

TÉCNICAS DE MUESTREO
ALEATORIO APLICADAS A
SISTEMAS DE ADQUISICIÓN DE
SEÑALES

Daniel O. Carrica

Este Trabajo de Tesis fue presentado al Departamento de Electrónica
de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata
el 1 de diciembre de 2006, como requisito parcial para la obtención del título de

Doctor en Ingeniería. Mención Electrónica

Director: Mario Benedetti

Co-Director: Roberto Petrocelli



RINFI es desarrollado por la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución- NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

TÉCNICAS DE MUESTREO
ALEATORIO APLICADAS A
SISTEMAS DE ADQUISICIÓN DE
SEÑALES

Daniel O. Carrica

Este Trabajo de Tesis fue presentado al Departamento de Electrónica
de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata
el 1 de diciembre de 2006, como requisito parcial para la obtención del título de

Doctor en Ingeniería. Mención Electrónica

Director: Mario Benedetti

Co-Director: Roberto Petrocelli

A mis padres.

A Mariel.

A Lucía, Santiago, Agustina y Joaquín.

Índice general

Agradecimientos	xxvii
Resumen	xxviii
Nomenclatura	xxix
1. Introducción	1
1.1. Propuesta	3
1.2. Estructura de la tesis	4
2. Antecedentes	6
2.1. Muestreo Uniforme	6
2.1.1. Aliasing en la medición de señales CC o baja frecuencia inmersas en ruido impulsivo [20]	7
2.2. Muestreo Aleatorio	10
3. Muestreo Aleatorio tipo Jitter (Jitter Random Sampling, JRS)	19
3.1. Desarrollo de la PFR	20
3.2. JRS/FIR con entrada senoidal	21
3.3. JRS/MA con entrada senoidal	27
3.4. JRS/FIR con entrada senoidal	41
3.5. JRS/FIR aplicado a un ruido periódico	58

3.6. <i>JRS/MA</i> aplicado a un ruido periódico	62
3.7. <i>JRS/FIR</i> aplicado a entradas senoidales no correlacionadas	63
3.8. Análisis de la <i>PFR</i>	67
3.9. Grado de aleatoriedad	70
3.10. Desarrollo de la relación señal ruido	76
3.11. Conclusiones	88
4. Muestreo Aleatorio Aditivo Asincrónico (Random Additive Asyn-	
chronic Sampling, <i>RAAS</i>)	90
4.1. Introducción	90
4.2. Desarrollo de la <i>PFR</i>	91
4.3. <i>RAAS/MA</i> aplicado a una entrada senoidal	100
4.4. <i>RAAS/fir1</i> y <i>RAAS/fircl1</i> aplicados a una entrada senoidal	112
4.5. Grado de aleatoriedad	127
4.6. Relación S/N en bajas frecuencias	134
4.7. Conclusiones	136
5. Análisis comparativo de las técnicas de muestreo aleatorio	138
5.1. Comparación <i>JRS</i> versus <i>RAAS</i>	138
6. Resultados Experimentales	148
6.1. Ensayos de validación de resultados teóricos y de simulación	148
6.1.1. Grupo 1: <i>JRS/MA</i> con $n=10$	149
6.1.2. Grupo 2: <i>RAAS/MA</i> con $n=10$	151
6.1.3. Grupo 3: <i>JRS/MA</i> , con $n=100$	159
6.1.4. Grupo 4: <i>RAAS/MA</i> , con $n=100$	166
6.1.5. Grupo 5: <i>JRS/MA</i> , con $n=1000$	171
6.1.6. Grupo 6: <i>RAAS/MA</i> , con $n=1000$	177

6.1.7. Grupo 7: <i>JRS/fir1</i> , con $n=10$	181
6.1.8. Grupo 8: <i>RAAS/fir1</i> , con $n=10$	187
6.1.9. Grupo 9: <i>JRS/fir1</i> , con $n=100$	192
6.1.10. Grupo 10: <i>RAAS/fir1</i> , con $n=100$	198
6.1.11. Grupo 11: <i>JRS/fir1</i> , con $n=1000$	203
6.1.12. Grupo 12: <i>RAAS/fir1</i> , con $n=1000$	209
7. Conclusiones	215
7.1. Desarrollo analítico del <i>JRS</i> y <i>RAAS</i>	216
7.2. Simulaciones	218
7.3. Comparación <i>JRS</i> vs <i>RAAS</i>	219
7.4. Resultados experimentales	221
7.5. Trabajos futuros	222
Bibliografía	224
Bibliografía	224
A. Archivos MATLAB	228
A.1. <i>SHELL_TEOR.m</i>	232
A.2. <i>PFR_JRS.m</i>	235
A.3. <i>Graf.m</i>	237
A.4. <i>SHELL_EXP.m</i>	240
A.5. <i>EXP_PFR.m</i>	243
A.6. <i>JRS.m</i>	245
A.7. <i>NS.m</i>	246
A.8. <i>ExpNSmetodo.m</i>	248
A.9. <i>ExpNSfiltro.m</i>	250

B. Banco de Ensayos	252
B.1. Arquitectura	252
B.2. Rutinas del DSP	253
B.2.1. Rutina <i>JRS</i>	254
B.2.2. Rutina <i>RAAS</i>	257
B.2.3. Listado de las rutinas	259
C. Publicaciones realizadas por el autor	284

Índice de cuadros

3.1. Análisis de error y atenuación en el JRS/FIR.	20
3.2. JRS/MA, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).	72
3.3. JRS/fir1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).	73
3.4. JRS/fircls1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).	73
4.1. RAAS/MA, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).	133
4.2. RAAS/fir1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).	133
4.3. RAAS/fircls1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).	133
5.1. JRS/MA y RAAS/MA, Atenuación mínima en alta frecuencia (du- rante peor pico).	145
5.2. JRS/fir1 y RAAS/fir1, Atenuación mínima en alta frecuencia (du- rante peor pico).	147
5.3. JRS/fircls1 y RAAS/fircls1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).	147
6.1. PFR vs. frecuencia. Condiciones: JRS/MA, n=10.	150

6.2. PFR vs. frecuencia. Condiciones: RAAS/MA, n=10.	158
6.3. PFR vs. frecuencia. Condiciones: JRS/MA, n=100.	162
6.4. PFR vs. frecuencia. Condiciones: RAAS/MA, n=100.	167
6.5. PFR vs. frecuencia. Condiciones: JRS/MA, n=1000.	172
6.6. PFR vs. frecuencia. Condiciones: RAAS/MA, n=1000.	177
6.7. PFR vs. frecuencia. Condiciones: JRS/fir1, n=10.	182
6.8. PFR vs. frecuencia. Condiciones: RAAS/fir1, n=10.	188
6.9. PFR vs. frecuencia. Condiciones: JRS/fir1, n=100.	193
6.10. PFR vs. frecuencia. Condiciones: RAAS/fir1, n=100.	199
6.11. PFR vs. frecuencia. Condiciones: JRS/fir1, n=1000.	204
6.12. PFR vs. frecuencia. Condiciones: RAAS/fir1, n=1000.	210
A.1. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	229
A.2. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	229
A.3. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	230
A.4. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	230
A.5. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	230
A.6. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	230
A.7. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	231
A.8. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	231
A.9. Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.	231

Índice de figuras

2.1. Efecto aliasing.	8
2.2. Función densidad de probabilidad que caracteriza al muestreo alea- torio <i>JRS</i>	14
2.3. Función densidad de probabilidad del muestreo <i>JRS</i> , con una pdf base uniforme.	16
3.1. <i>JRS</i> seguido por un filtro de reconstrucción <i>FIR</i>	20
3.2. Función de muestreo en el <i>JRS</i>	22
3.3. PFR del proceso <i>JSR/MA</i> , con una entrada senoidal, para $n=10$, $n=100$ y $n=1000$. Escala lineal para la frecuencia.	29
3.4. PFR del proceso <i>JSR/MA</i> , con una entrada senoidal, para $n =$ 10 , $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica para la frecuencia. . .	30
3.5. PFR del proceso <i>JRS/MA</i> con una entrada senoidal pura, con $n =$ 10 . Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	34
3.6. PFR del proceso <i>JRS/MA</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	35

3.7. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/MA</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.	36
3.8. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/MA</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	37
3.9. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/MA</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	38
3.10. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/MA</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	39
3.11. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/MA</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Ampliación de la curva alrededor de $f = 90,9$ Hz. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	40
3.12. <i>PFR</i> del proceso <i>JSR/fir1</i> , con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala lineal de frecuencia.	42
3.13. <i>PFR</i> del proceso <i>JSR/fir1</i> , con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.	42
3.14. <i>PFR</i> del proceso <i>JSR/fircls1</i> , con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala lineal de frecuencia.	43
3.15. <i>PFR</i> del proceso <i>JSR/fircls1</i> , con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.	43

3.16. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.	44
3.17. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.	45
3.18. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.	46
3.19. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	47
3.20. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	48
3.21. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	49
3.22. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Ampliación alrededor de $f = 90,9\text{Hz}$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	50

3.23. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.	51
3.24. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.	52
3.25. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.	53
3.26. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	54
3.27. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de la frecuencia.	55
3.28. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	56
3.29. <i>PFR</i> del proceso <i>JRS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Ampliación alrededor de $f = 90,9\text{Hz}$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	57
3.30. <i>PFR</i> para entrada senoidal pura, con filtro <i>MA</i> , $n = 1000$, $T_s = 6\text{ms}$.	68

3.31. <i>PFR</i> para una entrada senoidal pura, con muestreo uniforme, con $T = 6\text{ms}$, filtro <i>fir1</i> y $n = 1000$.	68
3.32. <i>PFR</i> para una entrada senoidal pura, con muestreo uniforme, con $T = 6\text{ms}$, filtro <i>fircls1</i> y $n = 1000$.	69
3.33. <i>PFR</i> , entrada senoidal pura, <i>MA</i> con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$, $T_\tau = T_{AD}$ y $T_\tau = 0$.	72
3.34. <i>PFR</i> , entrada senoidal pura, <i>MA</i> con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$, $T_\tau = T_{AD}$ y $T_\tau = 0$. Escala logarítmica de f .	73
3.35. <i>PFR</i> , entrada senoidal pura, <i>MA</i> con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 1\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 1\text{ms}$). En todos los casos T_{AD} es el mismo.	74
3.36. <i>PFR</i> , entrada senoidal pura, <i>MA</i> con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 1\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 1\text{ms}$). En todos los casos T_{AD} es el mismo. Escala logarítmica de frecuencia.	75
3.37. Relación N/S , exacta, Ec. (3.87), y relación N/S aproximada, Ec. (3.89). Condiciones: filtro <i>MA</i> , $n = 10$, <i>JRS</i> entrada senoidal pura, $T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$.	83
3.38. Relación S/N , Ec. (3.90), y relación S/N simulada. Condiciones: filtro <i>MA</i> , $n = 10$, <i>JRS</i> entrada senoidal pura, $T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$.	84
3.39. S/N con ruido provocado sólo por el método, S/N con error provocado sólo por el filtro <i>MA</i> . Condiciones: filtro <i>MA</i> , $n = 10$, <i>JRS</i> entrada senoidal pura, $T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$.	86
3.40. Relación S/N , Ec. (3.90) y relación S/N simulada, para <i>JRS/fir1</i> , $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.	87

3.41. Relación N/S , Ec. (3.87) y relación N/S simulada, para $JRS/fircls1$, $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$	87
4.1. $RAAS$ seguido por un filtro de reconstrucción FIR	91
4.2. Función de muestreo $RAAS$	92
4.3. PFR de $RAAS/MA$, con entrada senoidal pura, $T_{AD} = 1\text{ms}$, $T_\tau =$ 10ms, $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$	101
4.4. PFR de $RAAS/MA$, con entrada senoidal pura, $T_{AD} = 1\text{ms}$, $T_\tau =$ 10ms, $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.	102
4.5. PFR del proceso $RAAS/MA$ con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Can- tidad de ensayos por experimento: $m = 100$	106
4.6. PFR del proceso $RAAS/MA$ con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	107
4.7. PFR del proceso $RAAS/MA$ con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	108
4.8. PFR del proceso $RAAS/MA$ con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Can- tidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	109
4.9. PFR del proceso $RAAS/MA$ con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	110

4.10. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/MA</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	111
4.11. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fir1</i> , con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$	113
4.12. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fir1</i> , con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.	113
4.13. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fircls1</i> , con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$	114
4.14. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fircls1</i> , con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.	114
4.15. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	115
4.16. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	116
4.17. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	117
4.18. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	118

4.19. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con	
$n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo.	
Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica	
de frecuencia.	119
4.20. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fir1</i> con una entrada senoidal pura, con	
$n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo.	
Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica	
de frecuencia.	120
4.21. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura,	
con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo.	
Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	121
4.22. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura,	
con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo.	
Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	122
4.23. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura,	
con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo.	
Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$	123
4.24. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura,	
con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo.	
Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica	
de frecuencia.	124
4.25. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura,	
con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo.	
Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica	
de frecuencia.	125

4.26. <i>PFR</i> del proceso <i>RAAS/fircls1</i> con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.	126
4.27. <i>PFR</i> , entrada senoidal pura, <i>MA</i> con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 6\text{ms}$, $T_{AD} = 3\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 6\text{ms}$). En todos los casos la $E[fm]$ es la misma . . .	129
4.28. <i>PFR</i> , entrada senoidal pura, <i>MA</i> con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 6\text{ms}$, $T_{AD} = 3\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 6\text{ms}$). En todos los casos la $E[fm]$ es la misma. Escala logarítmica de f	130
4.29. <i>PFR</i> , entrada senoidal pura, <i>MA</i> con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 1\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 1\text{ms}$). En todos los casos T_{AD} es el mismo.	131
4.30. <i>PFR</i> , entrada senoidal pura, <i>MA</i> con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 1\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 1\text{ms}$). En todos los casos T_{AD} es el mismo. Escala logarítmica de frecuencia.	132
4.31. <i>S/N</i> con ruido provocado sólo por el método, <i>S/N</i> con error provo- cado sólo por el filtro <i>MA</i> . Condiciones: filtro <i>MA</i> , $n = 10$, <i>RAAS</i> entrada senoidal pura, $T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$	135
5.1. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1\text{ms}$ y $T_S = 10\text{ms}$. Filtro <i>MA</i> con $n = 10$	140
5.2. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1\text{ms}$ y $T_S = 10\text{ms}$. Filtro <i>MA</i> con $n = 100$	140

5.3. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms.	
Filtro <i>MA</i> con $n = 1000$.	141
5.4. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms.	
Filtro <i>fir1</i> con $n = 10$.	141
5.5. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms.	
Filtro <i>fir1</i> con $n = 100$.	142
5.6. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms.	
Filtro <i>fir1</i> con $n = 1000$.	142
5.7. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms.	
Filtro <i>fircls1</i> con $n = 10$.	143
5.8. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms.	
Filtro <i>fircls1</i> con $n = 100$.	143
5.9. Comparación <i>RAAS</i> vs. <i>JRS</i> , con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms.	
Filtro <i>fircls1</i> con $n = 1000$.	144
6.1. <i>JRS/MA</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).	150
6.2. <i>JRS/MA</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 4 Hz. Señal de salida (abajo).	151
6.3. <i>JRS/MA</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 8 Hz. Señal de salida (abajo).	152
6.4. <i>JRS/MA</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).	153
6.5. <i>JRS/MA</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).	153
6.6. <i>JRS/MA</i> , $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).	154

6.7. <i>JRS/MA</i> , $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	154
6.8. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>JRS/MA</i> , $n = 10$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$	155
6.9. <i>RAAS/MA</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo)	155
6.10. <i>RAAS/MA</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo)	156
6.11. <i>RAAS/MA</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo)	156
6.12. <i>RAAS/MA</i> , $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	157
6.13. <i>RAAS/MA</i> , $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	157
6.14. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>RAAS/MA</i> , $n = 10$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$	158
6.15. <i>JRS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo)	160
6.16. <i>JRS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,4 Hz. Señal de salida (abajo)	161
6.17. <i>JRS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10 Hz. Señal de salida (abajo)	162
6.18. <i>JRS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo)	163
6.19. <i>JRS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo)	163

6.20. <i>JRS/MA</i> , $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	164
6.21. <i>JRS/MA</i> , $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	164
6.22. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>JRS/MA</i> , $n = 100$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$	165
6.23. <i>RAAS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo)	167
6.24. <i>RAAS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,7 Hz. Señal de salida (abajo)	167
6.25. <i>RAAS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10 Hz. Señal de salida (abajo)	168
6.26. <i>IRAAS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo)	168
6.27. <i>RAAS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo)	169
6.28. <i>RAAS/MA</i> , $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	169
6.29. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>RAAS/MA</i> , $n = 100$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$	170
6.30. <i>JRS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,01 Hz. Señal de salida (abajo)	172
6.31. <i>JRS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,04 Hz. Señal de salida (abajo)	173
6.32. <i>JRS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 7 Hz. Señal de salida (abajo)	173

6.33. <i>JRS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).	174
6.34. <i>JRS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).	174
6.35. <i>JRS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10,000 Hz. Señal de salida (abajo).	175
6.36. <i>JRS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10,000 Hz. Señal de salida (abajo).	175
6.37. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>JRS/MA</i> , $n =$ 1000, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.	176
6.38. <i>RAAS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,01 Hz. Señal de salida (abajo).	178
6.39. <i>IRAAS/MA</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10 Hz. Señal de salida (abajo).	178
6.40. <i>RAAS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoi- dal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).	179
6.41. <i>RAAS/MA</i> , $n = 1000$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinu- soidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).	179
6.42. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>RAAS/MA</i> , $n = 1000$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.	180
6.43. <i>JRS/fir1</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).	182
6.44. <i>JRS/fir1</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 6 Hz. Señal de salida (abajo).	183
6.45. <i>JRS/fir1</i> , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 20 Hz. Señal de salida (abajo).	183

6.46. $JRS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 30 Hz. Señal de salida (abajo)	184
6.47. $JRS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo)	184
6.48. $JRS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo)	185
6.49. $JRS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. Señal de salida (abajo)	185
6.50. $JRS/fir1, n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	186
6.51. Resultados experimentales (*) y curva teórica para $JRS/fir1, n = 10, T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$	186
6.52. $RAAS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo)	188
6.53. $RAAS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 20 Hz. Señal de salida (abajo)	188
6.54. $RAAS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 30 Hz. Señal de salida (abajo)	189
6.55. $RAAS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo)	189
6.56. $RAAS/fir1, n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo)	190
6.57. $RAAS/fir1, n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	190
6.58. $RAAS/fir1, n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	191

6.59. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>RAAS/fir1</i> , $n = 10, T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.	191
6.60. <i>JRS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).	193
6.61. <i>JRS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,6 Hz. Señal de salida (abajo).	194
6.62. <i>JRS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 4 Hz. Señal de salida (abajo).	194
6.63. <i>JRS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 40 Hz. Señal de salida (abajo).	195
6.64. <i>JRS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).	195
6.65. <i>JRS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).	196
6.66. <i>JRS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).	196
6.67. <i>JRS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).	197
6.68. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>JRS/fir1</i> , $n =$ 100, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.	197
6.69. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).	199
6.70. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1,1 Hz. Señal de salida (abajo).	199
6.71. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 4 Hz. Señal de salida (abajo).	200

6.72. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 40 Hz. Señal de salida (abajo)	200
6.73. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo)	201
6.74. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo)	201
6.75. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	202
6.76. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>RAAS/fir1</i> , $n = 100$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$	202
6.77. <i>JRS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,03 Hz. Señal de salida (abajo)	204
6.78. <i>JRS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,06 Hz. Señal de salida (abajo)	205
6.79. <i>JRS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $2\hat{V}$ y 0,3 Hz. Señal de salida (abajo)	205
6.80. <i>JRS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo)	206
6.81. <i>JRS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo)	206
6.82. <i>JRS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	207
6.83. <i>JRS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	207
6.84. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>JRS/fir1</i> , $n =$ 1000, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$	208

6.85. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,03 Hz. Señal de salida (abajo):	210
6.86. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,10 Hz. Señal de salida (abajo):	211
6.87. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1 Hz. Señal de salida (abajo):	211
6.88. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10 Hz. Señal de salida (abajo):	212
6.89. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo):	212
6.90. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo):	213
6.91. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	213
6.92. <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra)	214
6.93. Resultados experimentales (*) y curva teórica para <i>RAAS/fir1</i> , $n = 1000$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.	214
B.1. Arquitectura básica del Banco de Ensayos.	253
B.2. Diagrama de flujo del programa principal.	254
B.3. Diagrama de tiempos de las interrupciones utilizadas en la rutina <i>JSR</i> .	255
B.4. Diagrama de flujo de la subrutina de atención a interrupciones <i>TIMER_ISR</i> .	256
B.5. Diagrama de flujo de la subrutina de atención a interrupciones <i>ADC_ISR</i> .	257

B.6. Diagrama de flujo de la rutina de <i>Inicialización</i> .	258
B.7. Diagrama de tiempos en la rutina <i>RAAS</i> .	259
B.8. Diagrama de flujo de la subrutina <i>TIMER_ISR</i> para la rutina	
<i>RAAS</i> .	260

Agradecimientos

A Sergio González y a Rogelio García Retegui por su gran ayuda en la implementación de las pruebas experimentales.

