir los conjuntos $\{\Phi_m\}_{m=1,\dots,M}$ (un SOM por cada subconjunto definido en la Etapa A) son utilizados en la Etapa C para la extracción de los prototipos de *cluster*.

Etapa C: Extracción de prototipos de cluster

En esta Etapa, tal como en la Etapa B del método T2-DFPC, se obtienen prototipos de *cluster* utilizando un esquema de *clustering* automático combinando FCM y BIC [Fraley y Raftery, 1998;

Ruspini, 1969; Zhao *et al.*, 2008]. Sin embargo, en este caso el *clustering* automático es aplicado sobre los *codebooks* de los M SOM óptimos obtenidos previamente, que fueron notados $\{\Phi_m\}_{m=1,\dots,M}$.

El número de *clusters* definidos en cada *codebook* $\Phi_m, m=1,\dots,M$ podría ser diferente, considerando que el número de *clusters* obtenidos del esquema de *clustering* automático dependerá de los datos en cada *codebook*, los cuales serán diferentes. Para un *codebook* específico Φ_m , el agrupamiento puede ser expresado como $\{\Delta_{m,j}\}_{j=1,\dots,\kappa_m}$, donde $\Phi_m = \Delta_{m,1} \cup \dots \cup \Delta_{m,j} \dots \cup \Delta_{m,\kappa_m}$ y κ_m es el número de *clusters* obtenidos para Φ_m .

Al igual que en el método T2-DFPC, luego de realizar el agrupamiento automático de los *codebooks* $\{\Phi_m\}_{m=1,\dots,M}$, un segundo *clustering* es aplicado sobre los centroides de los *cluster* obtenidos, reagrupando los *clusters* originales por similitud. El conjunto de centroides obtenido del agrupamiento sobre los *codebooks* es notado como $\{\Upsilon_{m,j}\}_{m=1,\dots,M, j=1,\dots,\kappa_m}$, donde κ_m es el número de *clusters* hallados para la partición m , con $m=1,\dots,M$. Se definen K grupos sobre el conjunto completo de centroides, siendo K el máximo de los números de *clusters* obtenidos para el agrupamiento de los subconjuntos de $\mathbf{X}$. Un FCM clásico con *crisp clustering* es usado para agrupar los centroides $\{\Upsilon_{m,j}\}_{m=1,\dots,M, j=1,\dots,\kappa_m}$ en K *clusters*.

Como resultado del paso anterior, se obtienen grupos de los *clusters* originales de los *codebooks* de los SOM según la proximidad de sus centroides $\{\Upsilon_{m,j}\}_{m=1,\dots,M, j=1,\dots,\kappa_m}$. Los centroides, ahora reagrupados, serán notados como el conjunto $\{\Omega_{l,k}\}_{l=1,\dots,L_k, k=1,\dots,K}$, donde L_k es el número de *clusters* originales de los *codebooks* que fueron reasignados al *cluster* k . Los “*protoclusters*” ahora reasignados al *cluster* k estarán representados por el conjunto de prototipos de *cluster* $\Gamma_{l,k}$, con $l=1,\dots,L_k$ y $k=1,\dots,K$. Éstos describen las propiedades de un mismo *cluster* del conjunto de datos inicial $\mathbf{X}$.

En un enfoque similar al utilizado en el método T2-DFPC, los datos prototipos en $\Gamma_{l,k}$ para un valor k fijo, aportan diferentes descripciones u “opiniones” para el *cluster* k , que actúan capturando la variabilidad de los datos dentro de los *clusters* descubiertos, siguiendo el enfoque propuesto en la Sección 5.3.2.

En la Figura 5.19 se presenta un diagrama detallado de los pasos de las Etapas A, B y C del método.

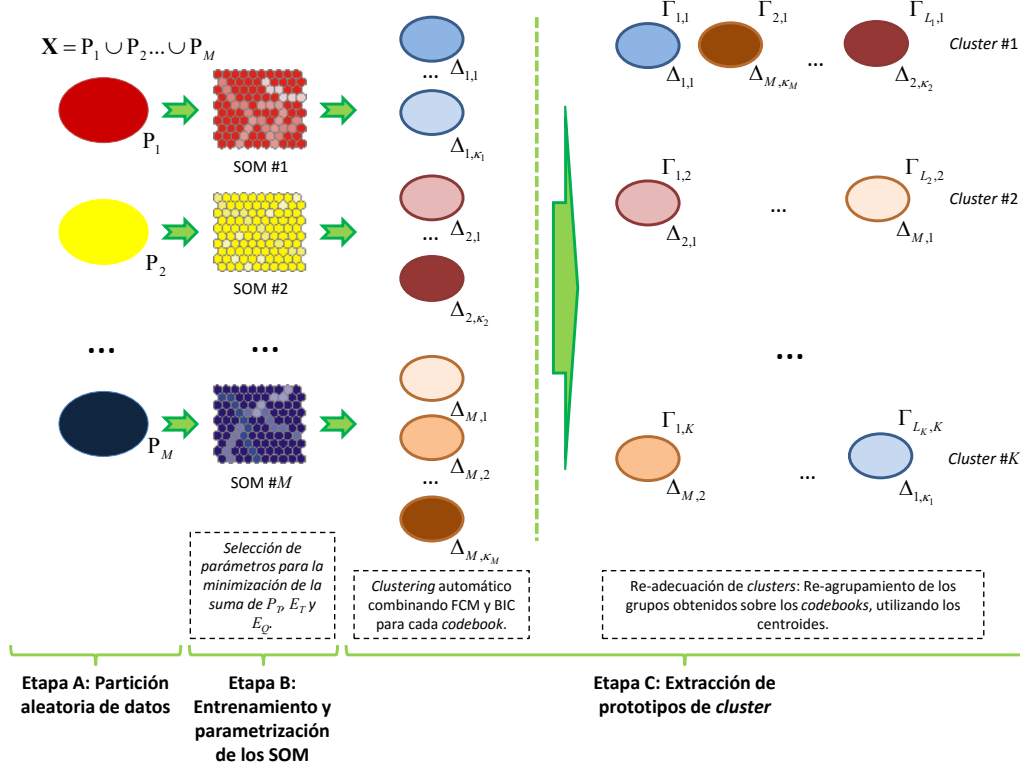


Figura 5.19. Diagrama detallado de las etapas A, B y C del método T2-SFPC.

En la Etapa A, el conjunto de datos iniciales es particionado en forma aleatoria generando M subconjuntos. Luego, en la Etapa B, un SOM es automáticamente configurado y entrenado para cada uno de los subconjuntos obtenidos. En la Etapa C, Sobre cada uno de estos subconjuntos se aplica un *clustering* automático con el esquema FCM-BIC, agrupando sus datos. Finalmente, en la Etapa D, los diferentes *clusters* obtenidos en la Etapa C son reagrupados, de acuerdo a sus centroides, extrayendo los prototipos de *cluster*.

Etapa D: Generación del sistema difuso

Al igual que en la Etapa final del método T2-DFPC, en esta Etapa, los datos en $\{\Gamma_{l,k}\}_{l=1,\dots,L_k}^{k=1,\dots,K}$ son analizados, definiendo funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y predicados difusos que permiten agrupar el conjunto de datos iniciales X e interpretar cómo es realizado el *clustering*. **Las funciones de pertenencia y los predicados definen un sistema difuso para agrupamiento de datos que puede ser utilizado a través del método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados presentado en la Sección 5.2.2.**

La Etapa D consiste en:

- 1) Crear funciones de pertenencia tipo 1, analizando los datos contenidos en $\{\Gamma_{l,k}\}_{l=1,\dots,L_k}^{k=1,\dots,K}$, siguiendo el método propuesto en la Sección 5.3.2 para generar funciones de pertenencia a partir de datos. Para cada característica y cada *cluster*, los centros de funciones de pertenencia tipo 1 gaussianas son los centros de *cluster*

contenidos en $\{\Omega_{l,k}\}_{\substack{l=1,\dots,L_k \\ k=1,\dots,K}}$ obtenidos de la Etapa C. Los anchos de las funciones de pertenencia gaussianas son calculados como la desviación estándar de los datos contenidos en $\{\Gamma_{l,k}\}_{\substack{l=1,\dots,L_k \\ k=1,\dots,K}}$ en cada *cluster* k .

Al igual que en el método T2-DFPC, se definen funciones de pertenencia tipo 1 para cada *cluster* k y cada característica i . Como hay L_k subconjuntos de datos para cada *cluster*, se obtienen L_k funciones gaussianas para cada *cluster* final en cada característica.

Por lo tanto, los centros de las funciones gaussianas son las componentes de los centroides $\Omega_{l,k}$, formalmente $\{\omega_{i,l,k}\}_{\substack{l=1,\dots,L_k \\ k=1,\dots,K}}$, con $\omega_{i,l,k} \in \Omega_{l,k}$. Asimismo, la desviación estándar de las funciones gaussianas será notada como $\{\sigma_{i,l,k}\}_{\substack{l=1,\dots,L_k \\ k=1,\dots,K}}$.

Las funciones de pertenencia tipo 1 creadas; notadas $\{\mu_{i,l,k}\}_{\substack{l=1,\dots,L_k \\ k=1,\dots,K}}$, donde

$\mu_{i,l,k} : [-1,1] \rightarrow [0,1]$; indican la correspondencia entre el valor de la característica i y el *cluster* k , la desviación estándar controla el ancho (sigma) de las funciones gaussianas.

- 2) Agregar todas las funciones de pertenencia tipo 1, siguiendo el método propuesto en la Sección 5.3.2 para la generación de una función de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de un conjunto de datos de prototipos, obteniendo una única función de pertenencia tipo 2 de intervalos para cada *cluster* $k \in \{1, \dots, K\}$ y cada característica $i \in \{1, \dots, d\}$, la cual es notada $\bar{\mu}_{i,k}$.
- 3) Definir un predicado difuso para cada *cluster* $k \in \{1, \dots, K\}$ (K predicados difusos compuestos), operando lógicamente con los valores de verdad definidos por las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{l,k}\}_{\substack{l=1,\dots,d \\ k=1,\dots,K}}$. De esta manera se obtiene para cada *cluster* $k \in \{1, \dots, K\}$:

$$p_k(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mu}_{1,k}(x_1) \wedge \bar{\mu}_{2,k}(x_2) \wedge \dots \wedge \bar{\mu}_{d,k}(x_d), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.41)$$

donde $\mathbf{x}$ es un dato genérico, para el cual se evalúa su pertenencia al *cluster* k .

El predicado difuso $p_k(\mathbf{x})$ permite pesar con qué valor de verdad un dato $\mathbf{x}$ corresponde (está cerca) de las propiedades detectadas alrededor del *cluster* k .

Las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{l,k}\}_{i=1,\dots,d}^{k=1,\dots,K}$ y los predicados difusos $\{p_k\}_{k=1,\dots,K}$ obtenidos, definen un sistema difuso para agrupamiento de datos, generado a partir de prototipos de *cluster* extraídos de SOM entrenados con los datos del conjunto inicial X . **El sistema difuso puede ser utilizado para el agrupamiento de los datos en X , u otros derivados del mismo proceso que X , utilizando el método propuesto en esta Tesis para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados, que fue presentado en la Sección 5.2.2.**

5.3.4 Generación automática de sistemas difusos para clasificación de datos: Método propuesto

En esta Sección, se presenta en detalle el método propuesto en esta Tesis para la generación automática de sistemas difusos para clasificación de datos, denominado *Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T2-LFPC) [Comas et al., 2014b], partiendo de un problema en el cual se tenga información sobre el resultado esperado (se dispone del *Gold Standard*), utilizando un enfoque supervisado.

5.3.4.1. *Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T2-LFPC)

El método T2-LFPC está formado por cuatro etapas: A) *Partición aleatoria de datos*, B) *Extracción de prototipos de clases*, C) *Generación del sistema difuso* y D) *Optimización*.

Partiendo de datos etiquetados, ejemplos de la clasificación deseada como *Gold Standard*, se genera automáticamente un sistema de clasificación basado en predicados difusos y LD tipo 2 de intervalos. En la primera Etapa, se realiza una partición aleatoria sobre los ejemplos etiquetados. Luego, en la Etapa B, se analizan los datos contenidos en los subconjuntos obtenidos, aplicando un agrupamiento de los ejemplos en cada clase y en cada subconjunto, obteniendo grupos de datos con propiedades similares, para cada caso. Para una misma clase, los grupos obtenidos son luego combinados con los de otros subconjuntos, para definir funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos. En la Etapa C, se definen dichas funciones de pertenencia y los predicados difusos asociados. En la Etapa final, se realiza una optimización de parámetros del sistema difuso previamente definido. En la Figura 5.20 se presenta un diagrama general del método T2-LFPC. En el resto de esta Sección, las etapas que lo conforman serán explicadas en detalle.

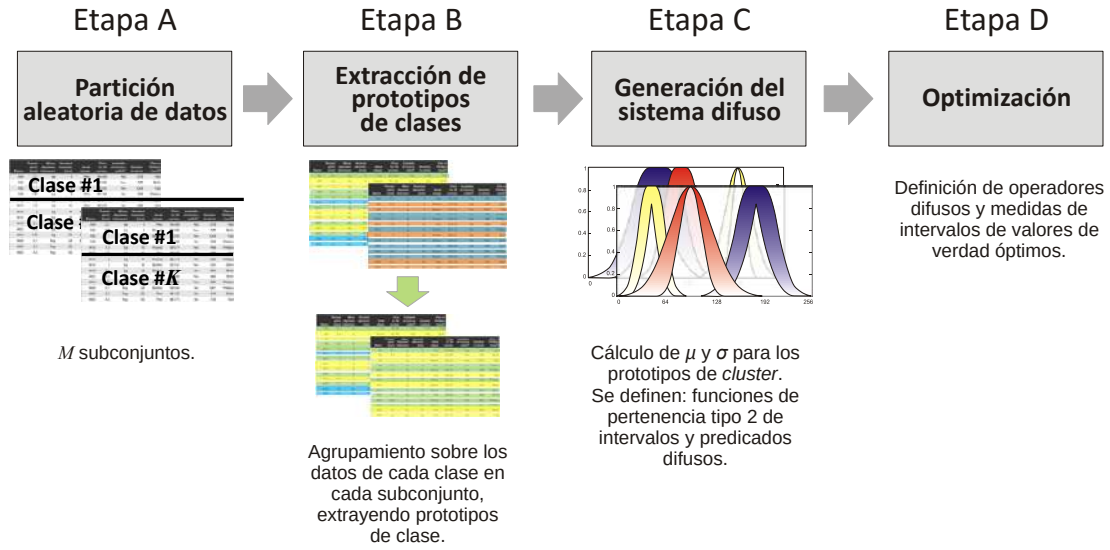


Figura 5.20. Esquema general de las etapas del método T2-LFPC.

Etapa A: Partición aleatoria de datos; Etapa B: Extracción de prototipos de clases; Etapa C: Generación del sistema difuso; Etapa D: Optimización.

Etapa A: Partición aleatoria de datos

Sea $\mathbf{X} \subset [-1, 1]^d$ un conjunto de datos para clasificación, donde N es la cantidad de vectores de características en $\mathbf{X}$ y d es la dimensión de espacio de características. Sea $\mathbf{Y} = \{y_r\}_{r=1, \dots, N}$, $y_r \in \{1, \dots, K\}$ el vector de etiquetas deseadas (*Gold-Standard*) para los datos del conjunto $\mathbf{X}$, es decir, $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ definen un conjunto de datos etiqueta; siendo K el número de clases.

3) El conjunto de datos $\mathbf{X}$ es dividido aleatoriamente en $M > 2$ subconjuntos disjuntos $\{\mathbf{P}_m\}_{m=1, \dots, M}$, con $\mathbf{X} = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2 \dots \cup \mathbf{P}_M$. La partición se realiza considerando el vector de etiquetas $\mathbf{Y}$, de tal manera que cada subconjunto $\mathbf{P}_m$, $m=1, \dots, M$ está formado por la unión de los conjuntos $\{\Phi_{m,k}\}_{k=1, \dots, K}$, formalmente $\mathbf{P}_m = \Phi_{m,1} \cup \Phi_{m,2} \cup \dots \cup \Phi_{m,K}$, donde $\Phi_{m,k}$ contiene solamente datos de la clase k , con $k \in \{1, \dots, K\}$. La partición es hecha de tal manera, que la frecuencia de aparición de las diferentes clases en cada subconjunto $\mathbf{P}_m$, $m=1, \dots, M$ sea aproximadamente la misma que en el conjunto inicial de datos $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$.

Etapa B: Extracción de prototipos de clases

De acuerdo al enfoque propuesto en esta Tesis para definir funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de datos prototipo, propuesto la Sección 5.3.2, se parte de la asunción que los datos en los prototipos de clase son similares, es decir, están cercanos en el espacio de características. Esto no puede asegurarse en el caso de problemas de clasificación de datos porque, dependiendo de la complejidad del problema, la frontera de separación de una clase podría encerrar a la de otra clase, reflejado esto en el hecho que los datos de una misma clase en el conjunto $\mathbf{X}$ podrían estar dispersos en grupos y entre éstos existir datos de otra clase.

Debido a esto, para que los prototipos de clase sean representativos de una clase y, además, estén cercanos entre sí en el espacio de características (compartan los mismos rasgos), es necesario un análisis de los datos contenidos en las particiones $\{\Phi_{m,k}\}_{m=1,\dots,M, k=1,\dots,K}$, el cual se realiza en esta Etapa.

Para descubrir grupos con rasgos “similares” en cada subconjunto $\Phi_{m,k}$, con $m=1,\dots,M, k=1,\dots,K$; es decir, para cada clase y para cada subconjunto definido en la partición de la Etapa A; se propone aplicar un algoritmo de *clustering* [Jain *et al.*, 1999]. Dado que el número apropiado de grupos para cada $\Phi_{m,k}$ es desconocido *a priori*, se propone usar, al igual que en los métodos previamente presentados, FCM [Ruspini, 1969] como algoritmo de *clustering* combinado con BIC [Fralei y Raftery, 1998] para la determinación automática del número de *cluster*, siguiendo el enfoque de *clustering* que fue explicado en detalle en el Capítulo 3. Como resultado, cada subconjunto $\Phi_{m,k}$ es dividido en $\rho_{m,k}$ *clusters*. Formalmente, el resultado del agrupamiento sobre $\Phi_{m,k}$ puede ser escrito como:

$$\Phi_{m,k} = \Delta_{m,k,1} \cup \dots \cup \Delta_{m,k,j} \dots \cup \Delta_{m,k,\rho_{m,k}}, \quad (5.42)$$

donde $\Delta_{m,k,j}$ son los datos del grupo j obtenido para los datos de la clase $k, k=1,\dots,K$, que fueron asignados al subconjunto $m, m=1,\dots,M$, en la Etapa A. El conjunto de centroides para los grupos descubiertos en esta Etapa será notado como: $\{\Upsilon_{m,k,j}\}_{m=1,\dots,M, k=1,\dots,K, j=1,\dots,\rho_{m,k}}$.

Es importante notar que $\Delta_{m,k,j}$ representa a datos de una misma clase $k \in \{1,\dots,K\}$ cercanos en el espacio de características, que fueron agrupados automáticamente con el enfoque FCM-BIC. En particular los conjuntos Δ_{m,k,j_1} y Δ_{m,k,j_2} con $j_1 \neq j_2$ representan datos de una misma clase k que estaba en el mismo subconjunto m , pero que no se encuentran próximos entre sí en el espacio de características.

Finalmente, los vectores de características en los grupos de datos $\{\Delta_{m,k,j}\}_{\substack{m=1,\dots,M \\ k=1,\dots,K \\ j=1,\dots,\rho_{m,k}}}$ son reagrupados para obtener como resultado los prototipos de clase necesarios para definir las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos. A partir de los centroides $\{\Upsilon_{m,k,j}\}_{\substack{m=1,\dots,M \\ k=1,\dots,K \\ j=1,\dots,\rho_{m,k}}}$, se propone un enfoque similar al utilizado en los métodos T2-DFPC y T2-SFPC para el reagrupamiento de los grupos de datos $\{\Delta_{m,k,j}\}_{\substack{m=1,\dots,M \\ k=1,\dots,K \\ j=1,\dots,\rho_{m,k}}}$. Analizando clase por clase, los grupos de datos $\{\Delta_{m,k,j}\}_{\substack{m=1,\dots,M \\ k=1,\dots,K \\ j=1,\dots,\rho_{m,k}}}$ son reagrupados de acuerdo a sus centroides $\Upsilon_{m,k,j}$, con m variando entre $1,\dots,M$ y j variando en $1,\dots,\rho_{m,k}$ para una clase k , descubriendo κ_k grupos de centroides.

Siguiendo este criterio, se puede ahora definir los prototipos de clases. El conjunto de prototipos de clases será notado $\{\Gamma_{k,s,n}\}_{\substack{k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,\kappa_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}$, donde k representa a algunas de las clases $\{1,\dots,K\}$ definidas para el problema, s es un índice que representa a alguno de los grupos de centroides obtenidos en el paso anterior y n es un índice que representa a cada uno de los conjuntos de datos $\Delta_{m,k,j}$, $m=1,\dots,M$, $j=1,\dots,\rho_{m,k}$, reagrupados en el paso anterior, cuyo centroide fue asignado al grupo s , con $s \in \{1,\dots,\kappa_k\}$.

Mediante este procedimiento, los prototipos en $\Gamma_{k,s,n}$ para un valor k fijo resultan ser vectores del conjunto inicial $\mathbf{X}$ que pertenecen a la clase k de acuerdo al vector de etiquetas $\mathbf{Y}$, es decir, todos los datos de la clase k en $\mathbf{X}$ están en $\{\Gamma_{k,s,n}\}_{\substack{s=1,\dots,\kappa_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}$. Asimismo, $\Gamma_{k,s,n}$ para un k y un s determinados, contiene $\zeta_{s,k}$ grupos de datos próximos entre sí, donde cada grupo de datos $n=1,\dots,\zeta_{s,k}$ representa una descripción u “opinión” de los rasgos que tienen los datos que pertenecen a la clase k . Estas descripciones son utilizadas en la siguiente Etapa para definir funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y predicados difusos que “expliquen” cada clase. En la Figura 5.21 se presenta un diagrama detallado de los pasos de las Etapas A y B del método.

[Etapa C: Generación del sistema difuso](#)

Como resultado del procedimiento descrito en las Etapas A y B, los datos correspondientes a cada clase fueron divididos en subconjuntos de datos con rasgos similares, definiendo prototipos de clase $\{\Gamma_{k,s,n}\}_{\substack{k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,\kappa_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}$. Para un k y un s determinados, $\Gamma_{k,s,n}$ contiene $\zeta_{s,k}$ grupos de datos próximos entre sí y cada grupo de datos representa una descripción u “opinión” de las particularidades que tienen los datos que pertenecen a la clase k .

En esta Etapa, se analizan los prototipos de clase $\left\{ \Gamma_{k,s,n} \right\}_{\substack{k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,K_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}$ definiendo funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y predicados difusos, generando un sistema difuso, el cual permite clasificar los datos del conjunto inicial $\mathbf{X}$ e interpretar la clasificación. La clasificación a partir del sistema difuso obtenido se realiza siguiendo el método propuesto previamente en la Sección 5.2.2 para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados.

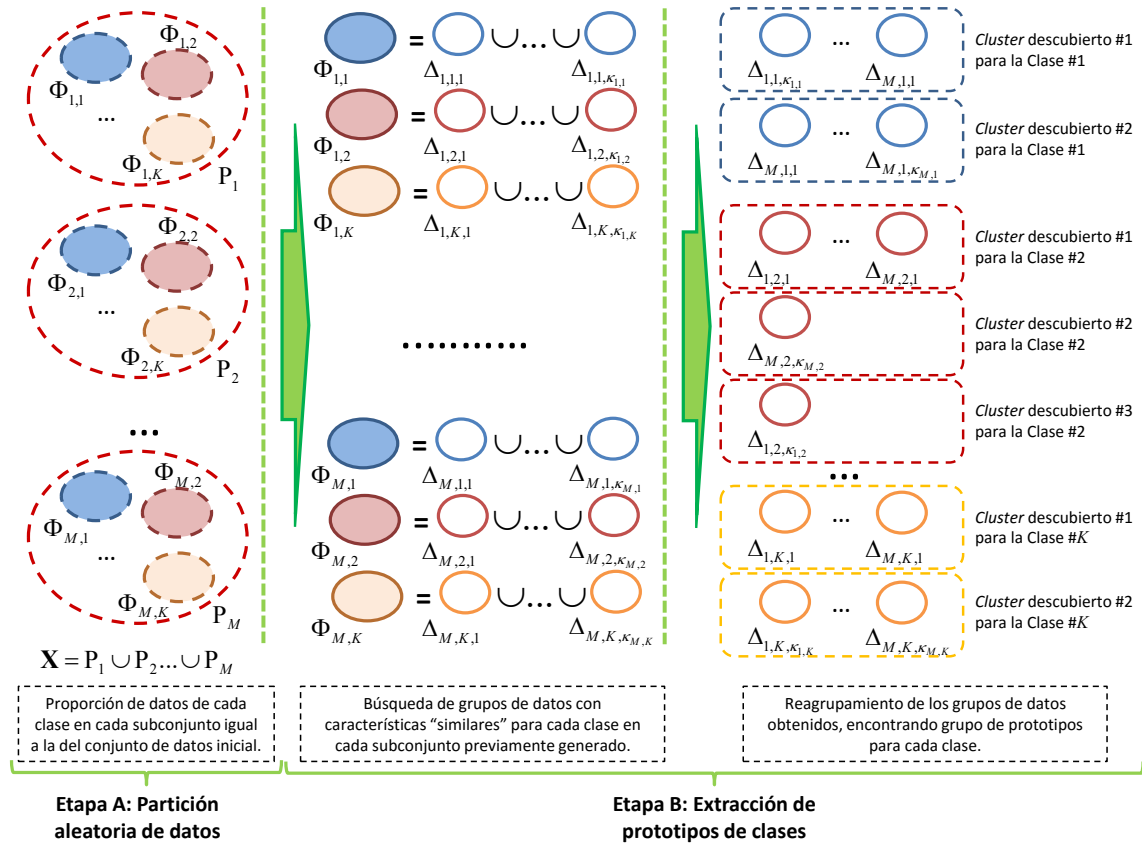


Figura 5.21. Diagrama detallado de las etapas A y B del método T2-LFPC.

En la Etapa A, el conjunto de datos iniciales es particionado en forma aleatoria generando M subconjuntos, manteniendo en cada subconjunto generado la misma proporción de datos de cada clase que en el conjunto inicial. En la Etapa B se realizan dos procesos. Primero, los datos de cada clase en cada subconjunto son agrupados automáticamente usando FCM y BIC, buscando grupos de datos con rasgos similares, es decir, cercanos. Segundo, estos grupos de datos hallados previamente con reagrupados según su cercanía, obteniendo conjuntos de datos prototipos para cada clase.

La Etapa C consiste en:

- 1) Se crean funciones de pertenencia tipo 1, analizando los datos contenidos en $\left\{ \Gamma_{k,s,n} \right\}_{\substack{k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,K_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}$, siguiendo el método propuesto en la Sección 5.3.2 para generar

funciones de pertenencia a partir de datos. En este caso, para cada característica y cada clase, se tienen grupos de conjuntos de datos prototipos dados por

$\left\{ \Gamma_{k,s,n} \right\}_{\substack{s=1,\dots,K_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}$. Para un s fijo, los grupos de datos $\left\{ \Gamma_{k,s,n} \right\}_{n=1,\dots,\zeta_{s,k}}$ son grupos de

datos prototipos de la clase k que tienen propiedades similares, esencialmente son

próximos en el espacio de características. Para conjunto de datos prototipo $\Gamma_{k,s,n}$, con $n=1,\dots,\zeta_{s,k}$ y k y s fijos, se definirá una función de pertenencia tipo 1 gaussiana. Los centros de funciones de pertenencia se obtienen de los centroides de los datos en cada $\Gamma_{k,s,n}$, formalmente notados $\Omega_{k,s,n}$, por lo cual para una clase k y un grupo de prototipos s se definirán $\zeta_{s,k}$ funciones de pertenencia para cada característica $i \in \{1,\dots,d\}$. Los anchos de las funciones de pertenencia son calculados como la desviación estándar de los datos contenidos en $\Gamma_{k,s,n}$ para cada clase k y en cada grupo de prototipos $s=1,\dots,\kappa_k$.

Los centros de las funciones gaussianas entonces quedan definidos por:

$$\left\{ \omega_{i,k,s,n} \right\}_{\substack{i=1,\dots,d \\ k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,\kappa_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}, \text{ donde } \omega_{i,k,s,n} \in \Omega_{k,s,n} \text{ y la desviación estándar para cada función de}$$

$$\text{pertenencia será dada por } \left\{ \sigma_{i,k,s,n} \right\}_{\substack{i=1,\dots,d \\ k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,\kappa_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}, \text{ donde } \sigma_{i,k,s,n} \text{ es la desviación estándar}$$

de la característica i en el conjunto de prototipos $\Gamma_{k,s,n}$. Las funciones de

$$\text{pertenencia tipo 1 definidas en este paso serán notadas } \left\{ \mu_{i,k,s,n} \right\}_{\substack{i=1,\dots,d \\ k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,\kappa_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}.$$

Recordando las consideraciones realizadas en la Sección 5.3.2, la desviación estándar actúa como parámetro controlando cómo el valor de verdad de las funciones de pertenencia decrece, cuando los valores de la característica para un dato específico se mueven alejándose del centro hallado para la clase.

- 2) Para cada clase $k \in \{1,\dots,K\}$ y cada característica $i \in \{1,\dots,d\}$, se tienen κ_k grupos de datos. Para un s fijo, los datos tienen propiedades similares, pero para s variando en $1,\dots,\kappa_k$ los grupos de prototipos serán diferentes, captando, como se señaló, diferentes rasgos de una misma clase. Dicho esto, para un valor fijo de s , el índice n opera en forma similar al índice m de los métodos T2-SFPC y T2-DFPC, describiendo diferentes “opiniones” de una misma clase.

Siguiendo el método propuesto en la Sección 5.3.2 para la generación de una función de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de un conjunto de datos de prototipos, en este paso, se agregan todas las opiniones reunidas por las funciones de pertenencia tipo 1

$$\left\{ \mu_{i,k,s,n} \right\}_{\substack{i=1,\dots,d \\ k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,\kappa_k \\ n=1,\dots,\zeta_{s,k}}}$$

pertenencia tipo 2 de intervalos $\hat{\mu}_{i,k,s}$, como sigue:

$$\varphi_{\hat{\mu}_{i,k,s}}^-(x) = \min \{ \mu_{i,k,s,n}(x) \}_{n=1, \dots, \zeta_{s,k}}, \forall x \in [-1, 1], \quad (5.43)$$

$$\varphi_{\hat{\mu}_{i,k,s}}^+(x) = \max \{ \mu_{i,k,s,n}(x) \}_{n=1, \dots, \zeta_{s,k}}, \forall x \in [-1, 1], \quad (5.44)$$

$\forall x \in [-1, 1], i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, K\}, s = 1, \dots, \kappa_k$, donde $\hat{\mu}_{i,k,s} : [-1, 1] \rightarrow \xi([0, 1])$ y $\hat{\mu}_{i,k,s}(x) = [\varphi_{\hat{\mu}_{i,k,s}}^-(x), \varphi_{\hat{\mu}_{i,k,s}}^+(x)]$ define un intervalo de valores de verdad. Las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos son definidas, como se detalló en la Sección 5.3.2, agregando, con operadores de la LD, todas las descripciones parciales obtenidas de los $\zeta_{s,k}$ subconjuntos, las cuales estaban contenidas en las funciones de pertenencia tipo 1 $\mu_{i,k,s,n}, n = 1, \dots, \zeta_{s,k}$, para una dada característica i , en una clase k y un grupo de prototipos s [Comas *et al.*, 2015b]. Estas descripciones dicen qué valores de las características tienen más correspondencia con propiedades observadas para la clase.

- 3) A partir de las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\hat{\mu}_{i,k,s}, i = 1, \dots, d, k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, \kappa_k$, se definen los parámetros de funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos formada por tramos de funciones gaussianas, notadas como $\bar{\mu}_{i,k,s}, i = 1, \dots, d, k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, \kappa_k$, siguiendo el método propuesto en la Sección 5.3.2.
- 4) Finalmente, se definen predicados para cada clase $k \in \{1, \dots, K\}$, operando lógicamente con los valores de verdad definidos por las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k,s}\}_{\substack{i=1, \dots, d \\ k=1, \dots, K \\ s=1, \dots, \kappa_k}}$, según el índice i . De esta manera, para cada clase k , se tendrán κ_k predicados difusos compuestos, cada uno asociado al cumplimiento de ciertas propiedades observadas a partir de los datos en $\mathbf{X}$ para la clase k . Esto es, cada predicado explicará la clase k de acuerdo a un conjunto diferente de rasgos descubiertos, indicado por el índice s , según:

$$p_{k,s}(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mu}_{1,k,s}(x_1) \wedge \bar{\mu}_{2,k,s}(x_2) \wedge \dots \wedge \bar{\mu}_{d,k,s}(x_d), \quad (5.45)$$

$$k = 1, 2, \dots, K, ,$$

$$s = 1, \dots, \kappa_k,$$

donde $\mathbf{x}$ es un dato genérico, para el cual se evalúa su pertenencia a la clase k . Los predicados $\{p_{k,s}\}_{s=1, \dots, \kappa_k}$ pueden combinarse lógicamente en un único predicado difuso utilizando el operador de disyunción ($\vee$), pudiendo definir entonces un predicado difuso para cada clase de la siguiente manera:

$$p_k(\mathbf{x}) \equiv p_{k,1}(\mathbf{x}) \vee p_{k,2}(\mathbf{x}) \vee \dots \vee p_{k,\kappa_k}(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots, K' \quad (5.46)$$

donde $\mathbf{x}$ es un dato genérico, para el cual se evalúa su pertenencia a la clase k . En este caso, es apropiado utilizar la s -norma estándar (MAX) para evaluar la disyunción.

El predicado difuso $p_k(\mathbf{x})$ permite pesar con qué valor de verdad un dato $\mathbf{x}$ satisface las propiedades detectadas para la clase k .

Las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos $\{\bar{\mu}_{i,k,s}\}_{\substack{i=1,\dots,d \\ k=1,\dots,K \\ s=1,\dots,\kappa_k}}$ y los predicados difusos $\{p_{k,s}\}_{k=1,\dots,K} \vee \{p_k\}_{k=1,\dots,K}$ forman un sistema difuso para clasificación de datos, generado a partir de prototipos de clases extraídos de un conjunto de datos etiquetados $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$. **El sistema difuso puede ser utilizado para la clasificación de los datos en $\mathbf{X}$, u otros derivados del mismo proceso que $\mathbf{X}$, utilizando el método propuesto en esta Tesis para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados, que fue presentado en la Sección 5.2.2.**

Etapas D: Optimización

Dado el conjunto inicial de datos previamente etiquetados $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ definidos por datos a clasificar y etiquetas deseadas, es posible evaluar el error del sistema difuso, una vez definidas las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y los predicados. Al cuantificar el error del sistema difuso, es posible elegir apropiadamente: los operadores difusos a utilizar para evaluar los predicados y, además, la función g utilizada para evaluar la medida de intervalos de valores de verdad.

Por lo tanto, como Etapa final del método T2-LFPC, el sistema difuso generado es aplicado para clasificar los datos iniciales en $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, obteniendo el **error de resustitución**, definido como el número de vectores de características de $\mathbf{X}$ incorrectamente clasificados de acuerdo a las etiquetas ideales definidas en $\mathbf{Y}$ [Comas *et al.*, 2014b; Duda *et al.*, 2001; Sima *et al.*, 2005]. El detalle del cálculo de este error será ampliado en la Sección 5.4 al explicar en detalle las medidas y métodos de validación utilizados en esta Tesis.

En esta Etapa, el error de resustitución es calculado para diferentes combinaciones de operadores difusos y funciones características de intervalos de valores de verdad g . Un error de clasificación es calculado para cada conjunto de parámetros. La combinación de operador difuso

para evaluar la conjunción y función g con menor error de resustitución, es seleccionada como conjunto de parámetros óptimos.

Como resultado final, se obtiene un sistema difuso para clasificación de datos, basado en predicados difusos y LD tipo 2 de intervalos, formado por funciones de pertenencia que “explican” las clases a obtener y un conjunto de parámetros óptimos para su evaluación. Sólo debe definirse como parámetro del método T2-LFPC el tamaño inicial de la partición de la Etapa A, el valor de M . Al igual que en los métodos de *clustering* explicados en la Sección 5.3.3 (el T2-DFPC y el T2-SFPC), el valor de M es definido heurísticamente de acuerdo con la cantidad de datos en $\mathbf{X}$ [Comas *et al.*, 2014b; Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2015a].

5.3.5 Análisis general de los métodos propuestos para la generación automática de sistemas difusos

En lo que sigue de esta Sección se realiza un análisis detallado de los métodos propuestos en esta Tesis para la generación automática de sistemas difusos, tanto para agrupamiento de datos (T2-DFPC y T2-SFPC) como para clasificación (T2-LFPC).

En los sistemas difusos obtenidos a partir de los métodos propuestos, cada etiqueta es explicada por un único predicado difuso $p_k(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ pertenece al cluster k ”, para el caso de agrupamiento de datos, y $p_k(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ pertenece a la clase k ”, para el caso de clasificación. Los valores de verdad de los predicados $\{p_k(\mathbf{x})\}_{k=1,\dots,K}$, con K el número total etiquetas, es obtenido por la combinación de predicados difusos simples y funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos, obtenidas analizando las propiedades de los datos, y describen atributos asociados y descubiertos para los datos que corresponden a cada una de las etiquetas.

La asignación de las etiquetas es realizada evaluando todos los predicados difusos $\{p_k\}_{k=1,\dots,K}$ para cada dato $\mathbf{x}$ y determinando cuál predicado tiene mayor valor de medida de intervalos de valores de verdad, siguiendo el método propuesto para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados, dado en la Sección 5.2.2.

Tanto los agrupamientos como las clasificaciones obtenidas mediante los sistemas difusos generados son lingüísticamente interpretables. En los métodos T2-DFPC y T2-SFPC, cada *cluster* puede ser explicado por un único predicado, en una manera más simple que en otros algoritmos propuestos previamente en la literatura. Lo mismo ocurre para las clases definidas para el método T2-LFPC. Así, un experto en el campo del que los datos provienen puede dar un significado lingüístico a las funciones de pertenencia y a los predicados, los cuales fueron automáticamente descubiertos.

El esquema de partición de datos utilizado podría ser aplicado también en el caso de **enfoques distribuidos**, donde se procesan en general grandes volúmenes de datos (*Big Data*) [Meschino *et al.*, 2015a]. Con las técnicas propuestas, cada nodo del sistema distribuido podría procesar su propio conjunto de datos (los datos disponibles en éste), como si se tratase de uno de los subconjuntos P_m obtenidos de la partición aleatoria en las Etapas A. Con este enfoque se tendrían M nodos y los datos de cada nodo estarían representando por un conjunto $P_m \subset [-1, 1]^d$ con $m = 1, \dots, M$. Todos los pasos descritos en las Secciones 5.3.3 y 5.3.4 de los métodos de generación automática, previos a la generación del sistema difuso, son ejecutados por cada nodo $m \in \{1, \dots, M\}$ utilizando sus propios datos P_m .

Tanto la extracción de prototipos de *cluster* como la de prototipos de clase requieren el análisis global de todos los datos a partir de los centroides $\{\Upsilon_{m,j}\}_{m=1,\dots,M, j=1,\dots,K_m}$ para los métodos T2-DFPC y T2-SFPC, y $\{\Upsilon_{m,k,j}\}_{m=1,\dots,M, k=1,\dots,K, j=1,\dots,\rho_{m,k}}$ para el método T2-LFPC. Por lo tanto, y adicionalmente a los pasos de los métodos originalmente propuestos, cada nodo debería enviar sus centroides: $\{\Upsilon_{m,k,j}\}_{k=1,\dots,K, j=1,\dots,\rho_{m,k}}$ y $\{\Upsilon_{m,j}\}_{j=1,\dots,K_m}$, donde $m \in \{1, \dots, M\}$ es el nodo; y las desviaciones estándar de cada grupo de prototipos, notadas $\{\Sigma_{m,k,j}\}_{k=1,\dots,K, j=1,\dots,\rho_{m,k}}$ y $\{\Sigma_{m,j}\}_{j=1,\dots,K_m}$ respectivamente.

En un nodo central se realizaría el reagrupamiento a partir de la unión de todos los centroides distribuidos y, a partir de éstos, se definirían las funciones de pertenencia tipo 1, ya que se tendría el mapeo del reagrupamiento y los parámetros necesarios para general las funciones gaussianas. El resto de los pasos se realizarían en el nodo central generando las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos y los predicados difusos, generando completamente el sistema difuso. Una vez generado, el sistema difuso podría ser enviado a los nodos, para realizar agrupamiento o clasificación de datos.

Una característica importante de los métodos propuestos es que, aun en implementación en paralelo sin distribución geográfica, la partición de los datos podría reducir el costo computacional de las etapas de *clustering* utilizadas para la extracción de prototipos en los distintos métodos.

Continuando con el análisis general de los sistemas difusos generados automáticamente a partir de datos, existen varios parámetros que deberían ser elegidos para cada problema particular:

- El algoritmo de *clustering* utilizado debería ser un método simple y de bajo costo computacional, tal como FCM o *K-means*. Este algoritmo será combinado con el BIC, configurando un esquema de *clustering* que automáticamente define el número adecuado de *clusters* para el problema.

- Para el método T2-SFPC, la función distancia utilizada en el entrenamiento del SOM debería ser ajustada de acuerdo al tipo de datos a agrupar.
- El tamaño de la partición aleatoria (M) debería ser elegido de acuerdo al número de datos en el conjunto inicial de datos $\mathbf{X}$, tomando en consideración que cada subconjunto obtenido a partir de la partición debería ser estadísticamente representativo del conjunto de datos iniciales.
- Finalmente, los operadores de la LD para calcular los valores de verdad de los predicados deberían ser elegidos considerando el tipo de problema a resolver [Batyrshtin et al., 2002; Comas et al., 2014c].

5.3.6 Extracción de conocimiento desde los sistemas difusos generados por métodos automáticos

Como resultado de los métodos de generación automática propuestos: T2-DFPC, T2-SFPC y T2-LFPC, se obtienen sistemas difusos para agrupamiento o clasificación de datos. Estos sistemas están formados por predicados difusos y funciones de pertenencia. En esta Sección se presentará la manera en que éstos pueden ser analizados con el fin de extraer descripciones lingüísticas y conocimiento respecto al problema de agrupamiento o clasificación.

Para el análisis llevado a cabo en esta Sección, se pondrá especial énfasis en las consideraciones explicadas en la Sección 5.3.2, donde se presentó el enfoque propuesto en esta Tesis para diseñar funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir de un conjunto de prototipos de *clusters* o clases (datos en general) y a las consideraciones particulares de cada método de generación automática de sistemas difusos propuesto, indicadas a lo largo de las Secciones 5.3.3 y 5.3.4.

En primer lugar, considérese el caso de clasificación de datos (algoritmo T2-LFPC), en el cual cada predicado difuso obtenido $p_k(\mathbf{x})$, interpretado como “El dato $\mathbf{x}$ pertenece a la clase k ”, fue definido en general como una disyunción de otros predicados difusos $p_k(\mathbf{x}) \equiv p_{k,1}(\mathbf{x}) \vee p_{k,2}(\mathbf{x}) \vee \dots \vee p_{k,\kappa_k}(\mathbf{x})$, donde cada predicado en $\{p_{k,s}\}_{s=1,\dots,\kappa_k}$ describía la misma clase k de acuerdo a un conjunto de rasgos descubiertos en el análisis de los prototipos de clases. En esta Sección se analizará uno de los predicados $p_{k,s}$ que describe la clase k entendiendo que el mismo análisis puede ser realizado cualquiera de los $\{p_{k,s}\}_{s=1,\dots,\kappa_k}$. Asimismo, el índice s será obviado para simplificar la notación, por lo que la interpretación de $p_{k,s}(\mathbf{x})$ pasa a ser similar a la dada para $p_k(\mathbf{x})$. De igual manera y sin tener en cuenta el índice s , las funciones de pertenencia

tipo 2 de intervalos definen predicados difusos simples que pueden ser interpretadas como $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$: “La característica i en el dato $\mathbf{x}$ corresponde a la clase k ”, o $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$: “La característica i en el dato $\mathbf{x}$ está cerca de los ejemplos prototipo para la clase k ”, recordando que de acuerdo a la notación utilizada a lo largo de esta Tesis, $\mathbf{x}$ es un vector de características definido como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$.

Para el caso de agrupamiento de datos (métodos T2-DFPC y T2-SFPC), los predicados obtenidos $\{p_k(\mathbf{x})\}_{k=1,\dots,K}$ son lingüísticamente interpretados como $p_k(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ pertenece al cluster k ”; y, de igual manera, las funciones de pertenencia son interpretadas como $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$: “La característica i en el dato $\mathbf{x}$ corresponde al cluster k ”, o $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$: “La característica i en el dato $\mathbf{x}$ está cerca de los datos de ejemplos del cluster k ”.

Como se explicó en la Sección 5.3.2, cuanto mayor sea la cercanía del valor de la característica i en un dato $\mathbf{x}$ a la posición del máximo de $\bar{\mu}_{i,k}$, mayor será el valor de verdad de $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$. A medida que x_i se acerca a la posición del máximo de $\bar{\mu}_{i,k}$, $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$ crece y, por lo tanto, $p_k(\mathbf{x})$ debería también crecer; reflejando el hecho que si un dato está cerca de los prototipos de una etiqueta, entonces la correspondencia entre el dato y esa etiqueta debe tener un valor de verdad alto, lo cual se ve reflejado en $p_k(\mathbf{x})$.