A Marcos Funes por su apoyo en la utilización de los recursos informáticos.

A todos los miembros del Laboratorio de Instrumentación y Control por su permanente generosidad.

Resumen

La teoría clásica del muestreo uniforme establece que las señales a adquirir deben poseer un ancho de banda limitado y menor que la mitad de la frecuencia de muestreo (frecuencia de Nyquist). Si esta premisa no se cumple, se produce una alteración irremediable del espectro original de la señal por *aliasing*. Las soluciones convencionales consisten en limitar el ancho de banda con filtros anti-aliasing o aumentar la frecuencia de muestreo. En muchas oportunidades esto no es posible por lo que deben investigarse otras técnicas de adquisición y recuperación de señales. Esto motivó el análisis y desarrollo de los métodos de muestreo aleatorio, en sus dos variantes: Muestreo Aleatorio tipo Jitter (Jitter Random Sampling, *JRS*) y Muestreo Aleatorio Aditivo Asincrónico (Random Additive Asynchronous Sampling, *RAAS*). Se realizó una formulación analítica original de ambos métodos, cuando se utilizan filtros de reconstrucción tipo *FIR*. Se llevaron a cabo simulaciones que verificaron las ecuaciones teóricas desarrolladas. Se elaboró un *kit* de simulación de técnicas de muestreo aleatorio en *MATLAB*. Se implementaron evaluaciones experimentales que demostraron, por un lado, que las ecuaciones teóricas desarrolladas son válidas y, por otro, que las técnicas de muestreo aleatorio constituyen una solución interesante que permite eliminar los filtros antialiasing y utilizar frecuencias de muestreo menores que la de frecuencia de Nyquist.

Nomenclatura

α	Constante que indica la fracción del intervalo de muestreo que es aleatoria, $\alpha = \frac{T_r}{T}$.
B	Matriz de transformación del vector h al vector h [#] .
β	Constante que indica el valor de frecuencia de la señal senoidal de entrada, expresado en fracción de la frecuencia de Nyquist, $\beta = \frac{\omega}{N_f}$.
<i>CC</i>	Corriente continua.
<i>DA</i>	Convertidor Digital Analógico.
<i>DSP</i>	Digital Signal Processor.
$\delta(t)$	Delta de Dirac.
<i>ensayo</i>	Medición de la salida del filtro luego de haber muestreado aleatoriamente una entrada senoidal pura.
e_n	Error en la salida de un filtrado, debido a la diferencia entre los valores de un muestreo aleatorio y los valores de un muestreo uniforme.
$E[.]$	Esperanza matemática de una variable aleatoria.
ε_k	Error entre las muestras provenientes del muestreo aleatorio y las de un muestreo uniforme.
<i>FIR</i>	Finite Impulse Response.
f_c	Frecuencia de corte de una función.

f_m	Frecuencia media de muestreo.
f_{ir1}	Filtro pasabajos tipo <i>FIR</i> sintetizado por el método de Ventana de Hamming.
f_{ircls1}	Filtro pasabajos tipo <i>FIR</i> sintetizado por el método de Optimización por Mínimos Cuadrados.
$f_\phi(\phi)$	Pdf de la fase inicial de la señal $x(t)$.
$\phi \triangleq \text{Arg} [H(e^{j\omega T})]$	Fase que produce un filtro \mathbf{h} para una entrada senoidal de frecuencia ω .
$h_0 \dots h_{n-1}$	Coefficientes de un filtro \mathbf{h} de características FIR.
\mathbf{h}	Vector correspondiente a un filtro <i>FIR</i> , formado por los coeficientes $h_0 \dots h_{n-1}$.
$H(z)$	Transformada z del vector \mathbf{h} .
$\mathbf{h}^\#$	Vector equivalente que surge de alterar el filtro <i>FIR</i> a través del muestreo aleatorio
$h_0^\# \dots h_{n-1}^\#$	Coefficientes del vector equivalente $\mathbf{h}^\#$.
$H^\#(z)$	Transformada z del vector $\mathbf{h}^\#$.
$\hat{H}(z)$	Transformada z del vector $\hat{\mathbf{h}}$, donde $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}\mathbf{h}^T$.
$H^\circledast(z)$	Transformada z del vector \mathbf{h}^\circledast , donde $h_k^\circledast = h_{k-1}^\#$.
<i>JRS</i>	Jitter Random Sampling.
<i>JRS/MA</i>	Proceso constituido por un muestreo aleatorio tipo <i>JRS</i> seguido por un filtrado tipo Moving Average.
<i>JRS/FIR</i>	Proceso constituido por un muestreo aleatorio tipo <i>JRS</i> seguido por un filtrado tipo <i>FIR</i> .
m	Número de ensayos que se realizan en cada experimento durante las simulaciones.
<i>MA</i>	Moving Average.

$norm1(\mathbf{h})$	Norma 1 del vector \mathbf{h} .
$norm2(\mathbf{h})$	Norma 2 del vector \mathbf{h} .
N_f	Frecuencia de Nyquist, es decir $N_f = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{T}$.
$\frac{N}{S}(\omega)$	Relación ruido señal para una dada frecuencia de entrada ω .
pdf	Probability density function.
$P_e(\omega)$	Potencia media del error de salida debido al error entre muestras del muestreo aleatorio y las del muestreo uniforme.
$P_\nu(\omega)$	Potencia media de salida para una entrada senoidal de frecuencia ω asumiendo muestreo uniforme.
$PF\!R$	Power Frequency Response.
$RAAS$	Random Additive Asynchronic Sampling.
$RAAS/MA$	Proceso constituido por un muestreo aleatorio tipo $RAAS$ seguido por un filtrado tipo Moving Average.
$RAAS/fir1$	Proceso constituido por un muestreo aleatorio tipo $RAAS$ seguido por un filtrado tipo $fir1$.
$RAAS/fircl1$	Proceso constituido por un muestreo aleatorio tipo $RAAS$ seguido por un filtrado tipo $fircl1$.
$s(t)$	Función de muestreo.
$\text{sinc}(\gamma)$	Función definida como $\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}$.
S/N	Relación señal ruido.
T_{AD}	Tiempo de conversión analógico digital.
$X(\omega)$	Transformada de Fourier de la señal $x(t)$.
\hat{X}	Estimación de la función $X(\omega)$, para $\omega = 0$.
$x(t)$	Señal de entrada.

$\dot{x}_k, \ddot{x}_k, \text{ etc.}$	Derivadas primera, segunda, etc. de x_k respecto del tiempo.
\hat{x}_k	Muestras resultantes del muestreo aleatorio de la señal de entrada.
μ	Resultado obtenido luego de filtrar las muestras obtenidas en el muestreo aleatorio.
$var [\cdot]$	Varianza de una variable aleatoria.
*	Operación de convolución
$\ \mathbf{h}\ = \sum_{k=1}^n h_k$	Norma 1 del vector \mathbf{h} .
$\ \mathbf{h}\ _2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n h_{n-k}^2}$	Norma 2 del vector \mathbf{h} .

Capítulo 1

Introducción

Con el advenimiento de los sistemas digitales, fue necesario transformar las variables analógicas del mundo real en variables discretas del mundo digital. Por lo tanto surgieron los sistemas de adquisición analógico-digital que, actualmente, son esenciales en los sistemas de medición, de automatización y de control. La rápida evolución de los esquemas de procesamiento digital ha sido acompañada por la aparición de nuevas técnicas de procesamiento y el desarrollo de nuevas tecnologías donde los sistemas de conversión analógico-digital han sido claves.

Un sistema de adquisición está concebido normalmente para adquirir múltiples canales analógicos. La estructura elemental de un sistema de adquisición está formada por una etapa de acondicionamiento de señales por canal, y luego un multiplexor y un único convertidor Analógico Digital. El funcionamiento de esta estructura está basado en la teoría del muestreo.

La teoría del muestreo se sustenta en la periodicidad del muestreo, es decir que se supone que los instantes de adquisición son periódicos. En estas condiciones, dicha teoría establece que las señales a adquirir deben poseer un ancho de banda limitado y menor que la mitad de la frecuencia de muestreo (frecuencia de Nyquist). Si esta premisa no se cumple, se produce una alteración irremediable

del espectro original de la señal (efecto *aliasing*).

En los sistemas de adquisición de señales, la frecuencia de muestreo está restringida principalmente por el tiempo de conversión del convertidor A/D . Además, cuando un único conversor A/D debe atender a numerosos canales, la frecuencia de muestreo máxima de cada señal es igual a la inversa del tiempo de conversión, dividida por la cantidad de canales. Adicionalmente, la aplicación del multiplexado impone una frecuencia de muestreo menor aún debido al tiempo de establecimiento que se necesita al multiplexar de un canal a otro [30]. Por otro lado, aún en sistemas de adquisición muy rápidos y/o de pocos canales, la frecuencia de muestreo se debe restringir cuando, periódicamente y durante cierto intervalo de tiempo, las señales que se deben adquirir no están disponibles. Esto obedece a que en dichos intervalos no es posible realizar la adquisición o sensado de las variables del proceso y, en consecuencia, el propio proceso es el que impone la frecuencia de muestreo. El rasgo común en estos casos es una frecuencia de muestreo que no cumple con las premisas establecidas.

Bajo estas condiciones restrictivas de la frecuencia de muestreo, las señales a adquirir pueden poseer un espectro que se extiende más allá de la frecuencia de Nyquist. Un caso muy común es aquel en el que la señal posee un espectro útil de baja frecuencia cuya frecuencia máxima sea efectivamente inferior a la frecuencia de Nyquist sumado a un espectro de ruido de alta frecuencia. Como consecuencia del espectro del ruido se produce aliasing.

La solución convencional a este problema es la utilización de filtros antialiasing. El objeto de los filtros antialiasing es atenuar lo más posible el contenido armónico superior a la frecuencia de Nyquist. Los filtros antialiasing son analógicos y se insertan en las etapas circuitales de acondicionamiento de las señales, previas a la conversión analógico-digital. El diseño de un filtro antialiasing debe considerar tres conceptos: la frecuencia máxima de la señal útil, la frecuencia de

muestreo y la mínima atenuación que debe presentar el filtro para las componentes de aliasing, las que necesariamente existen ya que el filtro no es ideal. Los filtros antialiasing están concebidos a partir de amplificadores operacionales y poseen resistencias y capacitores que sirven para realizar el filtrado. Los filtros antialiasing más simples requieren un amplificador operacional, dos resistencias y dos capacitores por filtro si se implementan en versión diferencial. La implementación de este circuito implica una superficie de la placa electrónica que puede ser significativa si la cantidad de canales es importante.

Los problemas mencionados motivaron el análisis de otros métodos de muestreo que, de alguna manera, permitan aumentar la frecuencia de utilización, eliminar los filtros antialiasing y reducir el tamaño de la electrónica.

1.1. Propuesta

En esta tesis se propone analizar, cuantificar e implementar técnicas de muestreo aleatorio, seguido del filtrado digital tipo *FIR* (Respuesta Finita al Impulso), que atenúen los problemas anteriores.

El razonamiento que a priori llevó a proponer estos métodos se apoyó en el análisis de un caso particular: el muestreo uniforme de una perturbación senoidal cuya frecuencia es muy cercana a la de muestreo. En estas condiciones se podría inferir que el aliasing de baja frecuencia causado por la perturbación, se produce en la medida en que las frecuencias sean cercanas, es decir cuando exista cierta correlación entre la senoidal interferente y la función de muestreo. Una forma intuitiva de reducir la correlación y, por lo tanto, mitigar el aliasing, consistiría en esparcir el espectro de la función de muestreo, lo cual se puede lograr, por ejemplo, muestreando en forma aleatoria en lugar de uniforme. Luego, una vez

reducido el aliasing, el ruido provocado por la propia aleatoriedad del muestreo podría ser atenuado por medio de un filtro de reconstrucción tipo pasa-bajos.

El propósito de la tesis es trabajar sobre las dos técnicas existentes de muestreo aleatorio: Muestreo Aleatorio tipo Jitter (Jitter Random Sampling, *JRS*) y Muestreo Aleatorio Aditivo Asíncrono (Random Additive Asynchronous Sampling, *RAAS*).

Los objetivos particulares de este trabajo de tesis son los siguientes:

- Estudiar ambas técnicas de muestreo aleatorio, cuando se utilizan filtros de reconstrucción tipo *FIR*.
- Desarrollar las expresiones analíticas necesarias para el diseño del sistema de adquisición con muestreo aleatorio tipo *JRS* y *RAAS* seguido de *FIR*.
- Aplicar las expresiones a fin de reducir el efecto aliasing en sistemas de adquisición.
- Comparar ambas técnicas, *JRS* y *RAAS*, y verificar cuál conviene según sea la aplicación.
- Elaborar un conjunto de rutinas para simular estas aplicaciones.
- Implementar experimentalmente las técnicas mencionadas y verificar su desenvolvimiento.

1.2. Estructura de la tesis

En cuanto a la estructura de esta tesis, la misma está constituida por seis capítulos y dos apéndices. En el Capítulo 1 se relatan los aspectos introductorios y la justificación de la propuesta y, además, se esboza la solución para resolverlos.

En el Capítulo 2 se presenta la teoría del muestreo uniforme y la del aleatorio. En el Capítulo 3 se desarrolla la formulación teórica de las expresiones que determinan las características del proceso de muestreo aleatorio del tipo Jitter Random Sampling (*JRS*). En el Capítulo 4 expone el desarrollo teórico de las ecuaciones relacionadas con el muestreo aleatorio tipo Random Additive Asynchronic Sampling (*RAAS*). En el Capítulo 5 se describen los resultados obtenidos de comparar los dos tipos de muestreo aleatorio abordados en los Capítulos 3 y 4, para distintos tipos de filtros. En el Capítulo 6 se detallan los resultados experimentales que confirman las simulaciones mostrados en los capítulos anteriores. En el Capítulo 7 se explicitan las conclusiones de esta tesis. Finalmente en el Capítulo 8 se lista la bibliografía utilizada. En el Apéndice 1 se muestran las simulaciones realizadas y el conjunto de rutinas *MATLAB* que fueron utilizadas. En el Apéndice 2 se describe el banco experimental basado en un *DSP* y los programas desarrollados para realizar las experiencias de verificación. Por último, en el Apéndice 3 se documentan las publicaciones realizadas por el tesista en relación con el tema de tesis.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Muestreo Uniforme

El muestreo uniforme es aquel en el que los tiempos de muestreo están uniformemente espaciados y, por lo tanto, la señal de muestreo es periódica. En ingeniería se suele modelar el muestreo de una función $x(t)$ por medio de la multiplicación de $x(t)$ por la función de muestreo. En el muestreo ideal, la función de muestreo está definida como una secuencia de impulsos de Dirac. Por lo tanto, la señal muestreada $x_k(t)$ está determinada por:

$$x_k(t) = x(t) \cdot s(t) \tag{2.1}$$

$$s(t) = \sum_{k \in Z} \delta(t - kT) \tag{2.2}$$

en donde Z representa el conjunto de los números naturales. Por lo tanto:

$$x_k(t) = x(t) \sum_{k \in Z} \delta(t - kT) \tag{2.3}$$

La transformada de Fourier de un tren de deltas resulta:

$$\mathcal{F} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT) \right] = \frac{2\pi}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega + \frac{2\pi m}{T}) \quad (2.4)$$

Dado que la multiplicación en el dominio del tiempo se transforma en convolución en el dominio de la frecuencia, se llega a:

$$X_k(\omega) = X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega + \frac{2\pi m}{T}) = \frac{2\pi}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(\omega + \frac{2\pi m}{T}) \quad (2.5)$$

donde el símbolo $*$ denota la operación de convolución.

Así, el proceso de muestreo resulta en una periodización de $X(\omega)$.

La reconstrucción de la $x(t)$ se logra mediante un filtro $\Phi(\omega)$ que elimine los componentes de $X_k(\omega)$ para todo m excepto $m = 0$. Es decir:

$$X_{rec}(\omega) = \Phi(\omega) \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(\omega + \frac{2\pi m}{T}) \quad (2.6)$$

donde la reconstrucción perfecta es posible sólo si $\Phi(\omega)$ es un pasabajos ideal (en el tiempo, $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$) y $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > \frac{\pi}{T}$ (Criterio de Nyquist).

Por otro lado, si $X(\omega) \neq 0$ para $|\omega| > \frac{\pi}{T}$, entonces la periodización de su transformada de Fourier resulta en una superposición espectral que permanece luego de la reconstrucción $\Phi(\omega)$. Esta distorsión es imposible de eliminar y se denomina aliasing. Esto se puede observar en la Fig. [2.1](#).

2.1.1. Aliasing en la medición de señales *CC* o baja frecuencia inmersas en ruido impulsivo [\[20\]](#)

Se analiza el muestreo de una señal $x(t)$ caracterizada por poseer un espectro discreto, compuesta por una componente de *CC* más otras componentes que

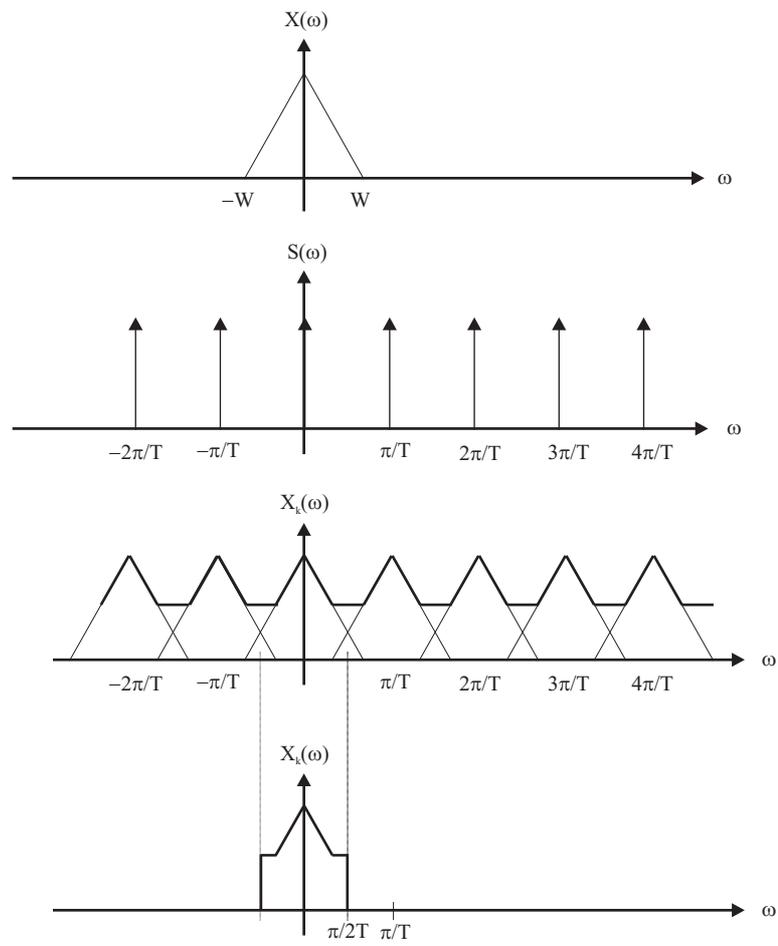


Figura 2.1: Efecto aliasing.

representan un ruido impulsivo:

$$x(t) = X(0) + \sum_{q=1}^{\infty} X(q) \cos(\omega_q t + \phi_q) \quad (2.7)$$

donde $X(0)$ representa la componente de CC que se desea medir, la cual, en el dominio del tiempo, está definida por:

$$X(0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} x(t) dt \quad (2.8)$$

En esta ecuación es necesario considerar el intervalo de medición τ tendiendo a infinito, para definir unívocamente la cantidad a adquirir en sus muchas posibles situaciones de interés práctico. En realidad, aunque es generalmente correcto suponer que la señal $x(t)$ puede ser descrita por la (2.7), no es necesariamente cierto que sea estrictamente periódica, porque no es siempre cierto que las frecuencias angulares posean submúltiplos comunes.