Las interpretaciones lingüísticas dadas antes pueden ser reemplazadas por el significado (la semántica) de los atributos y características consideradas. Los atributos representados para una característica por una función de pertenencia $\bar{\mu}_{i,k}(x_i)$ pueden ser definidos considerando la posición de dicha función de pertenencia en la escala de la característica. De esta manera, si se consideran características normalizadas entre -1 y 1, un x_i cercano a -1 debe ser asociado el término o atributo “bajo” y valores cercanos a 1 con el término o atributo “alto”. Esto hace referencia a las observaciones realizadas por Bodenhofer, Bauer y Zadeh [Bodenhofer y Bauer, 2000; Zadeh, 1989] las cuales se mencionaron al final de la Sección 5.3.1.

Para continuar el análisis, considérese las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos mostradas en la Figura 5.22, las cuales podrían ser obtenidas para un conjunto de datos inicial genérico, con algunos de los métodos propuestos. Para facilitar la explicación del ejemplo, se supondrá que se aplicó un método de agrupamiento de datos. Puede observarse que, de haberse utilizado el método T2-LFPC, el análisis que sigue sería similar; simplemente bastaría con reemplazar todas las referencias a “cluster” o “grupo” por el de “clase”.

En la Figura 5.22 se muestran funciones de pertenencia sombreadas utilizando distintos colores, cada uno representando a uno de los *clusters* descubiertos. El color azul representa al *Cluster #1*, el rojo al *Cluster #2* y el amarillo al *Cluster #3*.

Observando las funciones de pertenencia, puede verse que el *Cluster #1* (azul) está relacionado con pequeños valores de la *Característica #1* y grandes valores de la *Característica #2*. De la misma manera, puede verse que el *Cluster #2* (rojo) está relacionado con valores medianos de la *Característica #1* y pequeños valores de la *Característica #2*. Finalmente, el *Cluster #3* (amarillo) está relacionado con grandes valores de la *Característica #1* y medianos valores de la *Característica #2*.

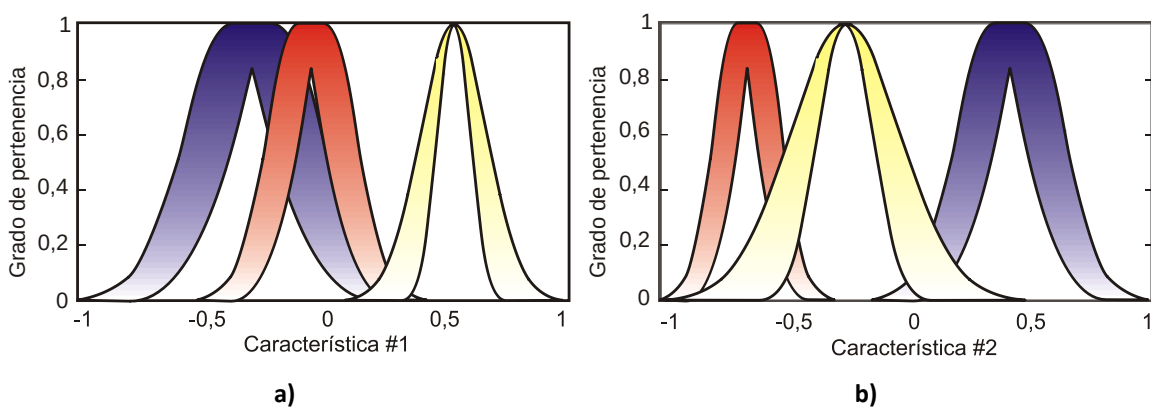


Figura 5.22. Funciones de pertenencia obtenidas utilizando el método T2-DFPC para un conjunto de datos genérico.

Se descubrieron tres *clusters*. El color azul representa al *Cluster #1*. El color rojo representa al *Cluster #2*. El color amarillo representa al *Cluster #3*.

a) Funciones de pertenencia obtenidas para la “*Característica #1*”. **B)** Funciones de pertenencia obtenidas para la “*Característica #2*”.

Con estas consideraciones, para este ejemplo, los predicados difusos generados en forma genérica a partir del método automático pueden ser reescritos como sigue:

- $p_1(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ pertenece al *Cluster #1*” es equivalente a “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es pequeña y la *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es grande”;
- $p_2(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ pertenece al *Cluster #2*” es equivalente a “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es mediana y la *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es pequeña”;
- $p_3(\mathbf{x})$: “El dato $\mathbf{x}$ pertenece al *Cluster #3*” es equivalente a “La *Característica #1* en el dato $\mathbf{x}$ es grande y la *Característica #2* en el dato $\mathbf{x}$ es mediana”.

Las denominaciones genéricas “*Característica i*” pueden ser reemplazadas por el nombre de las características reales, para un conjunto de datos particular. Una interpretación más específica se puede obtener a través de expertos en el campo al que corresponden los datos. Los atributos

utilizados pueden ser reemplazados por expresiones más exactas y específicas, de acuerdo al significado de la característica (a qué mide o representa).

La mayor ventaja de los métodos propuestos para la generación automática de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos, es que permiten evaluar la imprecisión e incertidumbre de los conceptos difusos descritos, los cuales están involucrados en la clasificación o el agrupamiento de los datos.

Más precisamente, grandes FOU implican grandes variaciones entre los datos contenidos en los subconjuntos definidos en la partición aleatoria de los datos iniciales (Etapas A de los métodos propuestos). Estos subconjuntos contienen diferentes instancias del mismo problema de clasificación o agrupamiento. Por lo tanto, el *clustering* posterior que se realiza sobre éstos en los diferentes métodos automáticos, puede revelar diferentes “opiniones” de como la clasificación o el agrupamiento debe realizarse. Estas “opiniones” son parcialmente modeladas por las funciones de pertenencia tipo 1 definidas y, luego, son agregadas (combinadas) en funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos, por medio de operadores difusos.

Reformulando, funciones de pertenencia con grandes FOU indican que existe una gran incertidumbre (variabilidad) respecto al valor de verdad de la correspondencia entre valores de las características y las etiquetas. Desde el punto de vista de la característica, esto también sugiere que hay una gran imprecisión acerca del atributo modelado por la función de pertenencia, así como también acerca de la importancia de ésta en la discriminación de las etiquetas. Por otro lado, funciones de pertenencia anchas están relacionadas a gran variabilidad en los datos de una misma etiqueta. En consecuencia, ambos aspectos proveen información respecto al problema bajo estudio.

Analizando la posición de las funciones de pertenencia obtenidas y los predicados difusos generados, también es posible obtener información relativa a la correlación o no de las características dentro del conjunto de datos.

5.3.7 Métodos análogos propuestos para la generación automática de sistemas difusos basados en LD tipo 1

Durante el trabajo desarrollado sobre los temas abordados en esta Tesis, se han propuesto y ensayado otros métodos de generación automática de sistemas difusos, análogos a los presentados en las Secciones 5.3.3 y 5.3.4, pero basados LD tipo 1 y predicados; con el fin principal de poder comparar sus resultados con los de los métodos propuestos basados en LD tipo 2 de intervalos.

Estos métodos análogos basados en LD tipo 1 también forman parte de los aportes de la presente Tesis, siendo a su vez, métodos que realizan un importante aporte a las técnicas de

extracción de conocimiento a partir de datos y al avance en técnicas de LD para agrupamiento y clasificación de datos en general, al igual que el resto de los métodos presentados en este Capítulo. Parte de estos métodos análogos se encuentran ya publicados en [Meschino *et al.*, 2015a] y [Meschino *et al.*, 2013].

Los métodos de generación automática de sistemas difusos basados en LD tipo 1 son: *Type-1 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T1-LPFC), análogo al T2-LPFC; *Type-1 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T1-DPFC), análogo al T2-DPFC, y *Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T1-SPFC), análogo al T2-SPFC.

Al igual que para los métodos basados en LD tipo 2 de intervalos, en los métodos de generación automática de sistemas difusos con LD tipo 1, se realiza una partición aleatoria en una primera Etapa, generando M subconjuntos disjuntos a partir del conjunto inicial de datos. Sin embargo, como característica distintiva respecto a sus análogos basados en LD tipo 2 de intervalos, no se realiza la agregación de las funciones de pertenencia tipo 1 generadas. Por lo tanto, los sistemas difusos con LD tipo 1 generados cuentan con M descripciones para cada etiqueta, que deben tomarse en consideración al consultar el sistema difuso, mediante la combinación lógica de los predicados obtenidos a partir de cada función de pertenencia tipo 1.

En estos métodos análogos, el parámetro M podría ser igual a 1, en cuyo caso se obtendría una sola función de pertenencia tipo 1 para cada clase o *cluster*. Si $M > 1$, los métodos permiten considerar variaciones en los datos dentro de cada *cluster* o clase, como se ha explicado en las secciones anteriores, realizando conceptualmente una descripción más completa del problema analizado. Esta característica también la realizan los métodos de generación propuestos que utilizan LD tipo 2 de intervalos presentados anteriormente.

Sin embargo, la interpretación lingüística de los sistemas difusos con LD tipo 1 se hace más compleja al utilizar $M > 1$, pues se tienen varias funciones de pertenencia que explican el mismo concepto. En cambio, al considerar LD tipo 2 de intervalos, las funciones de pertenencia tipo 1 que explican el mismo concepto son agregadas en una única función de pertenencia valuada en intervalos [Comas *et al.*, 2015b; Meschino *et al.*, 2015a].

Con $M = 1$, los sistemas difusos tipo 1 tienen una interpretación similar a la de los métodos basados en LD tipo 2 de intervalos. Este caso es el que permite la comparación directa de los resultados de ambos tipos de LD. Los sistemas difusos obtenidos de estos métodos análogos basados en LD tipo 1, serán utilizados en el Capítulo 6 al evaluar y discutir los resultados obtenidos para la LD tipo 2 de intervalos, en la búsqueda de confirmar o desechar la hipótesis propuesta en esta Tesis.

5.3.8 Resumen de los métodos propuestos para la generación automática de sistemas difusos

A modo de resumen de los métodos propuestos en esta Tesis para la generación automática de sistemas difusos, se presenta en la Tabla 5.1 una lista de los mismos, indicando sus características principales y los parámetros que deben definirse para su uso.

Tabla 5.1. Resumen de los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos en esta Tesis.

Método propuesto	Acrónimo	Enfoque de Reconocimiento de Patrones	Tipo de LD utilizada	Características principales	Parámetros
<i>Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering</i>	T2-DPFC	No supervisado	LD tipo 2 de intervalos	Se extraen prototipos de <i>clusters</i> a partir de los datos iniciales utilizando FCM-BIC. A partir de éstos, y con operadores de agregación, se genera el sistema difuso tipo 2 de intervalos.	M ; operador difuso
<i>Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering</i>	T2-SPFC	No supervisado	LD tipo 2 de intervalos	Se extraen prototipos de <i>clusters</i> a partir de SOM automáticamente definidos y entrenados con los datos iniciales y en enfoque de <i>clustering</i> FCM-BIC. A partir de éstos, con operadores de agregación, se genera el sistema difuso tipo 2 de intervalos.	M ; operador difuso
<i>Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification</i>	T2-LPFC	Supervisado	LD tipo 2 de intervalos	Se extraen prototipos de clases a partir de los datos iniciales. A partir de éstos, utilizando <i>clustering</i> con FCM-BIC y operadores de agregación, se genera el sistema difuso tipo 2 de intervalos.	M
<i>Type-1 Data-based Fuzzy Predicate Clustering</i>	T1-DPFC	No supervisado	LD tipo 1	Se extraen prototipos de <i>clusters</i> a partir de los datos iniciales utilizando FCM-BIC. A partir de éstos se genera el sistema difuso tipo 1.	M ; operador difuso, formato predicados
<i>Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering</i>	T1-SPFC	No supervisado	LD tipo 1	Se extraen prototipos de <i>clusters</i> a partir de SOM automáticamente definidos y entrenados con los datos iniciales y en enfoque de <i>clustering</i> FCM-BIC. A partir de éstos se genera el sistema difuso tipo 1.	M ; operador difuso, formato predicados
<i>Type-1 Label-based Fuzzy Predicate Classification</i>	T1-LPFC	Supervisado	LD tipo 1	Se extraen prototipos de clases a partir de los datos iniciales. A partir de éstos, utilizando <i>clustering</i> con FCM-BIC, se genera el sistema difuso tipo 1.	M

5.4. Métodos y medidas de validación utilizados

Al utilizar técnicas de Reconocimiento de Patrones para agrupamiento o clasificación de datos, la evaluación de la calidad de los resultados obtenidos permite analizar la bondad de la técnica utilizada a nivel global e identificar particularidades de determinadas etiquetas identificadas. Esta evaluación se realiza por medio de las llamadas **medidas de validación**. Utilizando una misma medida de validación es posible comparar resultados de distintas técnicas.

En enfoques de segmentación de imágenes por medio de Reconocimiento de Patrones, como los abordados en esta Tesis, el uso de medidas de validación permite evaluar la calidad de la segmentación obtenida, evaluando las etiquetas asignadas a los píxeles de una imagen, determinando, por ejemplo, la proporción de píxeles correctamente clasificados.

Dada su importancia para evaluar la calidad del agrupamiento o la clasificación obtenidos mediante técnicas de Reconocimiento de Patrones en general y, como caso particular, a través de los sistemas difusos generados automáticamente mediante los métodos propuestos en este Capítulo; en esta Sección se definen las medidas y métodos de validación utilizados en esta Tesis. Éstos serán usados en el desarrollo de las pruebas presentadas en el análisis de resultados del Capítulo 6.

Las medidas y métodos de validación utilizados pueden ser empleados para evaluar el agrupamiento o la clasificación de datos de cualquier tipo y, en particular, para evaluar la segmentación de imágenes. Debido a esto, en el desarrollo de esta Sección, se utilizarán los términos vectores de datos agrupados o vectores de datos clasificados, en referencia al resultado de una técnica de Reconocimiento de Patrones aplicada sobre datos que podrían corresponder, o no, a píxeles de una imagen.

5.4.1 Medidas de validación

Para poder medir cuantitativamente la calidad de una técnica de Reconocimiento de Patrones, es deseable contar con datos previamente etiquetados que puedan tomarse como referencia del resultado que se espera obtener (*Gold Standard*). Para el caso particular de imágenes, es deseable contar con imágenes o partes de imágenes previamente segmentadas. En este sentido, las medidas de validación que utilizan para su cómputo datos previamente etiquetados se conocen como **medidas externas** o **índices externos** [Halkidi *et al.*, 2001].

En el caso del uso de técnicas de *clustering*, los datos *Gold Standard* podrían no estar disponibles, dado que, al tratarse de enfoques no supervisados, las técnicas de agrupamiento no requieren datos *Gold Standard* para efectuar el agrupamiento. En estos casos, pueden utilizarse medidas de validación que utilicen solamente información presente en el conjunto de datos agrupados, sin necesidad de contar con los datos previamente etiquetados. Estas medidas se conocen como **índices internos** o **medidas internas** [Halkidi *et al.*, 2001].

Las medidas de validación externas e internas utilizadas se definen a continuación.

5.4.1.1. Medidas externas

En las definiciones que siguen, el conjunto de etiquetas obtenidas para un conjunto de datos $\mathbf{X}$ será notado $\mathbf{A}$ y el conjunto de referencia (resultado deseado o *Gold Standard*) como $\mathbf{B}$. La intersección entre ambos conjuntos (los elementos comunes entre ambos) corresponderá a los datos correctamente etiquetados. Se definirán los conjuntos $\mathbf{A}_k$ y $\mathbf{B}_k$ con el conjunto de índices de los elementos que fueron etiquetados con la etiqueta k en $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente.

Matriz de confusión y porcentaje de error

DEFINICIÓN 5.13: La **matriz de confusión** M presenta cuántos datos (o qué porcentaje de ellos) fueron etiquetados correctamente para cada una de las etiquetas a detectar y brinda información sobre los errores para cada una de ellas, permitiendo analizar hacia cuáles se desviaron los datos incorrectamente etiquetados. Es una matriz de $K \times K$, donde K es la cantidad de etiquetas; etiqueta según los datos esperados y etiquetas que fueron obtenidas. La diagonal de la matriz representa los datos etiquetados correctamente. El resto de los valores representan errores, permitiendo conocer cuántos datos fueron erróneamente etiquetados y cómo fueron etiquetados. De esta manera, los datos de la etiqueta k que fueron etiquetados como j serán [Duda *et al.*, 2001; Meschino, 2008]:

$$M_{k,j} = \#(\mathbf{A}_j \cap \mathbf{B}_k), k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, K, \quad (5.47)$$

donde el operador $\#$ denota la cantidad de elementos del conjunto. De esta forma se obtienen cada uno de los valores de la matriz de confusión.

DEFINICIÓN 5.14: Una valoración global del resultado de la técnica de Reconocimiento de Patrones se puede obtener con la **tasa o porcentaje de error** (MCR, del inglés *Misclassification Rate*), obtenido como el cociente entre la suma de los elementos de la matriz de confusión (exceptuando a los de la diagonal) y la cantidad total datos [Duda *et al.*, 2001; Meschino, 2008]:

$$MCR = 100\% \frac{\sum_{k,j} M_{k,j}}{\sum_k \#(\mathbf{B}_k)}, k \neq j. \quad (5.48)$$

Además, pueden obtenerse porcentajes de error para cada una de las etiquetas individualmente.

En la Figura 5.23 se muestra un ejemplo de una imagen de 8 por 8 píxeles, segmentada en dos etiquetas (*Etiqueta #1* de color negro y *Etiqueta #2* de color blanco). Como puede observarse,

la cantidad de elementos de cada etiqueta en la imagen obtenida es: $\#(A_1) = 16$ y $\#(A_2) = 48$; y para la imagen de referencia $\#(B_1) = 24$ y $\#(B_2) = 40$.

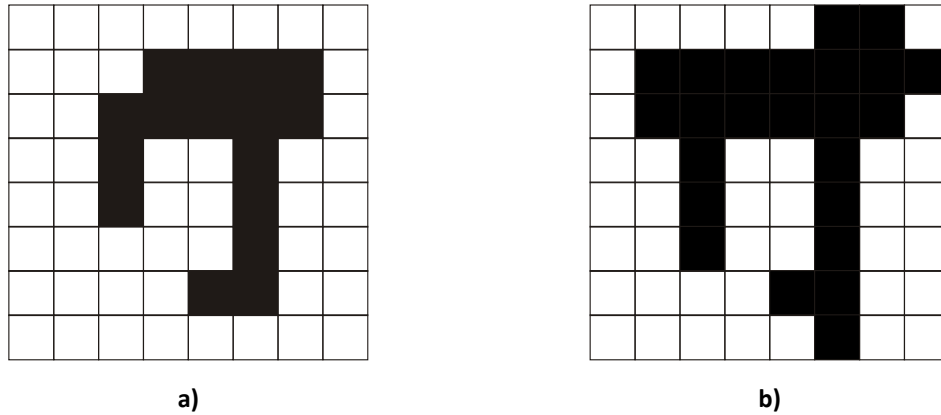


Figura 5.23. Ejemplo de segmentación de una imagen en 2 etiquetas.
a) Segmentación obtenida. b) Segmentación esperada (*Gold Standard*).

La matriz de confusión correspondiente al ejemplo de la Figura 5.23 se presenta en la Tabla 5.2. El porcentaje de error es $MCR = 100\% \frac{8}{64} = 12,5\%$.

Tabla 5.2. Matriz de confusión normalizada del ejemplo de la Figura 5.23.

	...fueron etiquetados como <i>Etiqueta #1</i>	...fueron etiquetados como <i>Etiqueta #2</i>
Píxeles que correspondiendo a la <i>Etiqueta #1</i> ...	$\frac{16}{24} = 0,66$	$\frac{8}{24} = 0,33$
Píxeles que correspondiendo a la <i>Etiqueta #2</i> ...	$\frac{0}{40} = 0$	$\frac{40}{40} = 1$

Coefficiente de Tanimoto

DEFINICIÓN 5.15: El **coeficiente de Tanimoto** (TC, del inglés *Tanimoto Coefficient*) para una etiqueta k se define como [Duda *et al.*, 2001; Meschino, 2008]:

$$TC_k = \frac{\#(A_k \cap B_k)}{\#(A_k) + \#(B_k) - \#(A_k \cap B_k)}, k = 1, \dots, K, \quad (5.49)$$

donde $\#$ denota la cantidad de elementos del conjunto; A_k y B_k son el conjunto de índices de los datos asignados a la etiqueta k en A y B respectivamente.

El **coeficiente de Tanimoto** es el cociente entre el número de elementos iguales (correctamente etiquetados) y el número de elementos distintos (a los que les corresponde la etiqueta k o fueron asignados a la etiqueta k). Si $TC_k = 1$, entonces todos los datos de la etiqueta

k fueron correctamente etiquetados y si $TC_k = 0$ ningún dato de la etiqueta k fue correctamente etiquetado.

Para el ejemplo de la Figura 5.23 los coeficientes de Tanimoto son:

$$TC_1 = \frac{16}{16 + 24 - 16} = 0,66 \text{ y } TC_2 = \frac{40}{48} = 0,83 \quad (5.50)$$

Coeficiente de Dice

DEFINICIÓN 5.16: El **coeficiente de Dice**, $DICE_k$, se define como sigue [Duda *et al.*, 2001; Meschino, 2008]:

$$DICE_k = \frac{2\#(\mathbf{A}_k \cap \mathbf{B}_k)}{\#(\mathbf{A}_k) + \#(\mathbf{B}_k)}, k = 1, \dots, K, \quad (5.51)$$

donde $\#$ denota la cantidad de elementos de un conjunto; $\mathbf{A}_k$ y $\mathbf{B}_k$ son el conjunto de índices de los elementos que fueron asignados a la etiqueta k en $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente.

El **coeficiente de Dice** está relacionado con el **coeficiente de Tanimoto** de la siguiente forma:

$$DICE_k = \frac{2TC_k}{1 + TC_k}, k = 1, \dots, K. \quad (5.52)$$

Para el ejemplo de la Figura 5.23 los coeficientes de Dice son:

$$DICE_1 = \frac{216}{16 + 24} = 0,8 \text{ y } DICE_2 = \frac{240}{48 + 40} = 0,901. \quad (5.53)$$

Coeficiente de exactitud

DEFINICIÓN 5.17: El **coeficiente de exactitud** (ACC, del inglés *Accuracy Coefficient*) es el cociente entre el número de elementos etiquetados correctamente y el número de elementos de esa etiqueta [Duda *et al.*, 2001; Meschino, 2008]:

$$ACC_k = \frac{\#(\mathbf{A}_k \cap \mathbf{B}_k)}{\#(\mathbf{B}_k)}, k = 1, \dots, K, \quad (5.54)$$

y a nivel global:

$$Accuracy = 100\% \frac{\sum_{k=1}^K \#(\mathbf{A}_k \cap \mathbf{B}_k)}{\sum_{j=1}^K \#(\mathbf{B}_j)}, \quad (5.55)$$

donde $\#$ denota la cantidad de elementos de un conjunto; $\mathbf{A}_k$ y $\mathbf{B}_k$ son el conjunto de índices de los elementos que fueron asignados a la etiqueta k en $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente.

Para el ejemplo de la Figura 5.23 los coeficientes de exactitud son:

$$ACC_1 = \frac{16}{24} = 0,66, \quad ACC_2 = \frac{40}{40} = 1,00 \quad (5.56)$$

y

$$Accuracy = 100\% \frac{16 + 40}{24 + 40} = 100\% \frac{56}{64} = 87,5\% . \quad (5.57)$$

Coeficiente *purity*

El **coeficiente *purity*** permite evaluar los resultados obtenidos para un algoritmo de agrupamiento cuando se tiene un conjunto de etiquetas *Gold Standard*. Se define como sigue:

DEFINICIÓN 5.18: El **coeficiente *purity*** mide el grado de “pureza” de un *cluster* y es el cociente entre el máximo número de elementos de una misma etiqueta en un *cluster* obtenido y la cantidad total de elementos en el *cluster*, formalmente [Rendón *et al.*, 2011]:

$$PUR_k = \frac{\max \left(\left\{ \#(\mathbf{A}_k \cap \mathbf{B}_j) \right\}_{j=1, \dots, K} \right)}{\#(\mathbf{A}_k)}, k = 1, \dots, K, \quad (5.58)$$

y a nivel global:

$$Purity = 100\% \frac{\sum_{k=1}^K \#(\mathbf{A}_k) PUR_k}{\sum_{j=1}^K \#(\mathbf{B}_j)}, \quad (5.59)$$

donde $\#$ denota la cantidad de elementos de un conjunto; $\mathbf{A}_k$ es el conjunto de índices de los elementos que fueron asignados al *cluster* k en $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}_j$ es el conjunto de índices de los elementos que corresponden a la etiqueta j en $\mathbf{B}$ respectivamente.

Para el ejemplo de la Figura 5.23 los coeficientes de *purity* son:

$$PUR_1 = \frac{16}{16} = 1,00, \quad PUR_2 = \frac{40}{48} = 0,83, \quad (5.60)$$

y

$$Purity = 100\% \frac{16\,1,00 + 48\,0,83}{24 + 40} = 100\% \frac{55,98}{64} = 87,47\%. \quad (5.61)$$

5.4.1.2. Medidas internas

Índice silhouette

DEFINICIÓN 5.19: El **índice silhouette** proporciona una medida de cuán compactos son los grupos obtenidos mediante una técnica de agrupamiento y, simultáneamente, cuán separados están los datos de un grupo a los de otros grupos. Se define de la siguiente manera [Rendón *et al.*, 2011]:

$$Silhouette = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{\#(\mathbf{A}_k)} \sum_{j \in \mathbf{A}_k} S(\mathbf{x}_j) \right], \quad (5.62)$$

donde $\mathbf{x}_j \in \mathbf{X}$, donde $\mathbf{X}$ denota al conjunto de datos que fueron agrupados, $j \in \mathbf{A}_k$ representa al índice de algún dato que fue agrupado en el *cluster* k y $S(\mathbf{x}_j)$ es definido como:

$$S(\mathbf{x}_j) = \frac{b(\mathbf{x}_j) - a(\mathbf{x}_j)}{\max(a(\mathbf{x}_j), b(\mathbf{x}_j))}, \quad (5.63)$$

$$a(\mathbf{x}_j) = \frac{1}{\#(\mathbf{A}_k) - 1} \sum_{\substack{m \in \mathbf{A}_k \\ m \neq j}} g(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_m), \quad (5.64)$$

$$b(\mathbf{x}_j) = \min_{\substack{h=1, \dots, K \\ h \neq k}} \left(\frac{1}{\#(\mathbf{A}_h)} \sum_{m \in \mathbf{A}_h} g(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_m) \right), \quad (5.65)$$

donde $\#$ denota la cantidad de elementos de un conjunto; $\mathbf{A}_k$ es el conjunto de índices de los elementos que fueron agrupados en el *cluster* k y $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función distancia.

Índice Dunn

DEFINICIÓN 5.20: El **índice Dunn** proporciona una medida para evaluar la performance global de un algoritmo de *clustering*, considerando la mínima distancia entre los centros de *clusters* obtenidos y la máxima distancia inter-*cluster* entre todos los datos agrupados. Se define como sigue [Rendón *et al.*, 2011]:

$$Dunn = \frac{\min \left(\left\{ g(\mathbf{Z}_h, \mathbf{Z}_k) \right\}_{\substack{k=1, \dots, K \\ h=1, \dots, K, h \neq k}} \right)}{\max \left(\left\{ g(\mathbf{x}_{\mathbf{A}_k(j)}, \mathbf{Z}_k) \right\}_{\substack{j=1, \dots, \#(\mathbf{A}_k) \\ k=1, \dots, K}} \right)}, \quad (5.66)$$

donde $\mathbf{x}_{A_k(j)} \in \mathbf{X}$, $A_k(j)$ es el elemento j del conjunto de índices de los elementos que fueron agrupados en el *cluster* k , notado por A_k , $\{\mathbf{Z}_k\}_{k=1,\dots,K}$ es el conjunto de centroides finales del algoritmo de *clustering* y $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función distancia.

5.4.2 Métodos de validación

Las correctas estimaciones del error de clasificación y, en general, de las medidas de validación externas, requieren consideraciones especiales. En segmentación de imágenes, estas medidas representan la cantidad de píxeles correcta e incorrectamente segmentados (clasificados).

Para los **algoritmos de clasificación**, el error, o cualquier medida de validación externa, debería ser evaluada sobre un conjunto de datos distinto al conjunto de datos utilizado para generar el clasificador. Habitualmente, se realiza una partición aleatoria sobre el conjunto de datos inicial, generando subconjuntos disjuntos y definiendo, a partir de éstos, un **conjunto de datos de entrenamiento** y un **conjunto de datos de test**, los cuales no tienen elementos en común. Para estimar la calidad de un clasificador, éste es generado o entrenado a partir de los datos de entrenamiento. Luego, la medida de validación es estimada considerando el vector de etiquetas obtenido al aplicar el clasificador al conjunto de datos de *test*.

Existen diferentes métodos para la estimación de las medidas de validación externas. En general, el proceso se realiza aplicando uno o más ciclos de entrenamiento-prueba, y lo que varía entre uno y otro método son la cantidad de estos ciclos y el tamaño de la partición aleatoria utilizada para definir los conjuntos de datos de entrenamiento y de *test*. Pueden mencionarse, entre otros, los métodos: *leave-one-out*, *hold-out* y *K-fold cross validation* [Duda et al., 2001]. La medida de validación promedio (y su dispersión) entre los valores obtenidos en todos los ciclos de entrenamiento-test se utiliza para reportar la calidad (error, exactitud, etc.) del algoritmo de clasificación.

Es importante remarcar, que el proceso anterior se utiliza exclusivamente para estimar correctamente la medida de validación para un clasificador generado con un determinado conjunto de datos. En este sentido, **el clasificador final que se utiliza para clasificar los datos se obtiene entrenando el mismo utilizando todos los datos disponibles, es decir, la totalidad del conjunto de datos a clasificar**. La medida de calidad de ese clasificador, que indica la capacidad de generalización del mismo, es aquélla estimada por el método descrito en el párrafo anterior, es decir, una medida estimada dividiendo el conjunto total en datos de entrenamiento y datos de *test*.

Cuando no se busca estimar el error de generalización del método de clasificación, sino sólo ajustar sus parámetros internos, puede utilizarse el llamado **error de resustitución**, en lugar de

estimar el error por los métodos de validación descriptos anteriormente [Sima *et al.*, 2005]. El **error de resustitución** se define como la **tasa de error** (dada en la Definición 5.14) **obtenida para un clasificador al clasificar el conjunto de datos de entrenamiento**. Es decir, en este caso el clasificador se genera y se evalúa con el mismo conjunto de datos. **El valor obtenido es una estimación sesgada y, por lo tanto, no es una correcta estimación del error de generalización**. Esto se debe a que se utiliza en el entrenamiento y en la evaluación el mismo conjunto de datos. Sin embargo, fue demostrado en [Sima *et al.*, 2005] que el uso de este error es un método más rápido y adecuado que la estimación del error, cuando lo que se busca es una combinación óptima de parámetros internos para un clasificador y no es relevante el valor del error estimado. En estos casos, el interés no es conocer valores estimados sin sesgo para el error de los distintos juegos de parámetros internos, sino, establecer un orden entre ellos, en la búsqueda del conjunto de parámetros que tendrá mejor desempeño en el clasificador. El error de resustitución es utilizado en la Etapa de optimización del método propuesto T2-LFPC (Etapa D), donde se seleccionan los operadores difusos y la función g usada para evaluar la medida de intervalos de valores de verdad óptimos para el sistema difuso generado.

Para los **métodos de clustering**, pueden aplicarse **medidas internas** de validación o, en el caso de contarse con datos etiquetados, puede computarse **medidas de validación externas**. No es necesario en los casos de *clustering* dividir los datos en conjuntos de entrenamiento y de *test*. Por lo tanto, el algoritmo de *clustering* es aplicado para agrupar la totalidad de los datos y la calidad de algoritmo se evalúa sobre el agrupamiento obtenido para el total de los datos. Sin embargo, dada la aleatoriedad general de los métodos de *clustering*, principalmente en su inicialización, es común ejecutar varias veces el método y estimar el valor promedio y la dispersión de las medidas de validación obtenidas en cada iteración. [Halkidi *et al.*, 2001; Meschino *et al.*, 2015a].

Capítulo 6: Resultados

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Capítulo 6: Resultados

6.1. Introducción

En este Capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos para todos los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos en esta Tesis, específicamente los métodos: *Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-DFPC) y *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-SFPC), propuestos para generar sistemas difusos para *clustering* y el *Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T2-LFPC), propuesto para generar sistemas difusos para clasificación.

Las pruebas fueron enfocadas en la comparación de los resultados de los métodos propuestos con los de otros métodos de Reconocimiento de Patrones utilizados habitualmente en segmentación de imágenes y, además, en el estudio de performance de los métodos basados en LD tipo 2 de intervalos frente a la LD tipo 1, con el fin de confirmar la hipótesis de trabajo propuesta en esta Tesis. Para este último fin, en cada prueba se utilizaron los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos basados en LD tipo 2 de intervalos: T2-DFPC, T2-SFPC y T2-LFPC y sus análogos basados en LD tipo 1: T1-DFPC, T1-SFPC y T1-LFPC, también propuestos en esta Tesis. A su vez, al generar sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos, los resultados obtenidos permitieron analizar la performance de la metodología para ordenar intervalos de valores de verdad a través del concepto de medida de intervalos de valores de verdad y del método para la consulta de sistemas difusos, ambos propuestos en la Sección 5.2.2. Los resultados de este análisis también se presentan aquí.

El desarrollo de las pruebas incluyó la evaluación de la robustez de los sistemas difusos obtenidos y de los métodos de generación automática propuestos frente a conjuntos de datos afectados por ruido aditivo. En cada caso, los resultados fueron comparados con los de otros métodos de Reconocimiento de Patrones frente a las mismas condiciones de ruido. Las consideraciones específicas de cada una de las pruebas realizadas serán explicadas oportunamente, para cada caso, en las Secciones que siguen.

Dada la importancia del estudio de la IRM de cerebro en la detección de anormalidades, lesiones cerebrales y el diagnóstico temprano de enfermedades neurodegenerativas [Ballarin, 2001; Courchesne *et al.*, 2000; Ge *et al.*, 2002; Meschino, 2008], que fue presentada en el Capítulo 2, en esta Tesis se estudia como problema de aplicación de los métodos propuestos la **segmentación de IRM de cerebro**, identificando MG, MB y LCR. Se procesaron dos secuencias de

IRM de cerebro provenientes de diferentes fuentes: un **conjunto de IRM reales segmentadas por médicos especialistas** (conjunto de prueba #1) que ya fue utilizado en [Meschino, 2008] y un **conjunto de IRM provenientes de simulaciones** (conjunto de prueba #2) [Cocosco *et al.*, 1997; Collins *et al.*, 1998; Kwan *et al.*, 1996; Kwan *et al.*, 1999], que también fue utilizado previamente en [Meschino, 2008] y en trabajos previos propios y en colaboración [Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2012; Meschino *et al.*, 2015a]. Para completar el análisis de resultados, se realiza un estudio detallado de la **extracción de conocimiento a partir de los sistemas difusos generados automáticamente utilizando el método T2-DFPC**, para las IRM de cerebro del conjunto de prueba #2.

Debido a que es necesario analizar la capacidad de los métodos propuestos para su uso en problemas generales de Reconocimiento de Patrones, también se utilizaron conjuntos de datos genéricos, de uso libre y disponibles *online* en el repositorio *UCI Machine Learning Repository* [Bache y Lichman, 2013]. Sobre estos conjuntos también se realizaron pruebas de robustez frente al ruido. Se presentan los detalles de los conjuntos de datos estudiados y las pruebas realizadas.

En la totalidad de las pruebas realizadas se utilizaron los métodos de validación presentados en la Sección 5.4. De esta manera, se obtuvieron estimaciones de las diferentes medidas de calidad utilizadas, que son promedios de un conjunto de valores estimados obtenidos a partir del método de validación. Así es que, en todos los casos, se reportan los valores promedios y las desviaciones estándar de las estimaciones. Asimismo, en el análisis que sigue en este Capítulo, cuando se comparen dos medidas de validación obtenidas para distintos métodos, se utilizará la ecuación:

$$diferencia\% = \frac{valor_1 - valor_2}{valor_2} \times 100\%, \quad (6.1)$$

donde $valor_1$ es el valor de la medida de validación del que se quiere conocer su diferencia con el $valor_2$ correspondiente al resultado de un método tomado como referencia.

Asimismo, para saber si las diferencias en las medidas de calidad observadas en las diferentes comparaciones realizadas son o no estadísticamente significativas, se recurrió al uso de *tests* estadísticos. Se seleccionó el *test* de rangos signados de Wilcoxon para datos apareados [Gibbons y Chakraborti, 2003], un *test* estadístico no paramétrico, debido a que no se verificaron distribuciones normales para las medidas de calidad estimadas. El resultado del *test*, simbolizado por la letra P , indica por medio de su valor si dos vectores comparados son estadísticamente diferentes, reflejando que las diferencias observadas son estadísticamente significativas. Así, valores de P menores de 0,05 indicarán una diferencia estadísticamente significativa entre dos medidas que se comparan. A lo largo de este Capítulo, cada vez que se realice una comparación, se analizará el valor P resultante de ella.

El resto de este Capítulo se divide en dos secciones principales. En la Sección siguiente se presentan y analizan los resultados en segmentación de imágenes médicas para los conjuntos de prueba #1 y #2. Luego, en la Sección 6.3 se presentan y discuten los resultados de los métodos propuestos sobre conjuntos de datos generales.

6.2. Segmentación de imágenes médicas

6.2.1 Conjunto de prueba #1: IRM reales

Las IRM en este conjunto de imágenes corresponden a una base de datos previamente generada y utilizada en [Meschino, 2008], en donde se presentan modelos de LD tipo 1 basados en predicados y generados a través de conocimiento de especialistas para la segmentación de IRM.

Las imágenes fueron originalmente adquiridas con cortes coronales 3D pesados en T1 con ecos ortogonales a la línea AC-PC (TR/TE= 24/5 ms, ancho de corte = 1.5 mm); y cortes coronales pesados en PD y T2 con ecos de spin rápidos (TR/TE1/TE2= 3500/32/96 ms, echo *train length* = 8, ancho de corte = 3 mm). Las imágenes corresponden a 5 estudios 3D de RM realizados en la Clínica de Demencia del Instituto de Investigaciones Neurológicas “Raúl Carrea” (Buenos Aires, Argentina) [Meschino, 2008].

Los estudios consisten en 192 cortes, con imágenes de 256x256 píxeles. El objetivo de segmentación es identificar cada píxel como MG, MB o LCR. Tal como se explicó en el Ejemplo 5.1, para realizar esta segmentación mediante Reconocimiento de Patrones se utilizan para cada píxel sus niveles de gris en las imágenes pesadas en PD, T1 y T2 para formar el vector de características, resultando en vectores de características de tres componentes.

En el trabajo original de [Meschino, 2008], las IRM habían sido pre-procesadas removiendo aquellos tejidos que no corresponden a MG, MB y LCR; tales como el cráneo y las meninges. El *Gold Standard* había sido generado por dos médicos especialistas, corrigiendo según sus criterios la segmentación preliminarmente obtenida mediante el *software* comercial BRAINS [Iowa Mental Health Clinical Research Center, 2005] y el algoritmo de *clustering* FCM. Dada la complejidad de la segmentación, se habían tomado solamente 18 cortes representativos, que son los utilizados en esta Tesis como conjunto de prueba #1. En todos ellos, sólo se consideraron los píxeles correspondientes a los tres tejidos de interés, descartando los píxeles del fondo. En la Figura 6.1 se muestran 3 de los cortes utilizados, los cortes #59, #79 y #99. En cada caso se muestran las IRM pesadas en PD, T1 y T2 y la segmentación *Gold Standard*.

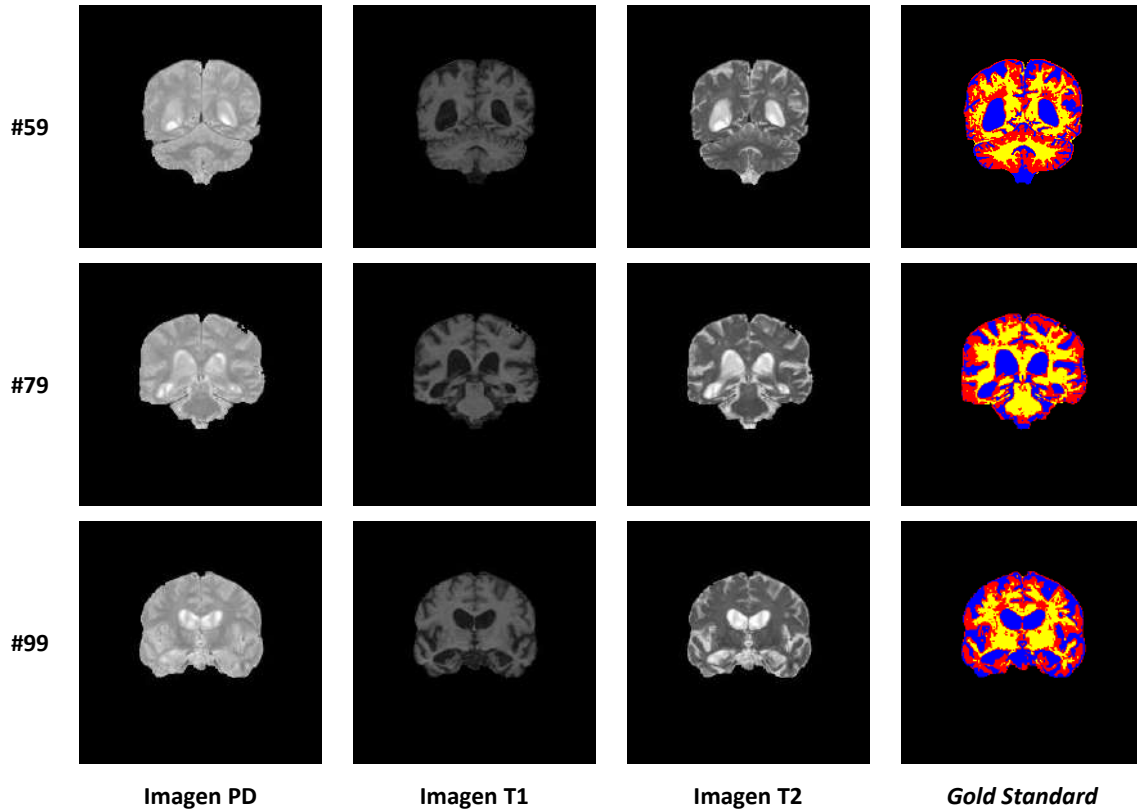


Figura 6.1. IRM en cortes #59, #79 y #99 representativos de las imágenes del conjunto de prueba #1.

El número de corte se indica en la columna izquierda. MG en rojo, MB en amarillo y LCR en azul. Las imágenes, de 256x256 píxeles, corresponden a cortes de 5 estudios 3D de RM realizados en la Clínica de Demencia del Instituto de Investigaciones Neurológicas “Raúl Carrea” (Buenos Aires, Argentina). Esta base de datos fue originalmente presentada y utilizada en [Meschino, 2008].

Dada la complejidad de la segmentación en estas imágenes y como se contaba con un *Gold Standard* definido, se optó por el uso un enfoque supervisado en la selección de los algoritmos de Reconocimiento de Patrones. En este sentido, se utilizó el método propuesto para la generación de sistemas difusos para clasificación denominado *Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T2-LFPC), presentado en la Sección 5.3.4. Para comparar los resultados obtenidos se utilizaron los algoritmos de clasificación: *Type-1 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T1-LFPC), propuesto en esta Tesis, análogo al T2-LFPC, pero basado en LD tipo 1; redes neuronales supervisadas (MLPs y PNNs) y variantes del *kNN* con distintos valores de k . Específicamente, se utilizaron los siguientes parámetros para cada algoritmo:

- **T2-LFPC:** Considerando el gran tamaño de la base de datos, se consideraron 5 y 10 como tamaños de partición (parámetro M), obteniendo un sistema difuso para cada uno de estos valores. Se consideraron operadores difusos basados en normas estándar (operadores MIN-MAX) y operadores de la LDCMG y de la LDCMA (todos presentados en el Capítulo 4). Para realizar la asignación de clases se utilizaron las funciones propuestas #1 a #3 en la Sección 5.2.2 como medidas de intervalos de

valores de verdad. Para mayor simplicidad, en lo que sigue estas funciones serán denominadas simplemente medidas #1 a #3.

- **T1-LFPC:** Se consideraron los mismos tamaños de partición aleatoria que para el método T2-LFPC y además el valor $M = 1$. Para cada uno se generó un sistema difuso basado en LD tipo 1. A su vez, también se consideraron operadores difusos MIN-MAX y los operadores de la LDCMG y de la LDCMA.
- **PNN:** Se utilizaron tres diferentes PNNs, que serán notadas PNN #1, PNN #2 y PNN #3, obtenidas con diferentes valores para el parámetro de difusión (*spread*), específicamente se utilizaron los valores 0,1; 0,15 y 0,2 respectivamente.
- **MLP:** Se utilizaron tres configuraciones de redes neuronales multicapa *feed-forward*, siguiendo el enfoque explicado en la Sección 3.3.2.1 para su uso en Reconocimiento de Patrones. Las tres configuraciones (que serán indicadas de aquí en adelante MLP #1, MLP #2 y MLP #3) tienen respectivamente 3, 4 y 5 capas ocultas con cantidades de neuronas: (10, 5, 3), (15, 10, 5, 3) y (15, 20, 10, 5, 3) para cada MLP. En los tres casos se utilizaron funciones transferencias tipo sigmoidea para las neuronas ocultas y función transferencia lineal para las neuronas de las capas de salida. Los entrenamientos se realizaron con entrenamiento *back-propagation*, con ajustes de los parámetros internos por época de entrenamiento y con un criterio de finalización al obtener un error de validación menor a 1%.
- **kNN:** Se consideraron 1, 3 y 5 vecinos más próximos, utilizando distancia euclidiana.

Dada la gran cantidad de píxeles disponibles en cada corte de las IRM del conjunto de prueba #1, como método de validación, se consideró alternativamente una de las imágenes de la base de datos como imagen de entrenamiento, a partir de la cual se generaron los sistemas difusos y se entrenaron el resto de los algoritmos de clasificación, incluyendo la definición del conjunto de datos prototipo para el kNN. Las imágenes restantes (no utilizadas como imagen de entrenamiento) fueron utilizadas como imágenes de *test* estimando las medidas de validación. Este proceso se repitió, tomando en cada iteración una de las imágenes como imagen de entrenamiento y las restantes como imágenes de *test*. Las estimaciones de las medidas de validación se obtuvieron finalmente como promedios de las obtenidas entre las distintas iteraciones.

A su vez se procedió a agregar ruido a las IRM de la base de datos, con el fin de analizar y comparar la robustez de los métodos de clasificación utilizados. Considerando valores de gris normalizados entre -1 (correspondiente a negro) y +1 (correspondientes a blanco), se realizaron pruebas sumando píxel a píxel en forma aleatoria ruido gaussiano de media cero y un valor fijo de desviación estándar (σ_R) para cada prueba, haciendo crecer su valor. Se consideraron valores de

$\sigma_R = 0; 0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1$. De esta manera, $\sigma_R = 0$ corresponde a ruido nulo (la base de datos original) y $\sigma_R = 1$ corresponde al máximo nivel de ruido considerado. Para cada nivel de ruido, se generó un conjunto de imágenes con ruido las cuales fueron utilizadas en esta prueba tanto para entrenar/generar el clasificador como para su test. Se estimaron todas las medidas de validación externas definidas en la Sección 5.4.1.1 para cada prueba. A menos que se indique lo contrario, se reportan los mejores resultados para cada uno de los métodos de clasificación considerados; indicando los parámetros óptimos.

En la Tabla 6.1 se muestran los resultados obtenidos para la clasificación de los diferentes tejidos en las imágenes del conjunto de prueba #1. En esta Tabla se reportan los valores de coeficientes de error, de Tanimoto y de Dice (el promedio para todos los tejidos) para los diferentes métodos, considerando ruido nulo, es decir, con $\sigma_R = 0$ y las combinaciones de parámetros con menor error. Para cada medida de validación se informa su valor promedio, la dispersión de su estimación y su comparación con el mejor resultado del método propuesto T2-LFPC por medio de la diferencia porcentual, definida en la Ecuación (6.1), y el test estadístico realizado. Se indican, además, los parámetros óptimos respecto a los valores de error para cada método de clasificación.

Tabla 6.1. Medidas de validación obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #1 con diferentes métodos de clasificación, para ruido nulo ($\sigma_R = 0$).

Se presentan los coeficientes de error, Tanimoto y Dice globales (el promedio de los obtenidos para los tejidos MG, MB y LCR) y diferencias porcentuales entre las medidas de validación estimadas para el método propuesto T2-LFPC y los demás utilizados. Se indica el resultado del test estadístico de Wilcoxon en cada comparación.

T.: Tiempo promedio para la generación del sistema difuso, o el entrenamiento del clasificador, y la segmentación de un corte de IRM completo; **Prom.:** Promedio de las estimaciones; **Disp.:** Desviación estándar de las estimaciones; **Dif.:** Diferencia porcentual entre la medida de validación del método propuesto y el método con el que se compara; **P:** Resultado del test de Wilcoxon de la comparación.

Método	Mejor Conf.	T [s]	Error				Tanimoto				Dice			
			Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P
T1-LFPC	M=1 LDCMG	0,200	0,184	0,032	-2,171	0,457	0,697	0,043	0,835	0,493	0,817	0,031	0,503	0,484
T2-LFPC	M=5 LDCMG Med.#3	1,190	0,180	0,033	-	-	0,703	0,045	-	-	0,821	0,032	-	-
PNN	#1	2,605	0,179	0,024	0,683	0,707	0,702	0,035	0,167	0,650	0,819	0,025	0,308	0,449
MLP	#3	91,710	0,166	0,022	8,278	0,153	0,721	0,033	-2,436	0,187	0,833	0,023	-1,451	0,217
KNN	k=5	7,010	0,176	0,023	2,593	0,942	0,708	0,033	-0,669	0,994	0,824	0,023	-0,348	0,937

Los resultados de los coeficientes de exactitud para el mismo caso que el analizado en la Tabla 6.1, esto es $\sigma_R = 0$, se muestran en la Figura 6.2 a través de gráficos de caja. En éstos, los límites superior e inferior de cada “caja” indican los valores de los cuartiles. Las líneas verticales que salen de las cajas indican la extensión del resto de los valores estimados de los coeficientes de exactitud. Las líneas centrales (los segmentos en rojo) corresponden a las medianas de las estimaciones de la medida de validación. Los *outliers* se indican con puntos en color rojo. Si las cajas son pequeñas, esto significa que los cuartiles están próximos indicando que las estimaciones

de la medida de validación son próximas y, por lo tanto, el algoritmo es estable (no depende de los parámetros iniciales).

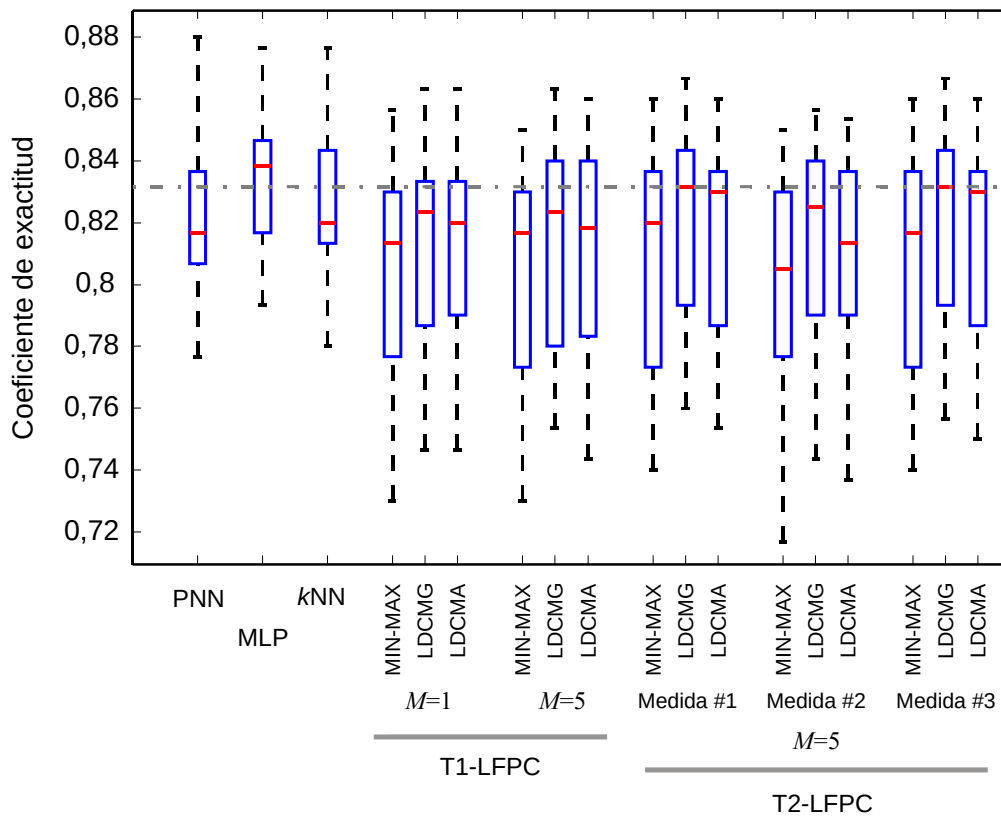


Figura 6.2. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para diferentes métodos de clasificación en la segmentación de las IRM reales del conjunto de prueba #1, para ruido nulo ($\sigma_R = 0$).

Se muestran los resultados para los parámetros óptimos para las técnicas tradicionales PNN, MLP y kNN. Para T1-LFPC y T2-LFPC se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria M del caso óptimo de cada método y diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad. Se observa una diferencia de 1,653% a favor del MLP respecto al T2-LFPC, que no es estadísticamente significativa ($P = 0,153$).

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Medidas #1 a #3:** corresponden a las diferentes medidas de intervalos de valores de verdad.

Para las técnicas de clasificación tradicionales se muestran los resultados de los casos óptimos (cuyos parámetros se reportaron en la Tabla 6.1). Para los métodos basados en LD, se muestran los coeficientes de exactitud en las distintas iteraciones considerando distintos parámetros en los métodos, es decir, distintos tamaños de particiones aleatorias (M), operadores lógicos para evaluar los predicados y, en el caso del T2-LFPC, diferentes medidas de intervalos de valores de verdad. Con una línea punteada en color gris se muestra el valor de mediana del coeficiente de exactitud para el mejor conjunto de parámetros para el T2-LFPC, que en este caso resultó LDCMG como operadores lógicos y la medida #3, como medida de intervalos de valores de verdad.

A partir de los resultados reportados en la Tabla 6.1 y en la Figura 6.2 se observa que, en

términos de error promedio, el método T2-LFPC es superado por los métodos PNN, MLP y k NN, con diferencias de 0,683%, 8,278%, 2,593% y valores de P iguales a 0,707, 0,153 y 0,942 respectivamente. Esto es, estos métodos reportan menor error que el método propuesto. La diferencia obtenida entre el MLP y el T2-LFPC se observa visualmente en los gráficos de caja. Sin embargo, de acuerdo a los resultados del test estadístico estas diferencias observadas no son significativas. A su vez, el T1-LFPC obtuvo un error 2,171% mayor que el T2-LFPC, resultando esta diferencia estadísticamente no significativa.

Extendiendo el análisis anterior a las demás medidas de validación, no se observan diferencias significativas. Por otro lado, en los gráficos de cajas de la Figura 6.2 no se observan *outliers*, indicando que los métodos son estables para este conjunto de datos. A su vez, los gráficos muestran una dispersión menor de los valores obtenidos para las técnicas tradicionales que para los métodos basados en LD. En estos últimos, los valores promedios de exactitud del método basado en LD tipo 2 de intervalos supera levemente en un 0,49% a los del basado en LD tipo 1, con un P de 0,457, por lo que la diferencia es no significativa. Puede notarse que los resultados obtenidos para las medidas #1 y #3 en los diferentes operadores difusos son muy similares.

Por lo tanto, para estas imágenes considerando ruido nulo ($\sigma_R = 0$) los métodos de clasificación analizados tienen performances similares, desde un punto de vista estadístico, destacando los métodos basados en LD por sobre los métodos tradicionales por su capacidad adicional de aportar conocimiento respecto del problema estudiado, característica no disponible directamente en estos últimos.

Además, existe una diferencia muy significativa en los tiempos necesarios para el entrenamiento/generación del clasificador y la evaluación de un corte completo, el cual en promedio es, respecto al T2-LFPC, 1,5 veces mayor en el PNN, 76 veces mayor en el MLP y casi 5 veces en el k NN. En este aspecto, los métodos T1-LFPC y T2-LFPC propuestos en esta Tesis son significativamente superiores.

Siguiendo con el análisis de ruido, en la Tabla 6.2 se presentan los resultados obtenidos para el conjunto de prueba #1 para $\sigma_R = 1$, el peor caso de ruido considerado. Esta Tabla se confeccionó con las mismas consideraciones que la Tabla 6.1. Asimismo, en la Figura 6.3 se muestra un gráfico de exactitud promedio en función del nivel de ruido, con $\sigma_R = 0; 0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1$ para todos los métodos de clasificación utilizados en estas pruebas. A su vez, se presentan en las Tablas 6.3 y 6.4 las matrices de confusión para los métodos T1-LFPC y T2-LFPC para diferentes valores de ruido.

Tabla 6.2. Medidas de validación obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #1 con diferentes métodos de clasificación, para máximo nivel de ruido ($\sigma_R = 1$).

Se presentan los coeficientes de error, Tanimoto y Dice globales (el promedio de los obtenidos para los tejidos MG, MB y LCR) y las diferencias porcentuales entre las medidas de validación estimadas para el método propuesto T2-LFPC y los demás utilizados. Se indica el resultado del *test* estadístico de Wilcoxon en cada comparación.

Prom.: Promedio de las estimaciones; **Disp.:** Desviación estándar de las estimaciones; **Dif.:** Diferencia porcentual entre la medida de validación del método propuesto y el método con el que se compara; **P** : Resultado del *test* de Wilcoxon de la comparación.

Método	Mejor Conf.	Error				Tanimoto				Dice			
		Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P
T1-LFPC	$M=1$ LDCMG	0,532	0,024	0,439	0,891	0,291	0,022	-0,657	0,891	0,434	0,029	-0,448	0,891
T2-LFPC	$M=5$ LDCMG Med.#3	0,534	0,021	-	-	0,289	0,020	-	-	0,432	0,028	-	-
PNN	#1	0,608	0,022	-12,151	<0,001	0,244	0,017	18,382	<0,001	0,391	0,022	10,482	<0,001
MLP	#3	0,553	0,030	-3,376	0,014	0,268	0,031	8,051	0,003	0,402	0,043	7,394	0,003
kNN	$k=5$	0,597	0,023	-10,532	<0,001	0,254	0,019	13,874	<0,001	0,404	0,024	6,984	<0,001

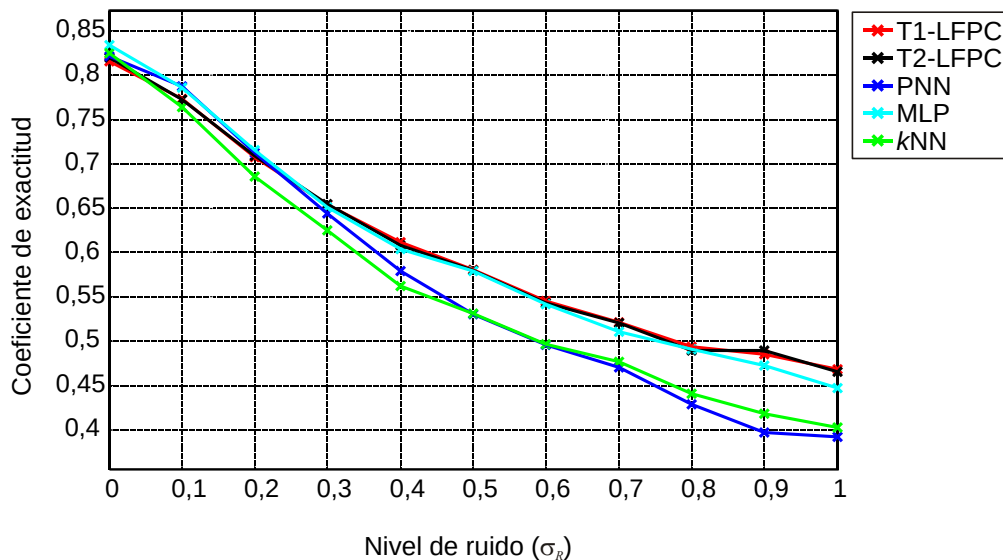


Figura 6.3. Exactitud promedio en función del nivel de ruido para todos los métodos de clasificación considerados.

Se observa una mejor aptitud de los métodos PNN, T1-LFPC y T2-LFPC respecto a MLP y kNN. Las pequeñas diferencias observadas entre T2-LFPC y T1-LFPC no son estadísticamente significativas.

La Tabla 6.2 refleja una mayor performance en término de todas las medidas de validación analizadas para los métodos propuestos T1-LFPC y T2-LFPC respecto a las técnicas tradicionales consideradas, diferencias estadísticamente significativas. Específicamente, en términos de error, comparando T2-LFPC con PNN, MLP y kNN se observan diferencias de 12,151%, 3,376% y 10,532% favorables a T2-LFPC. No se observan diferencias significativas entre T1-LFPC y T2-LFPC. En el gráfico de la Figura 6.3 se observa una diferencia entre el T2-LFPC y el MLP de 4,175% con un P de 0,014 favorable al T2-LFPC. En esta misma Figura, se observan diferencias importantes entre PNN, T1-LFPC, T2-LFPC, MLP y kNN, las cuales se amplían significativamente para niveles de ruido mayores a 0,3.

Tabla 6.3. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T2-LFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM del conjunto de prueba #1, considerando diferentes niveles de ruido (σ_R).

Nivel de ruido		Matriz de confusión				
$\sigma_R = 0$	Píxeles que corresponden a		y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
		MG	0,795	0,126	0,079	1,000
		MB	0,223	0,776	0,001	1,000
$\sigma_R = 0,5$	Píxeles que corresponden a	LCR	0,109	0,000	0,891	1,000
			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
		MG	0,732	0,176	0,092	1,000
$\sigma_R = 1$	Píxeles que corresponden a	MB	0,281	0,719	0,001	1,000
		LCR	0,125	0,000	0,874	1,000
			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
$\sigma_R = 1$	Píxeles que corresponden a	MG	0,636	0,234	0,130	1,000
		MB	0,331	0,663	0,006	1,000
		LCR	0,156	0,003	0,841	1,000

Tabla 6.4. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T1-LFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM del conjunto de prueba #1, considerando diferentes niveles de ruido (σ_R).

Nivel de ruido		Matriz de confusión				
$\sigma_R = 0$	Píxeles que corresponden a		y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
		MG	0,780	0,137	0,083	1,000
		MB	0,226	0,773	0,000	1,000
$\sigma_R = 0,5$	Píxeles que corresponden a	LCR	0,104	0,000	0,896	1,000
			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
		MG	0,701	0,194	0,105	1,000
$\sigma_R = 1$	Píxeles que corresponden a	MB	0,270	0,729	0,002	1,000
		LCR	0,127	0,000	0,873	1,000
			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
$\sigma_R = 1$	Píxeles que corresponden a	MG	0,600	0,265	0,135	1,000
		MB	0,301	0,692	0,006	1,000
		LCR	0,159	0,006	0,835	1,000

El análisis de las matrices de confusión de las Tablas 6.3 y 6.4 refleja una sobre segmentación de la MG, clasificando incorrectamente con esta etiqueta píxeles correspondientes a MB y LCR. Esto ocurre en todos los casos. Analizando las diagonales de las matrices (la proporción de píxeles correctamente clasificados), se observa que el T2-LFPC presenta un deterioro en su performance a medida que aumenta el ruido concentrada principalmente en el tejido MB, en tanto que el T1-LFPC presenta su mayor deterioro en los tejidos MG y LCR.

Con el objetivo de poder visualizar los efectos del ruido tanto en las imágenes de entrada como en las segmentaciones obtenidas, en las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6 se presentan ejemplos de las

imágenes utilizadas y obtenidas para el corte #59 del conjunto de prueba #1, para niveles de ruido 0, 0,5 y 1 respectivamente. Se presentan los mejores resultados obtenidos para cada método, considerando los parámetros indicados en la Tabla 6.1.

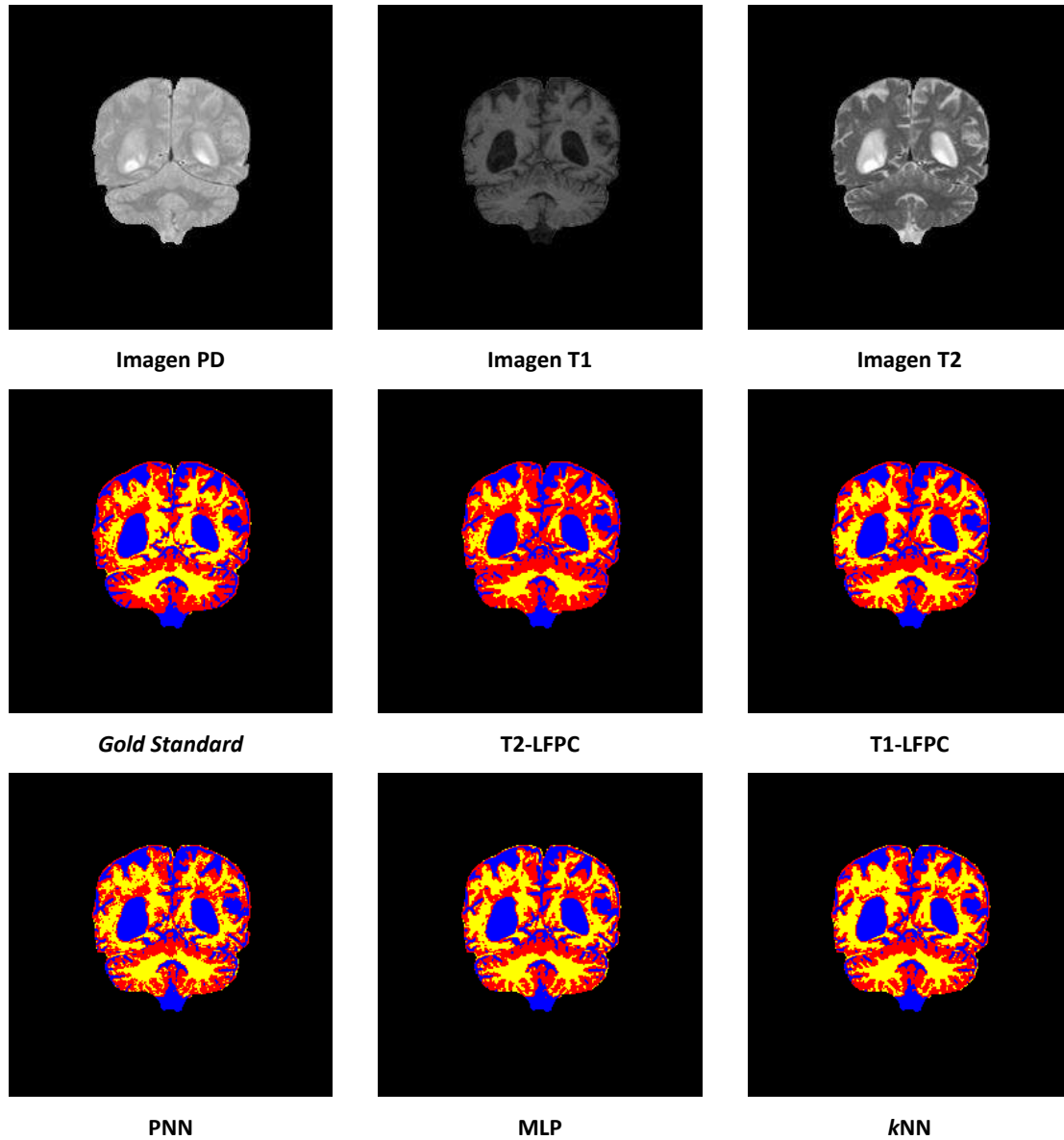


Figura 6.4. IRM reales correspondientes al corte #59 del conjunto #1 para $\sigma_R = 0$ y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.

MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul. Puede observarse una ligera sobre-segmentación de la MG.

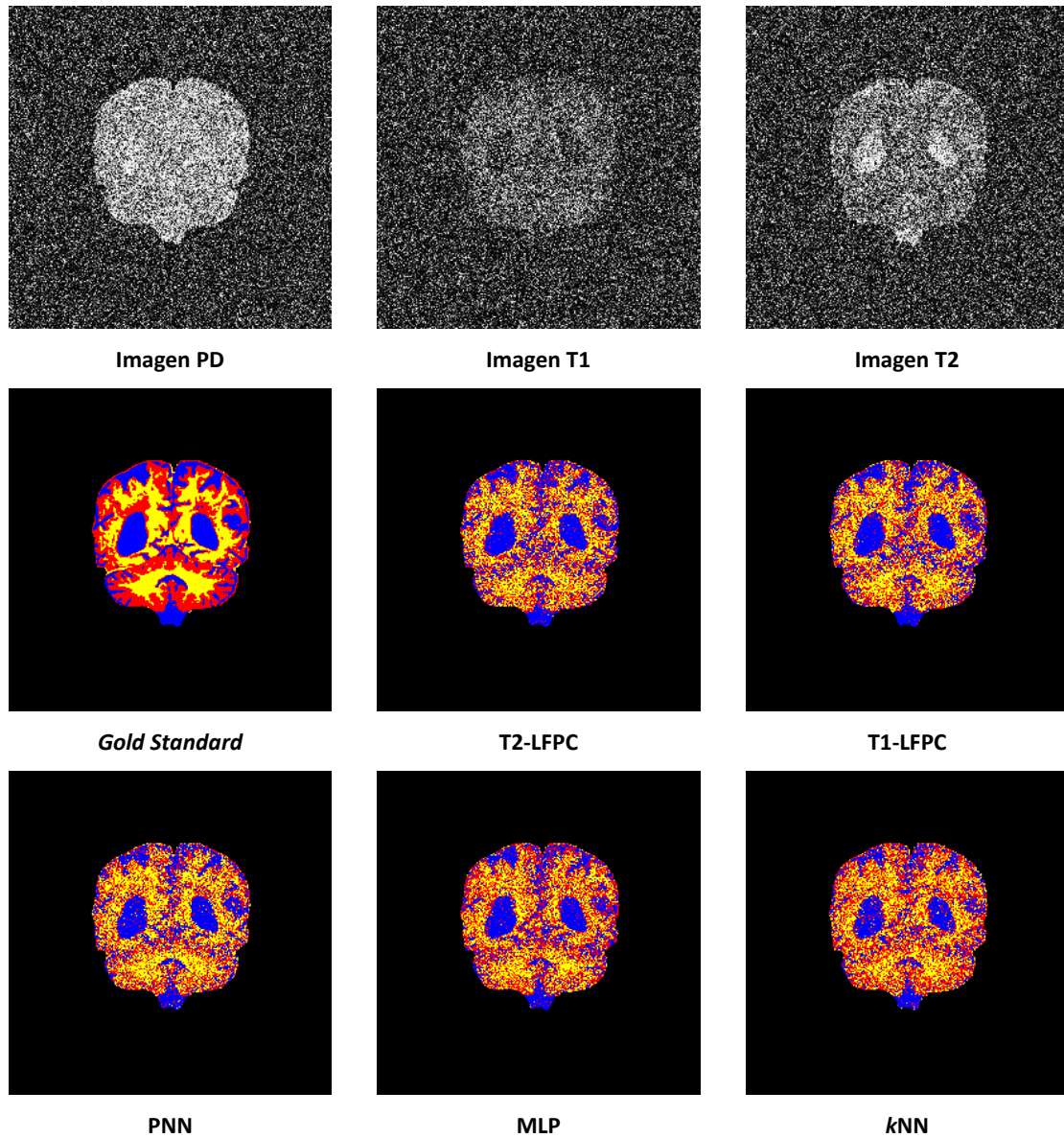


Figura 6.5. IRM reales correspondientes al corte #59 del conjunto #1 para $\sigma_R = 0,5$ y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.

MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul. Puede observarse visualmente una fuerte distorsión en los niveles de gris de las imágenes PD, T1 y T2; generada por el ruido adicionado.

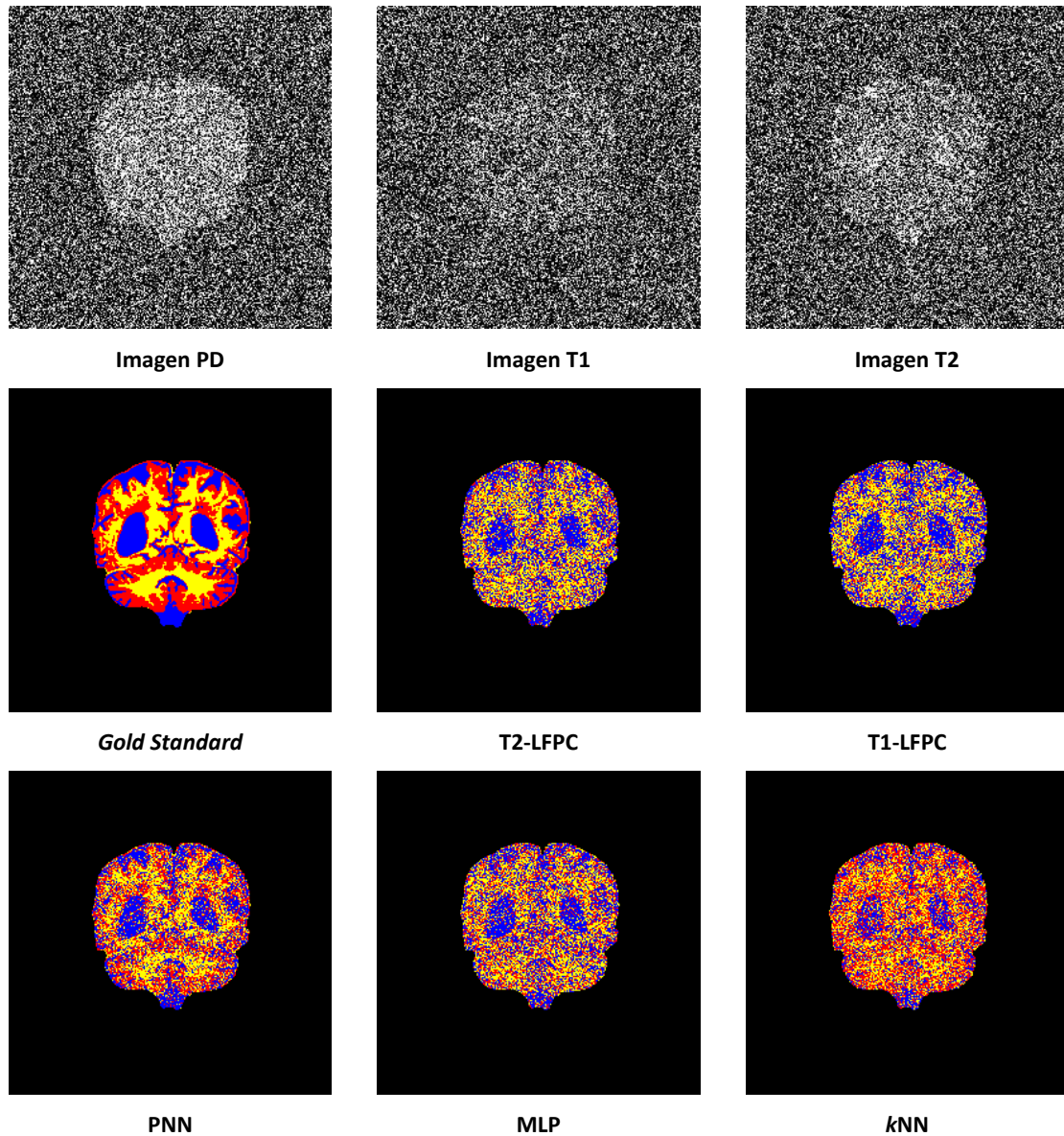


Figura 6.6. IRM reales correspondientes al corte #59 del conjunto #1 para $\sigma_R = 1$ y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.

MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul. Se observa una fuerte distorsión en las imágenes PD, T1 y T2; debido al ruido.

Los resultados de las pruebas analizados en esta Sección indican diferencias estadísticamente significativas entre las performances de los métodos propuestos T1-LFPC y T2-LFPC respecto a los métodos de clasificación PNN, MLP y kNN al considerar datos inmersos en ruido, señalando una mayor robustez de los métodos propuestos frente a los tradicionales. Las diferencias en los tiempos necesarios para el diseño/generación del clasificador y el procesamiento de una IRM completa también es significativamente menor en los métodos propuestos.

Los resultados similares entre el T1-LFPC y el T2-LFPC no permiten hasta aquí extraer conclusiones respecto a las mejores aptitudes de uno u otro, pero sí indican una consistencia evidente del método propuesto para ordenar intervalos de valores de verdad a través del concepto de medida de intervalos de valores de verdad; lo que permite señalar que el método propuesto es,

al menos para este conjunto de imágenes, adecuado para la consulta de sistemas de LD tipo 2 de intervalos que utilicen predicados difusos.

6.2.2 Conjunto de prueba #2: IRM de simulaciones

Como se ha mencionado a lo largo de esta Tesis, continuamente se presentan nuevos métodos para el Procesamiento de Imágenes Médicas y el avance en esta disciplina está fuertemente ligado a los nuevos desarrollos que se presentan en Diagnóstico por Imágenes. La dificultad se presenta a la hora de comparar los métodos nuevos con los otros existentes para realizar su validación. Especialmente en los casos de segmentación de imágenes, es necesario un *Gold Standard* que no es sencillo de obtener.

Se encuentra disponible en forma libre en la web una base de datos con IRM de cerebro generadas por un simulador de RM [Cocosco *et al.*, 1997; Collins *et al.*, 1998; Kwan *et al.*, 1996; Kwan *et al.*, 1999]. La base de datos está formada por IRM en secuencias PD, T1 y T2; en las cuales pueden elegirse niveles de ruido y de no-uniformidad de intensidad del campo magnético en la imagen, siendo esta última otra fuente de distorsión típica de este tipo de imágenes. El nivel de ruido se presenta como el porcentaje de ruido que multiplica al máximo valor de intensidad que presenta uno de los tejidos tomado como referencia y se elige variando la desviación estándar de ruido gaussiano sumado a los canales reales e imaginario del simulador.

Con las imágenes de esta base de datos se generó el conjunto de prueba #2. A diferencia del enfoque seguido con el conjunto de prueba #1, al disponer de IRM ya con ruido agregado, se usaron directamente estas imágenes para las pruebas de robustez de los métodos propuestos. Se procesó el total del volumen, formado por 181 cortes de 217x131 píxeles, tomados cada 1 mm, con un volumen de vóxel de 1 mm³. Se consideraron niveles de ruido de 0, 1, 3, 5, 7 y 9%. La base de datos contiene las imágenes *Gold Standard* para todos los cortes, por lo que puede ser utilizada para evaluar el desempeño de métodos de segmentación ya que se conoce la verdadera ubicación de los tejidos y ya fue empleada en varios trabajos existentes en la bibliografía [Cocosco *et al.*, 1997; Collins *et al.*, 1998; Comas *et al.*, 2015b; Comas *et al.*, 2012; Kwan *et al.*, 1996; Kwan *et al.*, 1999; Meschino, 2008; Meschino *et al.*, 2015a].

Nuevamente, el problema de segmentación consiste en segmentar la IRM en tres tipos de tejidos: MB, MG y LCR. Se utilizaron como vectores de características los valores de intensidad de gris de las secuencias PD, T1 y T2 para cada corte. En todos ellos, sólo se consideraron los píxeles correspondientes a los tres tejidos de interés, descartando todos los demás. A modo de ejemplo, en la Figura 6.7 se muestran ejemplos de las IRM de cerebro del caso estudiado en esta Sección para cortes representativos del volumen, los cortes #33, #90 y #125.

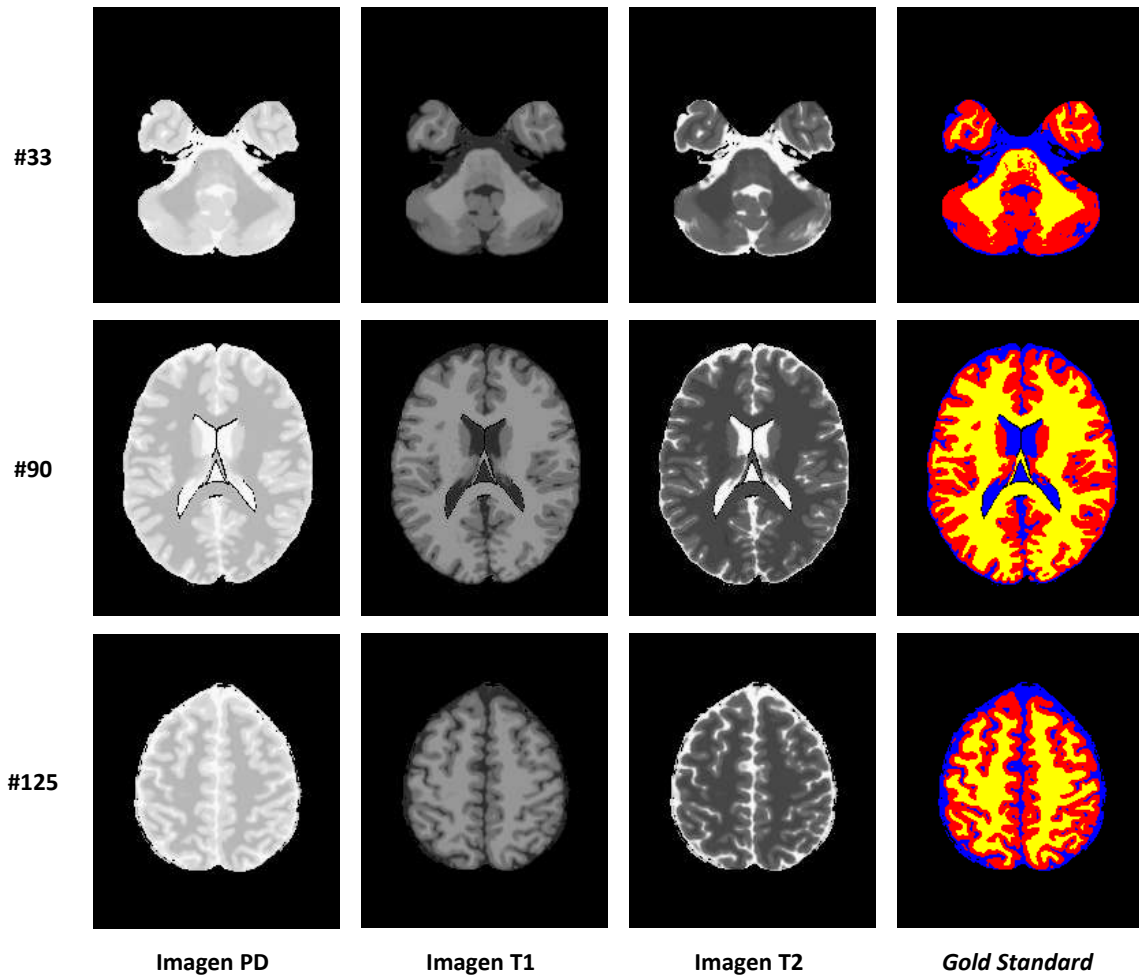


Figura 6.7. IRM en cortes #33, #90 y #125 de las imágenes del conjunto de prueba #2.

El número de corte se indica en la columna izquierda. Se visualizan: MG en rojo, MB en amarillo y LCR en azul.

Para el problema analizado en esta Sección, al disponer de una amplia cantidad de imágenes con sus *Gold Standard*, se utilizaron todos los métodos propuestos en esta Tesis para la generación de sistemas difusos automáticamente a partir de datos, esto es, los métodos basados en *clustering*: *Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-DFPC), *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-SFPC) y sus análogos con LD tipo 1: T1-DFPC y T1-SFPC; y también los métodos basados en clasificación: T2-LFPC y T1-LFPC. De este modo, se pudo analizar completamente la robustez frente al ruido de todos los métodos propuestos para este caso de segmentación de imágenes médicas.

Las pruebas de robustez fueron abordadas mediante dos enfoques diferentes: a) la generación y consulta de los sistemas difusos con los métodos propuestos a partir de IRM afectadas por ruido, donde para cada nivel de ruido disponible en las simulaciones se generó un sistema difuso y se consultó el mismo con IRM correspondiente al mismo nivel de ruido; y b) la generación de los sistemas difusos con IRM no afectadas por ruido (ruido 0%) para luego ser consultados con el fin de segmentar IRM afectadas por los distintos niveles de ruido de 0, 1, 3, 5, 7

y 9%.

Este último enfoque, permitió evaluar y comparar directamente la robustez frente al ruido de los sistemas difusos basados en LD tipo 1 versus los basados en LD tipo 2 de intervalos, logrando evaluar las aptitudes de este último tipo de LD en el manejo y minimización de los efectos de la incertidumbre generada por ruido.

Dado que se contaba con una amplia cantidad de cortes de IRM y sus *Gold Standard* para diferentes niveles de ruido, se estimaron y analizaron medidas de validación externas tanto para los métodos de *clustering* como para los de clasificación. Los detalles específicos de cómo fueron estimadas estas medidas serán indicadas oportunamente en cada caso.

A su vez, con el fin de analizar las capacidades de extracción de conocimiento a partir de los sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos, se analizó un ejemplo completo de la interpretación de los predicados difusos y las funciones de pertenencia para las IRM de cerebro de este conjunto de prueba.

Esta Sección se dividirá a continuación en sub-secciones, en la cuales se analizan en primer lugar los resultados de los métodos de clasificación, se sigue con los de los métodos de *clustering*, se presentan los resultados del análisis de robustez frente al ruido de los sistemas difusos comparando distintos tipos de LD y se finaliza el análisis con la extracción de conocimiento a partir de los sistemas difusos generados automáticamente.

6.2.2.1. Resultados de los métodos de clasificación

Para los métodos de clasificación y en virtud de la observación realizada al comienzo de esta Sección respecto a la gran cantidad de cortes disponibles en el conjunto de prueba #2 con sus respectivos *Gold Standard*, las medidas de validación se estimaron utilizando alternativamente una de las IRM de la secuencia como imagen de entrenamiento y el resto de las imágenes como conjunto de *test*. El proceso se repitió variando la imagen de entrenamiento hasta recorrer la totalidad de las imágenes disponibles. Las medidas de validación se estimaron a partir de los promedios de los valores obtenidos para los diferentes cortes. Este proceso se repitió para los diferentes niveles de ruido disponibles en la base de datos.

Se consideraron los métodos propuestos T2-LFPC y su análogo basado en LD tipo 1 (T1-LFPC) y como métodos de comparación: PNNs, MLPs y kNN, todos con diferentes combinaciones de parámetros, según:

- **T2-LFPC:** Considerando la gran cantidad de píxeles correspondientes a los distintos tejidos de interés en cada corte, se consideraron valores de 10 y 15 para el parámetro M . Se usaron operadores difusos MIN-MAX y operadores de la LDCMG y

de la LDCMA (todos presentados en el Capítulo 4). Para realizar la consulta de los sistemas difusos se utilizaron las medidas #1 a #3 propuestas en el Capítulo 5.

- **T1-LFPC:** Se consideraron los mismos tamaños de partición aleatoria que para T2-LFPC y, además, $M=1$. Se consideraron operadores difusos MIN-MAX y los operadores de la LDCMG y de la LDCMA.
- **PNN:** Se utilizaron tres diferentes PNNs, notadas PNN #1, PNN #2 y PNN #3, ajustando el parámetro de difusión (*spread*) en 0,1; 0,15 y 0,2 respectivamente.
- **MLP:** Se utilizaron tres configuraciones de redes neuronales multicapa *feed-forward*, siguiendo el enfoque explicado en la Sección 3.3.2.1 para su uso en Reconocimiento de Patrones. Las tres configuraciones (que serán indicadas de aquí en adelante MLP #1, MLP #2 y MLP #3) tienen respectivamente 3, 4 y 5 capas ocultas con cantidades de neuronas: (10, 5, 3), (15, 10, 5, 3) y (15, 20, 10, 5, 3) para cada MLP. En los tres casos se utilizaron funciones transferencias tipo tangente sigmoidea para las neuronas ocultas y función transferencia lineal para las neuronas de las capas de salida. Los entrenamientos se realizaron con entrenamiento *back-propagation*, con ajustes de los parámetros internos por época de entrenamiento y con un criterio de finalización al obtener un error de validación menor a 1%.
- **kNN:** Se consideraron 1, 3 y 5 vecinos más próximos, utilizando distancia euclidiana.

En la Tabla 6.5 se muestran los resultados obtenidos para la clasificación de los diferentes tejidos. Se reportan los valores de coeficientes de error, de Tanimoto y de Dice (el promedio para todos los tejidos) para los diferentes métodos, considerando ruido nulo (0%). Para cada medida de validación se informa su valor promedio, la dispersión de la estimación del mismo y su comparación con el mejor resultado del método propuesto T2-LFPC por medio de la diferencia porcentual, definida en la Ecuación (6.1), y el resultado del *test* estadístico realizado. Los parámetros óptimos respecto a los valores de error se indican para cada método.

Los coeficientes de exactitud obtenidos en los diferentes métodos para ruido de 0% se muestran en la Figura 6.8 utilizando gráficos de caja. Se muestran los resultados de los casos óptimos para las técnicas de clasificación tradicionales. Para el caso de los métodos basados en LD se muestran los resultados considerando las diferentes combinaciones de parámetros de tamaño de particiones aleatorias (M), operadores lógicos y, para el T2-LFPC, medidas de intervalos de valores de verdad. Con una línea punteada en color gris se muestra el valor de mediana del coeficiente de exactitud para el mejor resultado del T2-LFPC.

Tabla 6.5. Medidas de validación obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #2 con diferentes métodos de clasificación, para ruido nulo (0%).

Se presentan los coeficientes de error, Tanimoto y Dice globales (el promedio de los obtenidos para los tejidos MG, MB y LCR) y las diferencias porcentuales entre las medidas estimadas para el método propuesto T2-LFPC y los demás utilizados. Se indica el resultado del *test* estadístico de Wilcoxon en cada comparación.

T.: Tiempo promedio para la generación del sistema difuso, o el entrenamiento del clasificador, y la segmentación de un corte de IRM completo; **Prom.:** Promedio de las estimaciones; **Disp.:** Desviación estándar de las estimaciones; **Dif.:** Diferencia porcentual entre la medida de validación del método propuesto y el método con el que se compara; **P :** Resultado del *test* de Wilcoxon de la comparación.