En la práctica, el intervalo de medición debe ser finito. Por lo tanto la integración a lo largo de un intervalo infinito, definido en la Ec. (2.8), es sustituido por un filtro pasabajos, lo que resulta en una estimación \hat{X} de $X(0)$ que, si bien es próxima a $X(0)$ poseerá desviaciones de lenta dinámica:

$$\hat{X} = X(0) \pm \Delta f(t) \quad (2.9)$$

La operación de muestreo uniforme es descrita por la Ec. (2.1), donde la función $s(t)$ es periódica con todos los armónicos de igual amplitud. Como $x(t)$ también posee un espectro discreto (Ec. (2.7)), debido al producto $x(t) \cdot s(t)$ pueden existir componentes espectrales de muy baja frecuencia (o incluso CC), cuando alguno de las componentes de $x(t)$ posea frecuencias cercanas a la frecuencia de muestreo o a un múltiplo de ella. La señal muestreada puede ser expresada de la

forma:

$$\begin{aligned}
 x(t).s(t) &= \left[X(0) + \sum_{q=1}^{\infty} X(q) \cos(\omega_q t + \phi_q) \right] \cdot \left[1 + \frac{2}{T} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m2\pi}{T}t\right) \right] \\
 &= X(0) + \sum_{q=1}^{\infty} X(q) \cos(\omega_q t + \phi_q) + \frac{2}{T} X(0) \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m2\pi}{T}t\right) + \\
 &\quad \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X(q) \left\{ \cos \left[\left(\omega_q + \frac{m2\pi}{T} \right) t + \phi_q \right] + \cos \left[(\Omega_q - i\Omega_s) t + \phi_q \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

En la Ec. (2.10) puede observarse la presencia de componentes con frecuencias angulares $\omega_q - \frac{m2\pi}{T}$, que pueden ser próximas e incluso iguales a cero si la frecuencia de muestreo no es mayor que dos veces el ancho de banda de $x(t)$. Claramente, las componentes espectrales pueden introducir una componente espúrea CC o de baja frecuencia que no pueden ser eliminadas.

Este problema puede resolverse seleccionando la frecuencia de muestreo de forma tal que el mínimo de $\omega_q - \frac{m2\pi}{T}$ sea lo más grande posible. Esta operación puede ser imposible ya que en general no se conoce a priori el contenido espectral de $x(t)$. La situación planteada es perfectamente probable en aquellas aplicaciones donde el período de muestreo no es lo suficientemente pequeño.

2.2. Muestreo Aleatorio

En los sistemas de adquisición se utiliza usualmente un equiespaciamento periódico entre las muestras. Como consecuencia la representación frecuencial de las señales muestreadas es también periódica. Si bien el esquema tradicional consistente en el muestreo uniforme cubre la mayor parte de las aplicaciones, presenta limitaciones para otras aplicaciones como la mencionada en este trabajo.

En estos casos, el muestreo irregular consistente en un planteo más general, donde el muestreo de las señales no está restringido a uno temporalmente equiespaciado, constituye una solución. La irregularidad en el muestreo puede ser determinística o aleatoria; en el caso de la segunda, el muestreo se denomina aleatorio.

Si bien el muestreo aleatorio no es nuevo ya que existen varios autores que han realizado aportes en este tema, todavía no existe una teoría suficientemente desarrollada y menos aún criterios claros de diseño ingenieril. De todas maneras existen ciertos conceptos relativamente bien establecidos como el hecho de que las señales muestreadas aleatoriamente bajo ciertas condiciones, no presentan aliasing. Por lo tanto, si la función de muestreo aleatorio está correctamente definida, entonces las señales a adquirir y procesar pueden contener componentes que excedan la frecuencia de Nyquist, sin producir distorsión apreciable. Este hecho permitiría ciertas ventajas de tipo práctico muy importantes como por ejemplo la posibilidad de eliminar filtros antialiasing, o de operar con frecuencias de muestreo más reducidas. En ambos ejemplos, la reducción de costos es evidente.

El muestreo aleatorio no contradice la teoría del muestreo uniforme sino que la extiende. En otras palabras, el muestreo uniforme es un caso particular del muestreo aleatorio. El tema del muestreo aleatorio fue abordado por múltiples autores siendo los precursores Shapiro y Silverman [28] y Balakrishnan [3]. Según sea la función de muestreo, la literatura plantea dos tipos de muestreo aleatorio: Random Additive Asynchronous Sampling (*RAAS*) y Jitter Random Sampling (*JRS*). En el primero los tiempos de muestreo aleatorios se van sumando, resultando un esquema asincrónico [28]. En cambio en el *JRS* existe un marco sincrónico, con un tiempo de muestreo sincrónico que es utilizado como base, al que se le suma una aleatoriedad. El muestreo aleatorio tipo *JRS* fue tratado originalmente por Balakrishnan [3], Brown [6] y Leneman [12]. Balakrishnan [3] y otros [32], [18], [5], [7], [31], [9], [8], [4], [17] han recurrido al *JRS* para analizar la perturbación

que provoca el jitter aleatorio que se produce en sistemas donde se requiere muestreo uniforme. Este tema es muy importante y existen autores que han estudiado diferentes aspectos como el efecto del jitter que se produce en el reloj en circuitos "sample and hold" [29] o en los convertidores A/D [11].

Las descripción matemática del muestreo aleatorio se basa en la Ec. (2.2), modificada como sigue:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k) \quad (2.11)$$

En el desarrollo de un modelo generalizado del muestreo, se puede utilizar una secuencia de puntos de muestreo $\{t_k\}$. Para el caso particular del muestreo *JRS*, la secuencia $\{t_k\}$ se construye a partir de la suma de un tiempo aleatorio y un tiempo determinístico, donde este último se incrementa en forma fija con un período T . Los tiempos de muestreo del *JRS* se pueden expresar como:

$$t_k = kT + \tau_k \quad T > 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

donde $\{\tau_k\}$ es una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con valor medio nulo.

Utilizando la Ec. (2.12), se obtiene:

$$x_k(t) = x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - (kT + \tau_k)) \quad (2.13)$$

La Ec. (2.13) describe el modelo general de muestreo *JRS*, que expresa un concepto más amplio que el del muestreo convencional. El muestreo equiespaciado es sólo un caso particular del modelo general. El modelo general presentado es independiente del tipo de señal. Tanto las señales determinísticas como aleatorias pueden ser tratadas con este modelo.

Si bien se desarrollarán las ecuaciones del modelo *JRS* destinado a la atenuación del aliasing, el *JRS* está originalmente dirigido al análisis del problema de las fluctuaciones del período de muestreo en los casos del muestreo uniforme. En rigor, las variaciones del tiempo de muestreo siempre están presentes, aunque en la mayoría de los casos el efecto puede considerarse despreciable. La importancia del efecto de las fluctuaciones depende de la magnitud de las mismas y del tipo de procesamiento que deba realizarse.

Ante la perspectiva de utilizar el *JRS* para eliminar el aliasing en la adquisición de señales, en la Fig. ?? se ilustran las *pdf* de los intervalos de muestreo t_k para $k = 1, 2, 3, \dots$. Las *pdf* de los tiempos de muestreo se denotan con $p_k(t)$. El conjunto de puntos de muestreo posee entonces una *pdf* que vale:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)$$

En la Fig. ?? se puede apreciar la $p(t)$, donde aparecen múltiples máximos y mínimos. Se puede advertir de la figura que no existe igual probabilidad para todos los instantes de muestreo, sino que la probabilidad es mayor alrededor de los instantes kT . De esta forma algunas partes de la señal a adquirir serán muestreadas con más probabilidad que otras, lo que no es deseable. Además, este hecho conspira contra la necesidad de disponer de un muestreo que difiera sustancialmente del clásico muestreo uniforme, a efectos de eliminar el efecto de aliasing propio de este muestreo. Una forma de evitar este problema y disponer de una $p(t)$ constante para todos los puntos de muestreo es utilizar una *pdf* tipo uniforme en los intervalos $kT \pm 0,5T$, como se muestra en la Fig. ?. Sin embargo esta $p(t)$ es imposible de obtener ya que sería necesario disponer de una frecuencia de muestreo infinita. Debe considerarse que para que se cumpla una $p(t)$ constante debe permitirse la existencia de instantes de muestreo contiguos sin

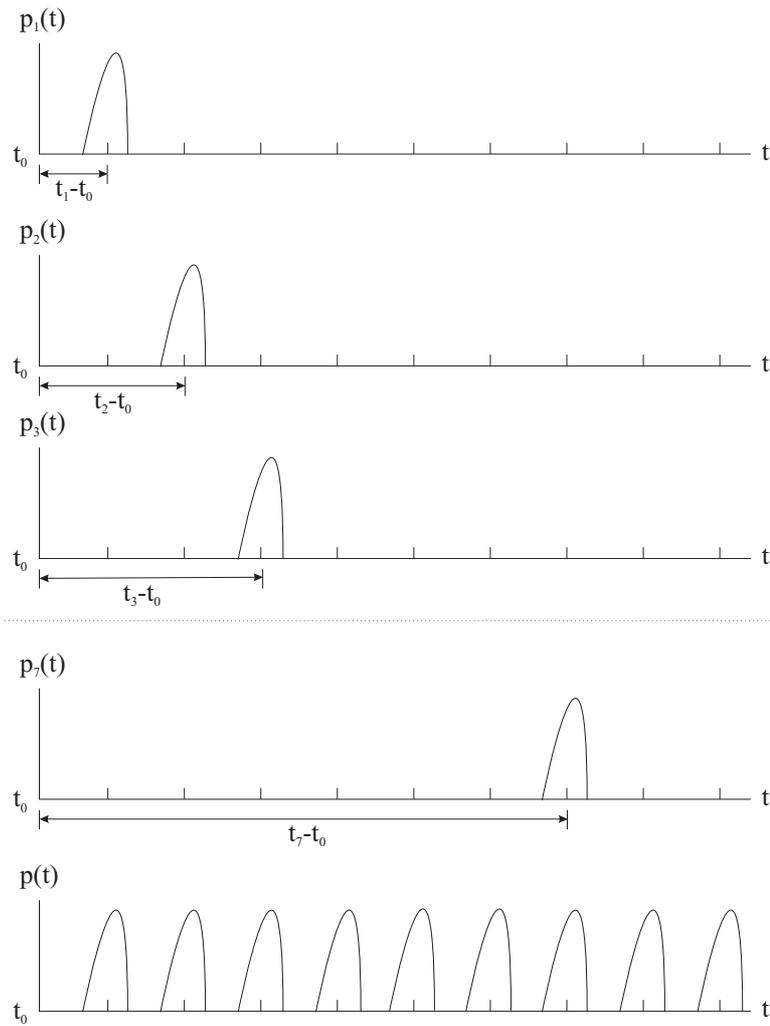


Figura 2.2: Función densidad de probabilidad que caracteriza al muestreo aleatorio *JRS*.

mediar tiempo entre ellos. Esto es tecnológicamente imposible, ya que el intervalo mínimo entre puntos de muestreo debe ser nulo, es decir se requiere un período de muestreo nulo. Si bien este extremo no es posible, es necesario disponer de un alto valor de aleatoriedad, es decir, el dominio de la variable aleatoria debe ser lo más parecido posible al período T . En otras palabras, la *pdf* debe ser:

$$f(\tau_k) = \frac{1}{T_\tau} \quad \text{con } \tau_k \in \left[-\frac{T_\tau}{2}, \frac{T_\tau}{2} \right] \quad (2.14)$$

donde $T_\tau \simeq T$.

Resumiendo, el *JRS* presenta las siguientes desventajas: 1) las variables aleatorias $\{t_k\}$ deben poseer una distribución estrictamente uniforme dentro de los intervalos; 2) los intervalos de tiempo entre los instantes de muestreo t_k y t_{k+1} pueden ser muy pequeños.

En el caso del muestreo aleatorio aditivo asincrónico (*RAAS*), las adquisiciones se realizan en los instantes:

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

donde los τ_k son variables aleatorias.

Este esquema de muestreo aleatorio, propuesto por Shapiro y Silverman [28], está basado en la suposición de que los sucesivos intervalos de muestreo son estadísticamente independientes y poseen una distribución idéntica. Las propiedades estadísticas de cada intervalo de muestreo están determinadas por su valor medio μ y su desviación estándar σ . En consecuencia la frecuencia media de muestreo es $\frac{1}{\mu}$.

Si se considera el intervalo de tiempo $[0, t_k]$, donde $t_k = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$, y las variables aleatorias $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ están caracterizadas por sus respectivas *pdfs*

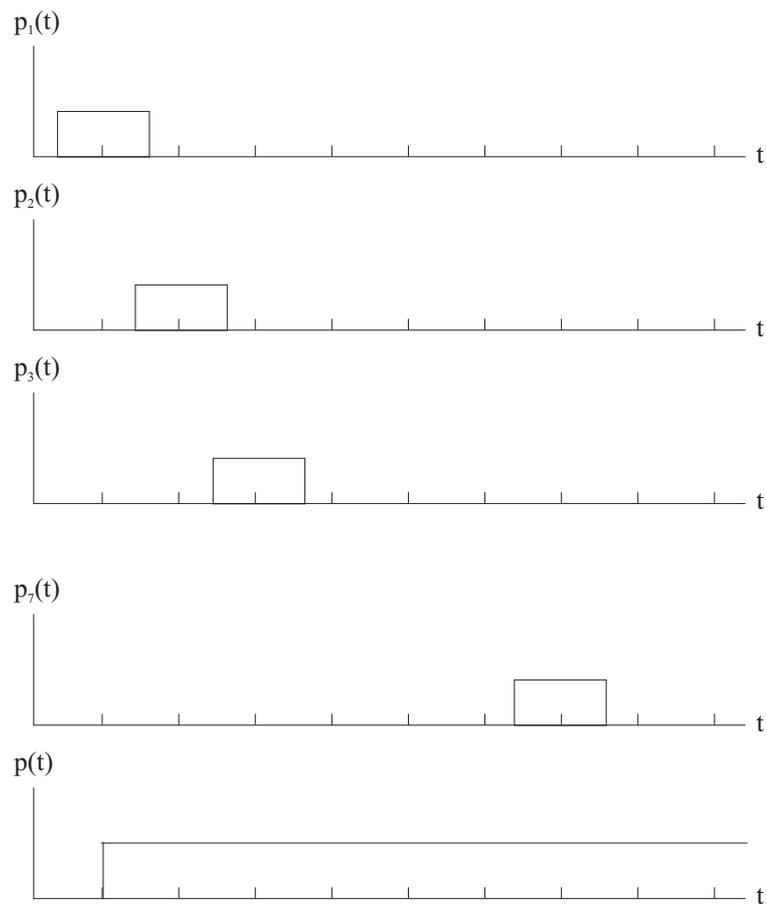


Figura 2.3: Función densidad de probabilidad del muestreo *JRS*, con una pdf base uniforme.

$\{p_k(t)\}$, entonces se puede arribar a la conclusión siguiente. Si una variable aleatoria $[0, \tau_k]$ representa el resultado neto de una suma lineal de k variables estadísticamente independientes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, entonces, independientemente de las características de las *pdfs* de las variables, la *pdf* de $[0, \tau_k] = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$, se aproxima a una *pdf* normal a medida que k tiende a ∞ , Teorema del Límite Central [26]. En consecuencia, en el caso del *RAAS*, aún cuando las *pdfs* de las variables aleatorias τ_k sean de diferente tipo y con dominios temporales menores que T , las condiciones del muestreo pueden ser satisfactorias.

Existen trabajos donde se realizaron estudios comparativos sobre estos dos métodos, Bland et al [33]. Otros autores han propuesto métodos modificados de los anteriores como Lo y Purvis que propusieron un *RAAS* modificado a efectos de reducir la carga computacional [13].

La aplicación del muestreo aleatorio para eliminar el problema del aliasing ante señales no limitadas en banda o ante sistemas de adquisición que no cumplen con el teorema de Nyquist fue abordado por Beutler et al [4], Masry [14], Kan et al [10] y de Waele et al [33]. Beutler desarrolló una formulación general del proceso del muestreo aleatorio para eliminar el aliasing, y presentó criterios para aplicar el *RAAS* a varios tipos de señales [4]. Masry analizó diferentes esquemas de muestreo e investigó sus propiedades para eliminar el aliasing [14]. Con este mismo concepto existen autores que han aplicado el muestreo aleatorio para reducir la frecuencia equivalente de muestreo y por lo tanto han logrado reducir los costos del hardware necesario [25], [24]

La reconstrucción con filtros digitales fue estudiada por Rogozhkin et al [27], por Kan et al [10] y Tarckzynski et al [34].

La aplicación del muestreo aleatorio a la medición basada en una conversión no lineal de las señales (vatímetros, voltímetros vectoriales), basada en un muestreo *RAAS*, fue propuesta por [20], [16], [35] y [21].

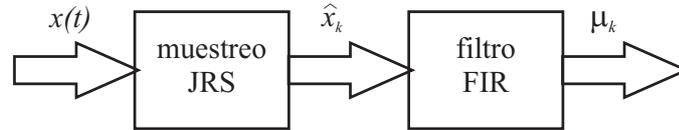
Además existen múltiples aplicaciones donde se ha utilizado el muestreo aleatorio para la medición de espectros, como por ejemplo [23], [19], o para la conmutación aleatoria de capacitores en filtros basados conmutación de capacitores [2].

Una de las dificultades observadas en la bibliografía es la inexistencia de un análisis ingenieril así como de expresiones teóricas que contemplen esta orientación. Por otra parte, tampoco existen expresiones analíticas que contemplen de manera general el comportamiento de un filtro *FIR*. En cuanto a la elección del método, *RAAS* o *JRS*, si bien existen publicaciones que abordan la comparación de ambos esquemas de muestreo aleatorio, no existe una comparación que contemple un rango amplio de frecuencias, ni existe una comparación que incluya diversos tipos de filtros. En esta tesis se trata de dar respuestas a estos problemas.

Capítulo 3

Muestreo Aleatorio tipo Jitter (Jitter Random Sampling, *JRS*)

En este capítulo se desarrolla la formulación correspondiente al muestreo aleatorio tipo jitter (*JRS*), seguido de un filtro digital de reconstrucción de Respuesta Finita al Impulso (Finite Impulse Response, *FIR*). En la Fig. [3.1](#) se muestra el esquema del proceso. El objetivo es adquirir señales de baja frecuencia inmersas en ruido. A efectos de evaluar el comportamiento de esta técnica, se considerarán dos aspectos: 1) la atenuación del ruido de alta frecuencia, cuyo indicador será la Respuesta en Frecuencia de Potencia (Power Frequency Response, *PFR*), cuyo concepto se desarrolla más abajo. 2) La exactitud de la señal adquirida a bajas frecuencias. En este último caso se aceptará que existe ruido equivalente al error de medición producido por el propio método *JRS/FIR*, que es de baja frecuencia, y se utilizará la relación señal ruido S/N como indicador. En la Tabla [3.1](#) se esquematiza lo mencionado. Se desarrollan en este capítulo las formulaciones analíticas de *PFR* y S/N , las que son además contrastadas con resultados de simulación.


 Figura 3.1: *JRS* seguido por un filtro de reconstrucción *FIR*.

Tipo de análisis	<i>PFR</i>	<i>S/N</i>
Objeto	cuantificar atenuación del aliasing	cuantificar error producido por el <i>JRS</i>
Señal analizada	ruido	señal útil
Rango de frecuencia	altas frecuencias	bajas frecuencias

 Tabla 3.1: Análisis de error y atenuación en el *JRS/FIR*.

3.1. Desarrollo de la *PFR*

El objetivo de esta sección es demostrar que el aliasing producido por el ruido de alta frecuencia puede ser sustancialmente atenuado por el proceso *JRS/FIR*. Se asumirá que el ruido aplicado a la entrada es periódico, de frecuencia f , y se obtendrá la potencia media de salida provocada por el ruido. Para ello se utilizará la *PFR* (Power Frequency Response) que definimos como la relación de potencias entre la salida y la entrada, en función de la frecuencia de la entrada. Esto significa que, dada una entrada senoidal de frecuencia f , la $PFR(f)$ será la atenuación de potencia causada por el *JRS/FIR* para dicha entrada. En una primera etapa se considerará que la entrada es senoidal pura. Luego se extenderá el análisis para una entrada de cualquier tipo, con la sola salvedad de que sea periódica. Finalmente se tratará el caso de una entrada formada por senos no correlacionados, típico del ruido impulsivo o ruido blanco. En cada caso se realizará el desarrollo general válido para cualquier filtro *FIR*, y luego se particularizará para filtros *FIR* específicos, en especial para el filtro Moving Average

(*MA*).

3.2. *JRS/FIR* con entrada senoidal

El objeto de esta sección es encontrar una formulación que exprese la atenuación de potencia del ruido de alta frecuencia. Se considerará un ruido de entrada de tipo senoidal, $x(t)$, dado por:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.1)$$

donde ω es la frecuencia angular y ϕ es la fase inicial.

La función de muestreo del *JRS*, $s(t)$, se observa en la Fig. 3.2 y vale:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_k) \quad (3.2)$$

$$t_k = kT + \tau_k \quad (3.3)$$

donde τ_k es la parte aleatoria, T es el período y, por lo tanto, kT es la parte sincrónica del muestreo. La variable aleatoria τ_k posee una función densidad de probabilidad (*pdf*) uniforme, Ec. (3.4).

$$f_{\tau_k}(\tau_k) = \frac{1}{T_\tau} \quad [-T_\tau/2, T_\tau/2] \quad (3.4)$$

siendo $T_\tau \leq T$. Dado que τ_k puede variar entre $-T_\tau/2$ y $T_\tau/2$, el período T está constituido por una parte puramente aleatoria de extensión T_τ más otra parte determinística asociada con el máximo tiempo de conversión, T_{AD} , es decir $T = T_\tau + T_{AD}$. El tiempo T_{AD} se debe al tiempo de conversión AD y, si bien no es deseable para los fines de esta propuesta, es inevitable.

Luego del proceso *JRS*, las muestras son:

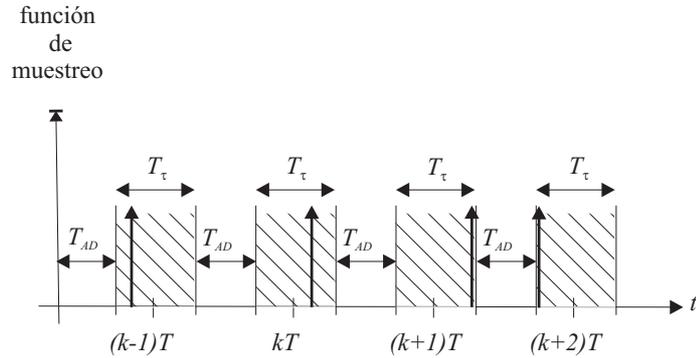


Figura 3.2: Función de muestreo en el JRS.

$$\hat{x}_k = A \cos [\omega (kT + \tau_k) + \phi] \quad (3.5)$$

Las muestras son luego filtradas por un filtro *FIR*, resultando:

$$\mu = \sum_{k=1}^n h_{n-k} \hat{x}_k \quad (3.6)$$

donde $h_0 \dots h_{n-1}$ son los coeficientes del filtro y n es el orden del filtro.

Suponiendo que el proceso es ergódico, es decir, que se cumple que el promedio del ensamble es igual al valor medio en el tiempo, entonces la varianza de la salida es igual a la potencia promedio. La varianza de μ es:

$$E[\mu^2] = E \left[\left(\sum_{k=1}^n h_{n-k} \hat{x}_k \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Se puede verificar algebraicamente que se cumple:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n a_k a_j. \quad (3.8)$$

Por lo tanto, incluyendo la Ec. (3.8) en la (3.7) resulta:

$$E[\mu^2] = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 E[\hat{x}_k^2] + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n h_{n-k} h_{n-j} E[\hat{x}_k \hat{x}_j] \quad (3.9)$$

Dado que el sistema es ergódico, se puede demostrar que ϕ es una variable aleatoria con *pdf* uniforme, $f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$ en el dominio $[0, 2\pi]$.

La obtención de la $E[\mu^2]$ requiere el desarrollo de los términos de la Ec. (3.9). La expresión del término $E[\hat{x}_k^2]$ es:

$$\begin{aligned} E[\hat{x}_k^2] &= \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \varphi} A^2 \cos^2[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] d\varphi d\tau_k = \\ &= \frac{A^2}{2\pi T_\tau} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \int_0^{2\pi} \cos^2[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] d\varphi d\tau_k = \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde la *pdf* $f_{\tau_k, \varphi}$ se reemplazó por $\frac{1}{2\pi T_\tau}$, ya que τ_k, φ son variables independientes, esto es, $f_{\tau_k, \varphi} = f_{\tau_k} f_\varphi$. Además, el valor $E[\hat{x}_k \hat{x}_j]$ en la Ec. (3.9) puede ser calculado como:

$$\begin{aligned} E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= E[A \cos(\omega(kT + \tau_k) + \varphi) A \cos(\omega(jT + \tau_j) + \varphi)] = \\ &= A^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \tau_j, \varphi} \cos[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] \cos[\omega(jT + \tau_j) + \varphi] d\varphi d\tau_k d\tau_j = \\ &= \frac{A^2}{2T_\tau^2} \iint_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \cos[\omega T(k - j) + \tau_k - \tau_j] d\tau_k d\tau_j = \\ &= \frac{A^2}{2T_\tau^2} \iint_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \cos[\delta + \tau_k - \tau_j] d\tau_k d\tau_j \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $\delta = \omega T(k - j)$. El desarrollo de la formulación continúa como:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{A^2}{4T_\tau^2} \iint_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} [e^{i\delta} e^{i\omega\tau_k} e^{-i\omega\tau_j} + e^{-i\delta} e^{-i\omega\tau_k} e^{i\omega\tau_j}] d\tau_k d\tau_j = \\
 &= \frac{A^2}{4i\omega T_\tau^2} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \left\{ e^{i\delta} e^{-i\omega\tau_j} [e^{i\omega\tau_k}]_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} - e^{-i\delta} e^{i\omega\tau_j} [e^{-i\omega\tau_k}]_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \right\} d\tau_j = \\
 E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{A^2}{4i\omega T_\tau^2} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} e^{i\delta} [e^{i\omega T_\tau/2} - e^{-i\omega T_\tau/2}] e^{-i\omega\tau_j} d\tau_j + \\
 &\quad - \frac{A^2}{4i\omega T_\tau^2} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} e^{-i\delta} [e^{-i\omega T_\tau/2} - e^{i\omega T_\tau/2}] e^{i\omega\tau_j} d\tau_j \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= -\frac{A^2}{4i^2\omega^2 T_\tau^2} e^{i\delta} (e^{i\omega T_\tau/2} - e^{-i\omega T_\tau/2}) [e^{-i\omega\tau_j}]_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} + \\
 &\quad - \frac{A^2}{4i^2\omega^2 T_\tau^2} e^{-i\delta} (e^{-i\omega T_\tau/2} - e^{i\omega T_\tau/2}) [e^{i\omega\tau_j}]_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} = \\
 &= \frac{A^2}{4i^2\omega^2 T_\tau^2} e^{i\delta} (e^{i\omega T_\tau/2} - e^{-i\omega T_\tau/2}) (e^{i\omega T_\tau/2} - e^{-i\omega T_\tau/2}) + \\
 &\quad + \frac{A^2}{4i^2\omega^2 T_\tau^2} e^{-i\delta} (e^{i\omega T_\tau/2} - e^{-i\omega T_\tau/2}) (e^{i\omega T_\tau/2} - e^{-i\omega T_\tau/2}) \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{2A^2}{\omega^2 T_\tau^2} \sin^2(\omega T_\tau/2) \cos \delta = \frac{A^2}{2} \text{sinc}^2(fT_\tau) \cos \delta \\
 E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{A^2}{2} \text{sinc}^2(fT_\tau) \cos[\omega T(k-j)] \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la Ec. (3.9) resulta:

$$E[\mu^2] = \frac{A^2}{2} \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 + A^2 \text{sinc}^2(fT_\tau) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \cos[\omega T(k-j)] \quad (3.15)$$

La Ec. (3.15) puede ser reescrita como sigue:

$$E[\mu^2] = \frac{A^2}{2} \|\mathbf{h}\|_2^2 + A^2 \text{sinc}^2(fT_\tau) \sum_{k=1}^n h_{n-k}^\# \cos[\omega T k] \quad (3.16)$$

donde: $\|\mathbf{h}\|_2^2 = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2$ es la *norm2* del *FIR* \mathbf{h} y $\mathbf{h}^\#$ es un vector conformado como sigue:

$$\mathbf{h}^\# = \mathbf{B} \cdot \mathbf{h} \quad (3.17)$$

donde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_{n-4} & h_{n-3} \\ 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_{n-4} & h_{n-3} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} h_0^\# \\ h_1^\# \\ \dots \\ \dots \\ h_{n-3}^\# \\ h_{n-2}^\# \\ h_{n-1}^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_{n-4} & h_{n-3} \\ 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_{n-4} & h_{n-3} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \dots \\ \dots \\ h_{n-3} \\ h_{n-2} \\ h_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

El vector $\mathbf{h}^\#$ está constituido por los coeficientes del filtro equivalente, resultado de la transformación expresada por la Ec. (3.18), donde \mathbf{h} es el vector filtro y \mathbf{B} es la matriz que realiza la transformación citada. La construcción de \mathbf{B} es directa, como se puede apreciar en la Ec. (3.18). Desde un plano más formal, \mathbf{B} se construye a partir de una matriz \mathbf{C} , tipo Toeplitz¹, cuya primer columna es el vector \mathbf{h} y cuyos términos $c_{i,j} = 0$ para todo $i < j$. Luego, permutando las columnas de \mathbf{C} , se obtiene una matriz \mathbf{A} de forma tal que resulta $a_{i,j} = c_{i,n-j}$. Finalmente, la matriz \mathbf{B} se obtiene a partir de la matriz \mathbf{A} pero haciendo nulos los componentes de la fila n .

Finalmente, la Ec. (3.16) resulta:

$$E[\mu^2] = \frac{A^2}{2} \|\mathbf{h}\|_2^2 + A^2 \text{sinc}^2(fT_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega T}} \cos(2\pi fTn + \theta) \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{H}^\#(z) = \sum_{k=1}^n h_k^\# \cdot z^{-k}$ y $\theta = \text{Arg}[\mathbf{H}^\#(e^{j\omega T})]$.

La Ec. (3.19) representa la potencia de salida en función de la frecuencia de la señal de entrada. Para obtener la *PFR* es necesario establecer la relación entre

¹La matriz Toeplitz es una matriz cuadrada que posee valores constantes en las diagonales de orientación arriba-izquierda hacia abajo-derecha.

la potencia de salida y la de entrada, entonces:

$$PFR(f) = \|\mathbf{h}\|_2^2 + 2\text{sinc}^2(fT_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega T}} \cos(2\pi fTn + \theta) \quad (3.20)$$

A efectos de realizar el análisis de la *PFR*, se toman los valores extremos de frecuencia. A baja frecuencia:

$$PFR(f = 0) = \|\mathbf{h}\|_2^2 + 2 |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega T}} \cos(\theta) \quad (3.21)$$

Para alta frecuencias

$$PFR(f = \infty) = \|\mathbf{h}\|_2^2 \quad (3.22)$$

Este último resultado es muy importante ya que denota la atenuación del ruido de alta frecuencia, que es directamente la *norm2* del filtro *FIR*. En cuanto al diseño, es beneficioso elegir filtros que posean la menor *norm2* posible. Todos los filtros *FIR* poseen coeficientes cuya sumatoria (*norm1*) es igual a 1. En cambio presentan diferentes *norm2*. Como se verá más adelante, el filtro Moving Average (*MA*) es el que posee la mínima *norm2*.

3.3. *JRS/MA* con entrada senoidal

Para el caso particular del filtro *MA*, el vector h es $h = \left[\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right]^T$.

Por lo tanto la salida es:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{x}_k \quad (3.23)$$

La norma $\|h\|_2^2 = \frac{1}{n}$ y el vector $\mathbf{h}^\#$ resulta:

$$\begin{bmatrix} h_0^\# \\ h_1^\# \\ h_2^\# \\ \dots \\ h_{n-3}^\# \\ h_{n-2}^\# \\ h_{n-1}^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n^2} \\ \frac{2}{n^2} \\ \frac{3}{n^2} \\ \dots \\ \frac{n-2}{n^2} \\ \frac{n-1}{n^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

La expresión general para los términos de $\mathbf{h}^\#$ es:

$$\begin{aligned} h_k^\# &= \frac{k+1}{n^2} & \forall k < n-1 \\ h_{n-1}^\# &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por lo tanto, a partir de la Ec. (3.16), se arriba a la expresión del segundo momento de μ que resulta:

$$E[\mu^2] = \frac{A^2}{2n} + \frac{A^2}{n^2} \text{sinc}^2(fT_\tau) \sum_{k=2}^n (n+1-k) \cos[\omega Tk] \quad (3.26)$$

La *PFR* resulta entonces:

$$PFR(f) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \text{sinc}^2(fT_\tau) \sum_{k=2}^n (n+1-k) \cos[\omega Tk] \quad (3.27)$$

En la Fig. 3.3 se grafica la *PFR* para el proceso *JSR/MA*, con $T_\tau = 0,010$ s y $T = 0,011$ s, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$, con una entrada senoidal. Se puede advertir la atenuación existente para frecuencias mayores a 80Hz, que es constante e igual a $\frac{1}{n}$. También se nota la existencia de picos a $f = 90,9$ Hz y

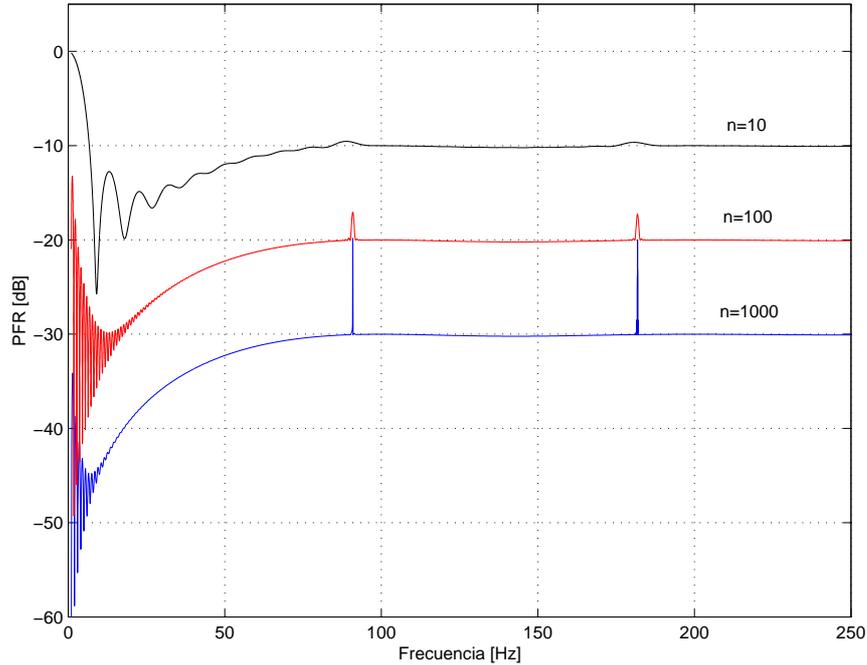


Figura 3.3: PFR del proceso JSR/MA, con una entrada senoidal, para $n=10$, $n=100$ y $n=1000$. Escala lineal para la frecuencia.

181, 8Hz, que recuerdan a los picos de aliasing, pero en este caso con una amplitud atenuada. Las frecuencias 90, 9Hz y 181, 8Hz coinciden con $\frac{1}{T}$ y $\frac{2}{T}$, respectivamente. En la Fig. 3.4 se grafican las mismas *PFRs* pero con la frecuencia en escala logarítmica, con el objeto de apreciar con más detalle los efectos en las bajas frecuencias. Los picos que se producen en los múltiplos de la frecuencia de muestreo promedio poseen una amplitud que va decreciendo con la frecuencia hasta desaparecer (por problemas de resolución en la escala logarítmica de la frecuencia sólo se aprecian los primeros múltiplos). Es importante notar que la amplitud de los picos es mayor para los filtros de mayor n . Más aún, gran parte de la atenuación de alta frecuencia que produce el *JRS* es deteriorada por el efecto de los picos.

Con el objeto de analizar con más detalle la formulación en los límites de frecuencia, se considera a continuación el caso particular en el que $f \rightarrow 0$, es

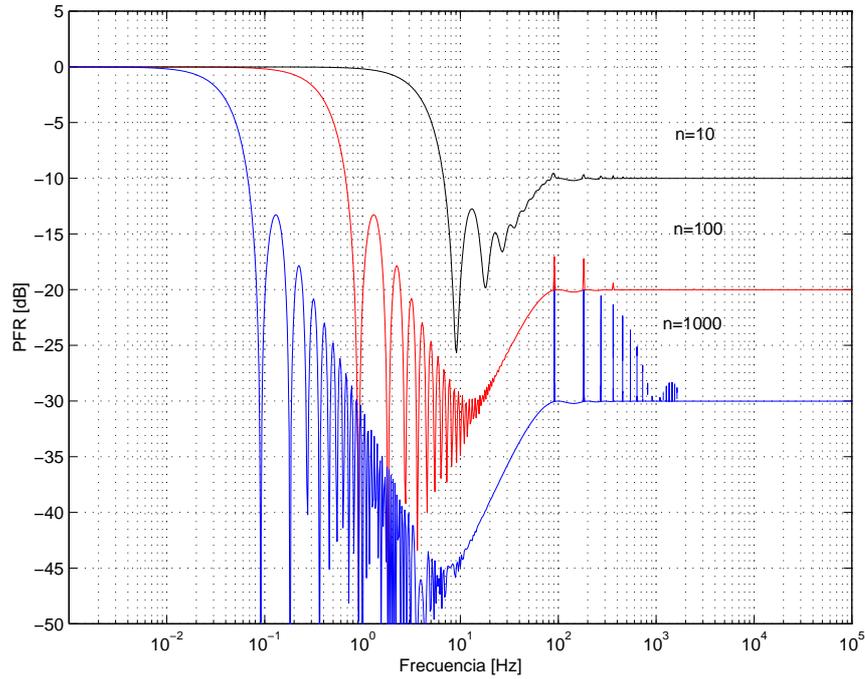


Figura 3.4: *PFR* del proceso *JSR/MA*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica para la frecuencia.

decir cuando la frecuencia de la señal de entrada es sumamente baja:

$$\begin{aligned}
 PFR(0) &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=2}^n (n+1-k) = \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \left[\sum_{k=2}^n (n+1) - \sum_{k=2}^n k \right] = \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \left[(n-1)(n+1) - \frac{n}{2}(n+1) + 1 \right] \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

donde el resultado de la segunda sumatoria surge de la expresión cerrada de la serie aritmética $\sum_{k=1}^n k$, que vale $\frac{n}{2}(n+1)$. Luego:

$$\begin{aligned}
 PFR(0) &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \left[n^2 - 1 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1 \right] = \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \left[\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} (n - 1) = 1
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Si consideramos el caso particular en el que $f \rightarrow \infty$, $\text{sinc}^2(fT_\tau) = 0$, entonces

$$PFR(\infty) = \frac{1}{n}$$

Se advierte que la atenuación está dada directamente por la *norma 2*, (que denominamos *norm2*), del *MA*. Esta es la menor *norm2* posible de todos los filtros *FIR* ya que todos los coeficientes del *MA* son iguales de valor $\frac{1}{n}$. Esto significa que, en cuanto a la magnitud de la atenuación del ruido de alta frecuencia, objeto central de este análisis, el filtro *FIR* tipo *MA* es el recomendado.

Para evaluar la validez de la formulación desarrollada para el *JSR/MA* se realizaron simulaciones experimentales en el entorno Matlab que consistieron en el ingreso de una entrada senoidal pura que es muestreada aleatoriamente *JSR* y luego pasada por un filtro *MA*. La salida constituye la estimación de la variable que se desea obtener. Se realizaron experimentos, donde cada experimento constó de m ensayos. Luego de los m ensayos se calculó la varianza de la estimación del experimento. Esta varianza, asumiendo que la entrada es una señal eléctrica senoidal, constituye la potencia media de la señal a la salida del proceso. Cada experimento se realizó a una determinada frecuencia de entrada y se simuló sobre un amplio rango de frecuencias, por lo que se arribó a la *PFR*. El espectro de frecuencias contemplado fue de 10^{-3} a 10^5 Hz, expresado en forma

logarítmica, con la frecuencia discretizada en pasos de 0,01 década, lo que resulta en una secuencia de frecuencias $\{f_k\}$ de 800 componentes. En cada ensayo se midió la variable de salida μ_i , obtenida a partir de una entrada senoidal de amplitud unitaria, frecuencia f_k y fase ϕ . La fase ϕ es una variable aleatoria con *pdf* uniforme en el dominio $[0, 2\pi]$.