Método	Mejor Conf.	T [s]	Error				Tanimoto				Dice			
			Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P
T1-LFPC	M=1 MIN-MAX	1,7	0,022	0,006	33,789	<0,001	0,935	0,052	-1,844	<0,001	0,962	0,043	-1,066	<0,001
T2-LFPC	M=10 MIN-MAX Med.#3	12,7	0,029	0,008	-	-	0,915	0,059	-	-	0,950	0,051	-	-
PNN	#1	846,3	0,017	0,004	68,545	<0,001	0,947	0,048	-3,138	<0,001	0,970	0,036	-1,892	<0,001
MLP	#1	731,8	0,035	0,078	-16,156	<0,001	0,922	0,112	-0,541	<0,001	0,947	0,101	0,519	<0,001
kNN	k=1	3443,9	0,025	0,006	16,649	<0,001	0,927	0,054	-1,004	<0,001	0,957	0,046	-0,561	<0,001

A partir de los resultados mostrados, en términos de coeficientes de exactitud, se observan mejores resultados para los métodos PNN, T1-LFPC y kNN, con diferencias de 1,214%, 0,757% y 0,429%, en todos los casos con valores de *P* menores a 0,001, indicando que estas pequeñas diferencias relativas son estadísticamente significativas. Lo mismo se observa para el resto de las medidas de validación, con la salvedad que para el caso del coeficiente de error los valores absolutos obtenidos para la totalidad de los métodos son bajos, menores a 3,5%.

Las diferencias observadas entre las exactitudes de los diferentes métodos respecto de las del T2-LFPC, que no se aprecian en los valores promedios reportados en la Tabla 6.5, se explican por la presencia de *outliers* en las estimaciones realizadas.

En resumen, considerando ruido de 0% para estas imágenes, los métodos de clasificación analizados tienen performances muy cercanas, con diferencias absolutas pequeñas, estadísticamente significativas. En términos de tiempos promedios necesarios para el entrenamiento/generación del clasificador y la evaluación de un corte completo, nuevamente se observa una gran diferencia entre los métodos tradicionales y los métodos propuestos T2-LFPC y T1-LFPC. Estas diferencias son en promedio respecto al T2-LFPC de: 65 veces mayor en el PNN, 56 veces mayor en el MLP y casi 270 veces en el kNN. En este aspecto, los métodos T1-LFPC y T2-LFPC propuestos en esta Tesis son significativamente superiores.

Frente a la diferencia obtenida para las medidas de validación, debe destacarse una vez más la capacidad adicional de los métodos propuestos T1-LFPC y T2-LFPC de aportar conocimiento respecto del problema estudiado, capacidad que no está disponible en los métodos tradicionales. Se observan en la Figura 6.8 resultados muy cercanos en los valores de exactitud para T2-LFPC con

las medidas #1 y #3.

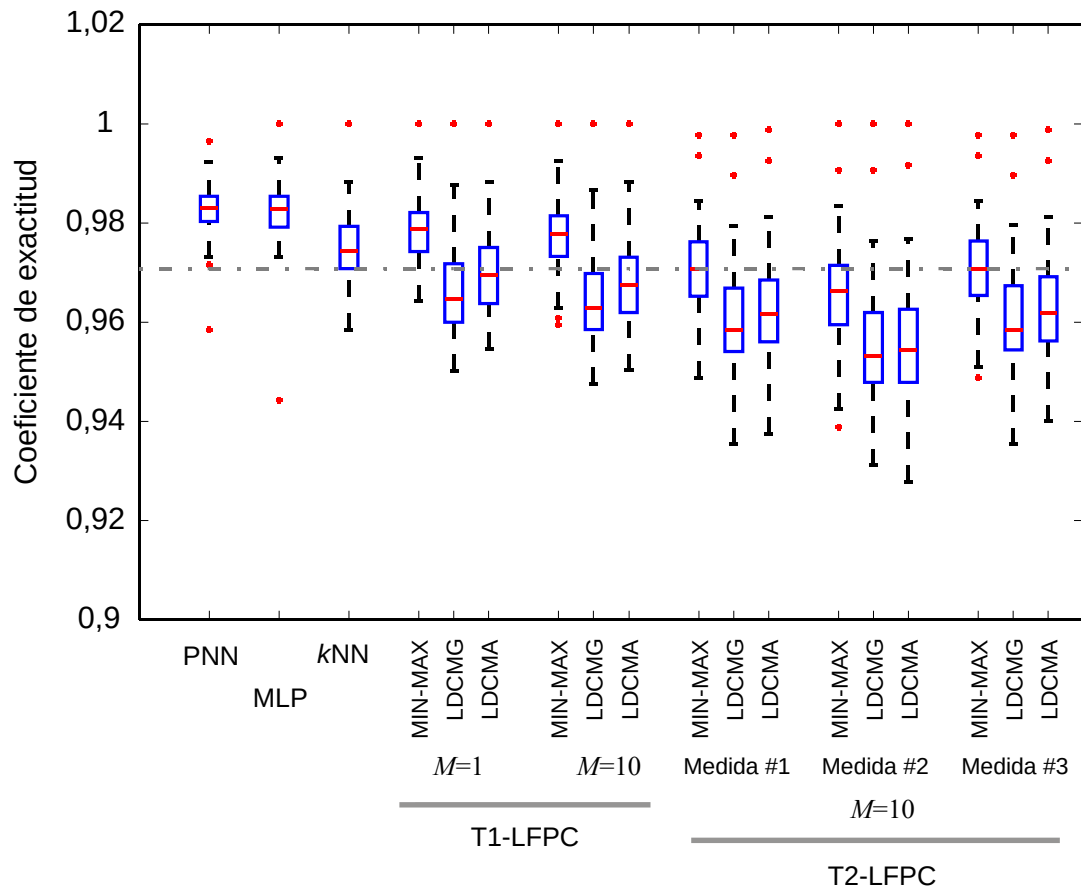


Figura 6.8. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para diferentes métodos de clasificación en la segmentación de las IRM provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2, para ruido nulo (0%).

Se muestran los resultados para los parámetros óptimos para las técnicas tradicionales PNN, MLP y *k*NN. Para los métodos T1-LFPC y T2-LFPC se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria *M* del caso óptimo de cada método y diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad.

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Medidas #1 a #3:** corresponden a las diferentes medidas de intervalos de valores de verdad propuestas.

Continuando con el análisis, en la Tabla 6.6 se muestran los resultados obtenidos para la segmentación de las IRM en peor caso de ruido considerado (9%). Las estimaciones se presentan siguiendo las mismas consideraciones que se utilizaron en la Tabla 6.5. Asimismo, en la Figura 6.9 se muestran las variaciones en los valores del coeficiente de exactitud haciendo variar el nivel de ruido en 0, 1, 3, 5, 7 y 9% para los distintos métodos de clasificación. Finalmente, en las Tablas 6.7 y 6.8 se presentan las matrices de confusión obtenidas para los métodos T1-LFPC y T2-LFPC con los distintos niveles de ruido, considerando en cada caso el promedio de los 181 cortes.

Tabla 6.6. Medidas de validación obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #2 con diferentes métodos de clasificación, para el máximo nivel de ruido disponible (9%).

Se presentan los coeficientes de error, Tanimoto y Dice globales (el promedio de los obtenidos para los tejidos MG, MB y LCR) y las diferencias porcentuales entre las medidas de validación estimadas para el método propuesto T2-LFPC y los demás utilizados. Se indica el resultado del *test* estadístico de Wilcoxon en cada comparación.

Prom.: Promedio de las estimaciones; **Disp.:** Desviación estándar de las estimaciones; **Dif.:** Diferencia porcentual entre la medida de validación del método propuesto y el método con el que se compara; **P :** Resultado del *test* de Wilcoxon de la comparación.

Método	Mejor Conf.	Error				Tanimoto				Dice			
		Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P
T1-LFPC	M=1 MIN-MAX	0,104	0,018	-0,949	0,642	0,783	0,061	0,165	0,667	0,866	0,067	0,110	0,664
T2-LFPC	M=10 MIN-MAX Med.#3	0,103	0,018	-	-	0,785	0,060	-	-	0,867	0,066	-	-
PNN	#1	0,096	0,017	6,720	<0,001	0,796	0,063	-1,360	<0,001	0,874	0,068	-0,764	<0,001
MLP	#1	0,105	0,067	-2,324	<0,001	0,785	0,088	-0,034	0,008	0,864	0,092	0,385	0,012
kNN	k=1	0,136	0,021	-24,158	<0,001	0,739	0,054	6,168	<0,001	0,836	0,065	3,711	<0,001

En base a los resultados mostrados en la Tabla 6.6 y la Figura 6.9, se observa una mejor performance del T2-LFPC respecto a los otros métodos, sólo superado por el PNN, el cual para el caso de ruido 9% tiene un error 6,720% menor que T2-LFPC ($P < 0,001$). El resto de las medidas de validación reportan un comportamiento similar al descripto anteriormente. La mejor aptitud frente al ruido de PNN frente a los métodos propuestos puede compensarse considerando el elevado tiempo necesario por parte PNN para su entrenamiento y el procesamiento de un corte completo (65 veces mayor que los de T1-LFPC y T2-LFPC), sumado a la potencial capacidad de interpretación y extracción de conocimiento que los sistemas difusos permiten, característica que puede resultar de suma importancia en el Diagnóstico por Imágenes y no está disponible en forma directa en las redes neuronales supervisadas.

Observando solamente el T2-LFPC y el T1-LFPC, los resultados no permiten concluir respecto a cuál tiene mejor aptitud para la discriminación adecuada de tejidos al generar los sistemas difusos con datos afectados con ruido. Las diferencias observadas en las medidas de validación son pequeñas en términos relativos y, en virtud de los valores de P obtenidos, estadísticamente no significativas. En este sentido, ambos métodos presentan la misma robustez frente al ruido.

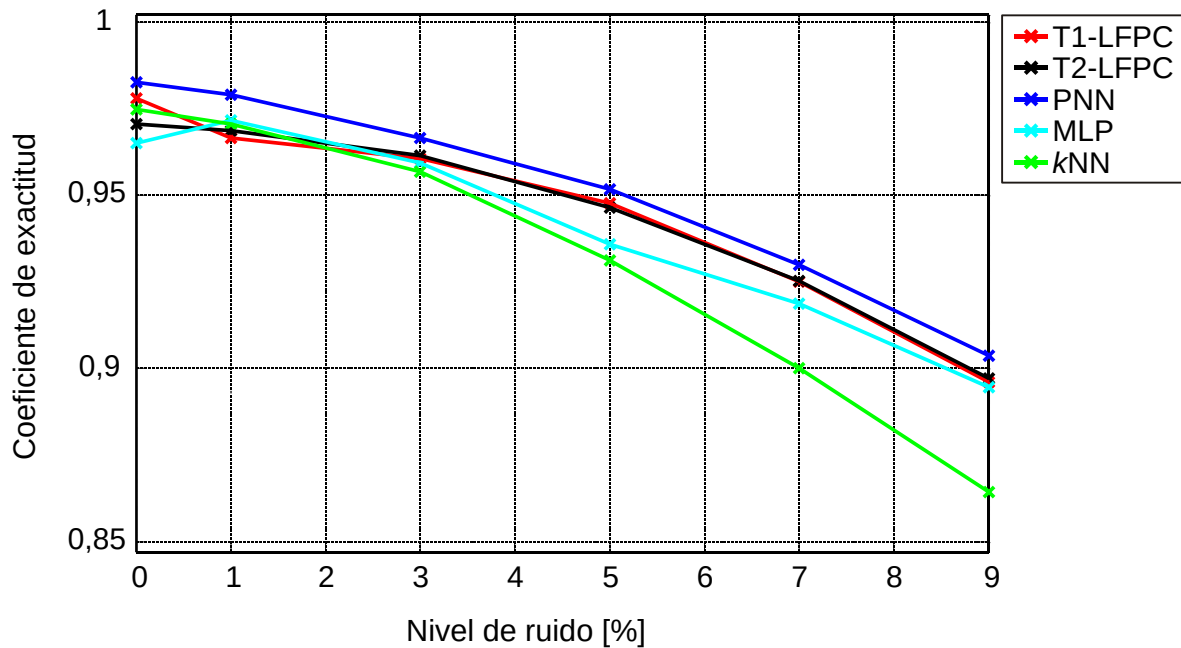


Figura 6.9. Exactitud promedio en función del nivel de ruido para todos los métodos de clasificación considerados.

Se observa una mejor aptitud de los métodos PNN, T1-LFPC y T2-LFPC respecto a MLP y kNN. PNN supera al T2-LFPC en 0,710% ($P < 0,001$) y T2-LFPC supera a T1-LFPC en 0,110% con $P < 0,001$.

Las matrices de confusión de las Tablas 6.7 y 6.8 permiten analizar con qué etiqueta fueron segmentados los píxeles incorrectamente clasificados en los métodos T1-LFPC y T2-LFPC para diferentes porcentajes de ruido. En todos los casos se observa una baja sobre segmentación de la MB en relación con lo observado en la Sección 6.2.1 para IRM reales (Tablas 6.3 y 6.4). El incremento del ruido afecta particularmente a la segmentación del MB y del LCR, siendo mayor la de MB para el T1-LFPC y la de LCR para el T2-LFPC.

A modo de ejemplos de las segmentaciones obtenidas para estas IRM bajo diferentes niveles de ruido, en las Figuras 6.10, 6.11 y 6.12 se presentan las imágenes utilizadas y obtenidas para un corte intermedio en la secuencia, el corte #90, para niveles de ruido 0%, 5% y 9% respectivamente. Se muestran los mejores resultados obtenidos para cada método, considerando los parámetros óptimos informados en la Tabla 6.5.

Tabla 6.7. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T2-LFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de las IRM del conjunto de prueba #2, considerando diferentes niveles de ruido.

Nivel de ruido		Matriz de confusión				
0%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,998	0,002	0,000	1,000
		MB	0,036	0,963	0,001	1,000
	LCR	0,000	0,033	0,967	1,000	
1%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,996	0,004	0,000	1,000
		MB	0,030	0,968	0,002	1,000
	LCR	0,000	0,045	0,955	1,000	
3%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,993	0,007	0,000	1,000
		MB	0,031	0,955	0,014	1,000
	LCR	0,000	0,048	0,952	1,000	
5%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,989	0,011	0,000	1,000
		MB	0,037	0,931	0,032	1,000
	LCR	0,000	0,059	0,941	1,000	
7%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,981	0,019	0,000	1,000
		MB	0,038	0,900	0,062	1,000
	LCR	0,000	0,077	0,923	1,000	
9%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,971	0,029	0,000	1,000
		MB	0,043	0,864	0,093	1,000
	LCR	0,000	0,111	0,889	1,000	

Tabla 6.8. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T1-LFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de las IRM del conjunto de prueba #2, considerando diferentes niveles de ruido.

Nivel de ruido		Matriz de confusión				
0%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,996	0,004	0,000	1,000
		MB	0,027	0,970	0,003	1,000
		LCR	0,000	0,019	0,981	1,000
1%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,995	0,005	0,000	1,000
		MB	0,028	0,971	0,001	1,000
		LCR	0,000	0,055	0,945	1,000
3%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,993	0,007	0,000	1,000
		MB	0,031	0,958	0,011	1,000
		LCR	0,000	0,054	0,946	1,000
5%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,988	0,012	0,000	1,000
		MB	0,033	0,936	0,031	1,000
		LCR	0,000	0,061	0,939	1,000
7%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,982	0,018	0,000	1,000
		MB	0,039	0,910	0,051	1,000
		LCR	0,000	0,092	0,908	1,000
9%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,972	0,028	0,000	1,000
		MB	0,044	0,854	0,102	1,000
		LCR	0,000	0,101	0,899	1,000

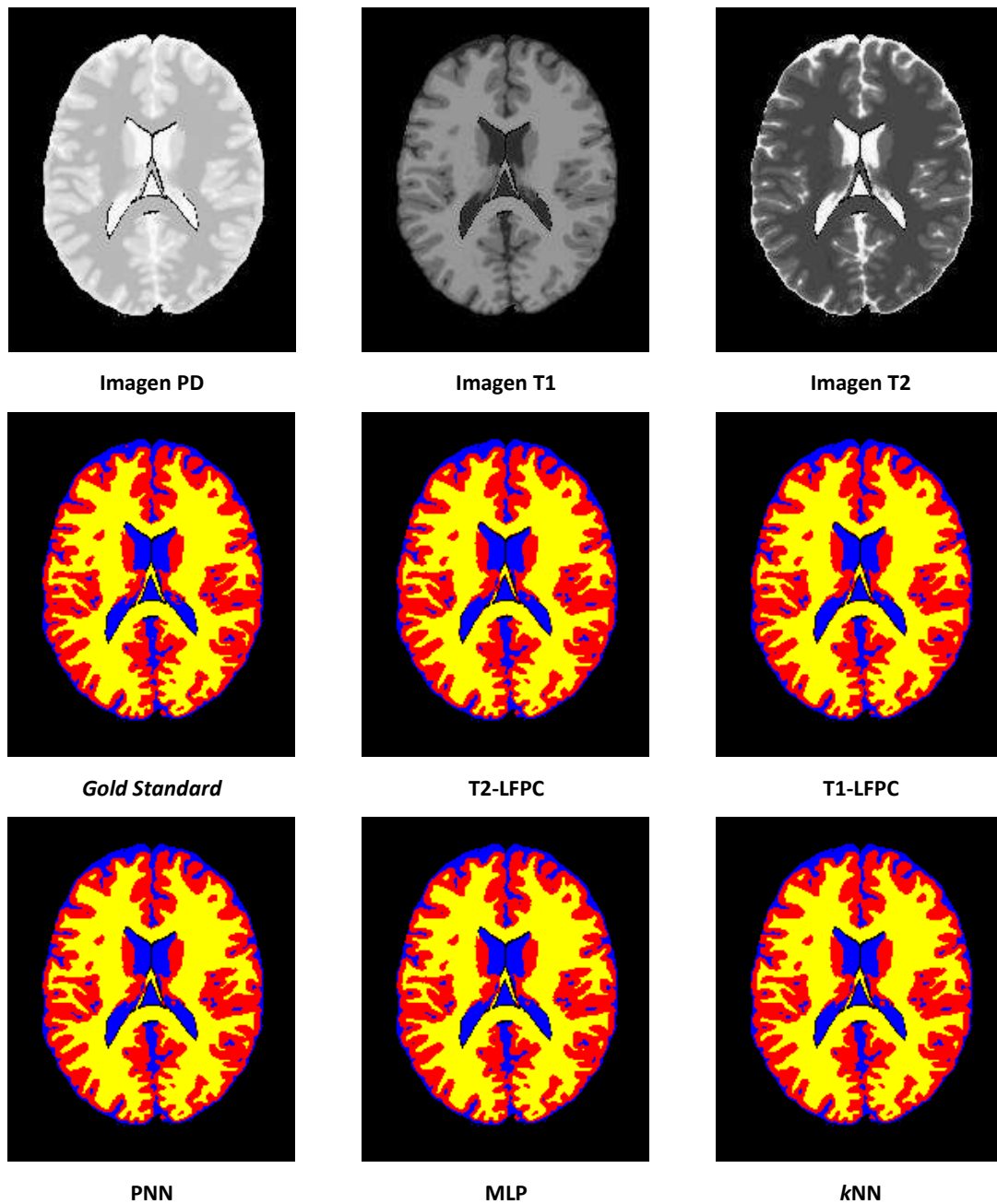


Figura 6.10. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #90 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 0% y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.

MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul.

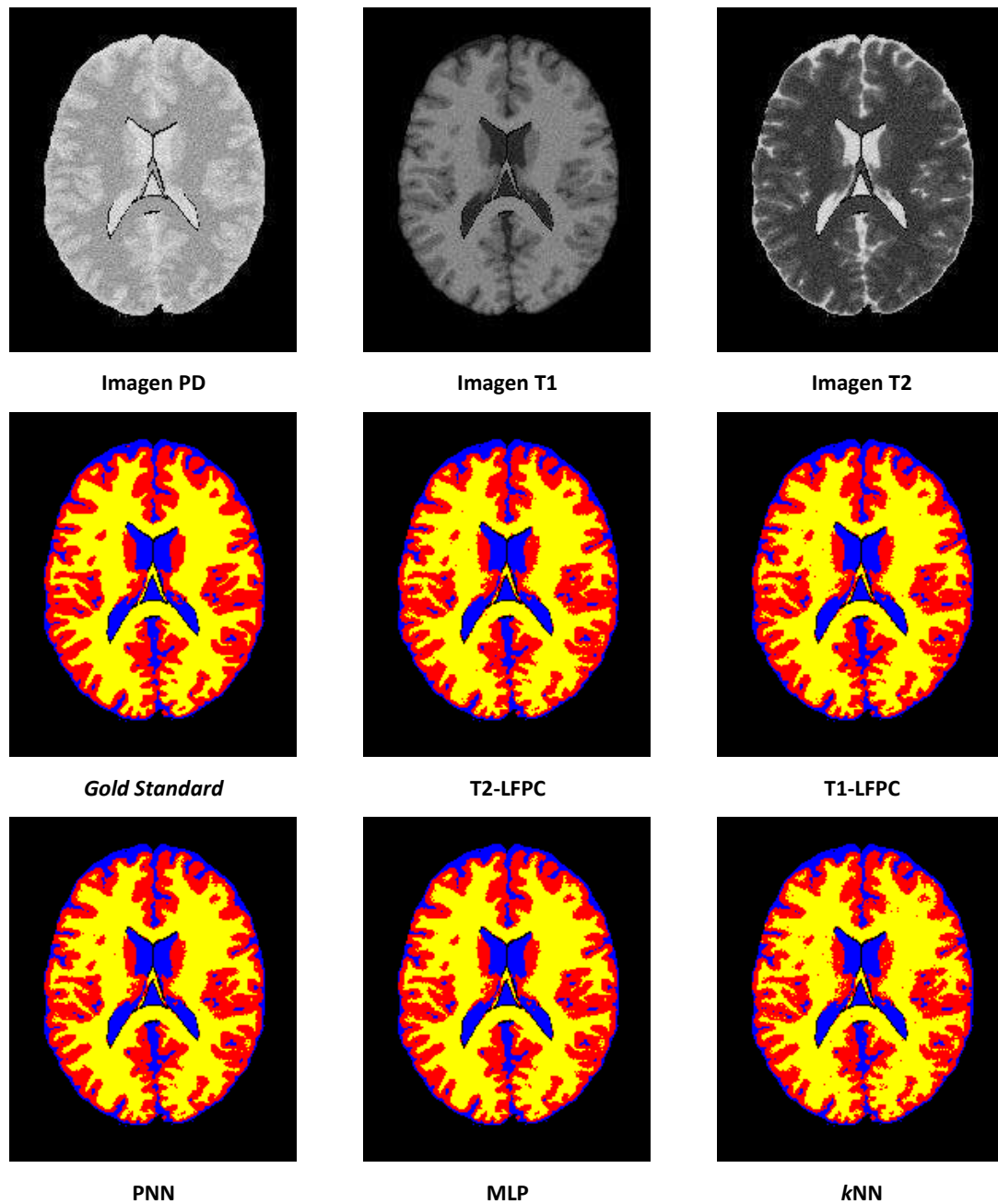


Figura 6.11. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #90 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 5% y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos.

MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul. Se observa una ligera sobre segmentación de la MG (píxeles en rojo).

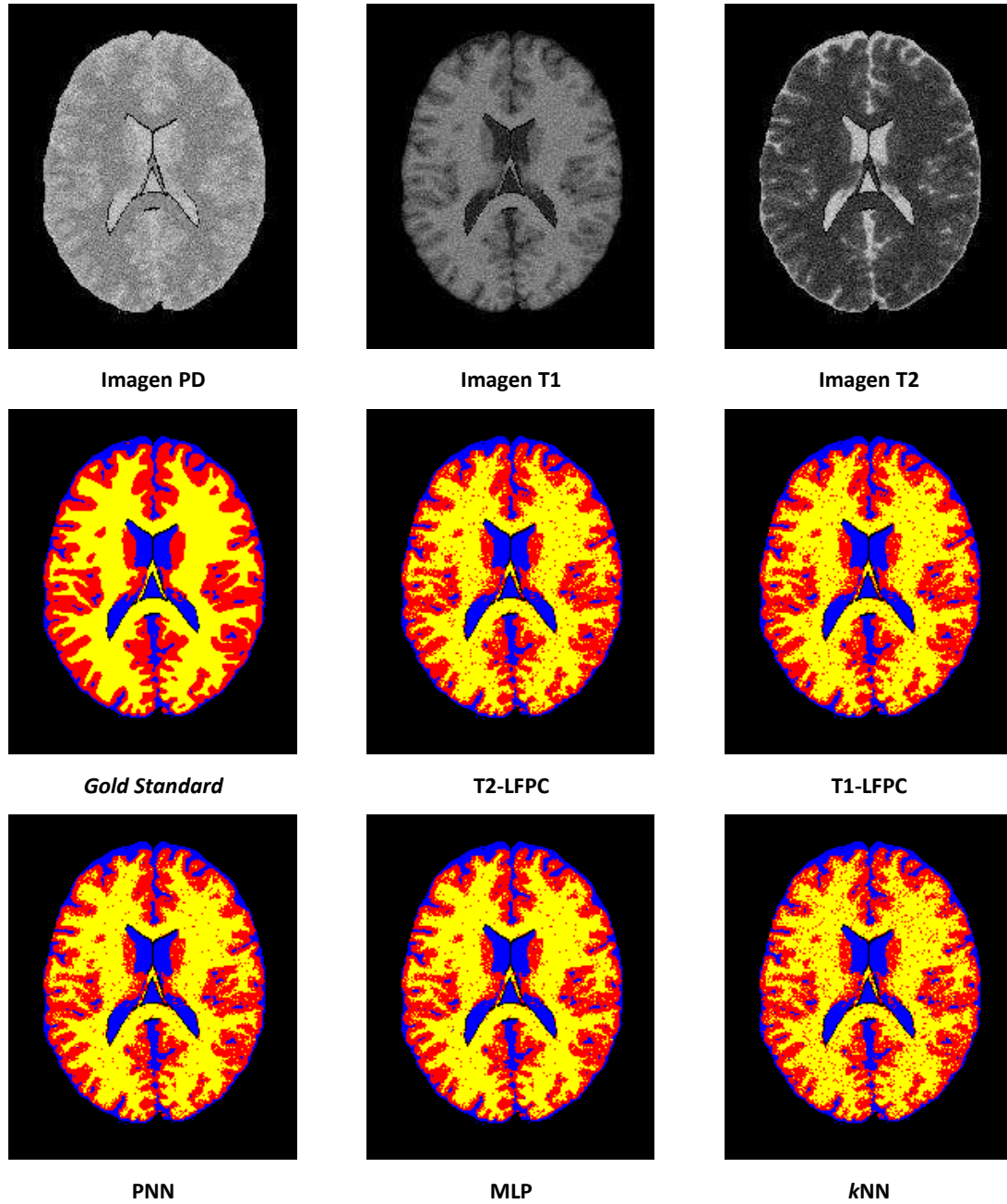


Figura 6.12. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #90 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 9% y resultados obtenidos para los distintos métodos en los casos óptimos. MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul. Puede observarse una ligera sobre segmentación de la MG.

6.2.2.2. Resultados de los métodos de *clustering*

En estas pruebas se analizaron los métodos propuestos para la generación automática a partir de datos de sistemas difusos para agrupamiento, los métodos: *Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-DFPC), *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-SFPC) y sus análogos basados en LD tipo 1: *Type-1 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T1-DFPC), *Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T1-SFPC), todos presentados y explicados en detalle en el

Capítulo 5. Con el fin de validar los resultados obtenidos en la segmentación de las IRM provenientes de simulaciones que conforman el conjunto de prueba #2, se utilizaron, además, los métodos tradicionales de *clustering*: FCM y *K-means*, presentados en la Sección 3.2. Los parámetros específicos utilizados fueron los siguientes:

- **T2-DFPC:** Se consideraron valores de 10 y 15 para el parámetro M , debido a la gran cantidad de píxeles correspondientes a los distintos tejidos de interés en cada corte. Se utilizaron operadores difusos MIN-MAX y operadores de la LDCMG y de la LDCMA (todos presentados en el Capítulo 4). Para la consulta de los sistemas difusos se utilizaron las medidas #1 a #3 propuestas en el Capítulo 5.
- **T2-SFPC:** Se consideró el mismo juego de parámetros que para el T2-DFPC.
- **T1-DFPC:** Se consideraron los mismos tamaños de partición aleatoria que para los métodos T2-DFPC y T2-SFPC y, además, el valor $M=1$. Se utilizaron operadores difusos MIN-MAX y operadores de la LDCMG y de la LDCMA.
- **T1-SFPC:** Los mismos parámetros que para el método T1-DFPC.
- ***K-means*** [Jain *et al.*, 1999]: el algoritmo *K-means* fue utilizado en combinación con el BIC para la determinación automática del número de *clusters* K , siguiendo el método descrito en la Sección 3.2.5, considerando distancia euclidiana.
- **FCM** [Ruspini, 1969]: Se utilizó combinado con el BIC, siguiendo el método descrito en la Sección 3.2.5, aplicado al conjunto de datos, con inicialización aleatoria de los centroides y distancia euclidiana.

Como ya se mencionó, en estas pruebas se utilizaron medidas de validación externas. Para poder estimarlas, una vez obtenido un vector de etiquetas correspondiente a la asignación de *clusters* por parte del algoritmo de *clustering*, se reasignaron los datos de cada *cluster* hallado a una y sólo una de las clases disponibles en el *Gold Standard*, considerando el mapeo entre *clusters* y clases con menor error [Manning *et al.*, 2008; Meschino *et al.*, 2015a]. Con este procedimiento se pudieron computar en cada caso las medidas externas.

Para los métodos de generación automática de sistemas difusos considerados en estas pruebas, el método de validación utilizado, partiendo del procedimiento explicado en el párrafo anterior, consistió en tomar secuencialmente uno de los cortes disponibles en la base de datos como corte para generar el sistema difuso y, posteriormente, se segmentaron los cortes restantes con el sistema difuso generado. Esto se repitió tomando secuencialmente cada uno de los cortes disponibles para generar los sistemas difusos para todos los niveles de ruido disponibles entre 0% y 9%. Las medidas de validación reportadas corresponden a promedios entre todas las iteraciones.

Para el caso de los métodos FCM y *K-means*, los datos de cada corte de la base de datos se agruparon con el algoritmo de *clustering* y se computaron las medidas de validación externas para ese corte (siguiendo el método explicado anteriormente). Este proceso se repitió para cada corte y los resultados reportados corresponden a promedios entre los valores obtenidos para todos los cortes disponibles.

En la Tabla 6.9 se muestran los resultados obtenidos para la segmentación de los diferentes tejidos. Se reportan los valores de coeficientes Tanimoto y de Dice (el promedio para todos los tejidos) para los diferentes métodos, considerando ruido nulo (0%). Para cada medida de validación, se informa su valor promedio, la dispersión de la estimación del mismo y su comparación con el mejor resultado entre los métodos propuestos T2-DFPC y T2-SFPC, por medio de la diferencia porcentual definida en la Ecuación (6.1), y el *test* estadístico realizado. Los parámetros óptimos respecto a los valores de exactitud se indican para cada caso.

Tabla 6.9. Medidas de validación externas obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #2 para diferentes métodos de clustering y para ruido nulo (0%).

Se presentan los coeficientes de Tanimoto y Dice globales (el promedio de los obtenidos para los tejidos MG, MB y LCR) y las diferencias porcentuales entre las medidas de validación estimadas para el mejor resultado de los métodos propuestos T2-DFPC y T2-SFPC y los demás utilizados. Se indica el resultado del *test* estadístico de Wilcoxon en cada comparación.

T.: Tiempo total en segundos para la generación de un sistema difuso y la segmentación de todos los cortes disponibles; **Prom.:** Promedio de las estimaciones; **Disp.:** Desviación estándar de las estimaciones; **Dif.:** Diferencia porcentual entre la medida de validación del método propuesto y el método con el que se compara; **P** : Resultado del *test* de Wilcoxon de la comparación.

Método	Mejor Conf.	T [s]	Tanimoto				Dice			
			Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P
T1-DFPC	M=1 MIN-MAX	7,250	0,924	0,041	-1,508	0,151	0,958	0,039	-1,539	0,103
T2-DFPC	M=5 LDCMG Med.#2	14,645	0,910	0,076	-	-	0,943	0,077	-	-
T1-SFPC	M=1 MIN-MAX	3867,150	0,939	0,052	-3,022	<0,001	0,964	0,049	-2,220	<0,001
T2-SFPC	M=5 LDCMG Med.#2	3938,200	0,906	0,076	0,439	0,029	0,940	0,077	0,251	0,028
FCM	-	23,847	0,877	0,137	3,784	0,094	0,909	0,132	3,681	0,095
<i>K-means</i>	-	44,911	0,861	0,147	5,750	0,946	0,895	0,143	5,321	0,935

En la Figura 6.13 se presentan gráficos de caja correspondientes a los coeficientes de exactitud globales obtenidos de los diferentes métodos para ruido de 0%. Para los métodos basados en LD, se muestran los resultados considerando las diferentes combinaciones de operadores lógicos para el valor óptimo (en términos de menor error) del tamaño de la partición aleatoria (M), y para los métodos basados en LD tipo 2 de intervalos se indican los resultados para las distintas medidas de intervalos propuestas. Con una línea punteada en color gris se muestra el valor de mediana del coeficiente de exactitud para el mejor resultado entre los métodos T2-DFPC y T2-SFPC.

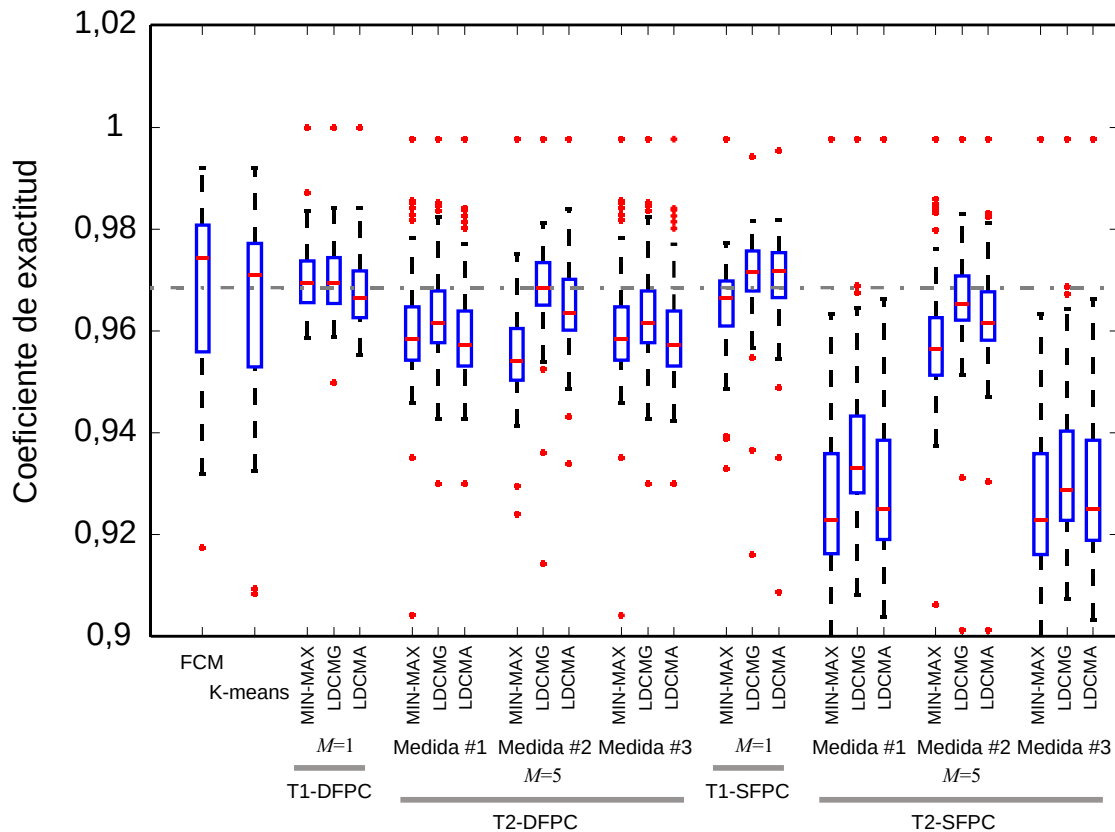


Figura 6.13. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para diferentes métodos de clustering en la segmentación de las IRM provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2, considerando ruido nulo (0%).

Para los métodos T1-DFPC, T1-SFPC, T2-DFPC y T2-SFPC se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria M del caso óptimo, diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad. Se observa que el T2-DFPC obtuvo mejores resultados que el T2-SFPC.

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Medidas #1 a #3:** corresponden a las diferentes medidas de intervalos de valores de verdad.

Analizando el gráfico, se observa que el T2-DFPC obtuvo mejores resultados que el T2-SFPC, con una diferencia en el valor de exactitud de 0,260% con $P = 0,001$. La performance del T2-DFPC es superada en términos de exactitud por los métodos T1-DFPC y T1-SFPC, pero las diferencias no son estadísticamente significativas. Lo mismo ocurre con las diferencias halladas entre T2-DFPC y FCM y T2-DFPC y *K-means*. Resultados similares se observan para los coeficientes de Tanimoto y de Dice presentados en la Tabla 6.9.

Del gráfico de la Figura 6.13 se observan varios *outliers* para el método T2-DFPC en las medidas #1 y #3. Comparando la extensión de las “cajas” para los métodos basados en LD, se observa una mayor dispersión de las medidas de validación estimadas para el T2-SFPC que para los demás métodos, excepto para la medida #2. En este sentido, esta medida es la que presenta mayor estabilidad en esta prueba.

Con el mismo análisis, FCM y *K-means* se observan con gran dispersión en comparación con

la que puede apreciarse para los métodos propuestos. Este mismo hecho se observa en la Tabla 6.9 para los coeficientes de Tanimoto y de Dice. En este aspecto, es notable como, considerando ruido nulo (0%), los métodos propuestos basados en la generación de sistemas difusos para agrupamiento de datos resultan más estables que las técnicas tradicionales de *clustering*.

Continuando con el análisis de las IRM del conjunto de prueba #2, en la Tabla 6.10 se muestran los resultados obtenidos en el peor caso de ruido considerado (9%). Las estimaciones se presentan siguiendo las mismas consideraciones que se utilizaron en la Tabla 6.9. Asimismo, en la Figura 6.14 se muestran las variaciones en los valores del coeficiente de exactitud para el nivel de ruido variando en 0, 1, 3, 5, 7 y 9% para los distintos métodos. En las Tablas 6.11 a 6.14 se presentan las matrices de confusión obtenidas respectivamente para los métodos T2-DFPC, T2-SFPC, T1-DFPC y T1-SFPC con niveles de ruido de 0%, 5% y 9%, considerando en cada caso el promedio de los 181 cortes.

En base a los resultados indicados en la Tabla 6.10, el T2-DFPC supera a todos los demás métodos con diferencias estadísticamente significativas, excepto a los métodos T1-DFPC y T1-SFPC. A nivel gráfico (Figura 6.15) se observan diferencias significativas en la performance de los métodos basados en LD por encima de las técnicas tradicionales FCM y *K-means*. Respecto a exactitud promedio la máxima diferencia es respecto al FCM con 2,330% ($P < 0,001$).

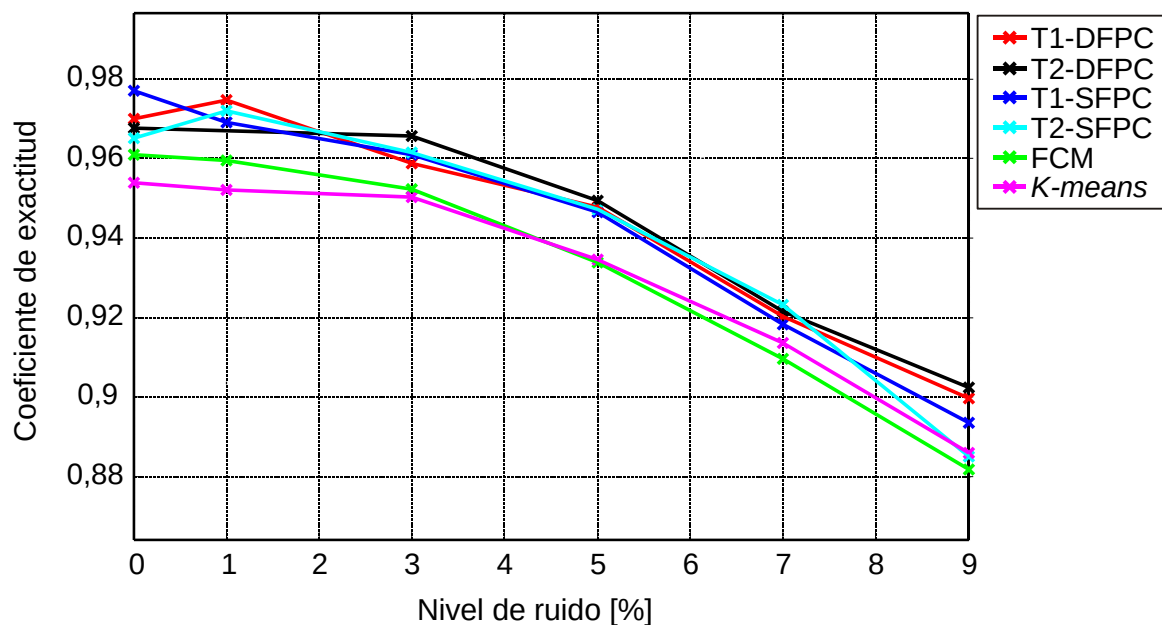
Para ambos casos de ruido reportados en las Tablas 6.9 y 6.10, se observan amplias diferencias en los tiempos necesarios para el procesamiento de los cortes del conjunto de prueba #2 entre los métodos T1-DFPC, T2-DFPC y T1-SFPC, T2-SFPC; lo cual se debe al costo computacional del entrenamiento y parametrización automática de los SOM en este último par de métodos, considerando, además, la amplia cantidad de vectores de características disponible en cada corte. También se observan diferencias significativas en los tiempos demandados por el FCM y el *K-means*, debido a las iteraciones de *clustering* necesarias para la determinación automática del número de *clusters* utilizando el BIC y el procedimiento detallado en la Sección 3.2.5. En este sentido, este enfoque resulta efectivo para la determinación automática del número adecuado de *clusters* (a partir de las medidas de validación obtenidas) pero es significativamente más costoso computacionalmente que la aplicación directa de la técnica de *clustering*.

Tabla 6.10. Medidas de validación externas obtenidas para las IRM del conjunto de prueba #2 para diferentes métodos de clustering y ruido máximo (9%).

Se presentan los coeficientes de Tanimoto y Dice globales (el promedio de los obtenidos para los tejidos MG, MB y LCR) y las diferencias porcentuales entre las medidas de validación estimadas para el mejor resultado de los métodos propuestos T2-DFPC y T2-SFPC y los demás utilizados. Se indica el resultado del *test* estadístico de Wilcoxon en cada comparación.

T.: Tiempo total en segundos para la generación de un sistema difuso y la segmentación de todos los cortes disponibles; **Prom.:** Promedio de las estimaciones; **Disp.:** Desviación estándar de las estimaciones; **Dif.:** Diferencia porcentual entre la medida de validación del método propuesto y el método con el que se compara; **P** : Resultado del *test* de Wilcoxon de la comparación.

Método	Mejor Conf.	T [s]	Tanimoto				Dice			
			Prom.	Disp.	Dif.	P	Prom.	Disp.	Dif.	P
T1-DFPC	$M=1$ MIN-MAX	7,250	0,783	0,071	0,387	0,417	0,861	0,086	0,217	0,423
T2-DFPC	$M=5$ LDCMG Med.#2	14,645	0,786	0,069	-	-	0,863	0,085	-	-
T1-SFPC	$M=1$ MIN-MAX	3867,150	0,786	0,068	0,108	0,878	0,862	0,084	0,069	0,828
T2-SFPC	$M=5$ LDCMG Med.#2	3938,200	0,765	0,065	2,761	<0,001	0,848	0,082	1,727	<0,001
FCM	-	23,847	0,743	0,114	5,796	0,021	0,819	0,127	5,278	0,024
<i>K-means</i>	-	44,911	0,753	0,107	4,473	0,070	0,829	0,120	4,108	0,077

**Figura 6.14. Exactitud promedio en función del nivel de ruido para todos los métodos de clustering considerados.**

Se observa que los métodos propuestos basados en LD superan a las técnicas tradicionales de clustering.

Las matrices de confusión de las Tablas 6.11 a 6.14 permiten analizar con qué etiqueta fueron etiquetados los píxeles incorrectamente segmentados en diferentes métodos. Es notable la mayor capacidad para discriminar el LCR por parte de los métodos que utilizan SOM, el T2-SFPC y el T1-SFPC, mientras los que realizan directamente un análisis de datos T2-DFPC y T1-DFPC son más efectivos en la segmentación de MG y MB, considerando todos los niveles de ruido. Comparando T2-DFPC y T1-DFPC, el método basado en LD tipo 2 de intervalos es ligeramente más efectivo en la segmentación de MB y LCR que el basado en LD tipo 1.

Tabla 6.11. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T2-DFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM correspondientes al conjunto de prueba #2 considerando diferentes niveles de ruido.

Nivel de ruido			Matriz de confusión			
0%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,982	0,018	0,000	1,000
		MB	0,017	0,942	0,041	1,000
		LCR	0,000	0,002	0,998	1,000
5%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,984	0,016	0,000	1,000
		MB	0,030	0,935	0,035	1,000
		LCR	0,000	0,053	0,947	1,000
9%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,963	0,037	0,000	1,000
		MB	0,035	0,873	0,092	1,000
		LCR	0,000	0,106	0,894	1,000

Tabla 6.12. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T2-SFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM correspondientes a conjunto de prueba #2 considerando diferentes niveles de ruido.

Nivel de ruido			Matriz de confusión			
0%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,972	0,028	0,000	1,000
		MB	0,010	0,940	0,051	1,000
		LCR	0,000	0,001	0,999	1,000
5%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,970	0,030	0,000	1,000
		MB	0,018	0,924	0,058	1,000
		LCR	0,000	0,036	0,964	1,000
9%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,931	0,069	0,000	1,000
		MB	0,019	0,824	0,157	1,000
		LCR	0,000	0,077	0,923	1,000

Tabla 6.13. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T1-DFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM correspondientes a conjunto de prueba #2 considerando diferentes niveles de ruido.

Nivel de ruido		Matriz de confusión				
0%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,997	0,003	0,000	1,000
		MB	0,038	0,940	0,022	1,000
		LCR	0,000	0,005	0,995	1,000
5%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,982	0,018	0,000	1,000
		MB	0,027	0,945	0,028	1,000
		LCR	0,000	0,065	0,935	1,000
9%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,965	0,035	0,000	1,000
		MB	0,040	0,872	0,088	1,000
		LCR	0,000	0,111	0,889	1,000

Tabla 6.14. Matrices de confusión normalizadas obtenidas con el método T1-SFPC, propuesto en esta Tesis, aplicado a la segmentación de la IRM correspondientes a conjunto de prueba #2 considerando diferentes niveles de ruido.

Nivel de ruido			Matriz de confusión			
0%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,976	0,024	0,000	1,000
		MB	0,015	0,961	0,025	1,000
		LCR	0,000	0,004	0,996	1,000
5%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,951	0,049	0,000	1,000
		MB	0,019	0,935	0,046	1,000
		LCR	0,000	0,060	0,940	1,000
9%			y fueron clasificados como...			Suma
			MG	MB	LCR	
	Píxeles que corresponden a	MG	0,940	0,060	0,000	1,000
		MB	0,022	0,827	0,152	1,000
		LCR	0,000	0,059	0,941	1,000

A nivel general, todos los métodos presentan buenos niveles de discriminación de los diferentes tejidos para las diferentes condiciones de ruido consideradas.

A modo de ejemplos visuales de las segmentaciones obtenidas para estas IRM bajo diferentes niveles de ruido, en las Figuras 6.15, 6.16 y 6.17 se presentan ejemplos de las imágenes utilizadas y obtenidas para un corte intermedio en la secuencia, el corte #80, para niveles de ruido 0%, 5% y 9% respectivamente. Se presentan los mejores resultados obtenidos para cada método propuesto, considerando los parámetros óptimos informados en la Tabla 6.9 y los resultados del FCM.

Debe destacarse nuevamente que, además de las diferencias estadísticamente significativas observadas en favor de la robustez de los métodos propuestos frente al ruido respecto de las técnicas tradicionales de *clustering* analizadas, estas últimas no permiten en modo directo extraer conocimiento respecto del problema estudiado, lo que sí permiten los métodos propuestos, cuyo análisis para IRM de cerebro será realizado en la próxima Sección.

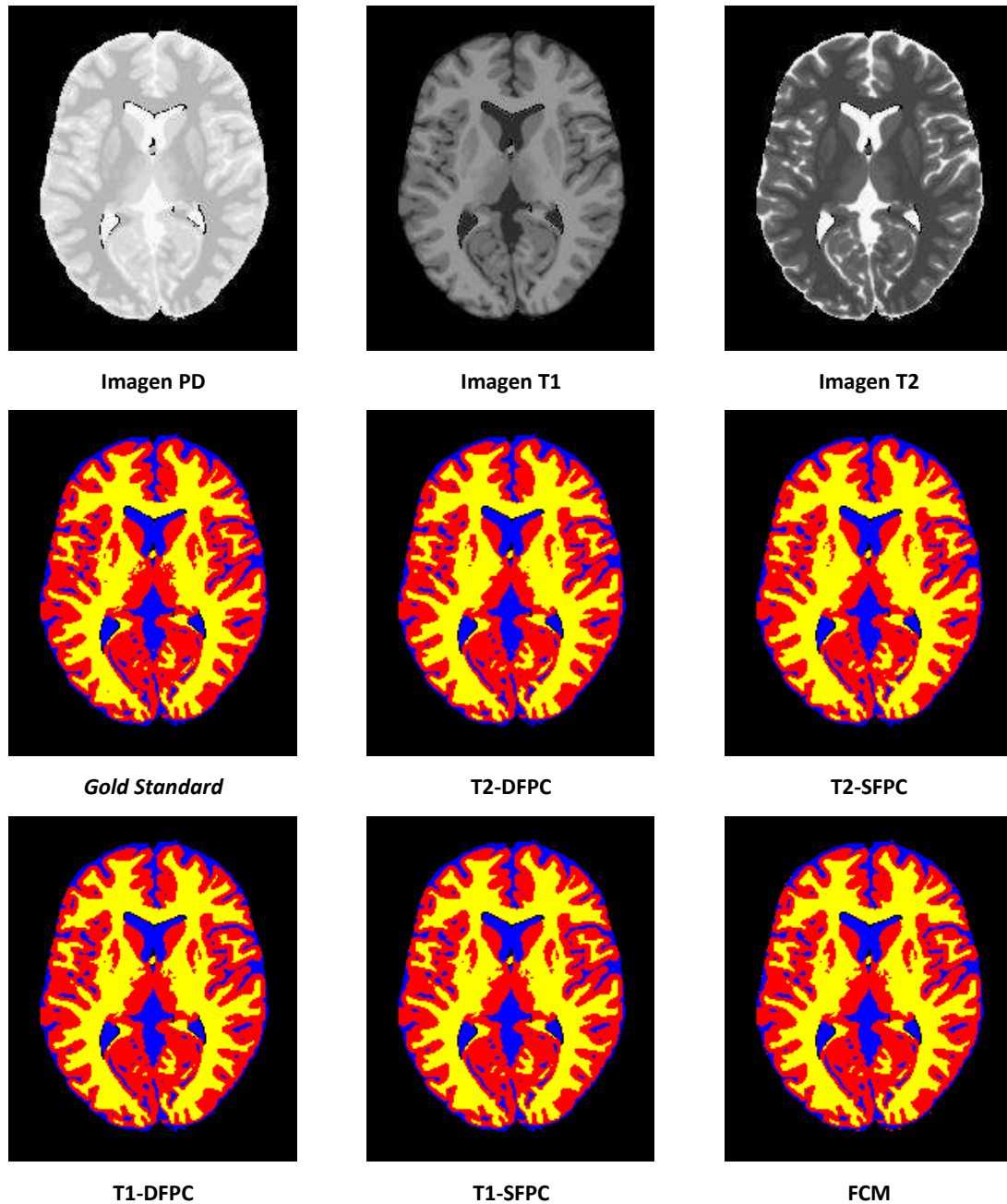


Figura 6.15. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #80 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 0% y resultados obtenidos para los distintos métodos de *clustering* en los casos óptimos.

MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul.

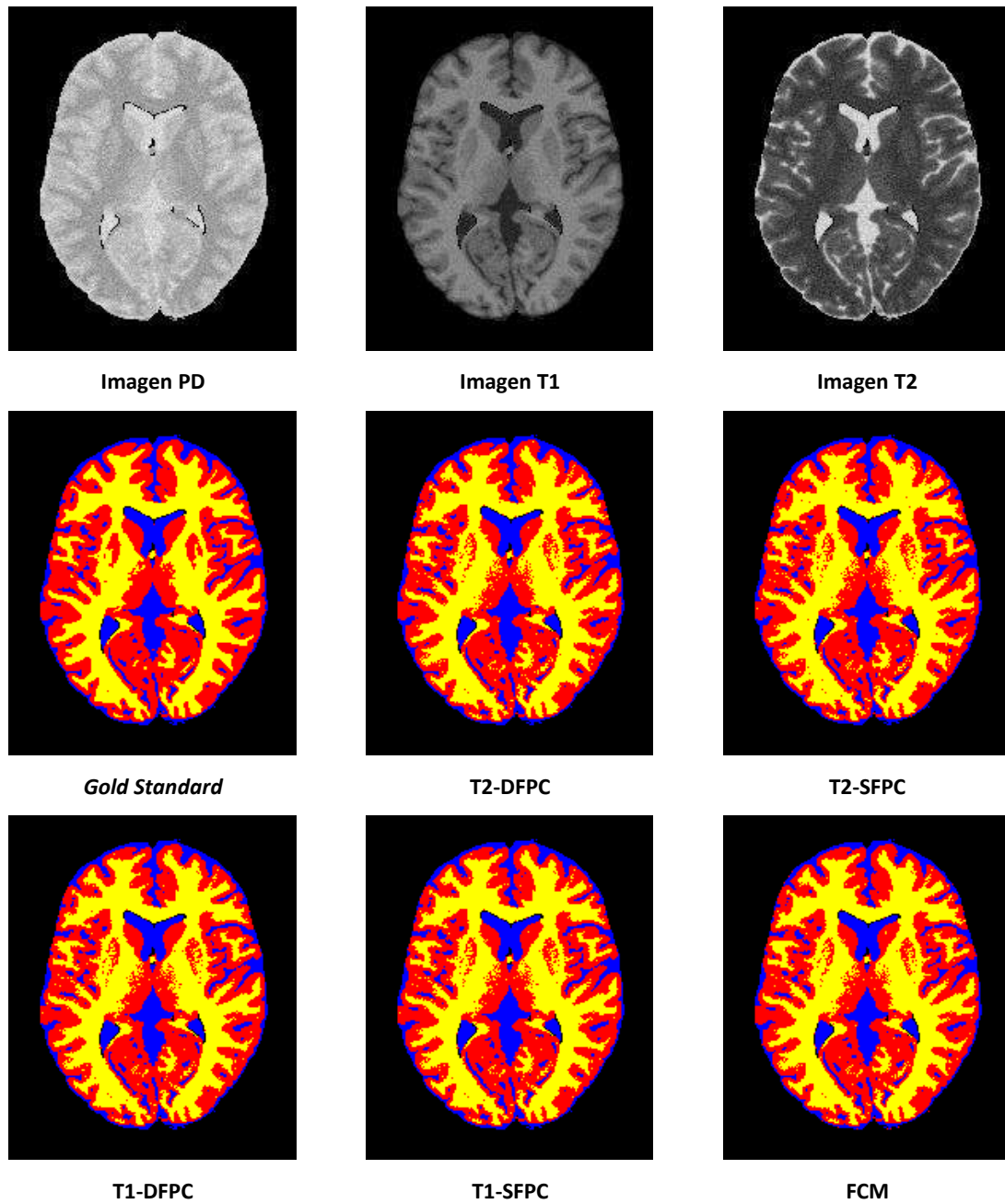


Figura 6.16. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #80 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 5% y resultados obtenidos para los distintos métodos de *clustering* en los casos óptimos. MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul.

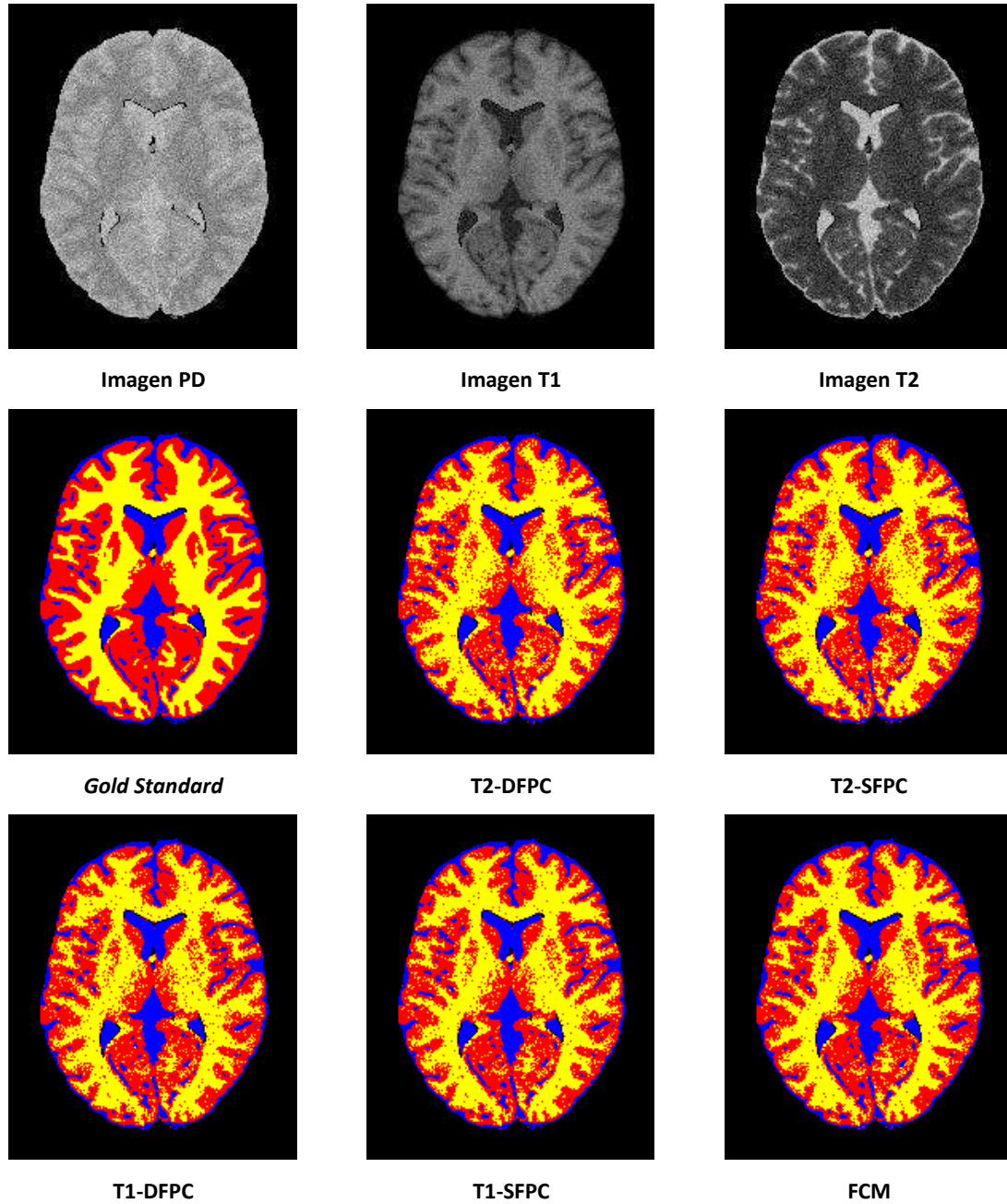


Figura 6.17. IRM provenientes de simulaciones correspondientes al corte #80 del conjunto de prueba #2 para un nivel de ruido de 9% y resultados obtenidos para los distintos métodos de *clustering* en los casos óptimos. MG en rojo, la MB en amarillo y el LCR en azul.

6.2.2.3. Robustez frente al ruido de la LD tipo 2 de intervalos versus la LD tipo 1

En esta Sección, se presentan los resultados de la comparación entre la robustez frente al ruido de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y la de los basados en LD tipo 1. Para este fin, se generaron dos sistemas difusos, uno para cada tipo de LD, a través de los métodos propuestos T2-LFPC y T1-LFPC y utilizando las IRM provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2 para el caso de ruido nulo (0%). Una vez generados, ambos sistemas difusos fueron

utilizados para segmentar otros cortes, no utilizados en la etapa de generación, agregándoles ruido simulado computacionalmente.

Es importante señalar que, pese a haber sido generados utilizando los métodos automáticos T2-LFPC y T1-LFPC, los sistemas difusos representan ejemplos de sistemas que podrían haber sido obtenido a partir de conocimiento de especialistas o a través de otros de los métodos automáticos propuestos en esta Tesis. Como las IRM afectadas por ruido sólo intervienen en la etapa de consulta, cuando se procede a su segmentación, estas pruebas permitieron analizar la capacidad de las funciones de pertenencia y el enfoque basado en predicados para la minimización de los efectos de ruido en la asignación de etiquetas y comparar los resultados de los distintos tipos de LD.

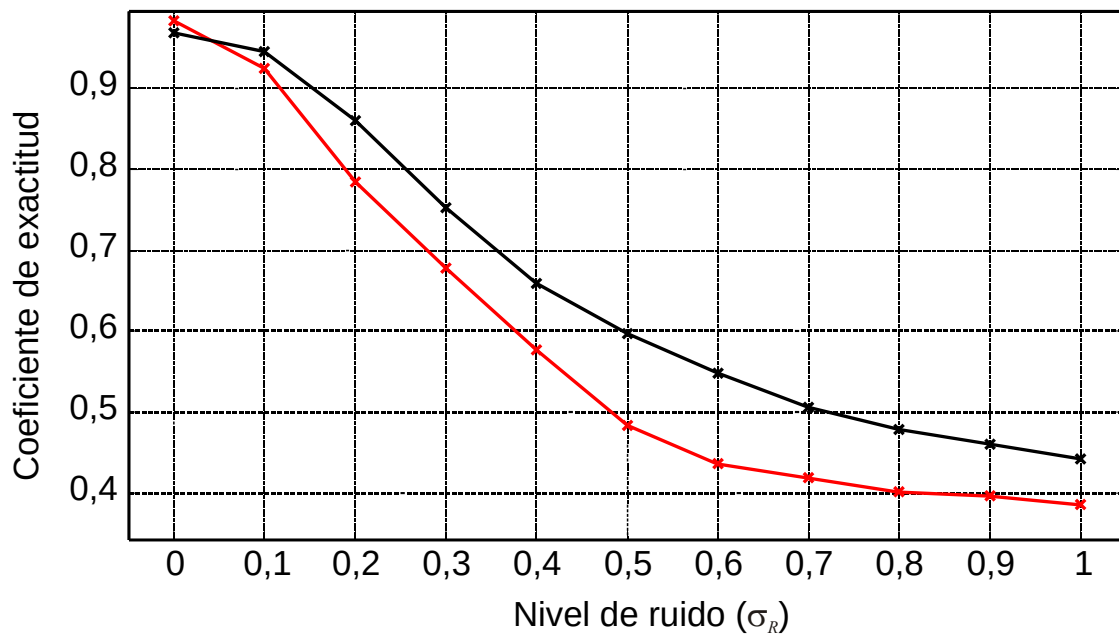
En este sentido, a diferencia del utilizado en las secciones anteriores, este enfoque permitió evaluar exclusivamente la potencial capacidad de la LD tipo 2 de intervalos frente a la LD tipo 1 en el manejo y la minimización de los efectos generados por incertidumbre proveniente de ruido; así como también, evaluar la metodología propuesta para ordenar intervalos de valores de verdad a través del concepto de medida de intervalos de valores de verdad, propuestos en la Sección 5.2.2.

Al igual que lo realizado para el conjunto de prueba #1 al agregar artificialmente ruido a las IRM reales, en este caso se consideró un nivel de gris normalizado entre -1 (correspondiente a negro) y +1 (correspondientes a blanco) y se generaron imágenes afectadas por ruido sumando píxel a píxel sobre las secuencias PD, T1 y T2, en forma aleatoria, ruido gaussiano de media cero y un valor fijo de desviación estándar (σ_R) para cada iteración, haciendo crecer su valor entre una y otra prueba. Se consideraron valores de $\sigma_R = 0; 0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1$.

Para cada nivel de ruido, se recorrieron todos los cortes disponibles, tomando secuencialmente uno de ellos para generar los sistemas difusos (con imágenes sin ruido) y segmentando posteriormente el resto de los cortes (con imágenes con ruido) consultando los sistemas difusos previamente generados. El proceso se repitió tomando secuencialmente cada corte como conjunto de generación de los sistemas difusos y los restantes como conjunto de *test*; para cada nivel de ruido σ_R . Las medidas de validación reportadas corresponden entonces a promedios entre todos los cortes. Los valores de coeficiente de exactitud global (considerando todos los tejidos) se presentan en la Figura 6.18.

A partir de la Figura 6.18 puede observarse una mayor performance de la LD tipo 2 de intervalos que la LD tipo 1 en la segmentación de IRM afectadas por ruido, partiendo de sistemas difusos generados con IRM sin ruido; en los cuales, para ruido 0%, LD tipo 1 superaba a la LD tipo 2 de intervalos (consultar Tabla 6.5). Específicamente, para σ_R igual a 1 (el peor caso) la LD tipo 2 de intervalos supera a la LD tipo 1 por 14,170% en exactitud ($P < 0,001$), 29,462% en coeficiente de Tanimoto ($P = 0,022$) y en coeficiente de Dice por 30,499% ($P = 0,018$); todas diferencias

estadísticamente significativas. Estas grandes diferencias se mantienen prácticamente iguales considerando un tamaño de la partición aleatoria para el método T1-LFPC de $M = 1$.



✖ Sistema difuso con LD tipo 1 ✖ Sistema difuso con LD tipo 2 de intervalos

Figura 6.18. Exactitud promedio considerando IRM con distintos niveles de ruido en la consulta de sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos.

Los parámetros óptimos fueron: **LD tipo 1:** $M=1$ y MIN-MAX; **LD tipo 2 de intervalos:** $M=10$, LDCMA y medida #2.

Para niveles de ruido superiores a 0,1 se observa una mejor performance de la LD tipo 2 de intervalos sobre la de tipo 1. Para el peor caso de ruido, la LD tipo 2 de intervalos obtuvo un 14,170% más de exactitud que la LD tipo 1 ($P < 0,001$).

A partir de lo anterior, **en términos de robustez de los operadores lógicos y utilizando enfoques basados en predicados, la LD tipo 2 de intervalos**, al menos para las pruebas efectuadas aquí, **demostró ser más robusta frente al ruido que la LD tipo 1**. Esto indica, no sólo gran capacidad de las funciones de pertenencia valuadas en intervalos para manejar y minimizar los efectos de esta fuente de incertidumbre, sino también **gran efectividad del método propuesto para ordenar intervalos de valores de verdad a través del concepto de medida de intervalos y el método para la consulta de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y predicados**. Las conclusiones derivadas de este análisis constituyen una de las grandes contribuciones de esta Tesis.

6.2.2.4. Extracción de conocimiento a partir de los sistemas difusos automáticamente generados

A lo largo de esta Tesis, se ha marcado la potencial característica adicional que presentan los sistemas de LD basados en predicados difusos que son automáticamente generados a partir de datos: descubrir conocimiento oculto, explotando las capacidades de interpretación de los sistemas generados, al permitir analizar los atributos y las relaciones difusas encontradas. En este sentido,

en la Sección 5.3.6 se presentó una metodología general como guía para la extracción de conocimiento. En la presente Sección, se presenta un ejemplo de este proceso, considerando la segmentación de IRM de cerebro y un sistema difuso generado automáticamente para tal fin utilizando el método T2-DFPC.

En el Ejemplo 5.1 presentado en el Capítulo 5, fue presentado en detalle el método habitualmente seguido para la generación de sistemas difusos a partir de conocimiento de especialistas. En aquel ejemplo, se puso énfasis en el tipo de descripciones lingüísticas utilizadas para analizar los niveles de gris de las IRM en secuencias PD, T1 y T2 y cómo, a partir de éstas, los especialistas identifican los tejidos de interés MG, MB y LCR.

El objetivo del análisis desarrollado en la presente Sección es verificar si las relaciones difusas y los atributos lingüísticos descritos por las funciones de pertenencia obtenidas del método de generación automática coinciden con aquéllas obtenidas oportunamente a partir del conocimiento de especialistas en el desarrollo del Ejemplo 5.1. Mediante tal análisis, es posible verificar la potencial capacidad de los sistemas difusos generados automáticamente utilizando los métodos propuestos en esta Tesis para la extracción de conocimiento expresado con descripciones lingüísticas.

Se formó un conjunto de datos para la generación del sistema difuso tomando aleatoriamente 30.000 píxeles del total de cortes de las IRM de cerebro provenientes de simulaciones (conjunto de prueba #2) para ruido nulo (0%). La selección fue realizada de tal manera que exista la misma cantidad de píxeles de cada tejido. Los vectores de características se formaron con los valores de los niveles de gris en las imágenes PD, T1 y T2 de cada píxel.

En las Figuras 6.19, 6.20 y 6.21 se muestran las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos obtenidas, respectivamente, para las variables lingüísticas “*Nivel de gris en la imagen PD*”, “*Nivel de gris en la imagen T1*” y “*Nivel de gris en la imagen T2*” correspondiendo a las características utilizadas. Se consideraron niveles de gris normalizados entre -1 y +1, donde el -1 representa al negro y el +1 al blanco. Para cada característica, se asoció la función de pertenencia de cada *cluster* descubierto en el método T2-DFPC a uno y sólo uno de los tejidos, buscando la asociación entre *clusters* y etiquetas con menor error en el agrupamiento del conjunto de datos considerado. Dada la cantidad de vectores de características del conjunto de datos considerado, se utilizó un tamaño de partición aleatoria (M) en el método T2-DFPC de $M = 10$.

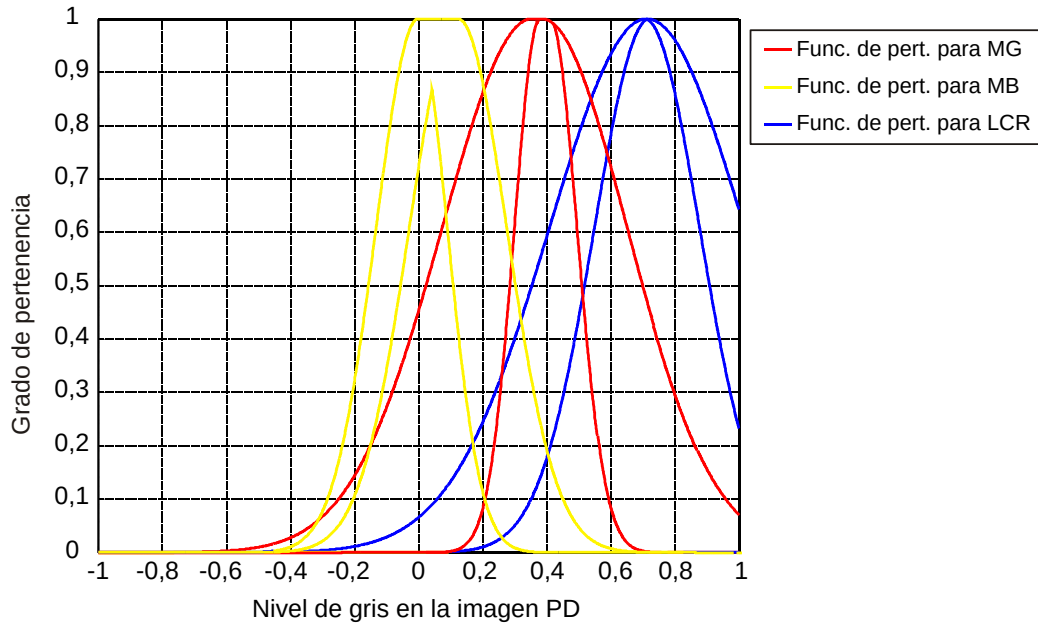


Figura 6.19. Funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos obtenidas utilizando el método T2-DFPC sobre las IRM de cerebro provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2 para la secuencia PD.

Cada función de pertenencia tiene un color particular de trazo, el cual indica el tejido que describen. Se considera un nivel de gris normalizado entre -1 (negro) y +1 (blanco).

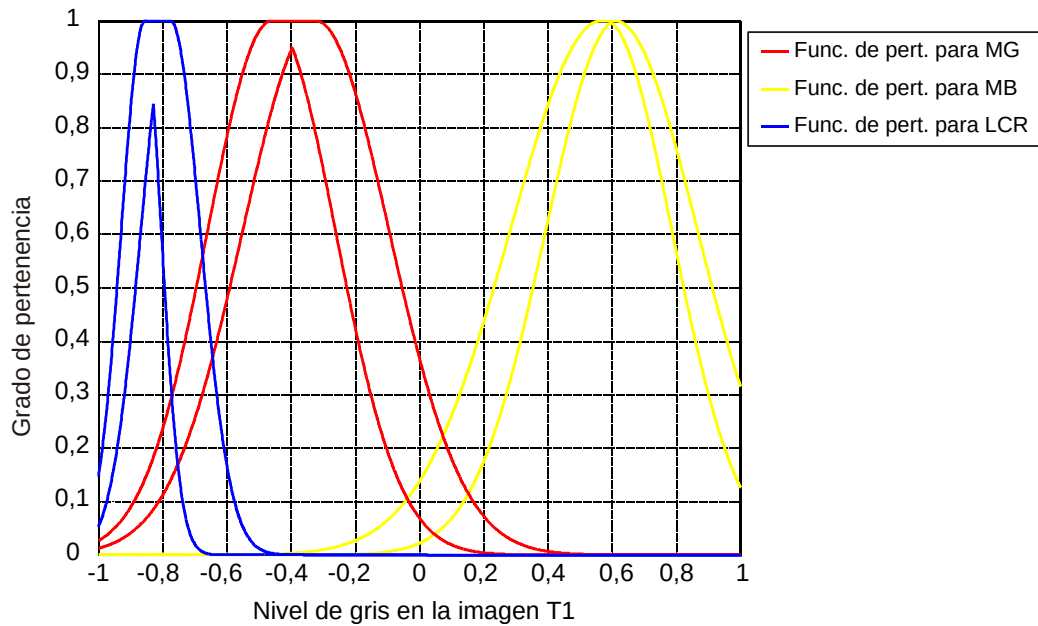


Figura 6.20. Funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos obtenidas utilizando el método T2-DFPC sobre las IRM de cerebro provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2 para la secuencia T1.

Cada función de pertenencia tiene un color particular de trazo, el cual indica el tejido que describen. Se considera un nivel de gris normalizado entre -1 (negro) y +1 (blanco).

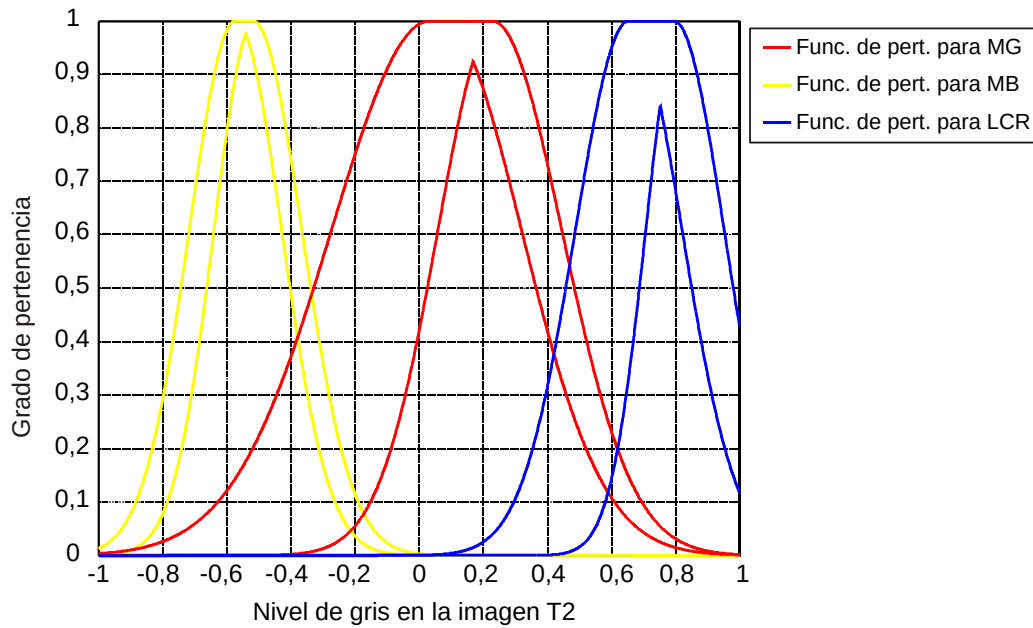


Figura 6.21. Funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos obtenidas utilizando el método T2-DFPC sobre las IRM de cerebro provenientes de simulaciones del conjunto de prueba #2 para la secuencia T2.

Cada función de pertenencia tiene un color particular de trazo, el cual indica el tejido que describen. Se considera un nivel de gris normalizado entre -1 (negro) y +1 (blanco).

Del análisis de las funciones de pertenencia mostradas en las Figuras 6.19 a 6.21 para las distintas características, pueden ser identificados en cada caso los rangos de valores que están asociados a cada tipo de tejido.

Considérense las funciones de pertenencia de la Figura 6.19 correspondientes a la característica “*Intensidad de gris en la imagen PD*”. Para el tejido LCR, la función de pertenencia está ubicada alrededor de los valores máximos de la intensidad de nivel de gris normalizada, aproximadamente entre 0,4 y 1 para valores de verdad superiores a 0,25. Estos valores de “*Intensidad de gris en la imagen PD*” correspondientes a LCR pueden ser asociados con el atributo “*blanco*”, considerando que están concentrados alrededor del máximo de la escala normalizada de niveles de gris. Para el mismo tejido, considerando ahora la característica “*Intensidad de gris en la imagen T1*” (Figuras 6.20) toma valores concentrados entre -1 y -0,65, por lo que la función de pertenencia puede asociarse al atributo “*muy oscuro*”. Para completar el análisis del tejido LCR, en la Figura 6.21 muestra que para la característica “*Intensidad de gris en la imagen T2*” los valores están concentrados alrededor de 0,45 y 1; valores que pueden asociarse al atributo “*blanco*”. Por lo tanto, utilizando estos atributos descriptos por las funciones de pertenencia descubiertas por el método de generación automática T2-DFPC, puede realizarse la siguiente descripción para los píxeles que corresponden a LCR: “*los píxeles correspondientes a LCR se perciben blancos en la imagen PD, muy oscuros en la imagen T1 y blancos en la imagen T2*”; descripción que coincide con la realizada por especialistas para el LCR que fue presentada en el Ejemplo 5.1.

A través de la descripción del párrafo anterior, puede definirse el predicado difuso $p_{\text{Líquido Cefalorraquídeo}}$ que describe al tejido LCR como sigue: $p_{\text{Líquido Cefalorraquídeo}}(x)$: “El píxel x es LCR”, que es equivalente a “El píxel x es blanco en la imagen PD Y es muy oscuro en la imagen T1 Y es blanco en la imagen T2”.

El análisis de los párrafos anteriores puede extenderse a los tejidos MG y MB. Considerando MG, puede obtenerse la descripción lingüística: “los píxeles correspondientes a MG se perciben muy brillantes en la imagen PD, oscuros en la imagen T1 y brillantes en la imagen T2”. De la misma forma para el tejido MB: “los píxeles correspondientes a MB se perciben brillantes en la imagen PD, brillantes en la imagen T1 y oscuros en la imagen T2”. A través de estas descripciones pueden extraerse los siguientes predicados difusos para los tejidos MG y MB:

- $p_{\text{Materia Gris}}(x)$: “El píxel x es MG”, que es equivalente a “El píxel x es muy brillante en la imagen PD Y es oscuro en la imagen T1 Y brillante en la imagen T2”;
- $p_{\text{Materia Blanca}}(x)$: “El píxel x es MB”, que es equivalente a “El píxel x es brillante en la imagen PD Y es brillante en la imagen T1 Y es oscuro en la imagen T2”;

los cuales coinciden con los obtenidos a partir de descripciones aportadas por médicos especialistas en el Ejemplo 5.1.

A partir de los resultados del análisis anterior puede decirse que las interpretaciones visuales de las funciones de pertenencia obtenidas con los métodos de generación propuestos para las diferentes etiquetas, asociando a ellas atributos, permiten extraer descripciones que coinciden con las que podrían ser aportadas por especialistas al describir cada etiqueta en términos lingüísticos. Asimismo, los predicados generados automáticamente con los métodos propuestos implementan lógicamente relaciones lógicas coincidentes con las utilizarían especialistas en sus descripciones. En este sentido, **el conocimiento de especialistas requerido para generar y utilizar sistemas de LD en Reconocimiento de Patrones no sólo no es necesario con los métodos de generación automática propuestos, donde los sistemas difusos se generan a partir de datos, sino que puede ser extraído de los sistemas generados.** Este último punto constituye uno de los aportes más trascendentes de esta Tesis.

Además del análisis anterior, como se señaló en la Sección 5.3.6, la principal ventaja de los métodos propuestos para la generación automática de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos es que permiten analizar la imprecisión e incertidumbre asociados a las variables difusas modeladas por las funciones de pertenencia. Fue destacado en el Capítulo 4, al presentar los conceptos relacionados a CDs tipo 2 de intervalos, que tanto la imprecisión como la incertidumbre respecto al grado de pertenencia de los elementos al CD están modeladas por la región de incertidumbre (FOU). Cuando las funciones de pertenencia muestran grandes diferencias entre la

Lower MF y la *Upper MF*, es decir, existen intervalos de valores de verdad amplios, puede inferirse imprecisión respecto al atributo descrito por la función de pertenencia. En el caso del ejemplo analizado en la presente Sección, los atributos descritos por las funciones de pertenencia correspondientes al tejido LCR en la imagen PD y a los tejidos MG y LCR en la imagen T2 son ejemplo de atributos con gran imprecisión de acuerdo a lo que puede visualizarse en los gráficos de las Figuras 6.19 a 6.21.

Por otro lado, cuando las funciones de pertenencia son anchas, abarcando con valores de verdad altos un amplio rango de los valores de posibles de una característica, puede inferirse gran incertidumbre alrededor de los conceptos modelados. Como se señaló en la Sección 5.3.6, en términos de los métodos de generación automática propuestos, esto indica una gran variabilidad en los datos asociados a una etiqueta, la cual se ve reflejada en la variabilidad entre los datos de los subconjuntos obtenidos por medio de las particiones aleatorias. Ésta puede asociarse a la definición de los atributos lingüísticos descubiertos al extraer conocimiento a partir los sistemas difusos generados.

Es importante destacar que los métodos de generación automática de sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos propuestos en esta Tesis, es decir, los métodos T2-DFPC, T2-SFPC y T2-LFPC, generan una única función de pertenencia para cada característica y cada etiqueta descubierta. Esto es independiente del tamaño de la partición de datos (parámetro M). En los métodos análogos basados en LD tipo 1: T1-DFPC, T1-SFPC y T1-LFPC, también propuestos, si se utiliza $M > 1$, la extracción de conocimiento se dificulta, por tener más de una función de pertenencia tipo 1 para cada característica en cada etiqueta [Comas *et al.*, 2015b; Meschino *et al.*, 2015a].

Finalmente, las funciones de pertenencia tipo 2 de intervalos reúnen todo el conocimiento acerca de cómo se distribuyen los vectores de características en las diferentes etiquetas. La interpretación lingüística es realizada por inspección de los valores que adopta cada característica, de acuerdo con la forma y posición de las funciones de pertenencia obtenidas para cada etiqueta.

6.3. Bases de datos generales

Todos los métodos propuestos en esta Tesis fueron probados también con conjuntos de datos generales, de uso libre y disponibles *online* en el repositorio *UCI Machine Learning Repository* [Bache y Lichman, 2013], con el fin de analizar su capacidad en problemas generales de Reconocimiento de Patrones. También se realizaron pruebas de robustez frente al ruido comparando los resultados de sistemas difusos basados en LD tipo 1 y en LD tipo 2 de intervalos. Los resultados obtenidos se presentan en esta Sección.

Se utilizaron seis conjuntos de datos para las pruebas, los cuales presentan diferentes particularidades en cuanto a la cantidad de características, de datos y de etiquetas, todos contando con *Gold Standard*. Los diferentes conjuntos de datos se describen a continuación:

- Conjunto de datos *Wine* (3 etiquetas, 13 características, 198 vectores de características) [Cortez *et al.*, 2009];
- Conjunto de datos *Iris* (3 etiquetas, 4 características, 150 vectores de características) [Meschino *et al.*, 2013];
- Conjunto de datos *Wisconsin breast cancer* (32 características - 3 seleccionadas, 2 etiquetas, 569 vectores de características) [Ghazavi y Liao, 2008];
- Conjunto de datos *Pima Indians diabetes* (8 características - 3 seleccionadas, 2 etiquetas, 768 vectores de características) [Ghazavi y Liao, 2008];
- Conjunto de datos *Seeds* (7 características, 3 etiquetas, 210 vectores de características) [Charytanowicz *et al.*, 2010];
- Conjunto de datos *Banknote* (5 características - 2 seleccionadas, 2 etiquetas, 1372 vectores de características) [Bache y Lichman, 2013].

Para los conjuntos de datos *Wisconsin breast cancer* y *Pima Indians diabetes*, se seleccionaron las características sugeridas en [Meschino *et al.*, 2015a]. En el caso del conjunto de datos *Banknote* se utilizaron sólo las primeras dos características, las cuales fueron previamente seleccionadas utilizando *full-search-selection* [Duda *et al.*, 2001].

Los resultados se presentan en las Secciones siguientes, mostrando separadamente los obtenidos con los métodos de clasificación, aquéllos resultantes de los métodos de *clustering* y finalmente los de las pruebas de robustez frente al ruido. Se especifican también parámetros de los métodos utilizados, así como las consideraciones específicas de los métodos de validación empleados en cada caso.

6.3.1 Resultados de los métodos de clasificación

Dado el pequeño tamaño de los conjuntos de datos analizados, respecto por ejemplo a los conjuntos de prueba #1 y #2, se utilizó *K-fold cross validation* (con 10 *folds*) [Duda *et al.*, 2001] como método de validación, estimando el coeficiente de exactitud global (el promedio para todas las etiquetas). En estas pruebas no se incluyeron datos afectados por ruido. Se consideraron los métodos T2-LFPC, su análogo T1-LFPC, PNNs, MLPs y *kNN*; con los siguientes parámetros:

- **T2-LFPC:** Se utilizaron diferentes valores para el parámetro M de acuerdo al tamaño de cada conjunto de datos; a mayor cantidad de datos, mayor el valor M considerado. Los valores óptimos hallados se presentarán en cada caso en el análisis que sigue. Se consideraron operadores difusos MIN-MAX, de la LDCMG y de la LDCMA (todos presentados en el Capítulo 4). Para realizar la consulta de los sistemas difusos se utilizaron las medidas #1 y #2 propuestas en el Capítulo 5.
- **T1-LFPC:** Con los mismos parámetros que el método T2-LFPC, se consideró adicionalmente un valor de $M = 1$.
- **PNN:** Se consideraron tres diferentes redes, notadas PNN #1, PNN #2 y PNN #3, obtenidas a partir del ajuste del parámetro de difusión (*spread*) en 0,1; 0,15 y 0,2, respectivamente.
- **MLP:** Se utilizaron tres configuraciones de redes neuronales multicapa *feed-forward*, siguiendo el enfoque explicado en la Sección 3.3.2.1 y las consideraciones ya presentadas para las IRM de los conjuntos de prueba #1 y #2. Respecto a la arquitectura de las capas ocultas, las redes MLP #1, MLP #2 y MLP #3 tuvieron respectivamente 3, 4 y 5 capas ocultas con cantidades de neuronas: (10, 5, 3), (15, 10, 5, 3) y (15, 20, 10, 5, 3).
- **kNN:** Se consideraron 1, 3 y 5 vecinos más próximos, utilizando distancia euclidiana.

En la Figura 6.22 se presentan gráficos de caja con los coeficientes de exactitud obtenidos para los diferentes métodos de clasificación y para cada uno de los conjuntos de datos. Se muestran los resultados de los casos óptimos para las técnicas de clasificación tradicionales. Para los métodos basados en LD se presentan los resultados considerando las diferentes combinaciones de operadores lógicos para el valor óptimo (en términos de menor error) del tamaño de la partición aleatoria (M), y para el T2-LFPC también los resultados de las medidas de intervalos de valores de verdad #1 y #2. Con una línea punteada en color gris, se muestra el valor de mediana del coeficiente de exactitud para el mejor resultado del método T2-LFPC. En lo que sigue se analizarán los resultados para cada conjunto de datos.

Para el conjunto de datos *Wine* (Figura 5.22a) se observa muy buena performance del método T2-LFPC en la medida #1 respecto al resto de los métodos. Para esta medida, los gráficos de caja muestran una buena estabilidad del método para los operadores MIN-MAX y LDCMA, con menor cantidad de *outliers* que el método T1-LFPC. Debe notarse que este último alcanza su mejor performance con menor varianza en sus resultados para los operadores de la LDCMG. A nivel de medianas, los métodos T1-LFPC y T2-LFPC son alcanzados por kNN y PNN, presentando este último mayor varianza en los resultados. En cuanto a valores promedios, se alcanza una exactitud

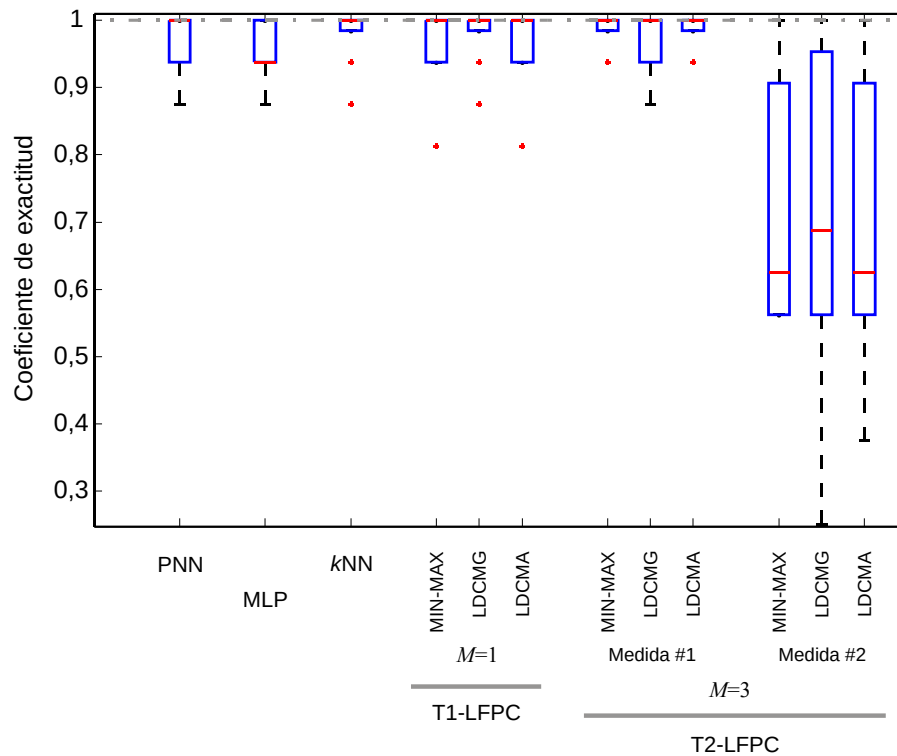
promedio de 0,969 (para $M = 3$, medida #1 y operadores MIN-MAX), sólo superadas en 0,864% y 0,565% por T1-LFPC y kNN respectivamente, pero con un valor de P muy próximo a 1, lo que indica que estas diferencias en exactitud no son estadísticamente significativas.