En cada experimento se calculó el promedio de las μ_i del ensamble, considerando que el sistema es ergódico. Para obtener la estimación en cada ensayo, μ_i , se aplicó el muestreo aleatorio *JRS*, y se utilizó el filtro de reconstrucción de orden n , por lo que se necesitó generar variables aleatorias τ_j , con $j = 1, 2, \dots, n$. Para cada componente de la secuencia $\{f_k\}$ se implementó un experimento, constituido por 100 ensayos, donde $i = 1, 2, \dots, 100$ denota el número de cada ensayo. A continuación se expresan con mayor claridad los términos utilizados:

Experimento: consiste en m ensayos.

Ensayo: medición de la salida del filtro *MA*, μ , luego de haber muestreado aleatoriamente una entrada senoidal pura de frecuencia f y fase ϕ .

m : número de ensayos para cada experimento

Conjunto (de Experimentos): conjunto de experimentos realizados para un conjunto de frecuencias de manera de cubrir un rango amplio de las mismas.

En la Fig. 3.3 se presenta la *PFR* obtenida de la simulación realizada con un *MA* de orden $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$, donde el número de ensayos fue $m = 100$. En la misma figura se ha graficado la curva teórica correspondiente a la Ec. (3.27). Se han realizado simulaciones también para $n = 100$ y $n = 1000$, que se muestran en las Figs. 3.6 y 3.7, respectivamente. Se observa en las tres figuras que las gráficas de las simulaciones concuerdan sustancialmente con las curvas teóricas, lo que valida, por lo menos para el caso de un *JSR/MA*, $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$, la formulación desarrollada. A efectos de corroborar las formulaciones para un rango más extendido de frecuencias, las mismas simulaciones

se graficaron en escala logarítmica de frecuencia en un rango que va de 10^{-3} hasta 10^5 Hz. Las Figs. [3.8](#), [3.9](#) y [3.10](#) muestran estas gráficas; se observa nuevamente que las simulaciones coinciden con las formulaciones. Es necesario destacar que estas simulaciones constituyen una corroboración experimental confiable, excepto por la resolución en la frecuencia. Evidentemente, el espacio entre puntos de simulación debe ser tal que no se pierdan valores importantes. Por otro lado un espacio de frecuencia muy pequeño entre puntos de simulación haría computacionalmente muy costosa la simulación. Se optó por realizar las simulaciones con un espacio de $\Delta f = 0,01\text{Hz}$ en las figuras mencionadas. De esta forma se pudieron simular todas las curvas en un amplio rango de frecuencias, pero a costa de haber perdido algunos valores importantes. En particular no se observan los picos presentes en los múltiplos de la frecuencia equivalente de muestreo, esto es $f = 90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, ... Por lo tanto se han realizado simulaciones adicionales con una resolución mucho mayor pero en un rango de frecuencias muy pequeño alrededor del pico de $90,9\text{Hz}$, por ejemplo. El resultado se muestra en la Fig. [3.11](#), donde se puede observar el pico, lo que valida los resultados teóricos.

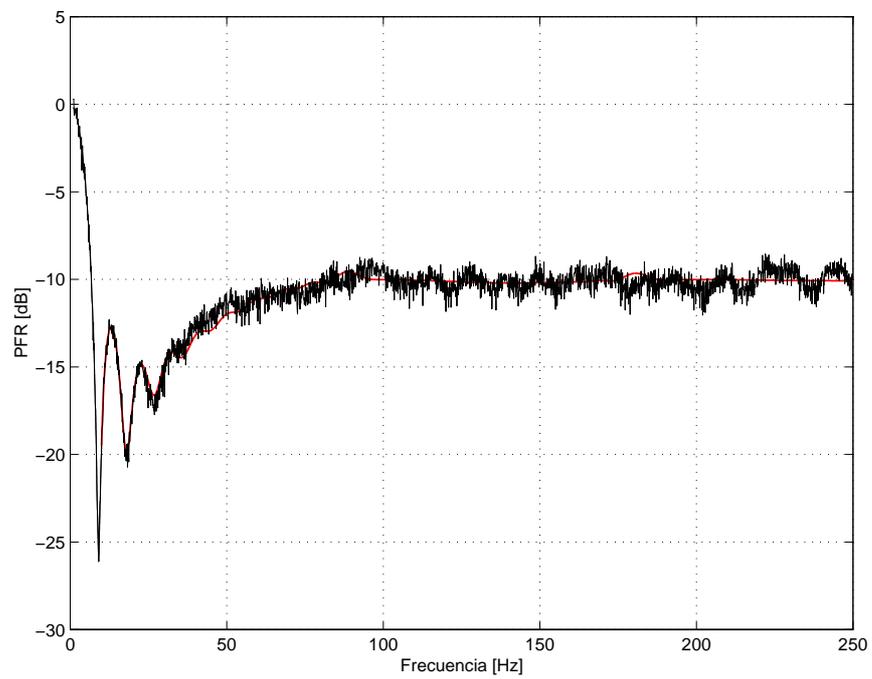


Figura 3.5: *PFR* del proceso *JRS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

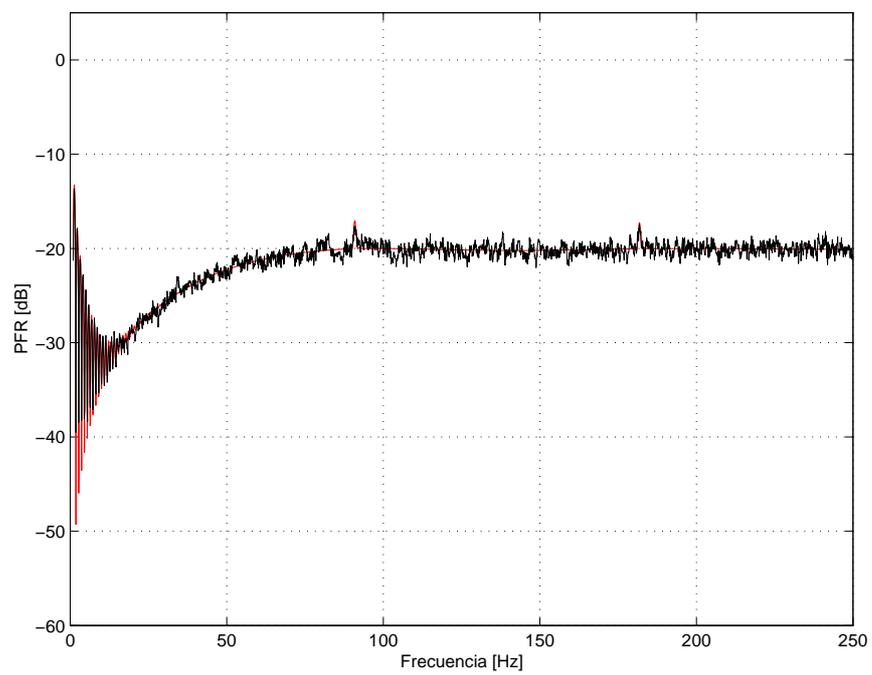


Figura 3.6: *PFR* del proceso *JRS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

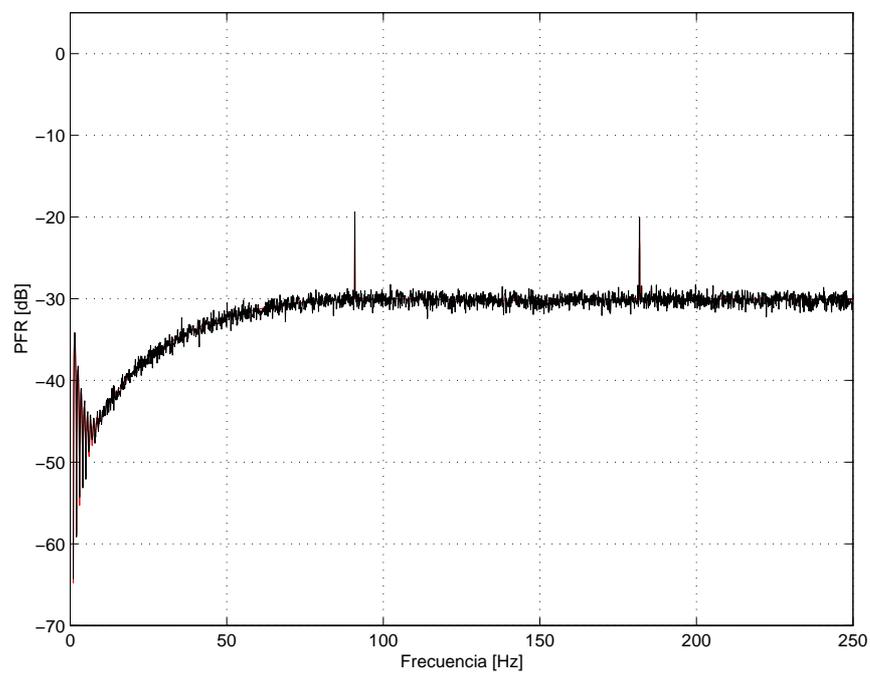


Figura 3.7: *PFR* del proceso *JRS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

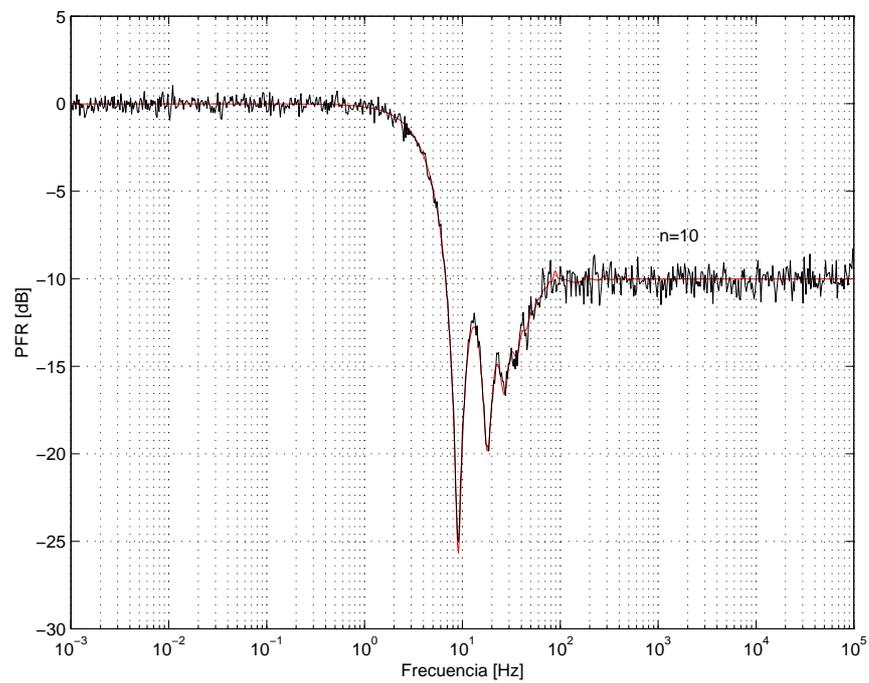


Figura 3.8: *PFR* del proceso *JRS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

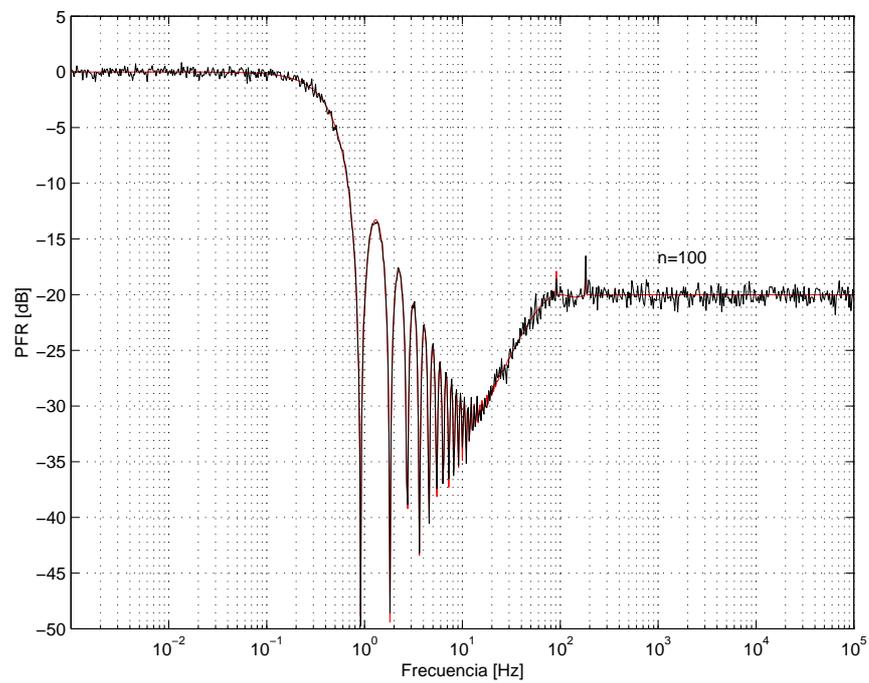


Figura 3.9: *PFR* del proceso *JRS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

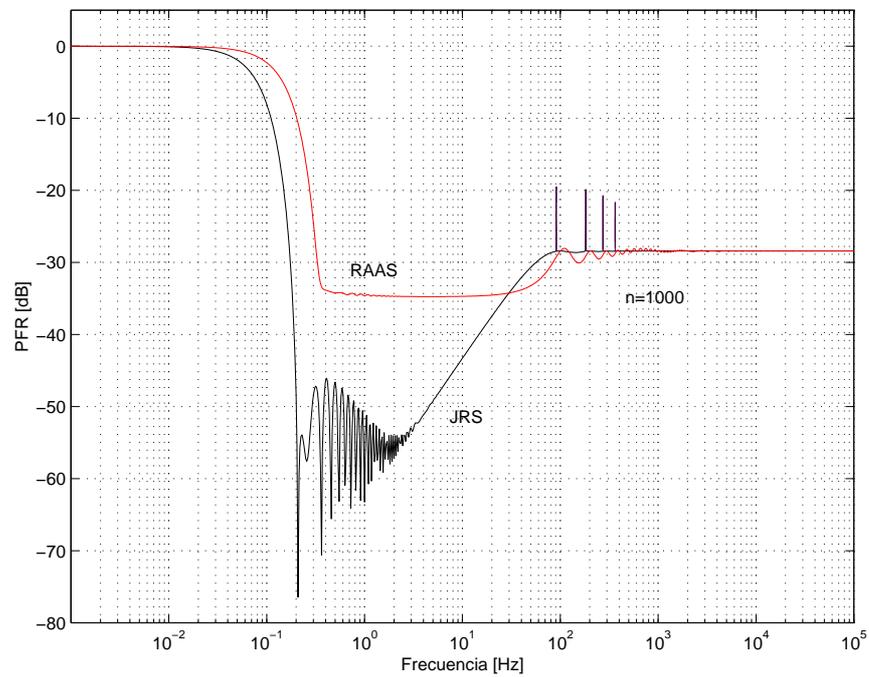


Figura 3.10: *PFR* del proceso *JRS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

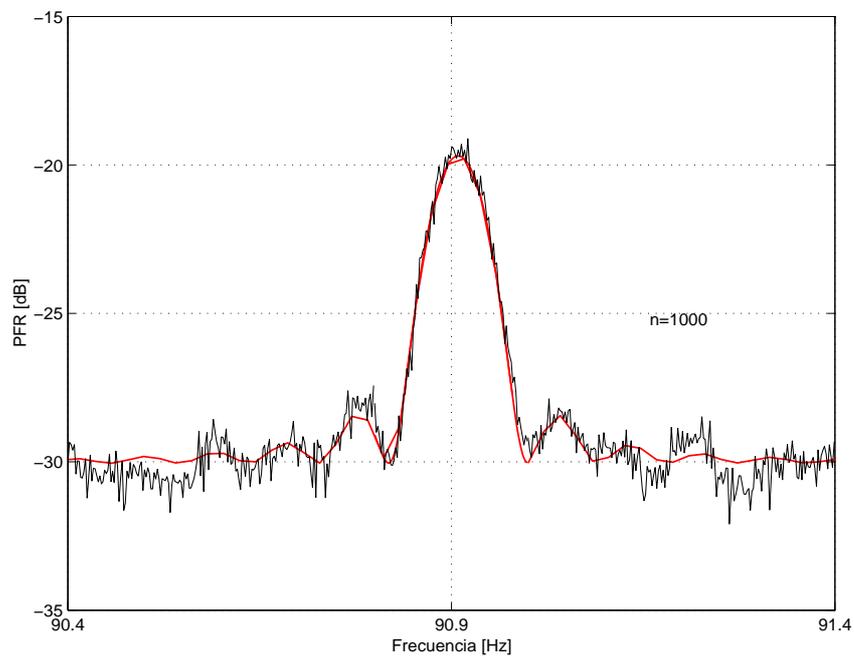


Figura 3.11: *PFR* del proceso *JRS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Ampliación de la curva alrededor de $f = 90,9\text{Hz}$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

3.4. *JRS/FIR* con entrada senoidal

A continuación se graficarán las *PFRs* resultantes de aplicar la Ec. (3.20) a otros filtros *FIR* a efectos de verificar la pertinencia de las expresiones teóricas desarrolladas. En particular se utilizará el pasabajos sintetizado por el método *Ventana de Hamming* [22], obtenido desde las toolbox del MATLAB. El filtro se llamará de ahora en más según su denominación MATLAB, *fir1*. Se utilizará, además otro filtro pasabajos, en este caso sintetizado por el método de *Optimización por mínimos cuadrados*, también obtenido desde MATLAB, que se llamará *fircls1*. En las Figs. 3.12 y 3.13 se observan las *PFRs* correspondientes al filtro *fir1*, y en las Figs. 3.14 y 3.15 al filtro *filcls1*.

Se aprecia la menor atenuación que se obtiene en los procesos *JRS/fir1* y *JRS/fircls1* respecto del *JRS/MA*. Aunque por otra parte se logra una mayor selectividad que puede ser importante en el diseño para aplicaciones donde la frecuencia de ruido de alta frecuencia y la de la señal útil no están muy alejadas.

En cuanto a la corroboración experimental por medio de simulaciones, se presentan las gráficas del proceso *JRS/fir1* en las Figs. 3.16, 3.17 y 3.18, y del *JRS/fircls1* en las Figs. 3.23, 3.24 y 3.25, para el rango de frecuencias entre 1 y 250Hz, en una escala lineal. Para corroborar los resultados en un rango de frecuencias más extendido, se presentan las simulaciones entre 10^{-3} y 10^5 Hz, en una escala logarítmica en las Figs. 3.19, 3.20, 3.21 y 3.22, para *JRS/fir1*, y las Figs. 3.26, 3.27, 3.28 y 3.29 para *JRS/fircls1*.

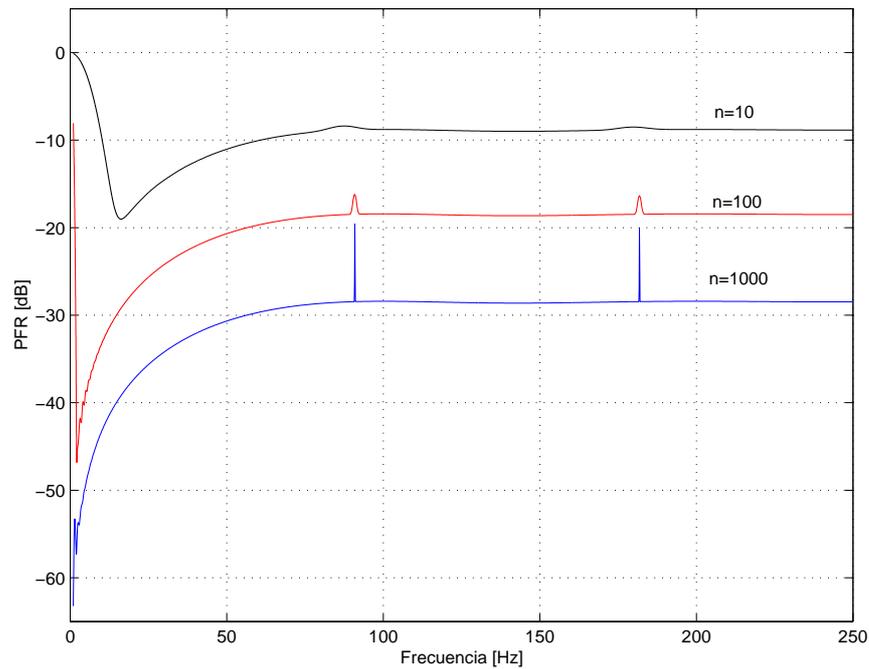


Figura 3.12: *PFR* del proceso *JSR/fir1*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala lineal de frecuencia.