Los resultados obtenidos para el conjunto *Iris* (Figura 5.22b) muestran una mayor exactitud del método T2-LFPC frente al T1-LFPC en los casos de la medida #1 y operadores de la LDCMG, y de la medida #2 y operadores de la MIN-MAX, siempre con $M = 3$. La máxima del método T2-LFPC es de 0,953, sólo alcanzada por el clasificador PNN, pero con un P muy cercano a 1, lo cual indica que no existen diferencias estadísticamente significativas entre los resultados de ambos métodos. Asimismo, T2-LFPC supera al mejor resultado del método T1-LFPC en 1,418% en sus valores promedio, con un P menor a 0,01.

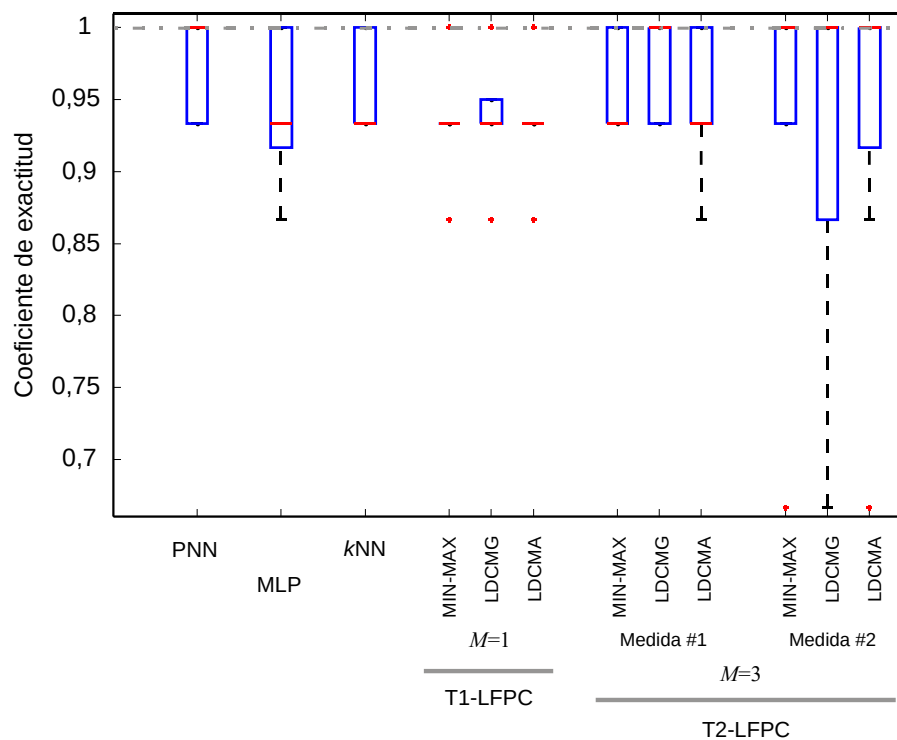
Para el conjunto de datos *Wisconsin breast cancer* (Figura 5.22c), se visualiza una mayor estabilidad de la medida #1 frente a la #2. El método T2-LFPC supera al T1-LFPC, pero ambos son mejorados por las técnicas tradicionales. Los tests estadísticos indican que PNN supera a T2-LFPC en 2,216% ($P = 0,039$); MLP lo supera en 2,397% ($P = 0,031$) y kNN en 2,958% con $P = 0,006$ siempre considerando valores promedio. En el mismo sentido, T2-LFPC supera a T1-LFPC en 4,663% con $P = 0,018$.

Para *Pima Indians diabetes* (Figura 5.22d) se observa una gran variabilidad en las estimaciones del coeficiente de exactitud para los distintos *folds* en todos los métodos. Esto indica una gran complejidad de este problema de clasificación en relación con los métodos probados. Se observan mejores resultados para la medida #1 que para la #2, con resultados comparables gráficamente con los demás métodos. A nivel de valores promedio, las diferencias observadas respecto a los métodos PNN, MLP y kNN no son estadísticamente significativas. Sin embargo, en cuanto a la varianza en la estimación del promedio, el valor obtenido para T2-LFPC es inferior al del resto de los métodos. No hay diferencia significativa entre la performance del T2-LFPC y el T1-LFPC para este caso.

En el caso de *Seeds*, los gráficos de la Figura 5.22e muestran mejores resultados para el T2-LFPC con la medida #1 que con la #2, los cuales a su vez superan a los resultados del T1-LFPC si se compara operador lógico a operador lógico. A nivel de valores mediana, los resultados coinciden prácticamente entre los distintos métodos. El MLP se presenta como el método con menor variabilidad entre las distintas estimaciones del coeficiente de exactitud, aunque tiene un *outlier*, y en ese sentido le sigue el método propuesto para la medida #1. Las diferencias entre T2-LFPC y las técnicas tradicionales no son estadísticamente significativas, pero sí respecto al T1-LFPC con 1,020% de diferencia en el valor promedio y $P = 0,003$.



a)



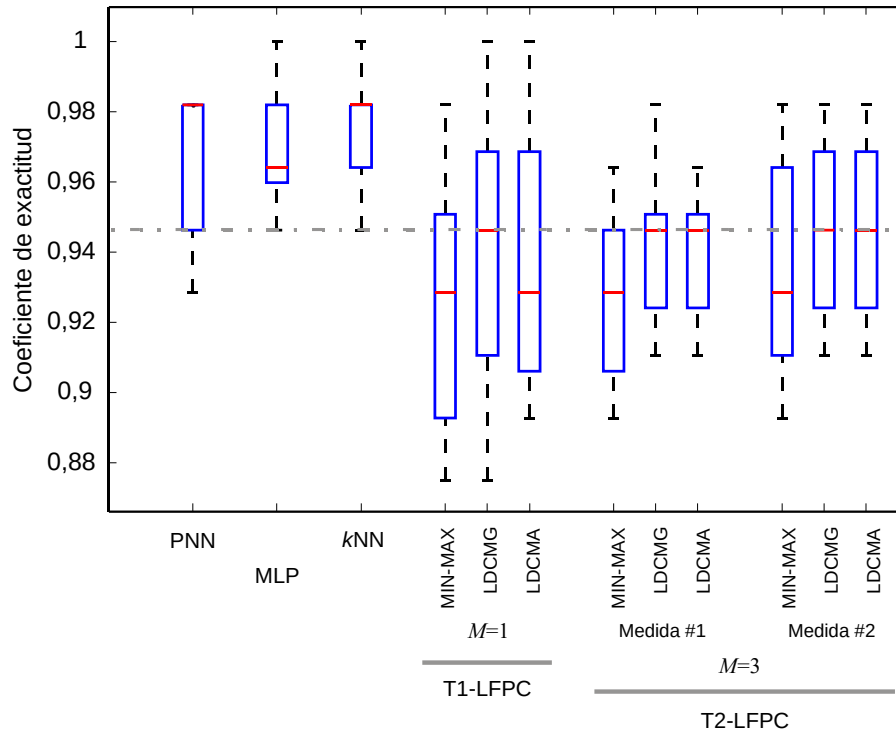
b)

Figura 6.22. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de clasificación, considerando datos sin ruido.

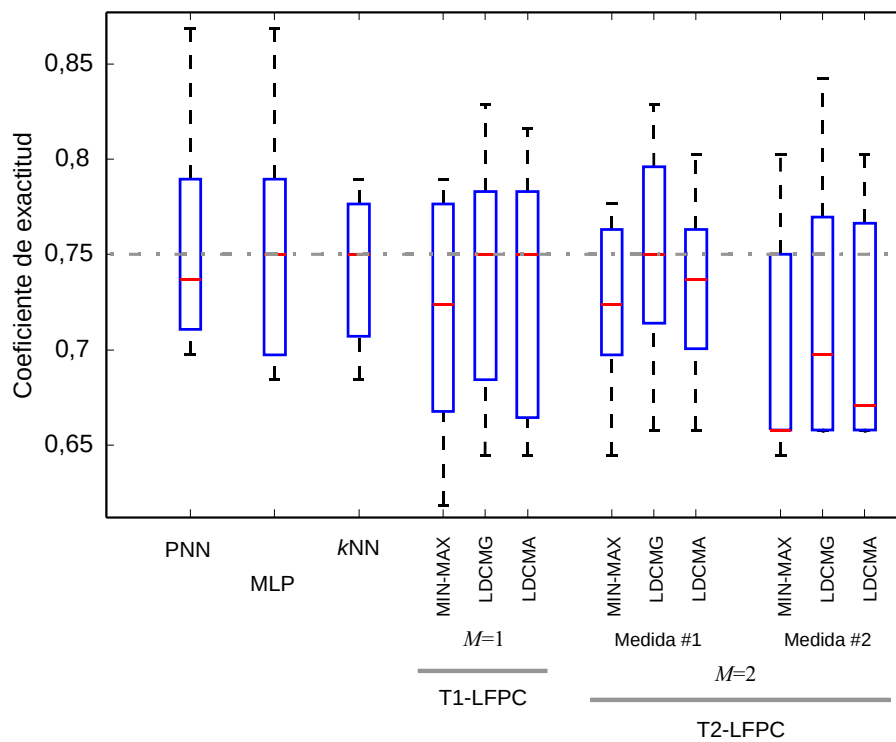
a) Conjunto de datos *Wine*. **b)** Conjunto de datos *Iris*.

Se muestran los casos de parámetros óptimos para las técnicas tradicionales PNN, MLP y *kNN*. Para los métodos T1-LFPC y T2-LFPC se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria M del caso óptimo de cada método, para diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad.

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Medida #1 y Medida #2:** medidas de intervalos de valores de verdad.



c)



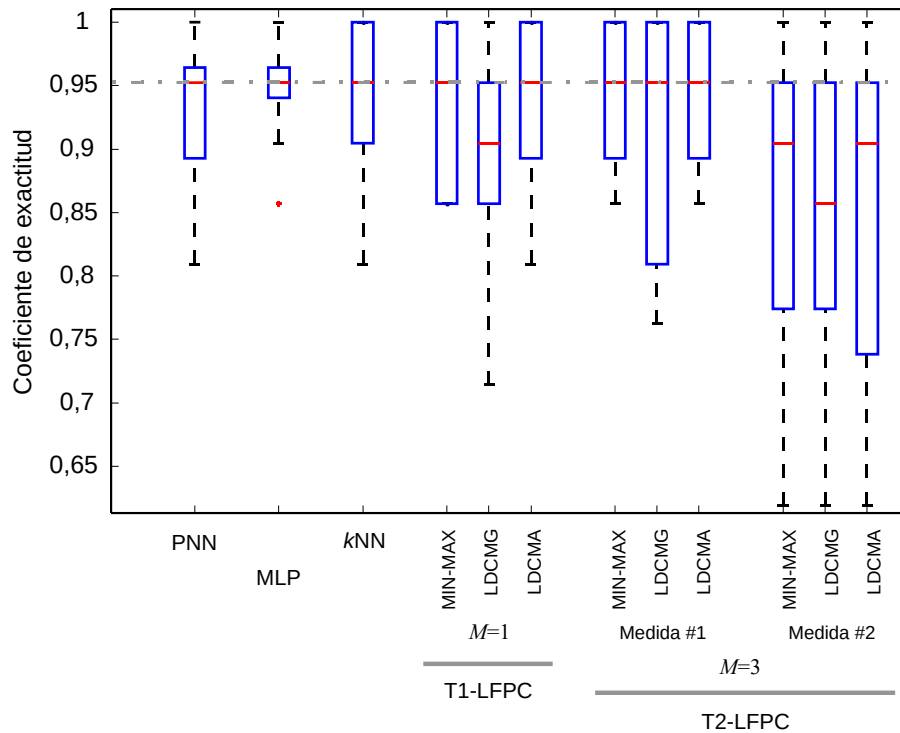
d)

Figura 6.22 (Continuación). Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de clasificación, considerando datos sin ruido.

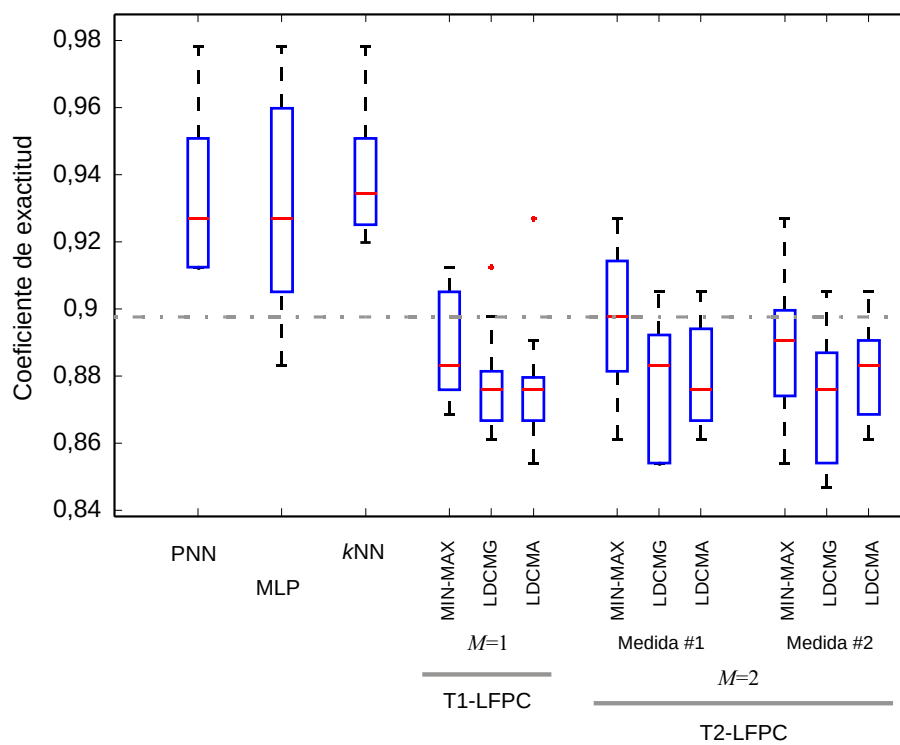
c) Conjunto de datos *Wisconsin breast cancer*. **d)** Conjunto de datos *Pima Indians diabetes*.

Se muestran los casos de parámetros óptimos para las técnicas tradicionales PNN, MLP y kNN. Para los métodos T1-LFPC y T2-LFPC se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria M del caso óptimo de cada método, para diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad.

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Medida #1 y Medida #2:** medidas de intervalos de valores de verdad.



e)



f)

Figura 6.22 (Continuación). Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de clasificación, considerando datos sin ruido.

e) Conjunto de datos *Seeds*. **f)** Conjunto de datos *Banknote*.

Se muestran los casos de parámetros óptimos para las técnicas tradicionales PNN, MLP y *kNN*. Para los métodos T1-LFPC y T2-LFPC se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria M del caso óptimo de cada método, para diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad.

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Medida #1 y Medida #2:** medidas de intervalos de valores de verdad.

Finalmente, para el conjunto *Banknote* (Figura 5.22f) las técnicas tradicionales superan a los métodos propuestos, con diferencias estadísticamente significativas mayores de 4% en los valores promedio. También, visualmente, se observa una mejor performance del método T2-LFPC frente al T1-LFPC. Para la mejor combinación de parámetros de ambos métodos, la diferencia es de 1,835% en el valor de exactitud promedio con $P = 0,045$.

6.3.2 Resultados de los métodos de *clustering*

Se compararon los métodos propuestos en esta Tesis para la generación automática de sistemas difusos para agrupamiento de datos (T2-DFPC y T2-SFPC) con otros métodos de *clustering*, incluyendo los métodos análogos con LD tipo 1 (T1-DFPC y T1-SFPC) presentados en la Sección 5.3.7, y otras técnicas tradicionales de *clustering*. Los métodos y parámetros considerados se detallan a continuación:

- **T2-DFPC:** Se utilizaron diferentes valores para el parámetro M de acuerdo a la cantidad de datos en cada conjunto. Los valores óptimos hallados se presentarán en cada caso. Los predicados difusos se evaluaron mediante operadores difusos MIN-MAX, de la LDCMG y de la LDCMA (todos presentados en el Capítulo 4) en combinación con las medidas de intervalos de valores de verdad #1 y #2.
- **T2-SFPC:** Se consideraron los mismos parámetros que para el T2-DFPC.
- **T1-DFPC:** Se tomaron los mismos tamaños de partición aleatoria que para los métodos T2-DFPC y T2-SFPC y, además, el valor $M = 1$. Se consideraron operadores difusos MIN-MAX y los operadores de la LDCMG y de la LDCMA.
- **T1-SFPC:** Se configuró con los mismos parámetros que para el método T1-DFPC.
- ***K-means*** [Jain *et al.*, 1999]: Fue utilizado en combinación con el BIC para la determinación automática del número de *clusters* K , siguiendo el método descrito en la Sección 3.2.5 y considerando distancia euclidiana.
- **FCM** [Ruspini, 1969]: Se utilizó este algoritmo en combinación con el BIC, siguiendo el método descrito en la Sección 3.2.5, aplicado al conjunto de datos con inicialización aleatoria de los centroides y distancia euclidiana.
- **SOM:** Un SOM entrenado con el conjunto de datos y combinado con el algoritmo FCM en un esquema de *clustering* de dos niveles [Meschino *et al.*, 2015a], tal como se explicó en la Sección 3.2.3, donde el FCM se aplicó al *codebook* del SOM. El SOM

fue automáticamente ajustado siguiendo el mismo criterio que en la Etapa B del método T2-SFPC.

- **EM**, *Expectation-Maximization* [Bishop, 2006b]: Corresponde al algoritmo presentado en la Sección 3.2.4, ajustando el número de *clusters* K de acuerdo al número de etiquetas de cada conjunto de datos.

Se incluyeron modificaciones de los métodos de generación de sistemas difusos propuestos, en los que no se usa FCM y BIC para la extracción de los prototipos de *clusters*, sino que este esquema se reemplazó por un simple algoritmo FCM, fijando el número de *clusters* a obtener según el número de etiquetas en cada conjunto de datos. Con el fin de identificar claramente estas variaciones de los métodos propuestos, respecto de los originales, estas modificaciones serán nombradas con el sufijo “sca” resultando en los métodos: T2-DFPC-sca, T2-SFPC-sca, T1-DFPC-sca y T1-SFPC-sca.

Para evaluar los métodos de *clustering* se utilizó el coeficiente de exactitud global (el promedio para todas las etiquetas) al disponer en todos los casos de *Gold-Standard*. Antes del cálculo de la exactitud en el agrupamiento, cada *cluster* descubierto es asignado a una y sólo una etiqueta del conjunto de datos, considerando el mapeo entre *clusters* y etiquetas que tenga menor error [Manning *et al.*, 2008; Meschino *et al.*, 2015a]. Con el fin de independizarse de la inicialización aleatoria de los algoritmos de *clustering*, cada algoritmo se ejecutó 20 veces reportando la secuencia de valores obtenidos y los valores promedios.

En la Figura 6.23 se presentan gráficos de caja con los coeficientes de exactitud obtenidos para cada conjunto de datos. Para los métodos basados en LD se muestran los resultados considerando las diferentes combinaciones de operadores lógicos para el valor óptimo, en términos de menor error, del tamaño de la partición aleatoria (M) y, para los métodos que utilizan LD tipo 2 de intervalos, se muestran también los resultados para las medidas de intervalos de valores de verdad #1 y #2. Con una línea punteada en color gris se muestra el valor de mediana del coeficiente de exactitud para el mejor resultado entre los métodos basados en LD tipo 2 de intervalos. En lo que sigue se analizarán los resultados para cada conjunto de datos.

Para el conjunto de datos *Wine* (Figura 5.23a) se observa una gran estabilidad en los valores de exactitud obtenidos para los métodos basados en LD tipo 1. Sin embargo, éstos son superados por los métodos basados en LD tipo 2 de intervalos, principalmente las variantes sin *clustering* automático (con sufijo “sca”). En términos del tamaño resultante de los gráficos de caja, el método propuesto con mayor varianza es el T2-SFPC, en tanto que EM no obtuvo buenos resultados. En valores promedio, el mejor resultado corresponde al método T2-SFPC-sca, sólo superado por el T1-SFPC-sca en 1,293% ($P < 0,001$). El mejor resultado obtenido para las técnicas de *clustering* tradicionales fue de 0,949 para FCM, un 1,627% menor que el mejor resultado de las técnicas

basadas en LD tipo 2 de intervalos con $P < 0,001$. El mejor resultado entre los métodos propuestos sin modificaciones, es decir, con *clustering* automático; fue para el T2-DFPC con un valor promedio un 0,762% menor que el T2-SFPC-sca ($P = 0,003$).

En el caso del conjunto de datos *Iris* (Figura 5.23b) los gráficos de caja muestran una variabilidad similar en los valores obtenidos para los métodos propuestos, a excepción del T1-SFPC-sca con una muy pequeña variabilidad en las diferentes iteraciones. Para este conjunto, las técnicas tradicionales presentan una variabilidad mayor que los métodos propuestos. El mejor resultado para los métodos basados en LD tipo 2 de intervalos corresponde a T2-SFPC para $M = 3$, LDCMA y la medida #2. Respecto a las técnicas tradicionales, este método mejora en un 15,539% respecto a EM, 5,464% respecto a FCM, 7,229% respecto a *K-means* y 2,771% respecto a SOM, en todos los casos $P < 0,001$ indicando que estas diferencias son estadísticamente significativas. Respecto al mejor resultado con LD tipo 1, se obtuvo una mejora del 2,435% ($P < 0,001$).

Para el conjunto de datos *Wisconsin breast cancer* (Figura 5.23c), se observan mejores resultados para los métodos propuestos respecto a las técnicas tradicionales. El mejor resultado corresponde a T2-SFPC-sca con 0,962 de exactitud promedio, con una diferencia de 1,192% respecto a EM, 0,634% respecto a FCM, 3,458% respecto a *K-means* y 0,449% respecto a SOM; en todos los casos con $P < 0,001$. La menor diferencia con los métodos propuestos sin modificaciones (con *clustering* automático) fue de 1,285% sobre el T2-SFPC con $P < 0,001$.

Para *Pima Indians diabetes* (Figura 5.23d) los mejores resultados se obtuvieron para T2-SFPC y T1-SFPC, en ambos casos con LDCMG, específicamente el mejor resultado fue para T2-SFPC con 0,720 de exactitud global promedio, sin diferencia estadísticamente significativa respecto a T1-SFPC. Es importante notar que, en este caso, los métodos con *clustering* automático superan a las variantes sin éste, obteniendo una diferencia de 1,579% ($P = 0,050$) con el mejor resultado para estas variantes, que corresponde a T2-SFPC-sca. Respecto a las técnicas tradicionales, se obtuvieron diferencias de 7,335% respecto a EM, 2,587% respecto a FCM, 0,903% respecto a *K-means* y 0,746% respecto a SOM, con $P < 0,001$ salvo en el caso del SOM, donde P fue de 0,244.

En el caso de *Seeds*, en los gráficos de la Figura 5.23e se observan resultados estables para los métodos propuestos, obteniendo los mejores resultados con T2-DFPC; con $M = 3$, operadores MIN-MAX y la medida #2. El mejor resultado para LD tipo 1 fue para el método T1-SFPC, con 0,336% menos de exactitud que T2-DFPC ($P = 0,006$). Se aprecian mejoras importantes respecto a las performances de las técnicas tradicionales. Específicamente: diferencias de 14,348% respecto a EM, 2,460% respecto a FCM, 3,722% respecto a *K-means* y 3,005% respecto a SOM, en todos los casos con $P < 0,001$. Las variantes sin *clustering* automático fueron superadas por el T2-DFPC.

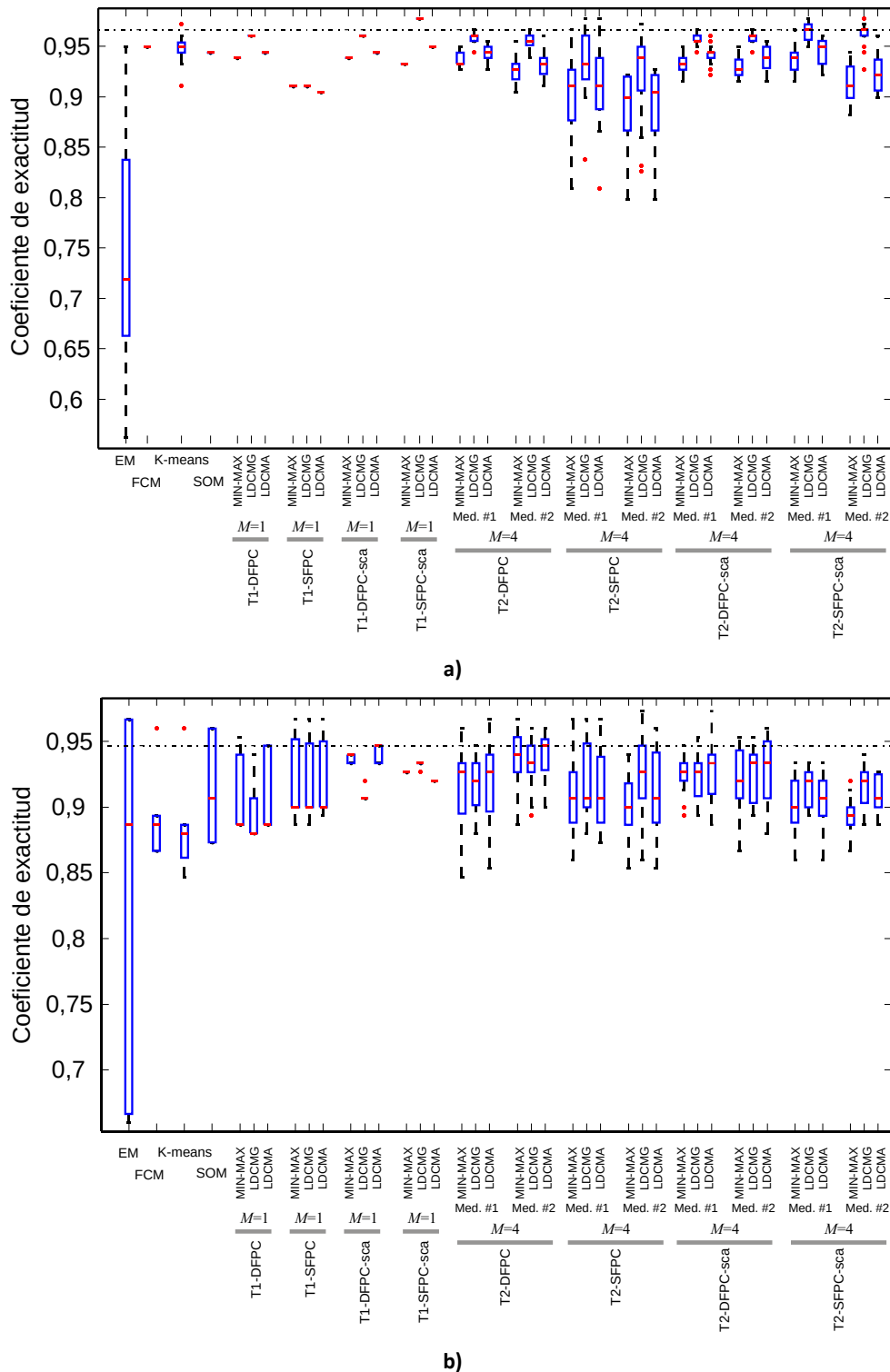


Figura 6.23. Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de *clustering*, considerando datos sin ruido.

a) Conjunto de datos *Wine*. **b)** Conjunto de datos *Iris*.

Para los métodos T1-DFFPC, T1-SFPC, T2-DFFPC y T2-SFPC, y sus versiones sin *clustering* automático (sca) se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria M del caso óptimo de cada método y para ese caso los resultados con diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad.

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Med. #1 y Med. #2:** corresponden a las medidas de intervalos de valores de verdad.



c) Conjunto de datos *Wisconsin breast cancer*. **d)** Conjunto de datos *Pima Indians diabetes*.

Para los métodos T1-DFPC, T1-SFPC, T2-DFPC y T2-SFPC, y sus versiones sin *clustering* automático (sca) se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria M del caso óptimo de cada método y para eso caso los resultados con diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad.

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Med. #1 y Med. #2:** corresponden a las medidas de intervalos de valores de verdad.

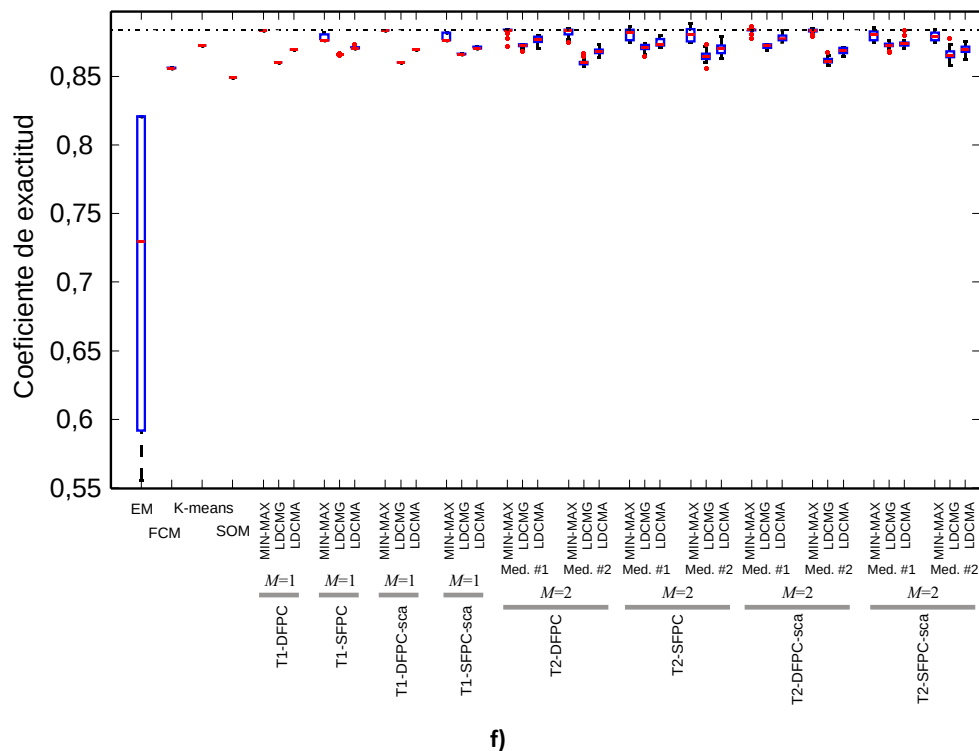
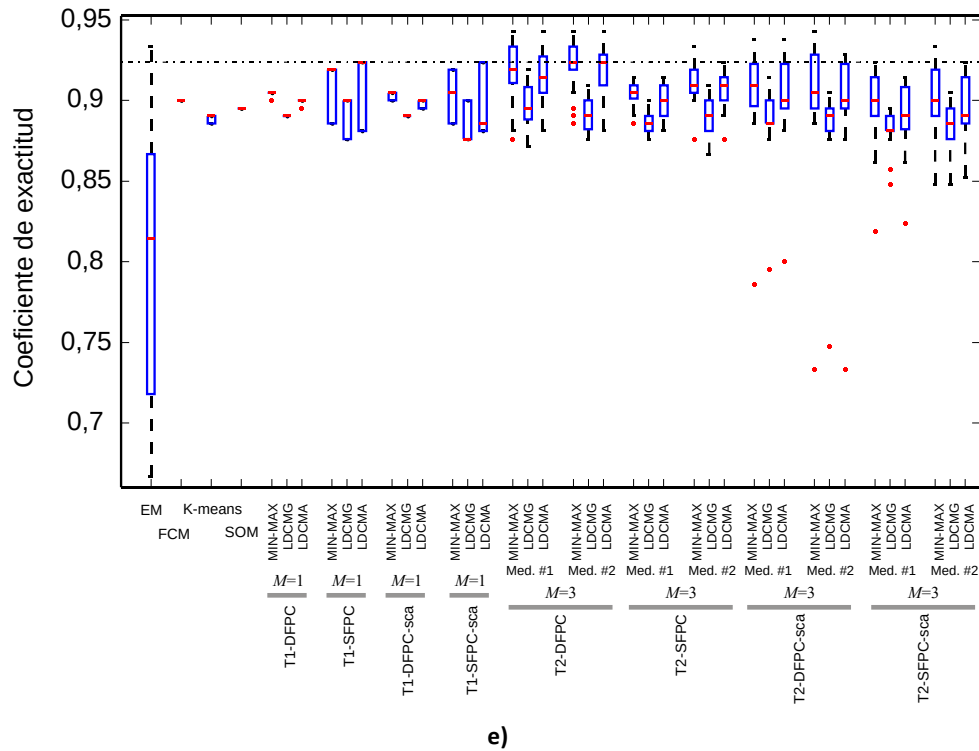


Figura 6.23 (Continuación). Gráficos de caja de los coeficientes de exactitud obtenidos para las bases de datos generales con los métodos de *clustering*, considerando datos sin ruido.

e) Conjunto de datos *Seeds*. f) Conjunto de datos *Banknote*.

Para los métodos T1-DFPC, T1-SFPC, T2-DFPC y T2-SFPC, y sus versiones sin *clustering* automático (sca) se muestran los resultados para los valores de tamaño de partición aleatoria M del caso óptimo de cada método y para ese caso los resultados con diferentes operadores lógicos y medidas de intervalos de valores de verdad.

MIN-MAX: Operadores de las normas triangulares estándar; **LDCMG:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Geométrica; **LDCMA:** operadores de la Lógica Difusa Compensatoria basada en la Media Aritmética. **Med. #1 y Med. #2:** corresponden a las medidas de intervalos de valores de verdad.

En el caso del último conjunto de datos analizado, el *Banknote*, cuyos resultados se muestran en la Figura 5.23f, se observa muy alta estabilidad de las técnicas de *clustering* a excepción del algoritmo EM. El mejor resultado correspondió a T2-DFPC-sca; con $M = 2$, operadores MIN-MAX y la medida #1. Respecto al mejor resultado de las técnicas propuestas, que correspondieron al T2-DFPC, la diferencia fue de 0,107% ($P = 0,024$). El mejor resultado para LD tipo 1 fue para el método T1-DFPC-sca, con un 0,020% menos de exactitud que el T2-DFPC-sca. Las diferencias de T2-DFPC-sca respecto a las técnicas tradicionales fueron: 27,417% respecto a EM, 3,231% respecto a FCM, 1,274% respecto a *K-means* y 4,055% respecto a SOM, en todos los casos con $P < 0,001$.

6.3.3 Robustez frente al ruido de la LD tipo 2 de intervalos versus la LD tipo 1

Los seis conjuntos de datos analizados en las Secciones anteriores también fueron utilizados para el análisis de la robustez frente al ruido de los sistemas propuestos. Al igual que las pruebas analizadas en la Sección 6.2.2.3 donde se utilizaron IRM de cerebro provenientes de simulaciones, para cada conjunto de datos se generaron sistemas difusos a través de los métodos propuestos T2-LFPC y T1-LFPC considerando datos sin ruido (los datos tal como están disponibles en las bases de datos descargadas). Una vez generados, ambos sistemas difusos fueron utilizados para etiquetar datos con ruido agregado.

Como se explicó en la Sección 6.2.2.3, como los sistemas difusos son generados a partir de datos no afectados por ruido, la incertidumbre generada por el ruido sólo es aplicada en la etapa de consulta, permitiendo analizar la capacidad de las funciones de pertenencia y el enfoque basado en predicados para la minimización de los efectos de ruido en la asignación de etiquetas; comparando ambos tipos de LD. En este aspecto, estas pruebas son complementarias a las de la Sección 6.2.2.3, brindando un marco de análisis más amplio.

Al igual que el enfoque utilizado para el conjunto de prueba #2, se consideraron vectores de características normalizadas entre -1 y +1, y se generaron datos afectados por ruido sumando vector a vector, en forma aleatoria, ruido gaussiano de media cero y un valor de desviación estándar creciente (σ_R). Se consideraron valores de $\sigma_R = 0; 0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1$.

El conjunto de datos fue particionado en 10 conjuntos disjuntos, cuidando que en cada uno haya la misma frecuencia de datos correspondientes a cada etiqueta del conjunto de datos inicial. Para cada nivel de ruido, se tomaron los vectores sin ruido agregado correspondientes a 9 de los 10 subconjuntos generados, como **conjunto de entrenamiento**. Se agregó ruido a los datos en el subconjunto restante, definiendo el **conjunto de test**. El proceso se repitió para todas las

combinaciones de 9 conjuntos sobre 10 totales, completando un total de 10 ciclos de generación/consulta de los sistemas difusos para cada nivel de ruido. Las medidas de validación reportadas corresponden entonces a promedios entre todos los ciclos, para cada nivel de ruido. Los valores de coeficiente de exactitud global (considerando todas las etiquetas) para los diferentes conjuntos de datos se presentan en la Figura 6.24.

Para facilitar el análisis, en la Tabla 6.15 se presenta una comparación de los resultados obtenidos para LD tipo 1 y LD tipo 2 de intervalos en los niveles de ruido $\sigma_R \in \{0,1\}$, para cada conjunto de datos. En cada caso se informa valor promedio para ambos tipos de LD, diferencia porcentual y valor del *test* estadístico de la comparación.

Tabla 6.15. Valores de exactitud obtenidos del análisis de robustez frente al ruido de la LD tipo 2 de intervalos versus la LD tipo 1.

Se presentan los valores de exactitud global (considerando todas las etiquetas) para cada tipo de LD y cada conjunto de datos, en los niveles de ruido $\sigma_R \in \{0,1\}$.

Se informa valor promedio para ambos tipos de LD, diferencia porcentual y valor del *test* estadístico de Wilcoxon en cada comparación.

LDT2: LD tipo 2 de intervalos; **LDT1:** LD tipo 1; **Prom.:** Valor de exactitud promedio; **Dif:** Diferencia porcentual entre el resultado de LD tipo 2 de intervalos y el de LD tipo 1; **P:** Resultado del *test* de Wilcoxon de la comparación.

	Nivel de ruido (σ_R)											
Conj. de datos	0						1					
	LDT2		LDT1		Dif.	P	LDT2		LDT1		Dif.	P
	Prom.	Disp.	Prom.	Disp.			Prom.	Disp.	Prom.	Disp.		
<i>Wine</i>	0,969	0,053	0,953	0,077	1,620	0,572	0,498	0,184	0,508	0,294	-1,883	0,888
<i>Iris</i>	0,947	0,053	0,953	0,071	-0,699	0,571	0,633	0,164	0,567	0,164	11,765	0,041
<i>Wisconsin breast cancer</i>	0,954	0,027	0,914	0,076	4,447	0,014	0,617	0,061	0,591	0,077	4,362	0,032
<i>Pima Indians diabetes</i>	0,729	0,056	0,757	0,066	-3,668	0,216	0,515	0,075	0,572	0,067	-9,852	0,139
<i>Seeds</i>	0,871	0,135	0,886	0,093	-1,613	1,000	0,457	0,219	0,462	0,219	-1,031	1,000
<i>Banknote</i>	0,890	0,046	0,891	0,048	-0,080	0,860	0,638	0,029	0,638	0,039	-0,114	1,000

Como puede observarse en la Tabla 6.15 para los conjuntos de datos *Iris* y *Wisconsin breast cancer* existen diferencias estadísticamente significativas en las exactitudes obtenidas para el nivel de ruido máximo ($\sigma_R = 1$) donde la LD tipo 2 de intervalos obtuvo mejores resultados que la LD tipo 1. Para las otras bases de datos, se obtuvieron diferencias a favor de la LD tipo 1, pero éstas no son estadísticamente significativas en virtud de los valores obtenidos del *test* estadístico. Gráficamente, analizando la Figura 6.24, se observa mejor desempeño de la LD tipo 2 de intervalos en las bases de datos *Wine*, *Iris* y *Wisconsin breast cancer*, para niveles de ruido superiores a 0,8, en tanto que no se observan diferencias significativas en *Seeds* y *Banknote*. En el caso de *Pima Indians diabetes*, se visualizan diferencias a favor de la LD tipo 1, pero éstas no son estadísticamente significativas.

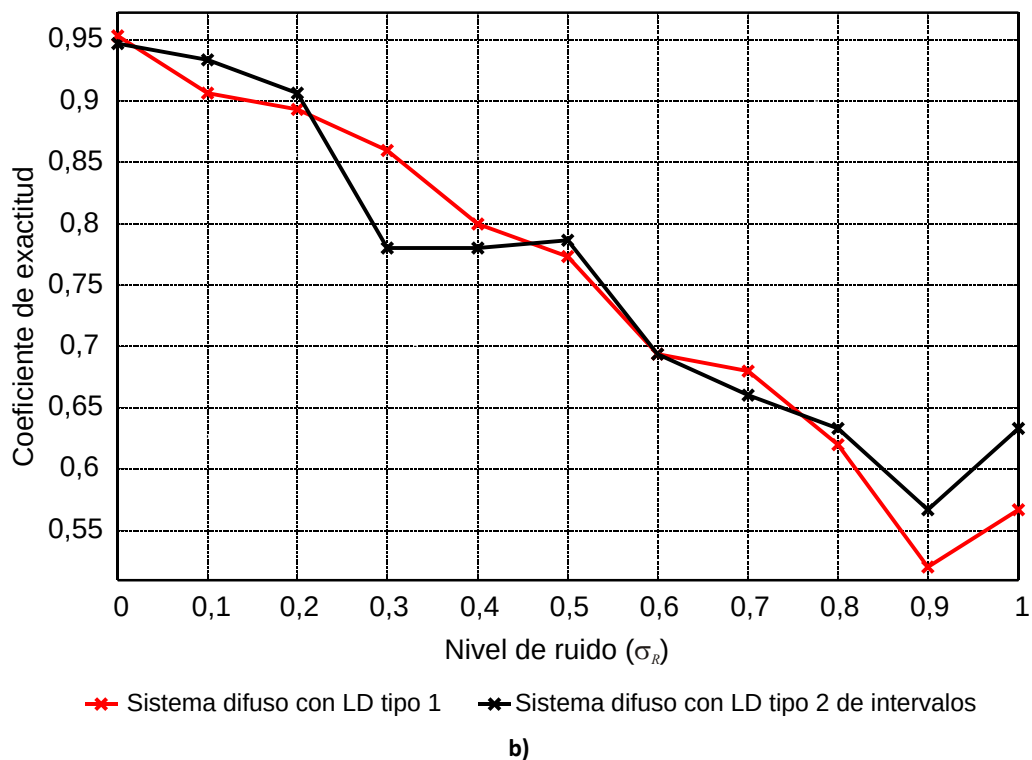
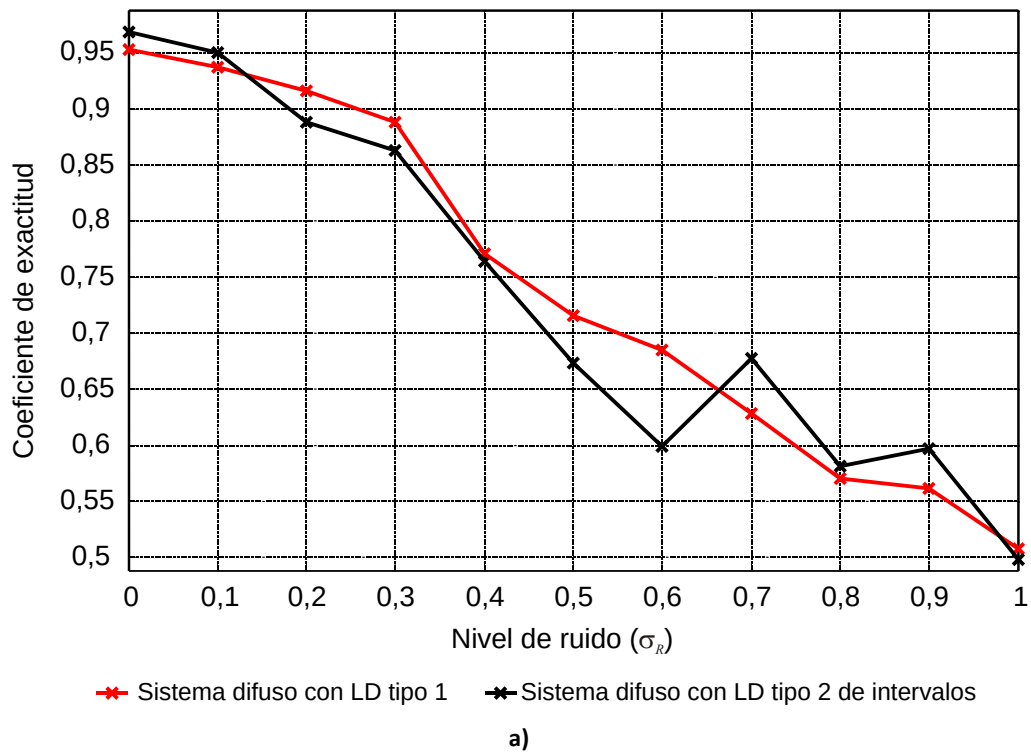
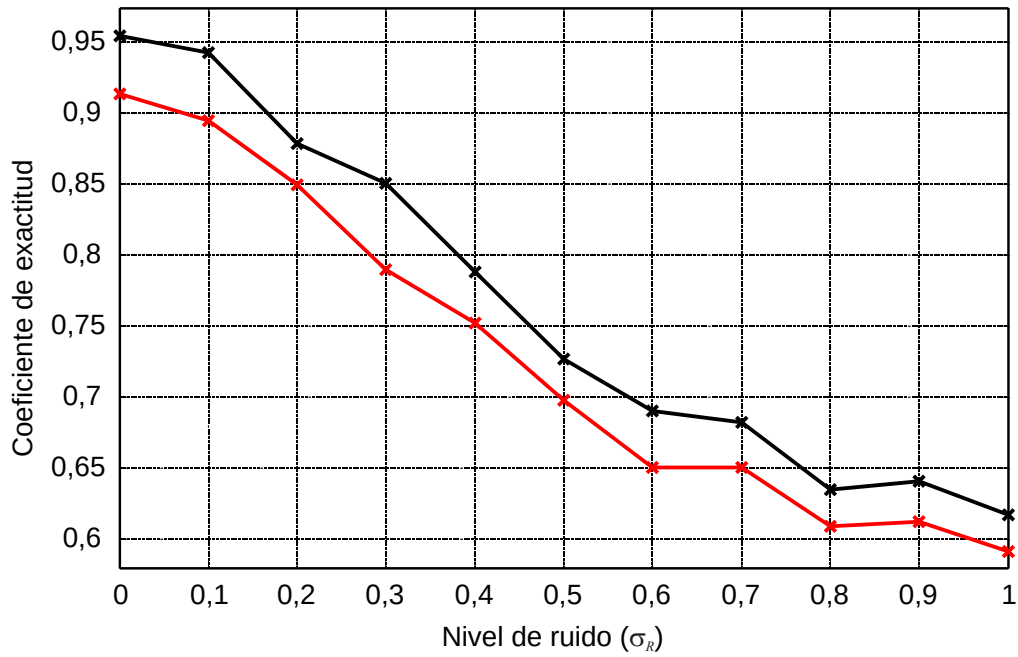


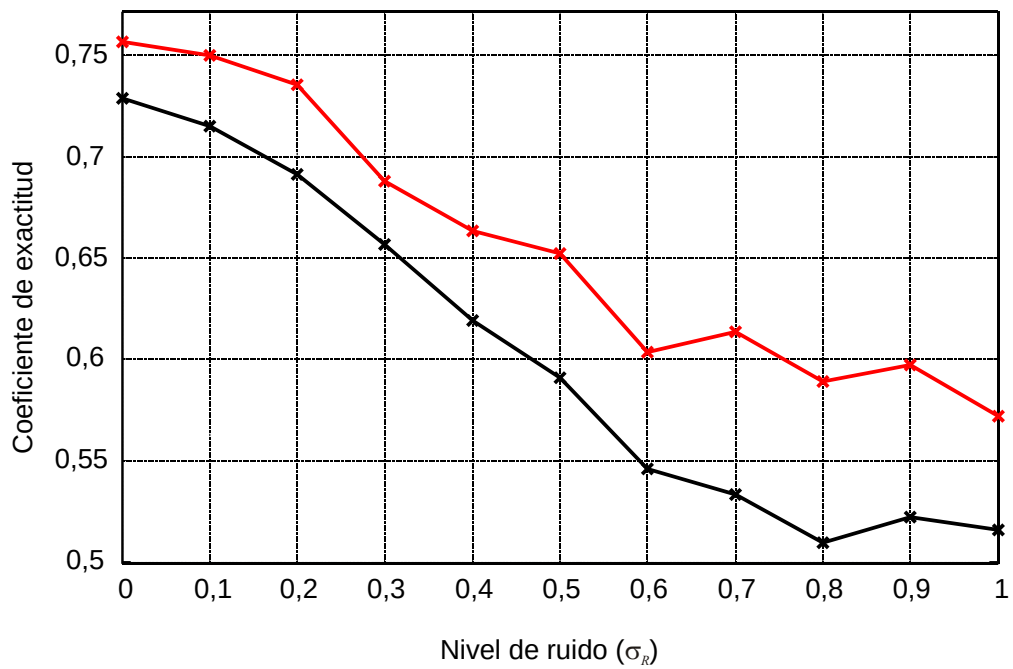
Figura 6.24. Exactitud promedio considerando datos con distintos niveles de ruido en la consulta de sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos.

a) Conjunto de datos *Wine*. b) Conjunto de datos *Iris*.