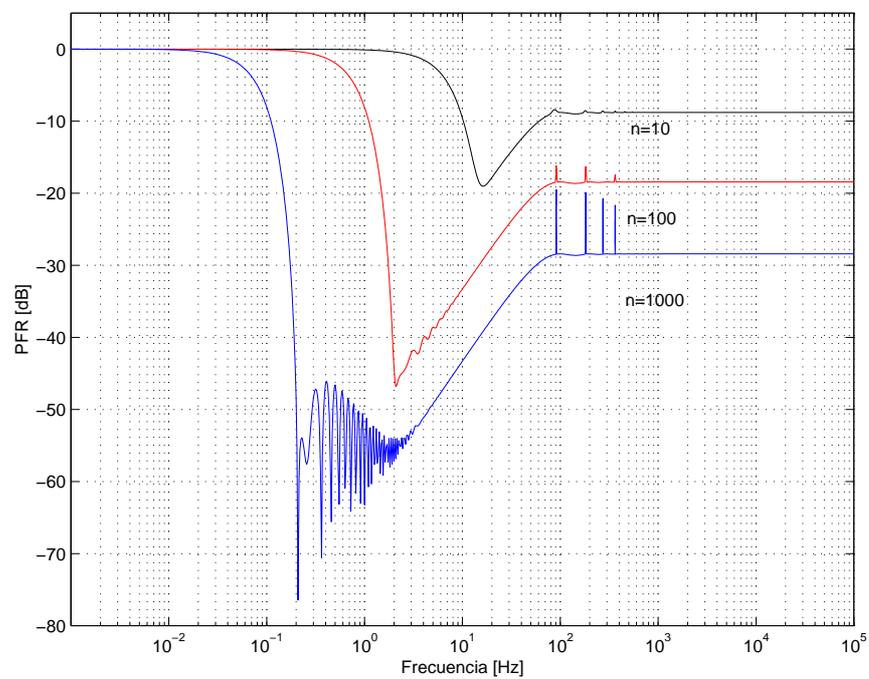


Figura 3.13: *PFR* del proceso *JSR/fir1*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.

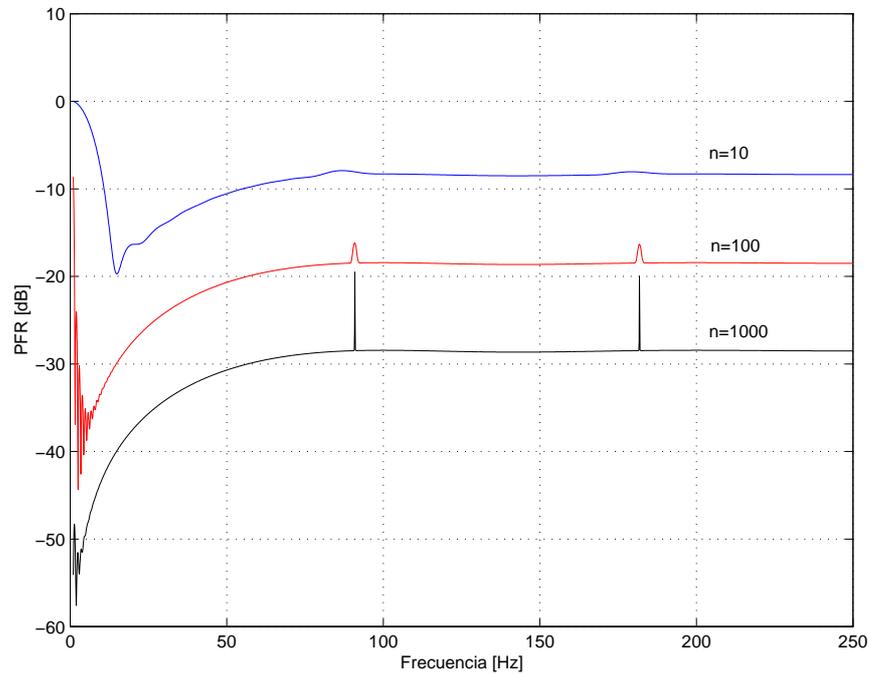


Figura 3.14: *PFR* del proceso *JSR/fircls1*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala lineal de frecuencia.

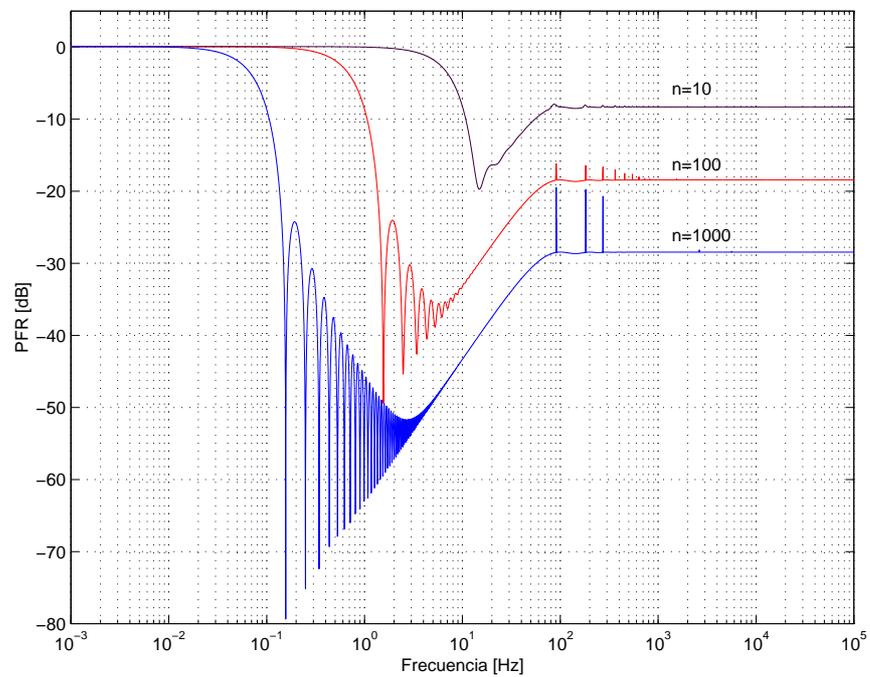


Figura 3.15: *PFR* del proceso *JSR/fircls1*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.

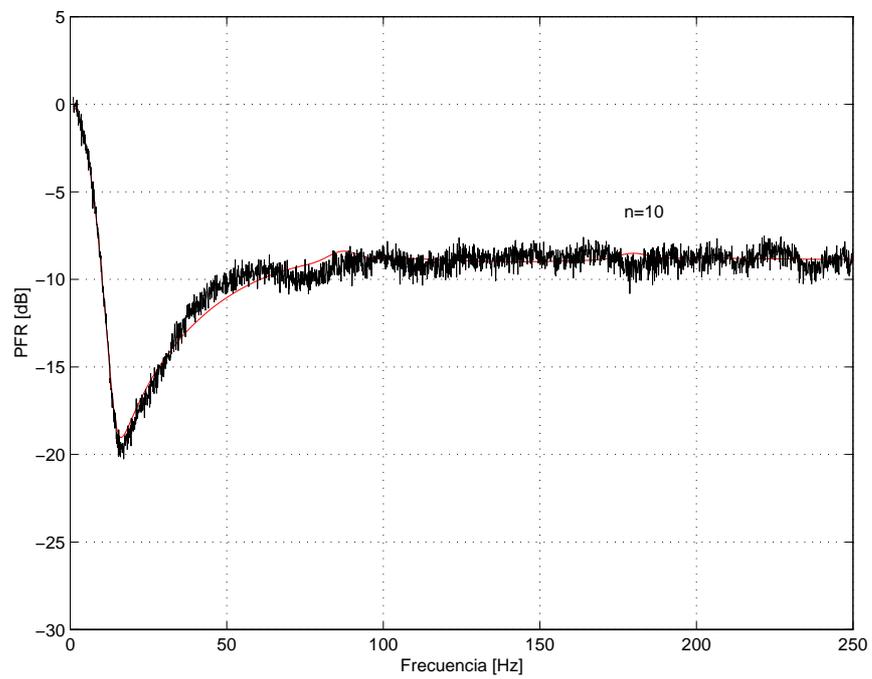


Figura 3.16: *PFR* del proceso *JRS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

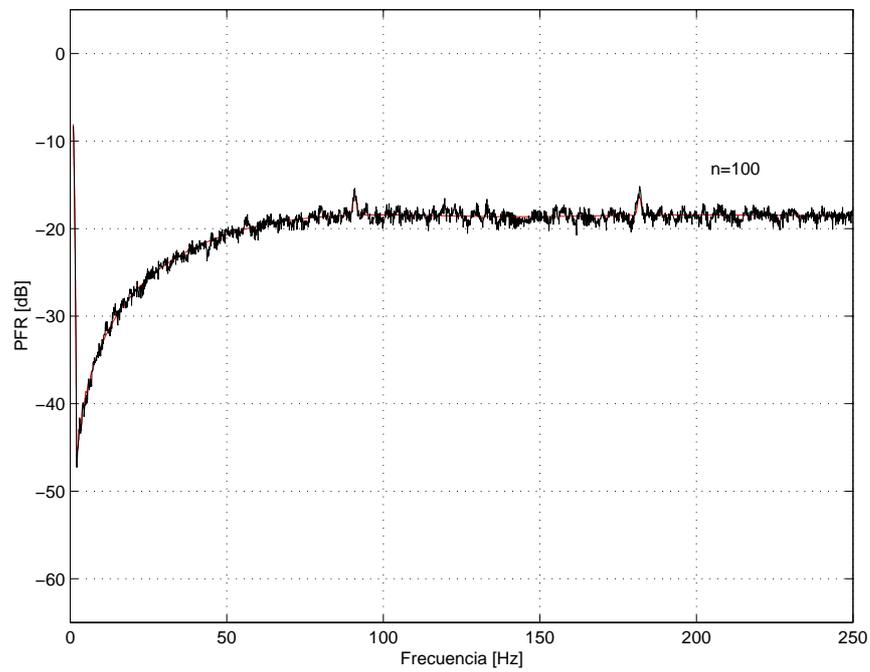


Figura 3.17: *PFR* del proceso *JRS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

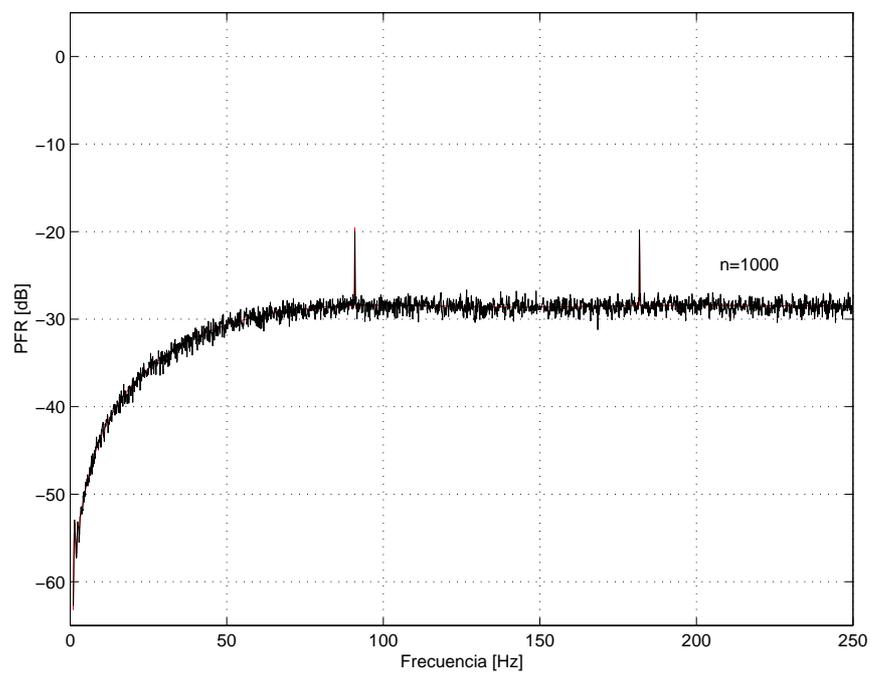


Figura 3.18: *PFR* del proceso *JRS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

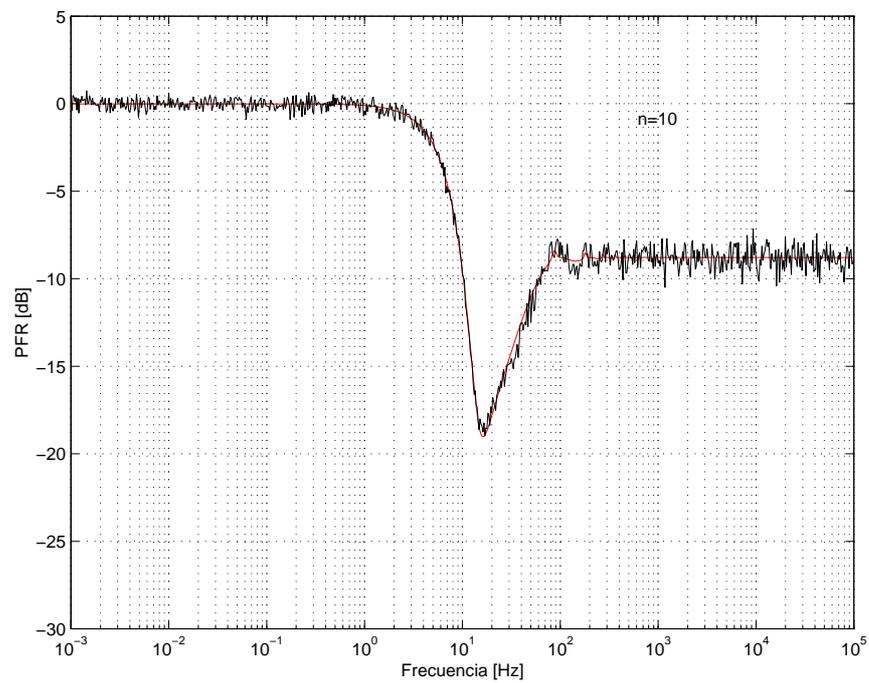


Figura 3.19: *PFR* del proceso *JRS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

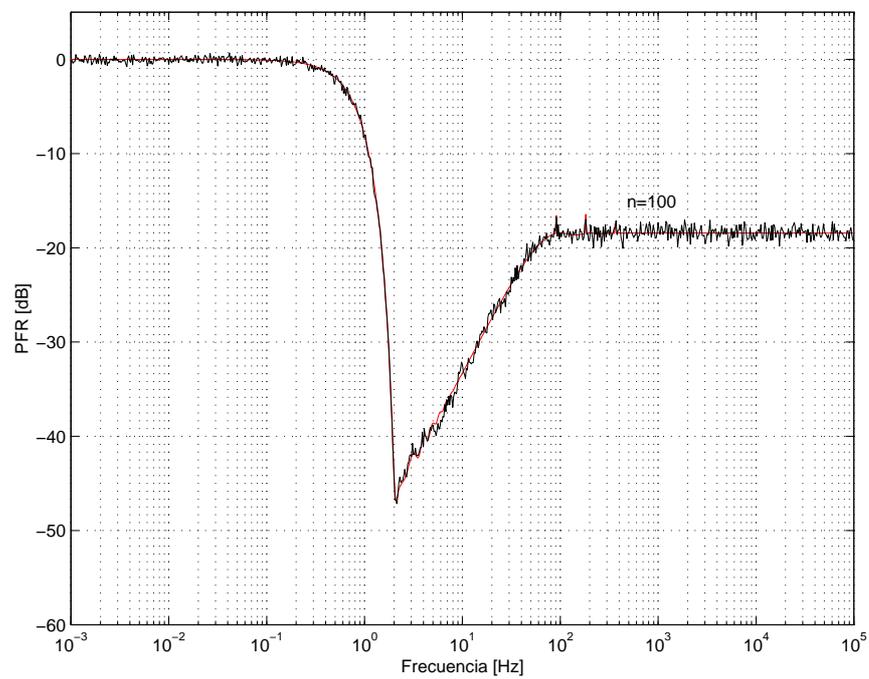


Figura 3.20: *PFR* del proceso *JRS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

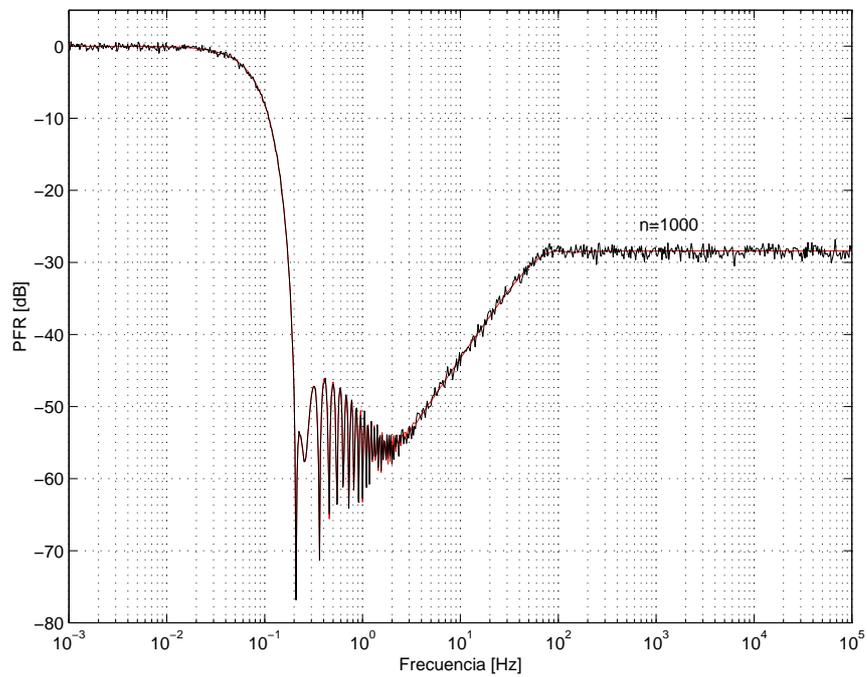


Figura 3.21: *PFR* del proceso *JRS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

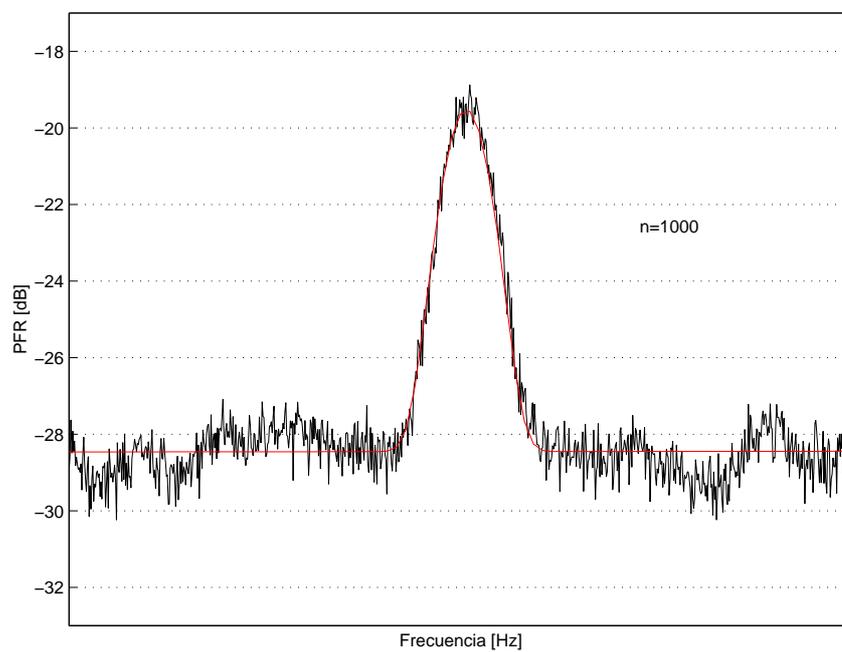


Figura 3.22: *PFR* del proceso *JRS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Ampliación alrededor de $f = 90,9\text{Hz}$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