—*— Sistema difuso con LD tipo 1 —*— Sistema difuso con LD tipo 2 de intervalos

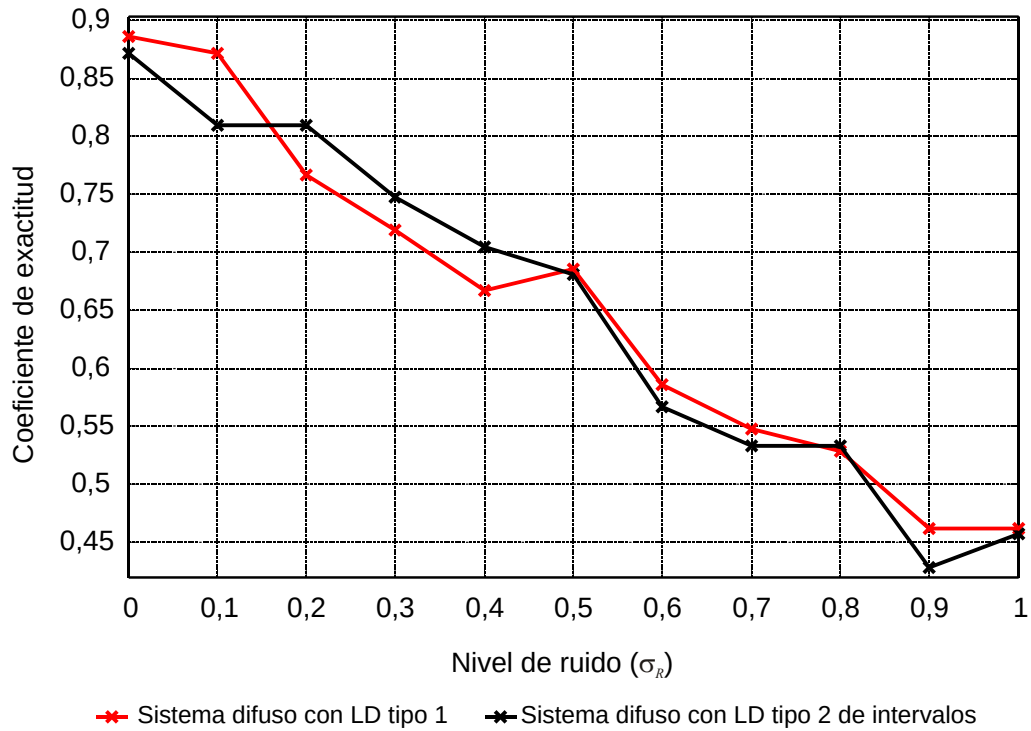
c)



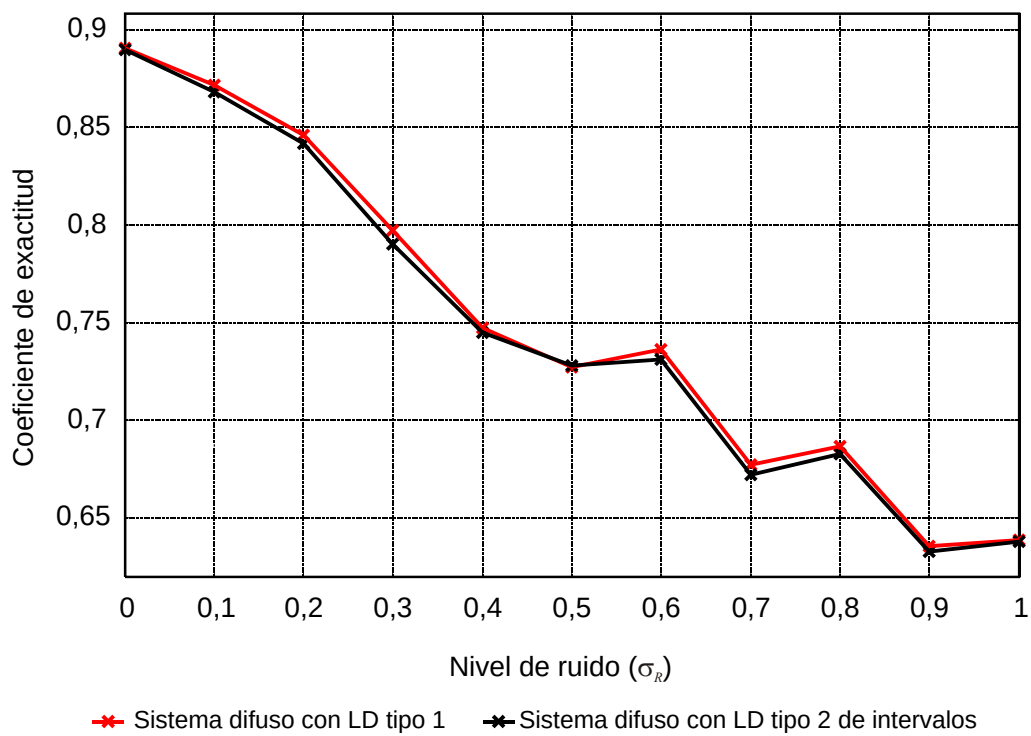
—*— Sistema difuso con LD tipo 1 —*— Sistema difuso con LD tipo 2 de intervalos

d)

Figura 6.24 (Continuación). Exactitud promedio considerando datos con distintos niveles de ruido en la consulta de sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos.
c) Conjunto de datos *Wisconsin breast cancer*. d) Conjunto de datos *Pima Indians diabetes*.



e)



f)

Figura 6.24 (Continuación). Exactitud promedio considerando datos con distintos niveles de ruido en la consulta de sistemas difusos generados automáticamente con los métodos propuestos.
e) Conjunto de datos *Seeds*. f) Conjunto de datos *Banknote*.

Estas pruebas de robustez frente al ruido indican que, para los conjuntos de datos considerados, la LD tipo 2 de intervalos tiene un comportamiento siempre similar o superior (más robusto) que la LD tipo 1. Las únicas diferencias estadísticamente significativas entre la performance de ambos tipos de LD, fueron para *Iris* y *Wisconsin breast cancer*, indicando una

mayor robustez de la LD tipo 2 de intervalos frente a la tipo 1. En los otros casos, no existieron diferencias estadísticamente significativas a favor de ninguna de las LD.

Estos resultados indican, en primer lugar, que existe una gran efectividad y consistencia del método propuesto para ordenar intervalos de valores de verdad usando la medida de intervalos de valores de verdad, cuyos resultados son consistentes con los de LD tipo 1 y se mantienen frente a grandes niveles de ruido. En segundo lugar, siendo las únicas diferencias estadísticamente significativas las obtenidas a favor de la LD tipo 2 de intervalos, puede concluirse que existe una capacidad potencialmente mayor de la LD tipo 2 de intervalos frente a la LD tipo 1 para el manejo y minimización de la incertidumbre asociada a la presencia de ruido; la cual se evidenció en los conjuntos de datos *Iris* y *Wisconsin breast cancer*. En los otros casos, los resultados no indican que la LD tipo 1 sea la más robusta, sino que ambos tipos de LD llegan a performances similares. **Esto último indica que la LD tipo 2 de intervalos siempre iguala o supera la performance de la LD tipo 1 al trabajar con datos inmersos en ruido.**

6.4. Observaciones finales

Los resultados de las pruebas desarrolladas sobre imágenes médicas (conjuntos de prueba #1 y #2) para los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos, indicaron una mejor performance de éstos frente a los métodos tradicionales.

En particular, para las IRM reales (conjunto de prueba #1) y ruido cero se observaron mejores resultados promedio para las técnicas de clasificación PNN, MLP y *k*NN, y también para el método T1-LFPC, frente a las obtenidas para el método basado en LD tipo 2 de intervalos (el T2-LFPC). Sin embargo, de acuerdo a los resultados de los *test* estadísticos realizados, estas diferencias no fueron significativas. La situación se revirtió al aumentar el nivel de ruido. Para el valor de ruido máximo considerado, el T2-LFPC superó en performance a todos los métodos considerados en la comparación (con diferencias estadísticamente significativas) e igualó al T1-LFPC.

Para las IRM provenientes de simulaciones (conjunto de prueba #2), para ruido nulo (0%), en los métodos de clasificación se observó una performance levemente superior de los métodos utilizados en la comparación con el método T2-LFPC, situación que se modificó para ruido máximo (9%), donde el método T2-LFPC superó a todos los métodos estudiados, a excepción del PNN. Para el mismo conjunto de imágenes, los métodos T2-DFPC y T2-SFPC igualaron prácticamente la performance de los otros métodos de *clustering* considerados para ruido 0%, superándolos en performance con diferencias significativas para el caso de ruido 9%.

Por lo tanto, con relación a los métodos automáticos propuestos para generar sistemas difusos, éstos tuvieron una mejor performance frente al ruido que los métodos tradicionales. En los

casos de los enfoques supervisados, existió una diferencia significativa en los tiempos promedios necesarios para el entrenamiento y evaluación de las técnicas tradicionales, frente al de los métodos propuestos T2-LFPC y T1-LFPC.

Las pruebas llevadas a cabo sobre conjuntos de datos de uso general, disponibles *online* en el repositorio *UCI Machine Learning Repository*, permitieron realizar un completo estudio de la aptitud de todos los métodos propuestos en esta Tesis, para su uso como técnicas generales de Reconocimiento de Patrones. Los resultados obtenidos indican una mejor performance de los métodos propuestos respecto de las técnicas tradicionales.

Las pruebas de robustez frente al ruido de la LD tipo 2 de intervalos versus la LD tipo 1, donde los datos afectados por ruido fueron utilizados solamente en la consulta de los sistemas difusos, permitieron evaluar y comparar directamente modelos basados en LD tipo 1 y LD tipo 2 de intervalos. En estos casos, la LD tipo 2 de intervalos siempre superó o igualó a la LD tipo 1 y, cuando se presentaron diferencias a favor de la LD tipo 2 de intervalos, éstas fueron estadísticamente significativas. Dado que no existen diferencias significativas entre los tiempos necesarios para la consulta de un sistema difuso que utilice LD tipo 2 de intervalos y un basado en LD tipo 1, la LD tipo 2 de intervalos evidencia una performance igual o superior a la de tipo 1, mostrándose como un enfoque apropiado para la segmentación de imágenes y el Reconocimiento de Patrones, al considerar datos con ruido.

Sumado a las observaciones anteriores, al comparar los resultados obtenidos para sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos y los basados en LD tipo 1, se observa una gran efectividad y consistencia del método propuesto para ordenar intervalos de valores de verdad; a partir del concepto también propuesto de medida de intervalo de valores de verdad; cuyos resultados son consistentes con los de la LD tipo 1, siempre igualándola o superándola, y esta consistencia se mantiene frente a grandes niveles de ruido.

La gran ventaja de los métodos propuestos frente a las técnicas tradicionales es que generan automáticamente sistemas difusos a partir de los cuales, como se explicó en la Sección 6.2.2.4, se presenta una potencial capacidad de interpretación y extracción de conocimiento; característica que puede resultar de suma importancia en el Diagnóstico por Imágenes y que no está disponible en forma directa en las técnicas tradicionales. Esta característica pasa a jugar un rol importante en la preferencia entre los métodos propuestos y las técnicas tradicionales, debido a que los resultados de las pruebas de performance indican que los métodos propuestos, especialmente los basados en LD tipo 2 de intervalos, igualan o superan las performances de los métodos tradicionales.

Capítulo 7: Conclusiones

Capítulo 7: Conclusiones

La segmentación de imágenes médicas constituye actualmente uno de los más importantes aportes al Diagnóstico Médico. La información obtenida de este proceso es utilizada para comparar volúmenes, morfologías y características de los tejidos detectados con estudios normales u otras regiones de la misma imagen, así como también, en la planificación de terapias de radiación y cirugías y en la detección de tejidos anormales.

Dada la complejidad de los problemas de segmentación de imágenes, especialmente de imágenes médicas, existe una necesidad continua de desarrollar nuevos métodos que optimicen el desempeño de los existentes.

En trabajos previos, se habían obtenido resultados satisfactorios con el uso de LD tipo 1 y predicados difusos. Por su capacidad para abordar problemas con imprecisión e incertidumbre, la LD tipo 2 de intervalos se presentaba como un interesante campo de estudio para el desarrollo de nuevos métodos de segmentación, que potencialmente brindaría mejores herramientas para la segmentación de imágenes médicas, en las cuales habitualmente se requieren opiniones de más de un especialista y, además, suelen poseer ruido.

La utilización de LD tipo 2 de intervalos y predicados difusos para la segmentación de imágenes mediante Reconocimiento de Patrones requería de una metodología formal completa que permitiera comparar intervalos de valores de verdad, la cual, hasta el momento del inicio de esta Tesis, no había sido desarrollada.

Sumado a esto, se planteaba la necesidad del desarrollo de métodos de generación automática de sistemas difusos a partir de datos, que habilitara el uso de éstos incluso cuando no se disponga de especialistas médicos que intervinieran en su desarrollo; con la potencial capacidad adicional de obtener desde ellos nuevo conocimiento médico respecto al tipo de imágenes estudiadas o al problema de segmentación.

Partiendo de estas necesidades y consideraciones, **en esta Tesis se cumplió con el objetivo principal planteado, proponiendo:**

- Una metodología formal completa para la extensión del uso de predicados difusos con LD tipo 2 de intervalos, a partir de la propuesta del concepto de **medida de intervalos de valores de verdad**, la cual habilita a la comparación de intervalos de valores de verdad, definiendo un orden entre éstos, según su mayor valor de verdad y permitiendo comparar y ordenar cualesquiera dos o más intervalos. Al presentar

este concepto y su metodología asociada en el Capítulo 5, se establecieron las condiciones necesarias que debe cumplir una metodología para ordenar intervalos de valores de verdad, definiendo y proponiendo funciones que permiten implementar tal metodología (funciones propuestas #1 a #3) y analizando formal y gráficamente sus propiedades.

- Un amplio conjunto de métodos de generación automática de sistemas difusos basados tanto en LD tipo 1 como LD tipo 2 de intervalos; utilizando tanto enfoques supervisados: *Type-1 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T1-LFPC) y *Type-2 Label-based Fuzzy Predicate Classification* (T2-LFPC); como no supervisados: *Type-1 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T1-DFPC), *Type-1 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T1-SFPC), *Type-2 Data-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-DFPC) y *Type-2 SOM-based Fuzzy Predicate Clustering* (T2-SFPC). Estos métodos, no sólo resuelven el problema de segmentación de imágenes, sino que potencialmente aportan conocimiento respecto a éste.
- Un método preliminar para la extracción de conocimiento a partir de los sistemas difusos generados mediante los métodos automáticos propuestos, el cual constituye una primera herramienta para el avance sobre técnicas específicas en el campo de descubrimiento de conocimiento en bases de datos (KDD).
- Un análisis formal de la performance de métodos basados en LD tipo 2 de intervalos, realizando comparaciones con modelos análogos con LD tipo 1, tendientes a analizar las ventajas de LD tipo 2 de intervalos debido a su mayor capacidad para el manejo de imprecisión e incertidumbre. En dichas pruebas se evaluaron todos los métodos propuestos en esta Tesis y otros métodos de Reconocimiento de Patrones comúnmente usados en segmentación de imágenes, incluyendo además análisis de robustez frente al ruido.

La totalidad de las pruebas de los métodos propuestos realizadas sobre imágenes médicas mostraron resultados satisfactorios en segmentación, similares o superiores de la performance de técnicas tradicionales. Este comportamiento también se reflejó en las pruebas realizadas sobre conjuntos de datos tradicionales.

A partir de los resultados y análisis efectuados, **puede arribarse a las siguientes conclusiones:**

- Los resultados obtenidos utilizando LD tipo 2 de intervalos fueron consistentes con los obtenidos con LD tipo 1, mejorando los resultados de esta última en la mayoría de los casos, siempre considerando enfoques basados en predicados. Esto indica

que existe una consistencia entre la metodología propuesta en esta Tesis para ordenar intervalos de valores de verdad (basada en el concepto propuesto de medida de intervalos de valores de verdad) en sistemas de LD basados en predicados, respecto a las metodologías previamente utilizadas con LD tipo 1 para Reconocimiento de Patrones con predicados difusos. Por lo tanto, el modelo de decisión resultante de esta metodología propuesta es consistente con los de las metodologías de LD tipo 1 previamente aceptadas. En este sentido, la metodología propuesta, que permite ordenar cualesquiera dos o más intervalos de valores de verdad según su mayor valor de verdad, y, en especial, **los conceptos propuestos de metodología para ordenar intervalos de valores de verdad y de medida de intervalos de valores de verdad representan un importante aporte en los campos de LD y Reconocimiento de Patrones.**

- **Los métodos de generación automática de sistemas difusos propuestos** constituyen herramientas generales que habilitan a generar sistemas difusos para Reconocimiento de Patrones, con enfoques tanto supervisados como no supervisados, los cuales permiten el agrupamiento o la clasificación de datos de cualquier naturaleza. En este sentido, estos métodos **constituyen un importante aporte en el campo de Reconocimiento de Patrones.**
- Las pruebas comparativas desarrolladas entre los métodos propuestos que utilizan LD tipo 2 de intervalos (T2-SFPC, T2-DFPC y T2-LFPC) y los que utilizan LD tipo 1 (T1-SFPC, T1-DFPC y T1-LFPC) permitieron observar que LD tipo 2 de intervalos iguala o supera la performance de la de tipo 1.
- Los resultados de la evaluación de robustez frente al ruido indican una mejor performance de los modelos basados en LD tipo 2 de intervalos respecto a sus análogos basados en LD tipo 1. Especialmente, las pruebas considerando ruido solamente en la etapa de consulta de los sistemas difusos indican una mejor aptitud de la LD tipo 2 de intervalos frente a la LD tipo 1 para el manejo y la minimización de los efectos de esta fuente de incertidumbre.
- En relación con el resto de las imprecisiones e incertidumbres presentes en el tipo de problemas estudiado en esta Tesis, relacionadas al modelado e interpretación de conceptos y atributos lingüísticos, los resultados muestran que la LD tipo 2 de intervalos también logra minimizar sus efectos.

A su vez, considerando todos los análisis efectuados durante el desarrollo de esta Tesis y los resultados obtenidos, puede concluirse que la LD tipo 2 de intervalos aplicada a la segmentación de imágenes mejora el desempeño de la LD tipo 1, considerando dos aspectos sumamente

importantes: las exactitudes obtenidas para los problemas estudiados y la mayor interpretabilidad de los sistemas difusos basados en LD tipo 2 de intervalos, lo que redunda en un potencial mayor para la extracción de conocimiento a partir de éstos. Este último aspecto resulta un aporte de gran relevancia de esta Tesis en el campo de Procesamiento de Imágenes Médicas, donde no siempre se cuenta con información de especialistas para el análisis de las imágenes o se dispone de ejemplos de la segmentación deseada (*Gold Standard*). Asimismo, el análisis de sistemas difusos automáticamente generados puede aportar conocimiento a los especialistas.

Dada la manera en que los sistemas difusos se generan automáticamente mediante los métodos propuestos, la totalidad de los parámetros de las funciones de pertenencia son conocidos y pueden ser ajustados. Esta característica habilita al uso de técnicas de optimización mediante Inteligencia Computacional, utilizando técnicas tales como Algoritmos Evolutivos, *Swarm Intelligence*, Algoritmos *Fireworks*, entre otros, lo que será estudiado en el futuro inmediato.

Como otro trabajo futuro, se plantea el avance y la profundización sobre métodos que permitan la extracción de conocimiento, utilizando los sistemas difusos generados por medio de enfoques basados en KDD. Tales desarrollos complementarán a los métodos propuestos en esta Tesis. Las técnicas a desarrollar brindarán conocimiento que permitirá explicar cómo fue resuelto el problema de segmentación; tanto en forma de descripciones lingüísticas expresadas en predicados como con el análisis del significado (la semántica) de los atributos descubiertos en los CDs y las formas de las funciones de pertenencia obtenidas. En este sentido, el conocimiento automáticamente descubierto a partir del sistema difuso aportaría nuevo conocimiento al experto médico respecto al tipo de imágenes estudiadas, o al problema de segmentación. Esto podría representar un aporte significativo al estudio y la solución de problemas con imágenes biomédicas, lo cual podría contribuir a la mejora y optimización de las técnicas de diagnóstico y detección de patologías a través de imágenes.

A su vez, dentro del avance previsto sobre técnicas que permitan la extracción de conocimiento a partir de sistemas difusos automáticamente generados, se plantea como un desarrollo futuro, el estudio de otras técnicas de *clustering* y otros tipos de SOM, específicamente el uso de otras topologías de SOM, en la búsqueda de obtener, a partir de éstos, una mejor descripción del espacio de características redundando en una mejora en la extracción de datos prototipos para la generación de los sistemas difusos.

Se espera con esta Tesis haber hecho un avance en el estado del arte, con consecuencias inmediatas y futuras en el área de procesamiento de datos en general y en el Procesamiento de Imágenes en particular, con especial énfasis en los datos que se relacionan directamente con la salud, para poder así constituir un aporte en la mejora de la calidad de vida que todos los seres humanos merecen.

Apéndice A: Librería desarrollada para Lógica Difusa

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Apéndice A: Librería desarrollada para Lógica Difusa

A.1. Introducción

Durante el estudio y avance sobre los temas abordados en la presente Tesis, se fueron desarrollando programas en lenguaje *MatLab*[®], con el fin de realizar pruebas sobre los distintos métodos que se fueron proponiendo. Se seleccionó este lenguaje por ser de uso común para los investigadores de las áreas de PDI y de Reconocimiento de Patrones y, además, porque el Laboratorio donde fue desarrollada esta Tesis tiene amplia experiencia en la implementación de programas e interfaces gráficas de usuario en *MatLab*[®], entre los que pueden mencionarse entre otros los trabajos previos propios y en colaboración [Bouchet *et al.*, 2013; Comas *et al.*, 2011a; Comas *et al.*, 2010]. Esto asegura la integración con otras herramientas de procesamiento desarrolladas. Además, se prevé en el futuro el desarrollo de una interfaz gráfica de usuario con todos los métodos propuestos en esta Tesis.

En la actualidad, el conjunto de programas que se fueron desarrollando conforman una librería de funciones, que cuenta con todos los métodos propuestos y otros más generales, que permite la generación de sistemas difusos tanto con LD tipo 2 de intervalos como con LD tipo 1, su consulta para asignar etiquetas a datos y la validación de los resultados obtenidos. Dicha librería fue llamada *Fuzzy 2 Toolbox*; y será subida a la *web* con el fin de que pueda ser utilizada libremente. Las funciones y características principales de la librería desarrollada se presentan en el resto de este Apéndice.

A.2. Descripción general

En esta Sección se describe en forma general el contenido de la librería *Fuzzy 2 Toolbox* que permite el uso y evaluación de la totalidad de los métodos propuestos en esta Tesis. La librería fue íntegramente implementada en *MatLab*[®], por lo que se incorporó documentación adicional y detallada de cada una de las funciones al archivo que contiene el código de programa y puede ser obtenida a través del sistema de documentación propio de esa plataforma.

Las funciones relacionadas a RNA (las referidas a los clasificadores MLP y PNN) utilizan funciones específicas de la librería de RNA de *MatLab*[®]. Las funciones relacionadas a SOM (referidas a los métodos T2-SFPC y T1-SFPC y los enfoques de *clustering* de dos niveles basados en

SOM) utilizan la librería *SOM Toolbox 2.0* [Vesanto *et al.*, 1999], que es de uso libre y está disponible en la web <http://www.cis.hut.fi/projects/somtoolbox/>. En la Tabla A.1, se describen las funciones implementadas y los métodos que implementan.

Tabla A.1. Funciones de la librería *Fuzzy 2 Toolbox*.

En secciones de ayuda dentro de los programas se incorporaron descripciones de los parámetros y detalles de implementación que pueden ser consultadas desde *MatLab*®.

#	Función	Descripción
1	Fuz2_Arreglo2Vector	Convierte una matriz o hipermatriz a un vector o una tabla de datos.
2	Fuz2_BIC	Permite obtener el BIC (el índice de criterio de información bayesiana) de un determinado <i>clustering</i> . Esta metodología supone que las distribuciones asociadas a los datos que generan la partición son gaussianas esféricas, es decir, con igual varianza para todas las características del espacio de datos.
3	Fuz2_BuscarDatos	Analiza un conjunto de datos buscando patrones repetidos. Devuelve las repeticiones y los patrones. Opcionalmente la ubicación de los mismos.
4	Fuz2_Clust_Aut	Realiza un <i>clustering</i> automático de un conjunto de datos, analizando diferentes cantidades de grupos y seleccionando la óptima de acuerdo al BIC. Esta metodología supone que las distribuciones asociados a los datos que generan la partición son gaussianas esféricas, es decir, con igual varianza para todas las características del espacio de datos.
5	Fuz2_Clust_Opt	Encuentra el <i>clustering</i> óptimo entre un conjunto de opciones, utilizando el BIC (índice de criterio de información bayesiana). Esto supone que las distribuciones asociados a los datos que generan la partición son gaussianas esféricas, es decir, con igual varianza para todas las características del espacio de datos.
6	Fuz2_Concomp	Obtiene la conjunción de la LDC entre los valores ingresados de acuerdo al método especificado.
7	Fuz2_Confusion	Obtiene la matriz de confusión para un conjunto de datos clasificados.
8	Fuz2_CorresponderClases	Determina un mapeo de clases en función del mapeo de ejemplo que presente el menor error, para utilizarlo en los sistemas de <i>clustering</i> .
9	Fuz2_Dice	Calcula el coeficiente de Dice para cada una de las clases de un proceso de clasificación.
10	Fuz2_Discomp	Obtiene la disyunción de la LDC entre los valores ingresados de acuerdo al método especificado.
11	Fuz2_DUNN	Permite obtener el índice de Dunn de un <i>clustering</i> .
12	Fuz2_Encontrar_Gaussiana	Encuentra la solución a una función gaussiana de altura unitaria que pasa por tres puntos. El último punto puede omitirse, arribando así a dos posibles soluciones.
13	Fuz2_Evaluar_MF_Intervalos	Evalúa una función de pertenencia tipo 2 de intervalos definida por tramos de funciones gaussianas del tipo adoptado en esta Tesis.

Tabla A.1 (Continuación). Funciones de la librería *Fuzzy 2 Toolbox*.

En secciones de ayuda dentro de los programas se incorporaron descripciones de los parámetros y detalles de implementación que pueden ser consultadas desde *MatLab*®.

#	Función	Descripción
14	Fuz2_Error	Calcula el coeficiente de error para cada una de las clases obtenidas en una clasificación.
15	Fuz2_Eval_Red	Permite evaluar una RNA previamente entrenada, para clasificar un conjunto de datos. La red puede ser tanto un MLP como una PNN.
16	Fuz2_Eval_Som	Permite evaluar un SOM previamente entrenado, para agrupar un conjunto de datos.
17	Fuz2_Exactitud	Calcula el coeficiente de exactitud para cada una de las clases obtenidas en una clasificación.
18	Fuz2_ExportarTextoPlano	Permite almacenar un conjunto de datos en texto plano.
19	Fuz2_FCM	Permite realizar un agrupamiento de datos con el algoritmo FCM.
20	Fuz2_ImportarTexto	Lee un archivo de texto y coloca los datos disponibles en un arreglo.
21	Fuz2_K_Particiones	Realiza un <i>K-fold</i> de los datos de entrenamiento ingresados. Los datos se reordenan aleatoriamente y se arman <i>K</i> particiones secuenciales de los datos. El programa arma particiones balanceadas de los datos de entrenamiento.
22	Fuz2_Kmeans	Permite realizar un agrupamiento de datos con el algoritmo <i>K-means</i> .
23	Fuz2_Knn	Permite realizar una clasificación de datos utilizando el algoritmo <i>kNN</i> .
24	Fuz2_Knn_2	Permite realizar una clasificación de datos utilizando el algoritmo <i>kNN</i> . Como característica adicional, este programa agrega una nueva clase cuando la frecuencia del vecino más próximo no supera el valor de $k/2$.
25	Fuz2_Medir	Obtiene la medida de intervalos de valores de verdad para un intervalo ingresado, utilizando algunas de las funciones propuestas #1 a #3.
26	Fuz2_NormalizarDatos	Realiza la normalización de datos en el intervalo $[-1,1]$.
27	Fuz2_Obtener_Cruces_Gaussianas	Calcula los puntos de cruce de dos funciones gaussianas utilizando la solución aritmética de los mismos, a través de la ecuación cuadrática resultante en la solución. La misma es desarrollada en el Apéndice B.
28	Fuz2_Optimizacion	Realiza una optimización determinando la opción óptima según la minimización de una suma ponderada.
29	Fuz2_Purity	Esta función calcula el coeficiente <i>purity</i> para validar <i>clustering</i> con evaluación externa.
30	Fuz2_RedNeuronal	Crea y entrena una RNA para Reconocimiento de Patrones. La misma puede ser un MLP o PNN.
31	Fuz2_Silhouette	Permite obtener el índice <i>silhouette</i> de un <i>clustering</i> .
32	Fuz2_snorma	Obtiene la <i>s-norma</i> entre los valores ingresados de acuerdo al método especificado.

Tabla A.1 (Continuación). Funciones de la librería *Fuzzy 2 Toolbox*.

En secciones de ayuda dentro de los programas se incorporaron descripciones de los parámetros y detalles de implementación que pueden ser consultadas desde *MatLab*®.

#	Función	Descripción
33	Fuz2_SOM	Crea y entrena un SOM. Si los parámetros de configuración se omiten, el programa definirá un SOM óptimo en términos del error de cuantificación, el error topográfico y el producto topográfico, utilizando un algoritmo de optimización.
34	Fuz2_SOM_Clustering	Realiza un <i>clustering</i> de los datos ingresados utilizando un esquema de <i>clustering</i> de dos niveles.
35	Fuz2_SOM_ProdTopografico	Evalúa el producto topográfico en un SOM entrenado, para analizar su calidad topográfica.
36	Fuz2_T1_CLUST_Design	Genera en forma automática un sistema difuso basado en LD tipo 1 mediante el uso de <i>clustering</i> , implementado el método propuesto T1-DFPC.
37	Fuz2_T1_SLD_Evaluar	Permite evaluar un sistema difuso basado en LD tipo 1 y predicados para Reconocimiento de Patrones.
38	Fuz2_T1_SLD_Graf	Grafica las funciones de pertenencia de un sistema difuso basado en LD tipo 1 definido para Reconocimiento de Patrones.
39	Fuz2_T1_SOM_Design	Genera en forma automática un sistema difuso basado en LD tipo 1 mediante el uso de SOM, implementado el método propuesto T1-SFPC.
40	Fuz2_T1_SUP_Design	Genera en forma automática un sistema difuso basado en LD tipo 1 mediante el uso de datos etiquetados, implementado el método propuesto T1-LFPC.
41	Fuz2_T1_Vector_AND	Obtiene la conjunción difusa entre valores de verdad.
42	Fuz2_T1_Vector_NOT	Obtiene el complemento difuso de un valor de verdad.
43	Fuz2_T1_Vector_OR	Obtiene la disyunción difusa entre valores de verdad.
44	Fuz2_T2_CLUST_Design	Genera en forma automática un sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos mediante el uso de <i>clustering</i> , implementado el método propuesto T2-DFPC.
45	Fuz2_T2_SLD_Evaluar	Permite evaluar un sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos y predicados para Reconocimiento de Patrones.
46	Fuz2_T2_SLD_Graf	Grafica las funciones de pertenencia de un sistema Difuso basado en LD tipo 2 de intervalos definido para Reconocimiento de Patrones.
47	Fuz2_T2_Slice_AND	Obtiene la conjunción difusa entre dos intervalos de valores de verdad.
48	Fuz2_T2_Slice_NOT	Obtiene el complemento difuso de un intervalo de valores de verdad.
49	Fuz2_T2_Slice_OR	Obtiene la disyunción difusa entre dos intervalos de valores de verdad.
50	Fuz2_T2_SOM_Design	Genera en forma automática un sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos mediante el uso de SOM, implementado el método propuesto T2-SFPC.
51	Fuz2_T2_SUP_Design	Genera en forma automática un sistema difuso basado en LD tipo 2 de intervalos mediante el uso de datos etiquetados, implementado el método propuesto T2-LFPC.

Tabla A.1 (Continuación). Funciones de la librería *Fuzzy 2 Toolbox*.

En secciones de ayuda dentro de los programas se incorporaron descripciones de los parámetros y detalles de implementación que pueden ser consultadas desde *MatLab*®.

#	Función	Descripción
52	Fuz2_Tanimoto	Calcula el coeficiente de Tanimoto para cada una de las clases obtenidas en una clasificación.
53	Fuz2_tnorma	Obtiene la <i>t</i> -norma entre los valores ingresados de acuerdo al método especificado.
54	Fuz2_Vector2Arreglo	Convierte un vector o una tabla en una matriz o hipermatriz de datos.

Apéndice B: Funciones gaussianas

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Apéndice B: Funciones gaussianas

B.1. Introducción

En este Apéndice se presenta la solución matemática a dos problemas relacionados a funciones gaussianas: 1) encontrar la función gaussiana que pasa por tres puntos y 2) encontrar el punto de cruce de máxima ordenada entre dos funciones gaussianas. Los resultados finales de estas soluciones fueron utilizados en el Capítulo 5, al presentar el método propuesto para definir una función de pertenencia tipo 2 de intervalos a partir del resultado de la agregación de funciones tipo 1.

Las soluciones a estos problemas son de suma importancia en esta Tesis, ya que se utilizan en la totalidad de los métodos propuestos para la generación automática de sistemas difusos a partir de datos, y, además, no se encuentran en la bibliografía. Debido a esto, estas soluciones de desarrollan a continuación.

B.2. Solución a la función gaussiana que pasa por tres puntos

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, con $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}$ tres puntos por los que debe pasar una función gaussiana de altura unitaria $\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de parámetros ω y σ , donde ω es el valor central de la función y σ un parámetro que controla el ancho (dispersión) de la función. La expresión funcional de μ es:

$$y = \mu(x) = e^{\frac{-(x-\omega)^2}{2(\sigma^2)}}. \quad (\text{B.1})$$

El problema consiste en hallar el único par de valores (ω, σ) tal que:

$$y_1 = \mu(x_1) = e^{\frac{-(x_1-\omega)^2}{2(\sigma^2)}} \quad \wedge \quad y_2 = \mu(x_2) = e^{\frac{-(x_2-\omega)^2}{2(\sigma^2)}} \quad \wedge \quad y_3 = \mu(x_3) = e^{\frac{-(x_3-\omega)^2}{2(\sigma^2)}}. \quad (\text{B.2})$$

Partiendo de la Ecuación (B.1), es posible despejar σ en función de ω para un dado (x, y) .

Aplicando logaritmo natural a ambos miembros de (B.1):

$$\ln(y) = \ln \left(e^{\frac{-(x-\omega)^2}{2(\sigma^2)}} \right) = \frac{-(x-\omega)^2}{2(\sigma^2)}, \quad (\text{B.3})$$

desarrollando el segundo miembro de (B.3):

$$\ln(y) = \frac{-(x^2 - 2x\omega + \omega^2)}{2\sigma^2}, \quad (\text{B.4})$$

reemplazando en la Ecuación (B.4) x e y por las coordenadas de los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ quedan las siguientes ecuaciones:

$$\ln(y_1) = \frac{-(x_1^2 - 2x_1\omega + \omega^2)}{2\sigma^2}, \quad (\text{B.5})$$

$$\ln(y_2) = \frac{-(x_2^2 - 2x_2\omega + \omega^2)}{2\sigma^2}. \quad (\text{B.6})$$

Partiendo de (B.5) y (B.6) se obtiene:

$$2\sigma^2 = \frac{-(x_1^2 - 2x_1\omega + \omega^2)}{\ln(y_1)} = \frac{-(x_2^2 - 2x_2\omega + \omega^2)}{\ln(y_2)}, \quad (\text{B.7})$$

de donde:

$$\frac{x_1^2 - 2x_1\omega + \omega^2}{\ln(y_1)} = \frac{x_2^2 - 2x_2\omega + \omega^2}{\ln(y_2)}. \quad (\text{B.8})$$

A partir de la Ecuación (B.8) puede obtenerse el parámetro ω en función de las coordenadas x e y para los puntos P_1 y P_2 , esto es:

$$x_1^2 - 2x_1\omega + \omega^2 = \frac{\ln(y_1)}{\ln(y_2)} (x_2^2 - 2x_2\omega + \omega^2), \quad (\text{B.9})$$

y haciendo $\eta = \frac{\ln(y_1)}{\ln(y_2)}$ queda:

$$x_1^2 - 2x_1\omega + \omega^2 = \eta x_2^2 - 2\eta x_2\omega + \eta \omega^2. \quad (\text{B.10})$$

Despejando e igualando a cero:

$$(1-\eta)\omega^2 - 2(x_1 - \eta x_2)\omega + (x_1^2 - \eta x_2^2) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Como puede observarse la solución para la Ecuación (B.11) corresponde a la solución de una ecuación cuadrática y los valores de ω que la satisfagan serán las posibles soluciones buscadas para el parámetro del valor central de la función gaussiana de la Ecuación (B.1). Con estas consideraciones, la solución a (B.11) queda de la forma:

$$\omega_{A,B} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (\text{B.12})$$

donde $a = (1 - \eta)$, $b = -2(x_1 - \eta x_2)$ y $c = (x_1^2 - \eta x_2^2)$. Por lo tanto, calculando la expresión de Δ en (B.12) se obtiene:

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-2(x_1 - \eta x_2)]^2 - 4(1 - \eta)(x_1^2 - \eta x_2^2), \quad (\text{B.13})$$

$$\Delta = 4(x_1^2 - 2\eta x_1 x_2 + \eta^2 x_2^2) - (4x_1^2 - 4\eta x_2^2 - 4\eta^2 x_1^2 + 4\eta^2 x_2^2), \quad (\text{B.14})$$

$$\Delta = 4x_1^2 - 8\eta x_1 x_2 + 4\eta^2 x_2^2 - 4x_1^2 + 4\eta x_2^2 + 4\eta^2 x_1^2 - 4\eta^2 x_2^2, \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta = 4\eta x_2^2 - 8\eta x_1 x_2 + 4\eta^2 x_1^2 = 4\eta(x_1 - x_2)^2. \quad (\text{B.16})$$

Reemplazando $a = (1 - \eta)$, $b = -2(x_1 - \eta x_2)$ y (B.16) en (B.12):

$$\omega_{A,B} = \frac{2x_1 - 2\eta x_2 \pm \sqrt{4\eta(x_1 - x_2)^2}}{2 - 2\eta}, \quad (\text{B.17})$$

lo que implica que se obtendrán dos valores distintos de ω que satisfacen (B.1) puesto que $4\eta(x_1 - x_2)^2 > 0$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$. Para cada posible ω se obtendrá un posible valor de σ , esto es:

$$\sigma_{A,B} = \sqrt{\frac{-(x_1 - \omega_{A,B})^2}{2\ln(y_1)}} = \sqrt{\frac{-(x_2 - \omega_{A,B})^2}{2\ln(y_2)}}, \quad (\text{B.18})$$

que surge de despejar σ de (B.5) y (B.6). Esto último implica que partiendo de dos puntos P_1 y P_2 no es posible obtener una única solución para la función gaussiana. Por lo tanto, una vez calculados los pares de parámetros (ω_A, σ_A) y (ω_B, σ_B) puede verificarse cuál de los dos satisface la ecuación:

$$y_3 = e^{\frac{-(x_3 - \omega)^2}{2(\sigma^2)}}, \quad (\text{B.19})$$

correspondiente al punto P_3 , haciendo alternativamente $(\omega, \sigma) = (\omega_A, \sigma_A)$ y $(\omega, \sigma) = (\omega_B, \sigma_B)$. El par de parámetros (ω, σ) que satisfaga la Ecuación (B.19), entre los posibles pares (ω_A, σ_A) y (ω_B, σ_B) , definirá unívocamente la función gaussiana que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$.

B.3. Solución al punto de cruce de máxima ordenada entre dos funciones gaussianas

Sean $\mu_1 : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ y $\mu_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ dos funciones de forma gaussiana con valor máximo unitario, respectivamente con parámetros (ω_1, σ_1) y (ω_2, σ_2) , el problema consiste en encontrar al punto de cruce de máxima ordenada entre estas funciones, notado como (ρ, ψ) .

Las funciones gaussianas μ_1 y μ_2 tienen las siguientes expresiones funcionales:

$$\mu_1(x) = e^{\frac{-(x-\omega_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad (B.20)$$

y

$$\mu_2(x) = e^{\frac{-(x-\omega_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \quad (B.21)$$

El cruce entre estas dos funciones estará dado por:

$$\mu_1(\rho) = \mu_2(\rho) \Rightarrow e^{\frac{-(\rho-\omega_1)^2}{2\sigma_1^2}} = e^{\frac{-(\rho-\omega_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad (B.22)$$

con $(x, y) = (\rho, \psi)$ para la condición de cruce.