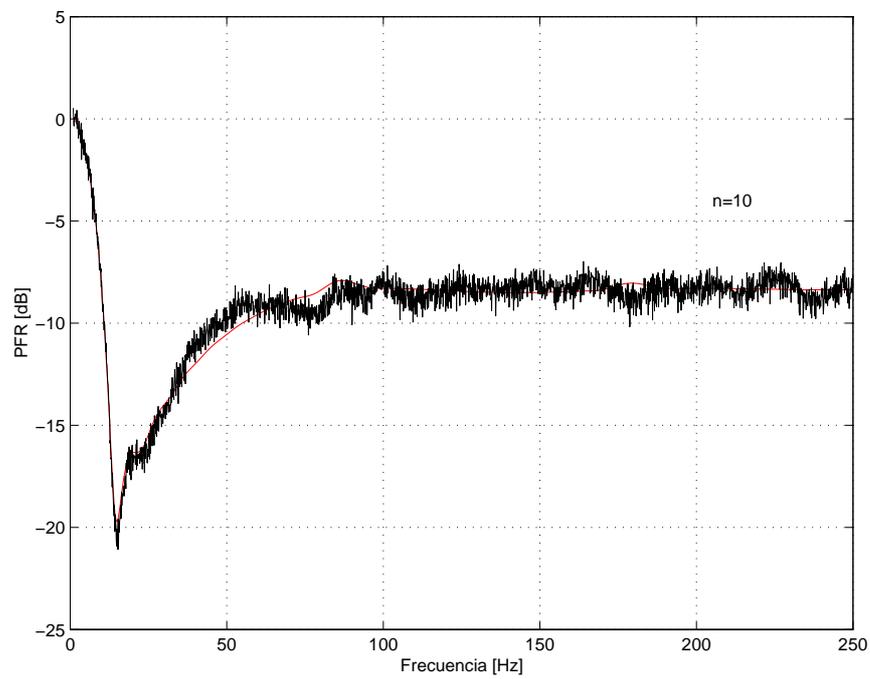


Figura 3.23: *PFR* del proceso *JRS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

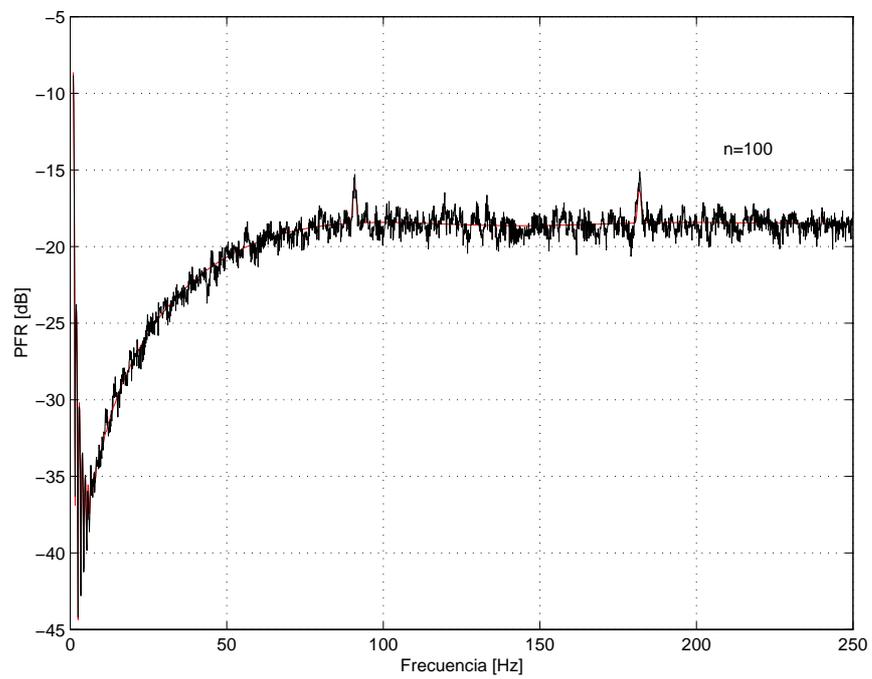


Figura 3.24: *PFR* del proceso *JRS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

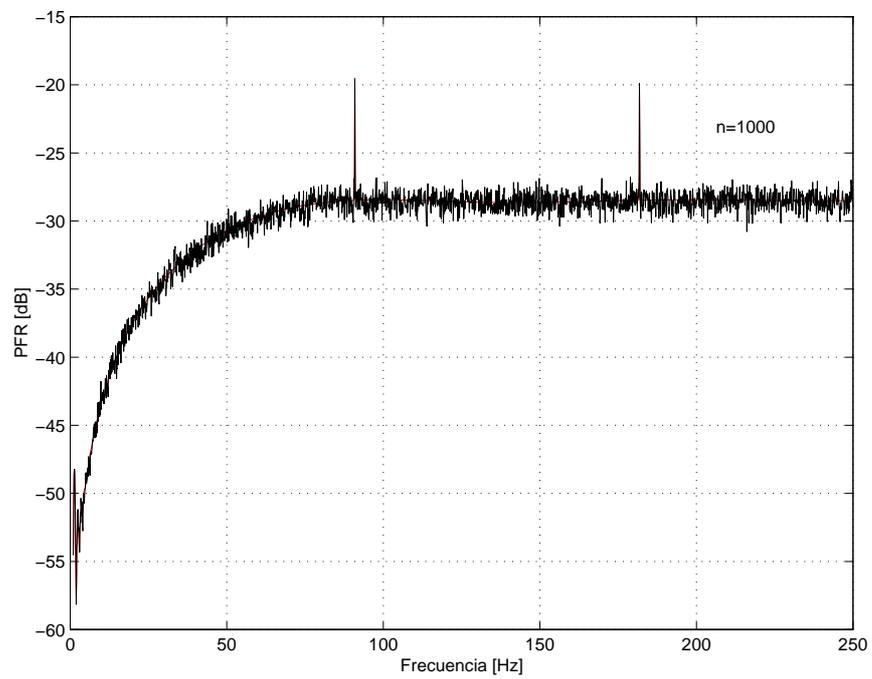


Figura 3.25: *PFR* del proceso *JRS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

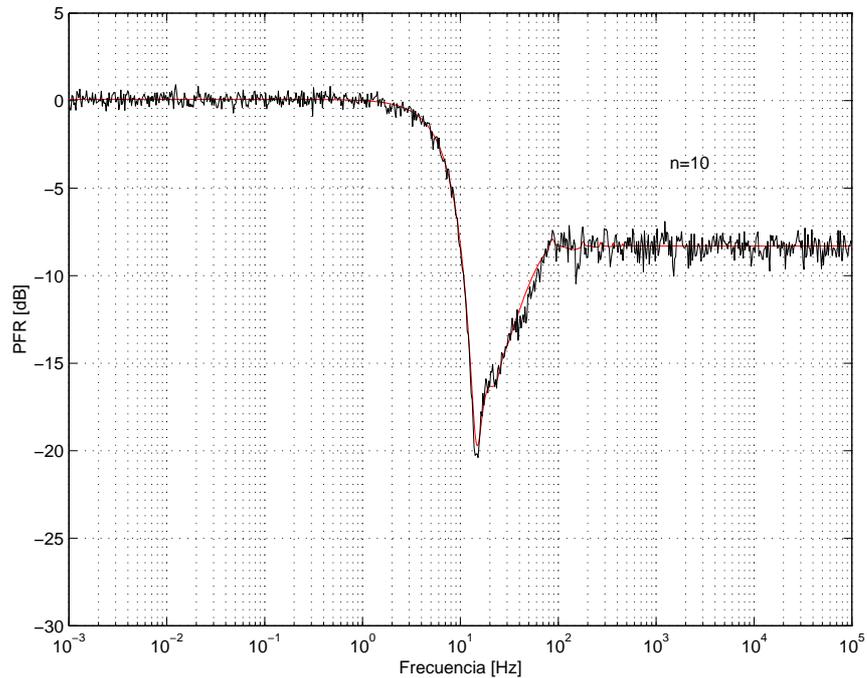


Figura 3.26: *PFR* del proceso *JRS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

Hasta aquí se han desarrollado las expresiones analíticas de la *PFR*, para *FIR*, en particular para *MA*, *fir1* y *fircls1*, con una perturbación senoidal pura. Este análisis puede extenderse a la existencia de una señal periódica cualquiera, constituida por una serie de armónicas.

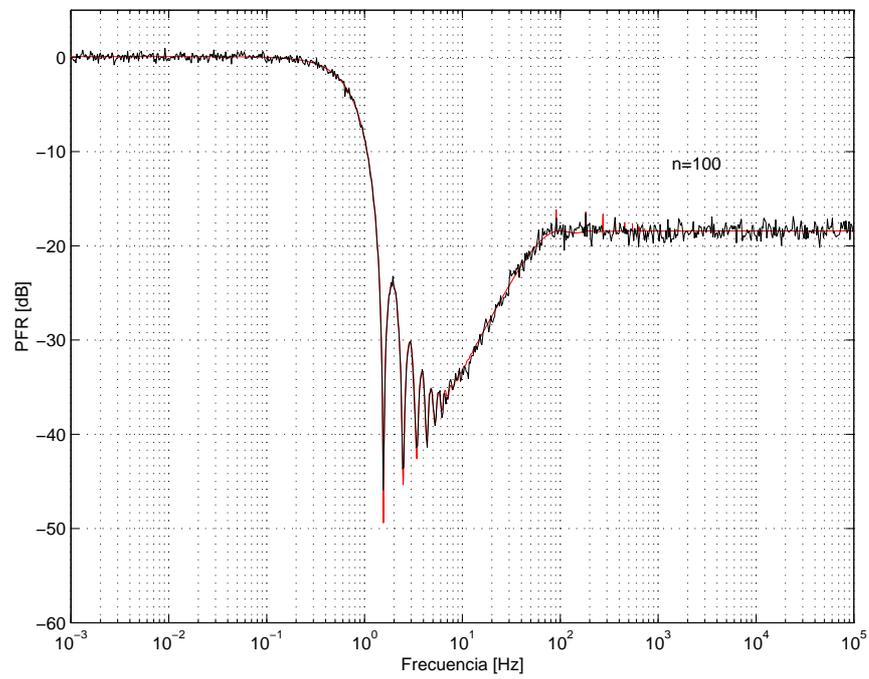


Figura 3.27: *PFR* del proceso *JRS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de la frecuencia.

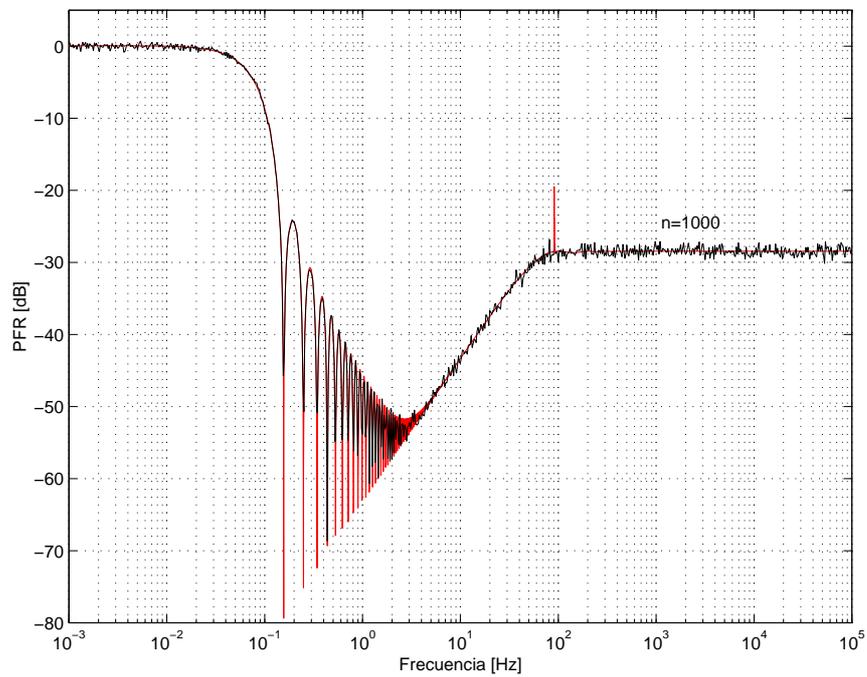


Figura 3.28: *PFR* del proceso *JRS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

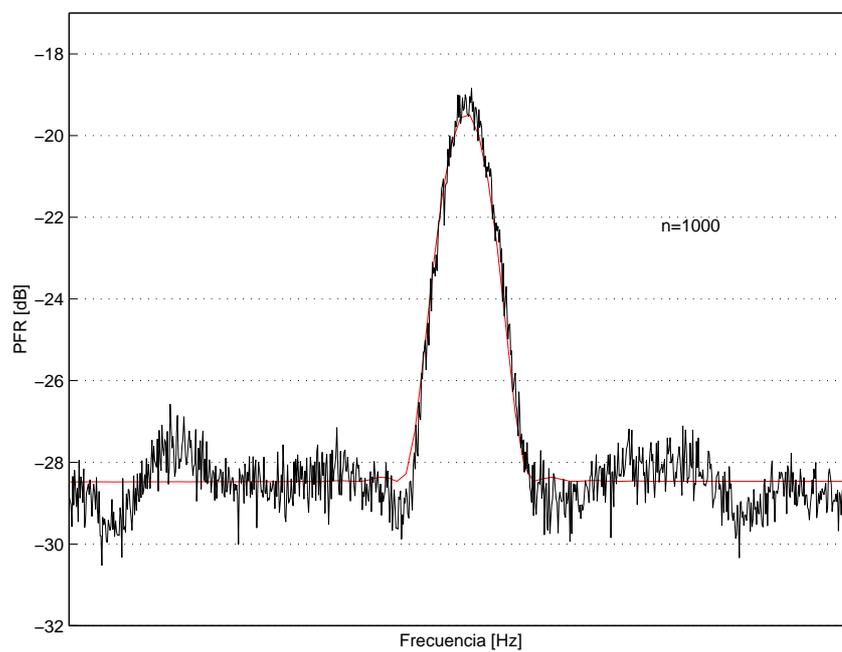


Figura 3.29: *PFR* del proceso *JRS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Ampliación alrededor de $f = 90,9\text{Hz}$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

3.5. *JRS/FIR* aplicado a un ruido periódico

Con el objeto de dar más generalidad a la formulación del proceso, se tratará el caso de cualquier señal periódica, sin restringir al caso particular de un seno. Se tiene una señal periódica $x(t)$, desarrollada por serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{h=1}^{\infty} (A_h \sin h\omega t + B_h \cos h\omega t) \quad (3.30)$$

Dado que el proceso de muestreo puede comenzar en cualquier momento t_i , la Ec. (3.30) se modifica como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{h=1}^{\infty} [A_h \sin h\omega (t - t_i) + B_h \cos h\omega (t - t_i)] = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} [A_h \sin (h\omega t - h\varphi_i) + B_h \cos (h\omega t - h\varphi_i)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde $\varphi_i = \omega t_i$.

Luego del *JRS*, las muestras quedan:

$$\hat{x}_k = \sum_{h=1}^{\infty} [A_h \sin (h\omega kT + h\omega\tau_k - h\varphi_i) + B_h \cos (h\omega kT + h\omega\tau_k - h\varphi_i)] \quad (3.32)$$

Luego las muestras son filtradas con un *FIR* y el resultado es:

$$\mu = \sum_{k=1}^n h_{n-k} \hat{x}_k \quad (3.33)$$

donde n es el orden del *FIR*.

El término $E[\hat{x}_k^2]$ en la Ec. (3.9) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \varphi_i} \\
 &\left(\sum_{h=1}^{\infty} \{A_h \sin[h\omega(kT + \tau_k) - h\varphi_i] + B_h \cos[h\omega(kT + \tau_k) - h\varphi_i]\} \right)^2 d\varphi_i d\tau_k \\
 &= \frac{1}{2\pi T_\tau} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \int_0^{2\pi} \\
 &\left(\sum_{h=1}^{\infty} \{A_h \sin[h\omega(kT + \tau_k) - h\varphi_i] + B_h \cos[h\omega(kT + \tau_k) - h\varphi_i]\} \right)^2 d\varphi_i d\tau_k
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

El cuadrado de la serie infinita de (3.34) produce términos \sin^2 , \cos^2 y $\sin \cos$. La integral a lo largo de φ_i , desde 0 a 2π , de los términos $\sin \cos$ es nula, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k^2] &= \frac{1}{2\pi T_\tau} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \sum_{h=1}^{\infty} \{A_h^2 \int_0^{2\pi} \sin^2[h\omega kT + h\omega\tau_k - h\varphi_i] d\varphi_i + \\
 &\quad + B_h^2 \int_0^{2\pi} \cos^2[h\omega kT + h\omega\tau_k - h\varphi_i] d\varphi_i\} d\tau_k
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde la *pdf* conjunta, f_{τ_k, φ_i} , fue reemplazada por $\frac{1}{2\pi T_\tau}$, ya que τ_k y φ_i son independientes, esto es, $f_{\tau_k, \varphi_i} = f_{\tau_k} f_{\varphi_i}$. Operando:

$$E[\hat{x}_k^2] = \frac{1}{2\pi T_\tau} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \left(\sum_{h=1}^{\infty} A_h^2 \pi + B_h^2 \pi \right) d\tau_k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^m (A_h^2 + B_h^2)$$

Además, los términos $E[\hat{x}_k \hat{x}_j]$, con $k \neq j$, en la Ec. (3.9) pueden ser calculados como:

$$\begin{aligned}
 E [\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{1}{2\pi T_\tau^2} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \int_0^{2\pi} \\
 &\quad \sum_{h_1=1}^{\infty} \{A_{h_1} \sin [h_1\omega (kT + \tau_k) - h_1\varphi_i] + B_{h_1} \cos [h_1\omega (kT + \tau_k) - h_1\varphi_i]\} \cdot \\
 &\quad \cdot \sum_{h_2=1}^{\infty} \{A_{h_2} \sin [h_2\omega (jT + \tau_j) - h_2\varphi_i] + B_{h_2} \cos [h_2\omega (jT + \tau_j) - h_2\varphi_i]\} d\varphi_i d\tau_k d\tau_j
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

El producto de las dos sumatorias en (3.36) genera términos que, integrados a lo largo de φ_i desde 0 a 2π , son cero, excepto para $h_1 = h_2$. Operando:

$$\begin{aligned}
 E [\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{1}{T_\tau^2} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{A_h^2}{2} + \frac{B_h^2}{2} \right) \cos h\omega [(k-j)T + (\tau_k - \tau_j)] \right\} d\tau_k d\tau_j = \\
 &= \frac{1}{T_\tau^2} \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{A_h^2}{2} + \frac{B_h^2}{2} \right) \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \int_{-T_\tau/2}^{T_\tau/2} \cos h\omega [(k-j)T + (\tau_k - \tau_j)] d\tau_k d\tau_j \right\}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Desarrollando como en las Ecs. (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14):

$$E [\hat{x}_k \hat{x}_j] = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) \text{sinc}^2(fhT_\tau) \cos [h\omega (k-j)T]$$

Por lo tanto, la Ec. (3.9) resulta:

$$\begin{aligned}
 E[\mu^2] &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} E[\hat{x}_k \hat{x}_j] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 + \\
 &+ \sum_{h=1}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) \text{sinc}^2(fhT_\tau) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \cos h\omega(k-j)T = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) \|\mathbf{h}\|_2^2 + \frac{1}{T_\tau^2} \sum_{h=1}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) \text{sinc}^2(fhT_\tau) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos[h\omega Tq] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) \left\{ \|\mathbf{h}\|_2^2 + 2 \text{sinc}^2(fhT_\tau) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos[h\omega Tq] \right\} \\
 E[\mu^2] &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} C_h^2 \left\{ \|\mathbf{h}\|_2^2 + 2 \text{sinc}^2(fhT_\tau) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos[h\omega Tq] \right\} \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

donde $C_h^2 = A_h^2 + B_h^2$. Finalmente, la Ec. (3.38) se puede expresar como:

$$E[\mu^2] = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} C_h^2 \left[\|\mathbf{h}\|_2^2 + 2 \text{sinc}^2(fhT_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega hT}} \cos(h\omega Tn + \theta_1) \right] \quad (3.39)$$

donde $\mathbf{H}^\#(z) = \sum_{q=1}^n h_q^\# \cdot z^{-q}$, $\theta_1 = \text{Arg}[\mathbf{H}^\#(e^{j\omega hT})]$.