Aplicando logaritmo natural a la segunda parte de (B.22):

$$\ln \left[e^{\frac{-(\rho-\omega_1)^2}{2\sigma_1^2}} \right] = \ln \left[e^{\frac{-(\rho-\omega_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right] \Rightarrow \frac{-(\rho-\omega_1)^2}{2\sigma_1^2} = \frac{-(\rho-\omega_2)^2}{2\sigma_2^2}, \quad (B.23)$$

de donde:

$$\frac{\rho^2 - 2\rho\omega_1 + \omega_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{\rho^2 - 2\rho\omega_2 + \omega_2^2}{\sigma_2^2}. \quad (B.24)$$

Haciendo $\theta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ queda:

$$\rho^2 - 2\rho\omega_1 + \omega_1^2 = \theta\rho^2 - 2\theta\rho\omega_2 + \theta\omega_2^2. \quad (\text{B.25})$$

Despejando e igualando a cero:

$$(1-\theta)\rho^2 - 2(\omega_1 - \theta\omega_2)\rho + (\omega_1^2 - \theta\omega_2^2) = 0. \quad (\text{B.26})$$

Como puede observarse, la solución para la Ecuación (B.26) corresponde a la solución de una ecuación cuadrática y los valores de ρ que la satisfagan serán las posibles soluciones buscadas para la abscisa del punto de cruce. Con estas consideraciones, la solución a (B.26) queda de la forma:

$$\rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (\text{B.27})$$

donde: $a = (1-\theta)$, $b = -2(\omega_1 - \theta\omega_2)$ y $c = (\omega_1^2 - \theta\omega_2^2)$. Por lo tanto, calculando la expresión de Δ en la Ecuación (B.27) se obtiene:

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-2(\omega_1 - \theta\omega_2)]^2 - 4(1-\theta)(\omega_1^2 - \theta\omega_2^2), \quad (\text{B.28})$$

$$\Delta = 4(\omega_1^2 - 2\theta\omega_1\omega_2 + \theta^2\omega_2^2) - (4\omega_1^2 - 4\theta\omega_2^2 - 4\theta^2\omega_1^2 + 4\theta^2\omega_2^2), \quad (\text{B.29})$$

$$\Delta = 4\omega_1^2 - 8\theta\omega_1\omega_2 + 4\theta^2\omega_2^2 - 4\omega_1^2 + 4\theta\omega_2^2 + 4\theta^2\omega_1^2 - 4\theta^2\omega_2^2, \quad (\text{B.30})$$

$$\Delta = 4\theta\omega_2^2 - 8\theta\omega_1\omega_2 + 4\theta^2\omega_1^2 = 4\theta(\omega_1 - \omega_2)^2. \quad (\text{B.31})$$

Reemplazando $a = (1-\theta)$, $b = -2(\omega_1 - \theta\omega_2)$ y (B.31) en (B.27):

$$\rho_{1,2} = \frac{2\omega_1 - 2\theta\omega_2 \pm \sqrt{4\theta(\omega_1 - \omega_2)^2}}{2 - 2\theta}, \quad (\text{B.32})$$

lo que implica que se obtendrán dos valores distintos de ρ que satisfacen (B.22) puesto que $4\theta(\omega_1 - \omega_2)^2 > 0$ para $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ y $\omega_1 \neq \omega_2$. Para cada posible ρ se obtendrá un posible valor de ψ , esto es:

$$\psi_{1,2} = e^{\frac{-(\rho_{1,2} - \omega_1)^2}{2\sigma_1^2}} = e^{\frac{-(\rho_{1,2} - \omega_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad (\text{B.33})$$

que surgen de especializar (B.20) y (B.21) en el punto de cruce. La solución buscada, esto es, el punto de cruce con máximo valor de ordenada quedará definido por (ρ, ψ) , donde:

$$\rho = \arg \max_{\rho \in \{\rho_1, \rho_2\}} \left[e^{-(\rho - \omega_1)^2 / 2(\sigma_1^2)} \right], \quad (\text{B.34})$$

y

$$\psi = \max \{ \psi_1, \psi_2 \}. \quad (\text{B.35})$$

Agradecimientos

Ing. Diego Sebastián Comas

Lógica Difusa Tipo 2 de Intervalos en Segmentación de Imágenes Médicas

Agradecimientos

Agradezco especialmente:

A la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, mi segundo hogar, en la que realizado inicialmente mis estudios de grado y, posteriormente, el presente doctorado y en la cual continúo también mi formación docente.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), el cual a través de sus diferentes becas doctorales me ha permitido la concreción de la presente Tesis.

A mis directores de Tesis: Gustavo Meschino y Virginia Ballarin, quienes me han honrado acompañándome desde mi formación de grado, como directores de mi proyecto final. Agradezco su confianza, el continuo apoyo, las charlas, las recomendaciones, las ideas y aportes y, especialmente, su acompañamiento y guía a lo largo de estos años, ayudándome a enfrentar cada vez retos de mayor complejidad, permitiéndome crecer. Sin dudas, haber podido contar con ustedes a mi lado, guiándome y ayudándome ha sido para mí un enorme gusto.

Al Jurado de esta Tesis, compuesto por los Dres. Lucía Isabel Passoni, Franco Martin Pessana y Juan Pablo Graffigna, por su profunda dedicación a la lectura y análisis de este documento, proponiendo correcciones y brindando sugerencias que permitieron la mejora del mismo. Asimismo, agradezco especialmente los comentarios brindados, los cuales son un valioso aporte para la continuación de la línea de investigación iniciada con esta Tesis.

A la Dra. Ann Nowé, mi directora durante mi estancia de investigación en el Laboratorio de Modelado Computacional del Departamento de Ciencias de la Computación de la *Vrije Universiteit Brussel*; por sus aportes, comentarios y análisis críticos sobre los diferentes temas vinculados a mi doctorado, los cuales contribuyeron enormemente a esta Tesis, redundando en análisis y formalizaciones teóricas.

Al Dr. Bernard De Baets, un importante investigador en el campo de la Lógica Difusa, a quien considero una persona con una enorme vocación docente, por haberme recibido en su Universidad durante mi estancia de investigación en Bélgica y por brindarme su visión y sus consejos respecto al desarrollo de este doctorado, los cuales marcaron fuertemente el desarrollo de los temas tratados en esta Tesis y mi línea de investigación futura.

A Roberto Hirata y Jorge Guevara Diaz, quienes me recibieron en el Instituto de Matemática y Estadística de la *Universidade de São Paulo*, por sus consejos y sus importantes aportes a varios de los temas tratados en la presente Tesis.

A Juan Pastore, Agustina Bouchet y Marcel Brun, por sus ideas y por ayudarme y enseñarme a formalizar matemáticamente diversos conceptos que forman parte de esta Tesis.

A Guillermo Abras y Pablo Spennato, compañeros durante los últimos años en la cátedra Probabilidad y Procesos Estocásticos, por su enorme y continuo apoyo en mi formación.

A los miembros del Laboratorio de Procesamiento Digital de Imágenes, con quienes comparto cada día de trabajo, por acompañarme en todos estos años.

A mi mamá y a mi papá, Lilián y Fernando, mis referencias en cada momento, por su apoyo continuo, por haberme brindado enormes herramientas para mi desarrollo como persona y haberme enseñado el valor del esfuerzo y del trabajo.

A mis hermanas, Fernanda y Florencia, compañeras en la vida, por su confianza, apoyo y cariño.

A mi sobrinita Maia, el miembro más reciente de la familia, por haber aportado luz a la vida de todos.

Al resto de mi familia, quienes siempre me brindaron su apoyo en cada proyecto que he emprendido.

Finalmente, a todos mis amigos, quienes me honran con su amistad y me dan soporte en los diferentes momentos de la vida, cuyo apoyo me ha ayudado a alcanzar este nuevo logro.

Gracias a todos,

Diego, marzo de 2016.

Referencias

Referencias

- Attik, M. Bougrain, L. y Alexandre, F.(2005): "*Self-Organizing Map Initialization*", en libro: *Artificial Neural Networks: Biological Inspirations – Icnan 2005*. vol. 3696, Duch, W., Kacprzyk, J., Oja, E. y Zadrozny, S., Eds.: Springer Berlin Heidelberg, pp. 357-362. 978-3-540-28752-0.
- Bache, K. y Lichman, M., 2014: "*Uci Machine Learning Repository*", <http://archive.ics.uci.edu/ml>.
- Ballard, D. H. y Brown, C. M. (1992): "*Computer Vision*". vol 1. New Jersey (Prentice-Hall).
- Ballarin, V. L. (2001): "*Procesamiento Digital De Imágenes Aplicado a La Clasificación De Tejido Cerebral*", Universidad Nacional de Tucumán.
- Batyrshin, I. y Kaynak, O. (1999): "*Parametric Classes of Generalized Conjunction and Disjunction Operations for Fuzzy Modeling*". *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* **7**(5), pp. 586-596.
- Batyrshin, I. Kaynak, O. y Rudas, I. (2002): "*Fuzzy Modeling Based on Generalized Conjunction Operations*". *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* **10**(5), pp. 678-683.
- Bauer, H.-U. y Pawelzik, K. R. (1992): "*Quantifying the Neighborhood Preservation of Self-Organizing Feature Maps*". *IEEE Transactions on Neural Networks* **3**(4), pp. 570-579.
- Bellman, R. y Giertz, M. (1973): "*On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets*". *Information Sciences* **5**, pp. 149-156.
- Benalcázar, M. Brun, M. y Ballarin, V. (2013a): "*Automatic Segmentation of Exudates in Ocular Images Using Ensembles of Aperture Filters and Logistic Regression*". *Journal of Physics: Conference Series* **477**, pp. 1-10.
- Benalcázar, M. E. Brun, M. y Ballarin, V. L. (2013b): "*Artificial Neural Networks Applied to Statistical Design of Window Operators*". *Pattern Recognition Letters* **34**(9), pp. 970-979.
- Benalcázar, M. E. Brun, M. Ballarin, V. L. y Hidalgo, R. (2014): "*Automatic Design of Ensembles of Window Operators for Ocular Image Segmentation*". *IEEE Latin America Transactions* **12**(5), pp. 935-941.
- Bezdek, J. C. Hall, L. O. y Clarke, L. P. (1993): "*Review of Mr Image Segmentation Techniques Using Pattern Recognition*". *Medical Physics* **20**(4), pp. 1033-1048.
- Bishop, C. M. (2006a): "*Pattern Recognition and Machine Learning*". (Springer).
- Bishop, C. M. (2006b): "*Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics)*". (Springer-Verlag New York, Inc.). 0387310738.
- Blink, E. J.: "*Mri: Physics*", <http://www.mri-physics.com/html/textuk.html>.
- Bodenhofer, U. y Bauer, P. (2000): "*Towards an Axiomatic Treatment of "Interpretability"*". En procedimientos de Proc. 6th Int. Conf. on Soft Computing (IIZUKA 2000), pp. 334-339. Iizuka, Japan.
- Bouchet, A. Brun, M. y Ballarin, V. (2010): "*Morfología Matemática Difusa Aplicada a La Segmentación De Angioografías Retinales*". *Revista Argentina de Bioingeniería* **16**(1), pp. 7-10. 0329-5257.
- Bouchet, A. Comas, D. S. Pastore, J. I. Brun, M. y Ballarin, V. L. (2013): "*Fuzzy Mathematical Morphology Toolbox and Graphical Interface*". *IEEE Latin America Transactions* **11**(4), pp. 1090-1096.
- Bouchet, A. Pastore, J. y Ballarin, V. (2007): "*Segmentation of Medical Images Using Fuzzy Mathematical Morphology*". *Journal of Computer Science and Technology* **7**(3), pp. 256-262.

- Bouchet, A. Pastore, J. I. Andrade, R. E. Brun, M. y Ballarin, V. (2011): "*Arithmetic Mean Based Compensatory Fuzzy Logic*". *International Journal of Computational Intelligence and Applications* **10**(2), pp. 231-243.
- Cocosco, C. A. Kollokian, V. Kwan, R. K. S. y Evans, A. C. (1997): "*Brainweb: Online Interface to a 3d Mri Simulated Brain Database*". En procedimientos de Proceedings of 3-rd International Conference on Functional Mapping of the Human Brain, Copenhagen.
- Collins, D. L. Zijdenbos, A. P. Kollokian, V. Sled, J. G. Kabani, N. J. Holmes, C. J. y Evans, A. C. (1998): "*Design and Construction of a Realistic Digital Brain Phantom*". *IEEE Transactions on Medical Imaging* **17**(3), pp. 463-468.
- Comas, D. Meschino, G. y Ballarin, V. (2014a): "*Discovering Type-2 Fuzzy Predicates in Data Guided by Automatic Clustering Algorithms*". En procedimientos de Eureka International Virtual Physical Meeting 2014, Culiacan, México.
- Comas, D. S. Bouchet, A. y Pastore, J. I. (2011a): "*Interfaz Gráfica Para Desarrollo De Prototipos De Algoritmos De Procesamiento De Imágenes Con Morfología Matemática Difusa*". En procedimientos de Argentinian Symposium of Technology 2011 (AST 2011), 40° JAIIO, pp. 55-66. Córdoba, Argentina.
- Comas, D. S. Bouchet, A. Pastore, J. I. Rapacioli, M. Flores, V. y Ballarin, V. L. (2013): "*Células En Cultivos: Segmentación Y Seguimiento En Secuencias De Imágenes*". En procedimientos de XIX Congreso Argentino de Bioingeniería (SABI 2013), San Miguel de Tucumán, Argentina. 978-987-23950-7-0.
- Comas, D. S. Meschino, G. J. y Ballarin, V. L. (2010): "*Framework De Segmentación Y Análisis De Imágenes Mediante Reconocimiento De Texturas*". En resúmenes de Argentinian Symposium of Technology (AST), pp. 1529-1541. Buenos Aires, Argentina.
- Comas, D. S. Meschino, G. J. Ballarin, V. L. Diaz, J. A. Musso, C. G. y Luna, D. R. (2015a): "*Evaluación De La Performance Diagnóstica Del Procesamiento Y Clasificación De Imágenes De Líquido Peritoneal En Complicaciones De La Diálisis Peritoneal*". En procedimientos de XX Congreso Argentino de Bioingeniería (SABI 2015), pp. 477-486. San Nicolás de los Arroyos, Argentina. 978-950-42-0166-3.
- Comas, D. S. Meschino, G. J. Brun, M. y Ballarin, V. L. (2014b): "*Label-Based Type-2 Fuzzy Predicate Classification Applied to the Design of Morphological W-Operators for Image Processing*". En procedimientos de First Latin American Congress on Computational Intelligence, pp. 55-60. June 2014, San Carlos de Bariloche, Argentina.
- Comas, D. S. Meschino, G. J. Nowé, A. y Ballarin, V. L. (2015b): "*Knowledge Discovering in Data Clustering by Self-Discovered Type-2 Fuzzy Predicates*". En procedimientos de Fifth International Workshop on Knowledge Discovery, Knowledge Management and Decision, Ciudad México, México.
- Comas, D. S. Meschino, G. J. Pastore, J. I. y Ballarin, V. L. (2011b): "*A Survey of Medical Images and Signal Processing Problems Successfully Solved with the Application of Type-2 Fuzzy Logic*". En procedimientos de XVIII Congreso Argentino de Bioingeniería Mar del Plata, Argentina.
- Comas, D. S. Meschino, G. J. Pastore, J. I. y Ballarin, V. L. (2011c): "*A Survey of Medical Images and Signal Processing Problems Successfully Solved with the Application of Type-2 Fuzzy Logic*". *Journal of Physics: Conference Series* **332**, pp. 1-10. 1742-6588.
- Comas, D. S. Pastore, J. I. Bouchet, A. Ballarin, V. L. y Meschino, G. J. (2014c): "*Type-2 Fuzzy Logic in Decision Support Systems*", en libro: *Soft Computing for Business Intelligence*. vol. 537, Andrade, R. A. E., Pérez, R. B., Cobo, A., Gómez, J. M. y Valdéz, A. R., Eds.: Springer, pp. 267-280.
- Comas, D. S. Pastore, J. I. Bouchet, A. Ballarin, V. L. Passoni, L. I. y Meschino, G. J. (2012): "*Diseño Automático De Sistemas De Lógica Difusa Tipo 2 Mediante Mapas Auto-Organizados*". En procedimientos de Quinto Torneo Regional de Inteligencia Computacional, pp. 1-8. 15 de junio de 2012, Córdoba, Argentina.

- Cortez, P. Cerdeira, A. Almeida, F. Matos, T. y Reis, J. (2009): "*Modeling Wine Preferences by Data Mining from Physicochemical Properties*". *Decision Support Systems* **47**(4), pp. 547-553.
- Cottrell, M. y Letrémy, P. (2005): "*Missing Values : Processing with the Kohonen Algorithm*". En procedimientos de Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2005), pp. 489-496. Brest, France.
- Courchesne, E. Chisum, H. J. Townsend, J. Cowles, A. Covington, J. Egaas, B. Harwood, M. Hinds, S. y Press, G. A. (2000): "*Normal Brain Development and Aging: Quantitative Analysis at in Vivo Mr Imaging in Healthy Volunteers*". *Radiology* **216**(3), pp. 672-682. 0033-8419 (Print).
- Courchesne, E. Karns, C. M. Davis, H. R. Ziccardi, R. Carper, R. A. Tigue, Z. D. Chisum, H. J. Moses, P. Pierce, K. Lord, C. Lincoln, A. J. Pizzo, S. Schreibman, L. Haas, R. H. Akshoomoff, N. A. y Courchesne, R. Y. (2001): "*Unusual Brain Growth Patterns in Early Life in Patients with Autistic Disorder: An Mri Study*". *Neurology* **57**(2), pp. 245-254. 0028-3878 (Print).
- Courchesne, E. Pierce, K. Schumann, C. M. Redcay, E. Buckwalter, J. A. Kennedy, D. P. y Morgan, J. (2007): "*Mapping Early Brain Development in Autism*". *Neuron* **56**(2), pp. 399-413.
- Coussement, A.: "*El Canto De Los Protones (Rm ¿Sin Esfuerzo?)*", <http://coussement.unice.fr/>.
- Cree, M. J. y Jelinek, H. F.(2011): "*Image Analysis of Retinal Images*", en libro: *Medical Image Processing: Techniques and Applications*, Dougherty, G., Ed.: Springer-Verlag New York, pp. 249-268.
- Changjiang, S. Guangrong, J. y Yangfan, W. (2009): "*Study of Texture Images Classification Method Based on Fractal Dimension Calculation*". En procedimientos de International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2009. IJCAI '09., pp. 488-491.
- Charytanowicz, M. Niewczas, J. Kulczycki, P. Kowalski, P. A. Lukasik, S. y Zak, S.(2010): "*A Complete Gradient Clustering Algorithm for Features Analysis of X-Ray Images*", en libro: *Information Technologies in Biomedicine*. vol. 2, Piętko, E. y Kawa, J., Eds.: Springer Berlin Heidelberg, pp. 15-24.
- Chumklin, S. Auephanwiriakul, S. y Theera-Umporn, N. (2010): "*Microcalcification Detection in Mammograms Using Interval Type-2 Fuzzy Logic System with Automatic Membership Function Generation*". En procedimientos de 2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ), pp. 1-7. Barcelona, España.
- Davis, P. C. Gray, L. Albert, M. Wilkinson, W. Hughes, J. Heyman, A. Gado, M. Kumar, A. J. Destian, S. Lee, C. y et al. (1992): "*The Consortium to Establish a Registry for Alzheimer's Disease (CERAD). Part Iii. Reliability of a Standardized Mri Evaluation of Alzheimer's Disease*". *Neurology* **42**(9), pp. 1676-1680. 0028-3878 (Print).
- Dietterich, T. G.(2000): "*Ensemble Methods in Machine Learning*", en libro: *Multiple Classifier Systems*. vol. 1857: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1-15.
- Don, S. Choi, E. y Min, D.(2011): "*Breast Mass Segmentation in Digital Mammography Using Graph Cuts*", en libro: *Convergence and Hybrid Information Technology*. vol. 206, Lee, G., Howard, D. y Ślęzak, D., Eds.: Springer Berlin Heidelberg, pp. 88-96.
- Drewniak, J. y Król, A. (2010): "*A Survey of Weak Connectives and the Preservation of Their Properties by Aggregations*". *Fuzzy Sets and Systems* **161**(2), pp. 202-215.
- Drobits, M. Bodenhofer, U. y Winiwarter, W. (2002): "*Mining Clusters and Corresponding Interpretable Descriptions - a Three-Stage Approach*". *Expert Systems: The Journal of Knowledge Engineering and Neural Networks* **19**(4), pp. 224-234.
- Dubey, R. B. Hanmandlu, M. Gupta, S. K. y Gupta, S. K. (2010): "*The Brain Mr Image Segmentation Techniques and Use of Diagnostic Packages*". *Academic Radiology* **17**(5), pp. 658-671.
- Dubois, D. y Prade, H. (1985): "*A Review of Fuzzy Set Aggregation Connectives*". *Information Sciences* **36**(1-2), pp. 85-121.

- Dubois, D. y Prade, H. M. (2000): "*Fundamentals of Fuzzy Sets*". Boston (Kluwer Academic). 0-7923-7732-X.
- Dubois, H. y Prade, D. (1980): "*Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*". vol 1. New York (Academic Press Inc).
- Duda, R. Hart, P. y Stork, D. (2001): "*Pattern Classification*". (Wiley-Interscience).
- Edelman, R. R. Hesselink, J. R. y Zlatkin, M. (1996): "*Clinical Magnetic Resonance Imaging*". 2nd vol 1. (W.B. Saunders Company). 978-0-7216-2241-5.
- Espin Andrade, R. Téllez, G. M. González, E. F. Marx-Gómez, J. y Lecich, M. I. (2006): "*Compensatory Logic: A Fuzzy Normative Model for Decision Making*". *Investigación Operativa* **27**(2), pp. 188-197.
- Fayyad, U. Piatetsky-Shapiro, G. y Smyth, P. (1996): "*From Data Mining to Knowledge Discovery in Databases*". *AI Magazine* **17**(3), pp. 37-54.
- Fodor, J. C. y Keresztfalvi, T. (1995): "*Nonstandard Conjunctions and Implications in Fuzzy Logic*". *International Journal of Approximate Reasoning* **12**(2), pp. 69-84.
- Fraley, C. y Raftery, A. E. (1998): "*How Many Clusters? Which Clustering Method? Answers Via Model-Based Cluster Analysis*". *The Computer Journal* **41**(8), pp. 578-588.
- Garciadiego, A. R. (1992): "*Bertrand Russell and the Origins of the Set-Theoretic 'Paradoxes'*". (Birkhäuser Basel). 3-7643-2669-7.
- Ge, Y. Grossman, R. I. Babb, J. S. Rabin, M. L. Mannon, L. J. y Kolson, D. L. (2002): "*Age-Related Total Gray Matter and White Matter Changes in Normal Adult Brain. Part I: Volumetric Mr Imaging Analysis*". *American Journal of Neuroradiology* **23**(8), pp. 1327-1333. 0195-6108 (Print).
- Ghazavi, S. N. y Liao, T. W. (2008): "*Medical Data Mining by Fuzzy Modeling with Selected Features*". *Artif Intell Med* **43**(3), pp. 195-206. 0933-3657.
- Ghosh, J. y Acharya, A. (2011): "*Cluster Ensembles*". *Advanced Review* **1**(4), pp. 305-315.
- Gibbons, J. D. y Chakraborti, S. (2003): "*Nonparametric Statistical Inference*". New York (CRC Press). 978-0-8247-4052-8.
- Gonzalez, R. C. y Woods, R. E. (2002): "*Digital Image Processing*". vol 1. Upper Saddle River, N. J. (Prentice Hall). 0-2011-8075-8.
- Halkidi, M. Batistakis, Y. y Vazirgiannis, M. (2001): "*On Clustering Validation Techniques*". *Journal of Intelligent Information Systems* **17**(2), pp. 107-145.
- Haykin, S. (1999): "*Neural Networks: A Comprehensive Foundation*". Nueva Jersey, EE.UU. (Prentice Hall).
- Ho, B.-C. (2007): "*Mri Brain Volume Abnormalities in Young, Nonpsychotic Relatives of Schizophrenia Probands Are Associated with Subsequent Prodromal Symptoms*". *Schizophrenia Research* **96**(1), pp. 1-13. 0920-9964.
- Hornak, J. P.: "*The Basics of Mri*", <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri/>.
- Hulshoff Pol, H. E. y Kahn, R. S. (2008): "*What Happens after the First Episode? A Review of Progressive Brain Changes in Chronically Ill Patients with Schizophrenia*". *Schizophrenia Bulletin* **34**(2), pp. 354-366. 0586-7614 (Print).
- Hulshoff Pol, H. E. Schnack, H. G. Bertens, M. G. van Haren, N. E. van der Tweel, I. Staal, W. G. Baare, W. F. y Kahn, R. S. (2002): "*Volume Changes in Gray Matter in Patients with Schizophrenia*". *American Journal of Psychiatry* **159**(2), pp. 244-250. 0002-953X (Print).
- Iacomì, M. Cascio, D. Fauci, F. y Raso, G. (2014): "*Mammographic Images Segmentation Based on Chaotic Map Clustering Algorithm*". *BMC Medical Imaging* **14**(12), pp. 1-11.

- Iowa Mental Health Clinical Research Center, 2005: "Brains Software Package", <http://www.psychiatry.uiowa.edu/mhcr/LPLpages/BRAINS.htm>.
- Ishibuchi, H. y Tanaka, H. (1990): "Multiobjective Programming in Optimization of the Interval Objective Function". *European Journal of Operational Research* **48**(2), pp. 219-225.
- Jain, A. y Chandrasekaran, B.(1982): "Dimensionality and Sample Size Consideration in Pattern Recognition Practice", en libro: *Classification, Pattern Recognition and Reduction of Dimensionality. Handbook of Statistics*, Krishnaiah, P. y Kanal, L., Eds. Amsterdam: Amsterdam: North-Holland, pp. 835-856.
- Jain, A. K. Murty, M. N. y Flynn, P. J. (1999): "Data Clustering: A Review". *ACM Computing Surveys* **31**(3), pp. 264-323.
- Jantzen, J. (1999): "Tutorial on Fuzzy Logic". *Technical University of Denmark, Department of Automation*.
- John, R. I. Innocent, P. R. y Barnes, M. R. (1998): "Type 2 Fuzzy Sets and Neuro-Fuzzy Clustering of Radiographic Tibia Images". En resúmenes de Proceedings of the Sixth IEEE International Conference on Computational Intelligence, pp. 1373-1376. 4-9 Mayo 1998, Anchorage, AK , USA.
- Kassner, A. y Thornhill, R. E. (2010): "Texture Analysis: A Review of Neurologic Mr Imaging Applications". *Am J Neuroradiol* **31**(5), pp. 809-816.
- Khoury, V. Cardinal, E. y Brassard, P. (2008): "Atrophy and Fatty Infiltration of the Supraspinatus Muscle: Sonography Versus Mri". *Am. J. Roentgenol.* **190**(4), pp. 1105-1111.
- Kiang, M. Y. (2001): "Extending the Kohonen Self-Organizing Map Networks for Clustering Analysis". *Computational Statistics & Data Analysis* **38**(2), pp. 161-180.
- Knopman, D. S. DeKosky, S. T. Cummings, J. L. Chui, H. Corey-Bloom, J. Relkin, N. Small, G. W. Miller, B. y Stevens, J. C. (2001): "Practice Parameter: Diagnosis of Dementia (an Evidence-Based Review). Report of the Quality Standards Subcommittee of the American Academy of Neurology". *Neurology* **56**(9), pp. 1143-1153. 0028-3878 (Print).
- Kohonen, T. (1982): "Self Organized Formation of Topological Correct Feature Maps". *Biol Cybernetics* **43**(1), pp. 59-96.
- Kundu, S. (1997): "Min-Transitivity of Fuzzy Leftness Relationship and Its Application to Decision Making". *Fuzzy Sets and Systems* **86**(3), pp. 357-367.
- Kwan, R. K.-S. Evans, A. C. y Pike, G. B. (1996): "An Extensible Mri Simulator for Post-Processing Evaluation". *Lecture Notes in Computer Science* **1131**, pp. 135-140.
- Kwan, R. K. Evans, A. C. y Pike, G. B. (1999): "Mri Simulation-Based Evaluation of Image-Processing and Classification Methods". *IEEE Transactions on Medical Imaging* **18**(11), pp. 1085-1097.
- Lampinen, J. y Oja, E. (1992): "Clustering Properties of Hierarchical Self-Organizing Maps". *Journal of Mathematical Imaging and Vision* **2**(3), pp. 261-272.
- Li, H. D. Kallergi, M. Clarke, L. P. Jain, V. K. y Clark, R. A. (1995): "Markov Random Field for Tumor Detection in Digital Mammography". *IEEE Trans Med Imaging* **14**(3), pp. 565-576.
- Li, Y. y Chi, Z. (2005): "Mr Brain Image Segmentation Based on Self-Organizing Map Network". *International Journal of Information Technology* **11**(8), pp. 45-53.
- Liang, Q. y Mendel, J. M. (2000): "Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design". *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* **8**(5), pp. 535-550. 1063-6706.
- Liang, Z.-P. Lauterbur, P. C. y IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. (2000): "Principles of Magnetic Resonance Imaging : A Signal Processing Perspective". Bellingham, Wash, New York (SPIE Optical Engineering Press; IEEE Press). 0-7803-4723-4.
- Luxburg, U. v. (2007): "A Tutorial on Spectral Clustering". *Statistics and Computing* **17**(4), pp. 395-416.

- Maimon, O. y Rokach, L. (2010): "*Data Mining and Knowledge Discovery Handbook*". (Springer US).
- Mamdani, E. H. (1974): "*Application of Fuzzy Algorithms for Control of a Simple Dynamic Plant*". *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers* **121**(12), pp. 1585-1588.
- Manes, F. (2000): "*Resonancia Magnética Nuclear En La Enfermedad De Alzheimer*". *Revista Neurológica Argentina* **25**, pp. 29-37.
- Manning, C. D. Raghavan, P. y Schütze, H. (2008): "*Introduction to Information Retrieval*". California, USA. 9780521865715.
- Markov, S. y Okumura, K.(1999): "*The Contribution of T. Sunaga to Interval Analysis and Reliable Computing*", en libro: *Developments in Reliable Computing*, Csendes, T., Ed. Dordrecht,: Kluwer Academic Publishers, pp. 167-188.
- Melin, P. y Castillo, O. (2013): "*A Review on the Applications of Type-2 Fuzzy Logic in Classification and Pattern Recognition*". *Expert Systems with Applications* **40**(13), pp. 5413-5423.
- Mendel, J. y John, R. I. B. (2002): "*Type-2 Fuzzy Sets Made Simple*". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **10**(2), pp. 117-127.
- Mendel, J. M. (2000): "*Uncertainty, Fuzzy Logic, and Signal Processing*". *Signal Processing* **80**(6), pp. 913-933.
- Mendel, J. M. (2001): "*Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*". vol 1. Upper-Saddle River, NJ (Prentice-Hall). 013-0409-693.
- Mendel, J. M. (2007a): "*Computing with Words and Its Relationships with Fuzzistics*". *Information Sciences* **177**(4), pp. 988-1006.
- Mendel, J. M. (2007b): "*Type-2 Fuzzy Sets and Systems: An Overview*". *IEEE Computational Intelligence Magazine* **2**(1), pp. 20-29. 1556-603X.
- Mendel, J. M. John, R. I. y Liu, F. (2006): "*Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple*". *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* **14**(6), pp. 808-821.
- Mendoza, O. Melin, P. y Castillo, O. (2009): "*Interval Type-2 Fuzzy Logic and Modular Neural Networks for Face Recognition Applications*". *Applied Soft Computing* **9**(4), pp. 1377-1387.
- Mendoza, O. Melin, P. y Licea, G. (2007): "*A New Method for Edge Detection in Image Processing Using Interval Type-2 Fuzzy Logic*". En resúmenes de IEEE International Conference on Granular Computing, pp. 151-156. November 02-November 04, San Jose, California.
- Meschino, G. J. (2008): "*Modelos Híbridos De Inteligencia Computacional Aplicados En La Segmentación De Imágenes De Resonancia Magnética*", Universidad Nacional de Mar del Plata.
- Meschino, G. J. Andrade, R. A. E. y Ballarin, V. L. (2006a): "*Reconocimiento De Tejidos En Imágenes Cerebrales De Resonancia Magnética a Través De Valores De Verdad De Predicados Difusos*". *Mecánica Computacional* **26**, pp. 865-878.
- Meschino, G. J. Andrade, R. E. y Ballarin, V. L. (2008): "*A Framework for Tissue Discrimination in Magnetic Resonance Brain Images Based on Predicates Analysis and Compensatory Fuzzy Logic*". *International Journal of Intelligent Computing in Medical Sciences and Image Processing IC-MED* **2**(3), pp. 209-224. 1931-308X.
- Meschino, G. J. Comas, D. S. Ballarin, V. L. Scandurra, A. G. y Passoni, L. I.(2013): "*Using Som as a Tool for Automated Design of Clustering Systems Based on Fuzzy Predicates*", en libro: *Advances in Self-Organizing Maps*. vol. 198, Estévez, P., Príncipe, J. y Zegers, P., Eds. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 85-94. 978-3-642-02397-2.
- Meschino, G. J. Comas, D. S. Ballarin, V. L. Scandurra, A. G. y Passoni, L. I. (2015a): "*Automatic Design of Interpretable Fuzzy Predicate Systems for Clustering Using Self-Organizing Maps*". *Neurocomputing* **147**(0), pp. 47-59. 0925-2312.

- Meschino, G. J. Comas, D. S. González, M. A. Capiel, C. y Ballarin, V. L. (2015b): "*Reconocimiento De Tejidos En Imágenes De Resonancia Magnética Del Manguito Rotador*". En procedimientos de XX Congreso Argentino de Bioingeniería (SABI 2015), San Nicolás de los Arroyos, Argentina. 978-950-42-0166-3.
- Meschino, G. J. y Moler, E. (2004): "*Semiautomated Image Segmentation of Bone Marrow Biopsies by Texture Features and Mathematical Morphology*". *Analytical and Quantitative Cytology and Histology* **26**(1), pp. 31-38.
- Meschino, G. J. Passoni, L. I. Scandurra, A. G. y Ballarin, V. L. (2006b): "*Representación Automática Pseudo Color De Imágenes Médicas Mediante Mapas Autoorganizados*". En procedimientos de Simposio Argentino de Informática y Salud - SIS 2006, pp. 105-115. Ciudad de Mendoza, Argentina.
- Moler, E. G. (2003): "*Técnicas De Procesamiento Digital De Imágenes Aplicadas Al Cálculo De Parámetros Histomorfométricos No-Euclidianos*". *Revista Argentina de Bioingeniería* **9**(1), pp. 11-15.
- Moler, E. G. Ballarin, V. L. y Gonzalez, M. (1999): "*Características Estadísticos, Espectrales Y Morfológicos Para Clasificación De Texturas: Un Análisis Comparativo*". En procedimientos de VIII RPIC Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, pp. 59-62.
- Moore, R. y Lodwick, W. (2003): "*Interval Analysis and Fuzzy Set Theory*". *Fuzzy Sets and Systems* **135**(1), pp. 5-9.
- Moore, R. E. (1966): "*Interval Analysis*". New York (Prentice-Hall).
- Moore, R. E. (1979): "*Methods and Applications of Interval Analysis*". Philadelphia (Society for Industrial and Applied Mathematics).
- Muneeswaran, K. Ganesan, L. Arumugam, S. y Soundar, K. R. (2006): "*Texture Image Segmentation Using Combined Features from Spatial and Spectral Distribution*". *Pattern Recognition Letters* **27**(7), pp. 755-764.
- Murtagh, F. (1995): "*Interpreting the Kohonen Self-Organizing Feature Map Using Contiguity-Constrained Clustering*". *Pattern Recognition Letters* **16**(4), pp. 399-408.
- Narr, K. L. Sharma, T. Woods, R. P. Thompson, P. M. Sowell, E. R. Rex, D. Kim, S. Asuncion, D. Jang, S. Mazziotta, J. y Toga, A. W. (2003): "*Increases in Regional Subarachnoid Csf without Apparent Cortical Gray Matter Deficits in Schizophrenia: Modulating Effects of Sex and Age*". *American Journal of Psychiatry* **160**(12), pp. 2169-2180. 0002-953X (Print).
- Pastore, J. Bouchet, A. Moler, E. y Ballarin, V. (2013): "*Segmentation of Bone Marrow Biopsies by Mathematical Morphology in Color Spaces*". *IEEE Latin America Transactions* **11**(1), pp. 335-339.
- Pastore, J. I. Moler, E. y Meschino, G. (2005a): "*Segmentación De Biopsias De Médula Ósea Mediante Filtros Morfológicos Y Rotulación De Regiones Homogéneas*". *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica* **21**(37-44). 1517-3151.
- Pastore, J. I. Moler, E. G. y Ballarin, V. L. (2005b): "*Segmentation of Brain Magnetic Resonance Images through Morphological Operators and Geodesic Distance*". *Digital Signal Processing* **15**(2), pp. 153-160.
- Pastore, J. I. Rapacioli, M. Bouchet, A. Comas, D. S. Sánchez, V. Ballarin, V. L. y Flores, V. (2011): "*Caracterización Del Comportamiento Migratorio De Neuronas Embrionarias Mediante Morfología Matemática*". En procedimientos de 2nd International Symposium on Innovation and Technology, pp. 78-83. Lima, Perú. 978-612-45917-1-6.
- Pedrycz, W. (2004): "*Fuzzy Clustering with a Knowledge-Based Guidance*". *Pattern Recognition Letters* **25**(4), pp. 469-480.
- Peirce, C. S. (1883): "*Studies in Logic*". (Amsterdam, Benjamin). 9-0272-3271-7.

- Pham, D. L. Xu, C. y Prince, J. L. (2000): "*Current Methods in Medical Image Segmentation*". *Annual Review of Biomedical Engineering* **2**, pp. 315-337.
- Pizzi, N. J. y Pedrycz, W. (2012): "*Classifying High-Dimensional Patterns Using a Fuzzy Logic Discriminant Network*". *Advances in Fuzzy Systems* **Volume 2012**, pp. 1-7.
- Pözlbauer, G. (2004): "*Survey and Comparison of Quality Measures for Self-Organizing Maps*". En procedimientos de Proceedings of the Fifth Workshop on Data Analysis (WDA'04), pp. 67-82.
- Rajini, N. H. (2011): "*Classification of Mri Brain Images Using K-Nearest Neighbor and Artificial Neural Network*". En procedimientos de 2011 International Conference on Recent Trends in Information Technology, pp. 563- 568. Chennai, India.
- Rejani, A. y Selvi, T. (2009): "*Breast Cancer Detection Using Multilevel Thresholding*". *International Journal of Computer Science and Information Security* **6**(1), pp. 111-115.
- Rendón, E. Abundez, I. Arizmendi, A. y Quiroz, E. M. (2011): "*Internal Versus External Cluster Validation Indexes*". *International Journal Of Computers And Communications* **5**(1), pp. 27-34.
- Rokach, L.(2005): "*Ensemble Methods for Classifiers*", en libro: *Data Mining and Knowledge Discovery Handbook*, Maimon, O. y Rokach, L., Eds.: Springer US, pp. 957-980.
- Rokach, L.(2010): "*Ensemble Methods in Supervised Learning*", en libro: *Data Mining and Knowledge Discovery Handbook*, Maimon, O. y Rokach, L., Eds. New York: Springer US, pp. 959-977.
- Ruspini, E. H. (1969): "*A New Approach to Clustering*". *Information and Control* **15**(1), pp. 22-32.
- Sahakyan, A. y Sarukhanyan, H. (2012): "*Segmentation of the Breast Region in Digital Mammograms and Detection of Masses*". *International Journal of Advanced Computer Science and Applications* **3**(2), pp. 102-105.
- Sande, M. A. v. d. Stoel, B. C. Obermann, W. R. Lieng, J. G. T. a. y Rozing, P. M. (2005): "*Quantitative Assessment of Fatty Degeneration in Rotator Cuff Muscles Determined with Computed Tomography*". *Invest. Radiol.* **40**(5), pp. 313-319.
- Sarlin, P. (2013): "*Exploiting the Self-Organizing Financial Stability Map*". *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **26**(5-6), pp. 1532-1539.
- Sarlin, P. y Eklund, T. (2011): "*Fuzzy Clustering of the Self-Organizing Map: Some Applications on Financial Time Series*". En procedimientos de 8th International Workshop on Self-Organizing Maps, Espoo, Finland.
- Sengupta, A. y Pal, T. K. (2000): "*On Comparing Interval Numbers*". *European Journal of Operational Research* **127**(1), pp. 28-43.
- Sengupta, A. Pala, T. K. y Chakraborty, D. (2001): "*Interpretation of Inequality Constraints Involving Interval CoeCients and a Solution to Interval Linear Programming*". *Fuzzy Sets and Systems* **119**(1), pp. 129-138.
- Serra, J. (1982): "*Image Analysis and Mathematical Morphology*".
- Sima, C. Attoor, S. Brag-Neto, U. Lowey, J. Suh, E. y Dougherty, E. R. (2005): "*Impact of Error Estimation on Feature Selection*". *Pattern Recognition* **38**(12), pp. 2472-2482.
- Spencer, E. Warren, R. Dunn, R. Wright, R. Wolf, B. Spindler, B. Kurt, P. McCarty, E. Benjamin, E. J. G. Safran, M. Brian, H. y Kuhn, J. (2008): "*Interobserver Agreement in the Classification of Rotator Cuff Tears Using Magnetic Resonance Imaging*". *Am. J. Sports Med.* **36**(1), pp. 99-103.
- Staal, J. Abràmoff, M. D. Niemeijer, M. Viergever, M. A. y Ginneken, B. v. (2004): "*Ridge-Based Vessel Segmentation in Color Images of the Retina*". *IEEE Transactions On Medical Imaging* **23**(4), pp. 501-509.

- Storey, P. (2006): *"Introduction to Magnetic Resonance Imaging and Spectroscopy"*. *Methods in Molecular Medicine* **124**, pp. 3-57.
- Sugeno, M. y Kang, G. T. (1988): *"Structure Identification of Fuzzy Model"*. *Fuzzy Sets and Systems* **28**(1), pp. 15-33.
- Tankyevych, O. Talbot, H. Passat, N. Musacchio, M. y Lagneau, M.(2011): *"Angiographic Image Analysis"*, en libro: *Medical Image Processing: Techniques and Applications*, Dougherty, G., Ed.: Springer-Verlag New York, pp. 115-144.
- Tesar, L. Shimizu, A. Smutek, D. Kobatake, H. y Nawano, S. (2008): *"Medical Image Analysis of 3d Ct Images Based on Extension of Haralick Texture Features"*. *Computerized Medical Imaging and Graphics* **32**(6), pp. 513-520.
- Triñanes, J. A. Torres, J. Tobar, A. y Hernández, C. (1994): *"Clasificación De Imágenes Multiespectrales Mediante Redes Neuronales"*. *Revista de Teledetección* **1994**(3), pp. 1-5.
- Vesanto, J. (1999): *"Som-Based Data Visualization Methods"*. vol 3.
- Vesanto, J. (2002): *"Data Exploration Process Based on the Self-Organizing Map"*. vol 115.
- Vesanto, J. y Alhoniemi, E. (2000): *"Clustering of the Self-Organizing Map"*. *IEEE Transactions on Neural Networks* **11**(3), pp. 586-600.
- Vesanto, J. Himberg, J. Alhoniemi, E. y Parhankangas, J. (1999): *"Self-Organizing Map in Matlab: The Som Toolbox"*. En procedimientos de Proceedings of the Matlab DSP Conference 1999, pp. 35-40. Espoo, Finland.
- Villar, C. G. (2011): *"Evidence-Based Radiology for Diagnostic Imaging: What It Is and How to Practice It"*. *Radiología* **53**(4), pp. 326-334.
- Warfield, S. (1996): *"Fast K-Nn Classification for Multichannel Image Data"*. *Pattern Recognition Letters* **17**(7), pp. 713-721.
- Withey, D. J. y Koles, Z. J. (2007): *"Medical Image Segmentation: Methods and Software"*. En procedimientos de NFSI & ICFBI 2007, pp. 140-143. Hangzhou, China.
- Yang, H. y Ahuja, N. (2014): *"Automatic Segmentation of Granular Objects in Images: Combining Local Density Clustering and Gradient-Barrier Watershed"*. *Pattern Recognition* **47**(7), pp. 2266-2279.
- Yldrm, M. T. Basturk, A. y Yuksel, M. E. (2008): *"Impulse Noise Removal from Digital Images by a Detail-Preserving Filter Based on Type-2 Fuzzy Logic"*. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* **16**(4), pp. 920-928.
- Yuksel, M. E. y Borlu, M. (2009): *"Accurate Segmentation of Dermoscopic Images by Image Thresholding Based on Type-2 Fuzzy Logic"*. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* **17**(4), pp. 976-982.
- Zadeh, L. A. (1965): *"Fuzzy Sets"*. *Information and Control* **8**, pp. 338-353.
- Zadeh, L. A. (1972): *"Fuzzy Languages and Their Relation to Human and Machine Intelligence"*. En procedimientos de Conference on Man and Computer, pp. 130-165. Bordeaux, France.
- Zadeh, L. A. (1975): *"The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning"*. *Information Sciences* **8**, pp. 199-249.
- Zadeh, L. A. (1989): *"Knowledge Representation in Fuzzy Logic"*. *IEEE Transactions on knowledge and data engineering* **1**(1), pp. 89-100.
- Zadeh, L. A. (2008): *"Is There a Need for Fuzzy Logic?"*. *Information Sciences* **178**(13), pp. 2751-2779.
- Zanneti, M. Gerber, C. y Hodler, J. (1998): *"Quantitative Assessment of the Muscles of the Rotator Cuff with Magnetic Resonance Imaging"*. *Invest. Radiol.* **33**(3), pp. 163-170.

- Zarandi, M. H. Zarinbal, M. y Izadi, M. (2011): "*Systematic Image Processing for Diagnosing Brain Tumors: A Type-II Fuzzy Expert System Approach*". *Applied Soft Computing* **11**(1), pp. 285-294. 1568-4946.
- Zexuan, J. Jinyao, L. Guo, C. Quansen, S. y Qiang, C. (2014): "*Robust Spatially Constrained Fuzzy C-Means Algorithm for Brain Mr Image Segmentation*". *Pattern Recognition* **47**(7), pp. 2454-2466.
- Zhang, H. Fritts, J. E. y Goldman, S. A. (2008): "*Image Segmentation Evaluation: A Survey of Unsupervised Methods*". *Computer Vision and Image Understanding* **110**(1), pp. 260-280.
- Zhang, Y. J. (1996): "*A Survey on Evaluation Methods for Image Segmentation*". *Pattern Recognition* **26**(8), pp. 1335-1346.
- Zhao, Q. Hautamaki, V. y Fränti, P., "Knee Point Detection in Bic for Detecting the Number of Clusters," in *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*. vol. 5259, Blanc-Talon, J., Bourennane, S., Philips, W., Popescu, D. y Scheunders, P., Eds.: Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 664-673.
- Zimmermann, H. J. y Zysno, P. (1980): "*Latent Connectives in Human Decision Making*". *Fuzzy Sets and Systems* **4**(1), pp. 37-51.
-