La Ec. (3.39) representa la potencia media de salida, para el caso general de una serie de armónicas. En cuanto a la PFR, ésta se expresa en la Ec. (3.40):

$$PFR(f) = \|\mathbf{h}\|_2^2 + \frac{\sum_{h=1}^{\infty} C_h^2 \text{sinc}^2(fhT_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega hT}} \cos(h\omega Tn + \theta_1)}{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{C_h^2}{2}} \quad (3.40)$$

donde los C_h son las amplitudes de las componentes armónicas h .

A partir de las (3.20) y (3.40) se puede observar que, para $f \rightarrow \infty$, la *PFR* vale $\|\mathbf{h}\|_2^2$ tanto para una armónica como para el caso general. Se concluye que, a altas frecuencias la atenuación de potencia es constante e igual a la *norm2* del

vector *FIR*.

3.6. *JRS/MA* aplicado a un ruido periódico

Reemplazando en la Ec. (3.38) los $h_{n-q}^\#$ por sus valores ya obtenidos en la Ec. (3.25) y la $norm2$ por su valor, se arriba a:

$$E[\mu^2] = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} C_h^2 \left\{ \frac{1}{n} + 2 \operatorname{sinc}^2(fhT_\tau) \sum_{q=2}^n \frac{n-q+1}{n^2} \cos[h\omega Tq] \right\} \quad (3.41)$$

Por lo tanto, a partir de la Ec. (3.16) se obtiene la expresión del segundo momento de μ que resulta:

$$E[\mu^2] = \frac{\sum_{h=1}^{\infty} C_h^2}{2n} + \frac{\sum_{h=1}^{\infty} C_h^2}{n^2} \operatorname{sinc}^2(fhT_\tau) \sum_{k=2}^n (n+1-k) \cos[h\omega Tq] \quad (3.42a)$$

Luego, la PFR vale:

$$PFR(f) = \frac{1}{n} + \frac{2 \sum_{h=1}^{\infty} C_h^2 \operatorname{sinc}^2(fhT_\tau) \sum_{k=2}^n (n+1-k) \cos[h\omega Tq]}{n^2 \sum_{h=1}^{\infty} C_h^2} \quad (3.43a)$$

Si consideramos el caso particular en el que $f \rightarrow \infty$, $\operatorname{sinc}^2(fhT_\tau) = 0$, por lo que $PFR(f = \infty) = \frac{1}{n}$ que es la $norm2$ del filtro *MA*.

Luego, para el caso particular en el que $f \rightarrow 0$, es decir cuando la frecuencia de la señal de entrada es sumamente baja:

$$PFR(f = 0) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=2}^n (n+1-k)$$

luego, operando como se realizó con las Ecs. (4.33) y (4.34), se llega a $PFR(f = 0) = 1$.

3.7. *JRS/FIR* aplicado a entradas senoidales no correlacionadas

El objetivo de esta sección es abordar el caso de una entrada que es la suma de dos señales senoidales no correlacionadas. Este caso se puede luego generalizar y aplicar a situaciones de ruido impulsivo o ruido blanco.

Sea $x(t)$ una entrada dada por:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (3.44)$$

donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias angulares, y ϕ_1 y ϕ_2 son las fases iniciales. Considerando un proceso ergódico, ϕ_1 y ϕ_2 son variables aleatorias con *pdf* uniforme, Ec. (3.45).

$$f_{\phi_1}(\phi_1) = f_{\phi_2}(\phi_2) = \frac{1}{2\pi} \quad [-\pi, \pi] \quad (3.45)$$

Luego del *JRS*, las muestras son:

$$\hat{x}_k = A_1 \cos[\omega_1 (kT + \tau_k) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2 (kT + \tau_k) + \phi_2] \quad (3.46)$$

Las muestras son luego filtradas con el *FIR* y el resultado es:

$$\mu = \sum_{k=1}^n h_{n-k} \hat{x}_k \quad (3.47)$$

A fin de obtener la varianza, $E[\mu^2]$, se utiliza la Ec. (3.9). El valor $E[\hat{x}_k^2]$ para este proceso puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k^2] &= \iiint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \phi_{i1}, \phi_{i2}} \{A_1 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2]\}^2 \\
 &\quad d\phi_1 d\phi_2 d\tau_k = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 T_\tau} \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \\
 &\quad \{A_1 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2]\}^2 d\phi_1 d\phi_2 d\tau_k \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 T_\tau} \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A_1^2 \cos^2[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] + \\
 &\quad + 2A_1 A_2 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2] + \\
 &\quad A_2^2 \cos^2[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2] d\phi_1 d\phi_2 d\tau_k \\
 &= \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \frac{1}{4\pi^2 T_\tau} \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \\
 &\quad 2A_1 A_2 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2] d\phi_1 d\phi_2 d\tau_k \\
 &= \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \frac{A_1 A_2}{2\pi^2 T_\tau} \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \\
 &\quad \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_{i1}] \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_{i2}] d\phi_{i1} d\phi_{i2} d\tau_k \\
 &= \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \frac{A_1 A_2}{2\pi^2 T_\tau} \int_0^{T_\tau} \\
 &\quad \sin[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1]_0^{2\pi} \sin[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2]_0^{2\pi} d\tau_k \\
 &= \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \frac{A_1 A_2}{2\pi^2 T_\tau} \int_0^{T_\tau} 0 d\tau_k = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

donde la *pdf* conjunta, $f_{\tau_k, \phi_{i1}, \phi_{i2}}$, se reemplazó por $\frac{1}{4\pi^2 T_\tau}$, ya que $\tau_k, \phi_{i1}, \phi_{i2}$ son v. a. independientes, es decir, $f_{\tau_k, \phi_{i1}, \phi_{i2}} = f_{\tau_k} f_{\phi_{i1}} f_{\phi_{i2}}$. Además, el valor esperado

$E[\hat{x}_k \hat{x}_j]$ de la Ec. (3.9) se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= E[\{A_1 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2]\} \\
 &\quad \{A_1 \cos[\omega_1(jT + \tau_j) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2(jT + \tau_j) + \phi_2]\}] \\
 &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \tau_j, \phi_1, \phi_2} \{A_1 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2]\} \\
 &\quad \{A_1 \cos[\omega_1(jT + \tau_j) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2(jT + \tau_j) + \phi_2]\} d\phi_1 d\phi_2 d\tau_k d\tau_j \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 T_\tau^2} \int_0^{T_\tau} \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{A_1 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2]\} \\
 &\quad \{A_1 \cos[\omega_1(jT + \tau_j) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2(jT + \tau_j) + \phi_2]\} d\phi_1 d\phi_2 d\tau_k d\tau_j \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 T_\tau^2} \int_0^{T_\tau} \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{A_1^2 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] \cos[\omega_1(jT + \tau_j) + \phi_1] + \\
 &\quad + A_1 A_2 \cos[\omega_1(kT + \tau_k) + \phi_1] \cos[\omega_2(jT + \tau_j) + \phi_2] + \\
 &\quad + A_2 A_1 \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2] \cos[\omega_1(jT + \tau_j) + \phi_1] + \\
 &\quad + A_2^2 \cos[\omega_2(kT + \tau_k) + \phi_2] \cos[\omega_2(jT + \tau_j) + \phi_2]\} d\phi_1 d\phi_2 d\tau_k d\tau_j \\
 &= \frac{A_1^2}{2} \text{sinc}^2(f_1 T_\tau) \cos[\omega_1 T(k - j)] + \frac{A_2^2}{2} \text{sinc}^2(f_2 T_\tau) \cos[\omega_2 T(k - j)]
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Por lo tanto, la $E[\mu^2]$ resulta:

$$\begin{aligned}
 E[\mu^2] &= \left(\frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} \right) \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 + \\
 &\quad + \frac{A_1^2}{2} \text{sinc}^2(f_1 T_\tau) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \cos[\omega_1 T(k - j)] + \\
 &\quad + \frac{A_2^2}{2} \text{sinc}^2(f_2 T_\tau) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \cos[\omega_2 T(k - j)]
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

La Ec. (3.50) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 E[\mu^2] &= (A_1^2 + A_2^2) \frac{\|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + \frac{A_1^2}{2} \text{sinc}^2(f_1 T_\tau) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos[\omega_1 T q] + \\
 &+ \frac{A_2^2}{2} \text{sinc}^2(f_2 T_\tau) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos[\omega_2 T q] \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Finalmente, la Ec. (3.51) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 E[\mu^2] &= (A_1^2 + A_2^2) \frac{\|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + \\
 &+ A_1^2 \text{sinc}^2(f_1 T_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega_1 T}} \cos(2\pi f_1 T n + \theta_1) + \\
 &+ A_2^2 \text{sinc}^2(f_2 T_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega_2 T}} \cos(2\pi f_2 T n + \theta_2) \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{H}^\#(z) = \sum_{k=1}^n h_k^\# \cdot z^{-k}$, $\theta_1 = \text{Arg}[\mathbf{H}^\#(e^{j\omega_1 T})]$ y $\theta_2 = \text{Arg}[\mathbf{H}^\#(e^{j\omega_2 T})]$.

La Ec. (3.52) representa la potencia de salida, para una entrada compuesta por dos armónicos no correlacionados. Los resultados obtenidos en las Ecs. (3.51) y (3.52) pueden generalizarse para q armónicos como se aprecia en las Ecs. (3.53) y (3.54):

$$E[\mu^2] = \sum_{p=1}^q C_p^2 \left[\frac{\|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + \frac{1}{2} \text{sinc}^2(f_p T_\tau) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos(\omega_p T q) \right] \quad (3.53)$$

$$E[\mu^2] = \sum_{p=1}^q C_p^2 \left[\frac{\|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + \text{sinc}^2(f_p T_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega_p T}} \cos(2\pi f_p T n + \theta_p) \right] \quad (3.54)$$

Se puede observar que las Ecs. (3.53) y (3.54) son coincidentes con las Ecs. (3.38) y (3.39), respectivamente.

Por lo tanto, las conclusiones ya arribadas para el caso de una entrada periódica se extienden también para el caso de entradas senoidales no-correlacionadas.

En el caso particular del *J.R.S.*, filtrado con *MA*, con entradas senoidales no correlacionadas, los resultados son también coincidentes con los arribados en el caso de entradas periódicas.

3.8. Análisis de la *PFR*

En las Figs. 3.30, 3.31 y 3.32 se muestran las *PFRs* del muestreo uniforme seguido de *FIR*, para *MA*, *fir1* y *fircls1* (los dos últimos obtenidos en MATLAB), respectivamente. Se pueden comparar estas figuras con las Figs. 3.4, 3.13 y 3.15, correspondientes al *JRS*, y observar que las respuestas coinciden para frecuencias bajas; luego, a frecuencias mayores la evolución es diferente. A frecuencias medias, se denota la evolución típica de un cero y a altas frecuencias muestran el valor correspondiente a la $\|h\|_2^2$. Tanto en medias como en altas frecuencias se aprecia el efecto del muestreo aleatorio, que en principio parece deteriorar la respuesta en frecuencia, pero que realmente permite atenuar los picos propios del muestreo uniforme. En la respuesta del muestreo aleatorio desaparece el efecto de repetición del filtro en la frecuencia, mostrando en cambio una atenuación que se mantiene constante, aunque de valor no despreciable. En la Ec. (3.20), el efecto del muestreo aleatorio se hace evidente a través del término $\text{sinc}^2(fT_\tau)$. Está claro que si T_τ se hace cero, la aleatoriedad desaparece y, en la fórmula, $\text{sinc}^2(fT_\tau) = 1$, con lo que la ecuación describe la respuesta del filtro digital convencional con muestreo uniforme.

Del análisis comparativo de los filtros, en el marco de esta propuesta donde se aplica el muestreo aleatorio, surge que en altas frecuencias el Moving Average (*MA*) es la mejor opción, ya que posee una mayor atenuación de las perturbaciones. Esto se debe a que su norma segunda es la mínima, ya que los coeficientes

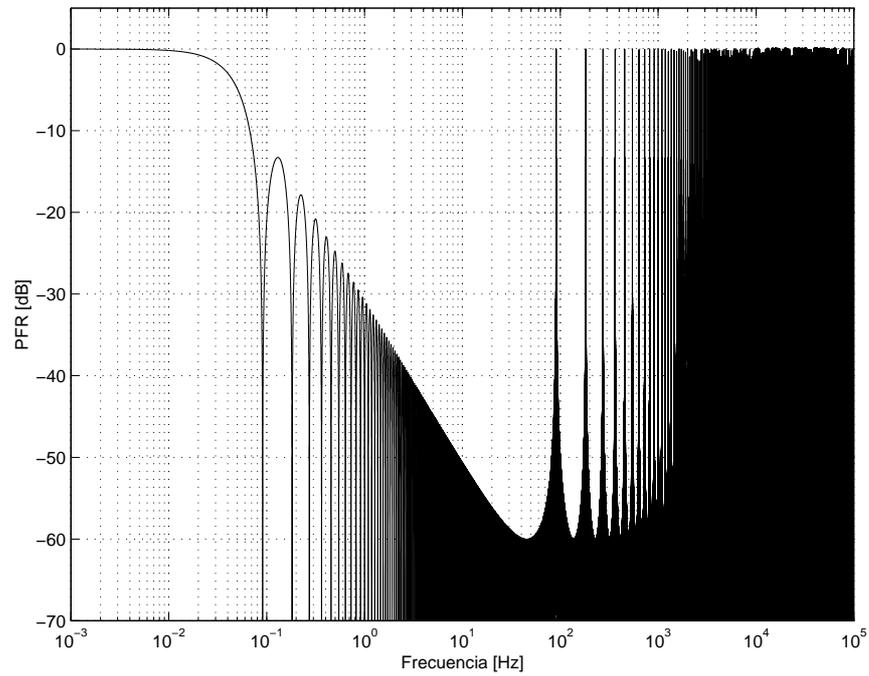


Figura 3.30: *PFR* para entrada senoidal pura, con filtro *MA*, $n = 1000$, $T_s = 6\text{ms}$.

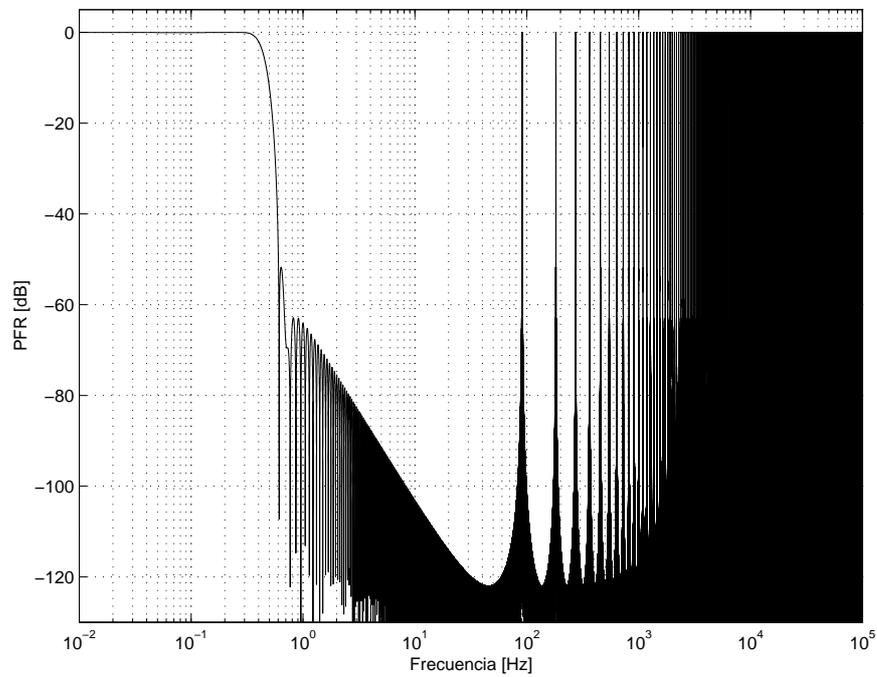


Figura 3.31: *PFR* para una entrada senoidal pura, con muestreo uniforme, con $T = 6\text{ms}$, filtro *fir1* y $n = 1000$.

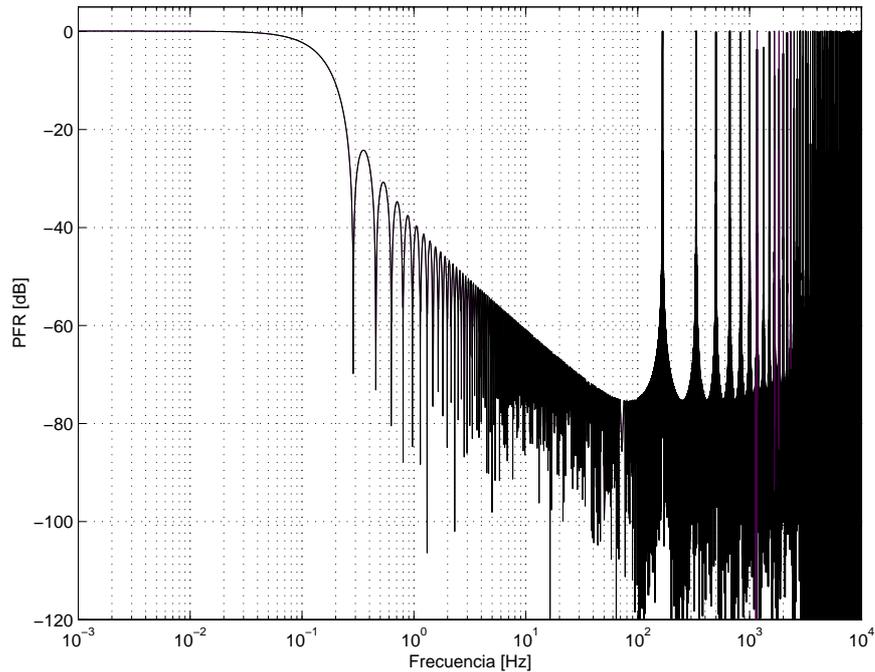


Figura 3.32: *PFR* para una entrada senoidal pura, con muestreo uniforme, con $T = 6\text{ms}$, filtro *fircls1* y $n = 1000$.

h_i son todos iguales y de valor $\frac{1}{n}$, sabiendo que en todo filtro *FIR*, la suma de los coeficientes debe ser igual a la unidad.

A pesar del mejor desenvolvimiento del *MA* en altas frecuencias, otros filtros *FIR* presentan una mejor selectividad, que puede ser explotada cuando la aplicación requiere una menor distancia frecuencial entre la banda pasante y la banda de atenuación.

En cuanto a la implementación, la del *MA* es la menos compleja ya que todos sus coeficientes son iguales; incluso el algoritmo puede realizarse en forma recursiva, lo que permite un procesamiento más simple aún.

3.9. Grado de aleatoriedad

En esta propuesta de muestreo aleatorio existe aún cierto grado de correlación, el cual depende de la relación $\frac{T_\tau}{T_{AD}}$. Cuanto menor sea esta relación menos aleatorio es el muestreo, es decir más se acerca al muestreo uniforme. En las Figs. [3.33](#) y [3.34](#) se muestra la *PFR* para el filtro *MA*, con $n = 10$, para tres casos: (a) $T_\tau/T_{AD} = 10$, (b) $T_\tau/T_{AD} = 1$ y (c) $T_\tau/T_{AD} = 0$. Para $T_\tau/T_{AD} = 0$ la *PFR* presenta picos a las frecuencias que son múltiplos de la frecuencia de muestreo. Más aún, la *PFR* es significativamente menor en el muestreo uniforme que en el aleatorio, excepto en las regiones alrededor de las frecuencias múltiplos de la frecuencia de muestreo. En estas regiones el efecto de la perturbación es muy importante y su eliminación es el objetivo de este trabajo. Un resultado interesante que se observa en las Figs. [3.33](#) y [3.34](#), aunque más claramente en la última, es que la *PFR* tiende a la *norm2* del vector filtro, para todos los casos en los que $T_\tau \neq 0$.

Las curvas mostradas en las figuras se realizaron con la condición de que la frecuencia media de muestreo, $E[f_m] = T_{AD} + T_\tau$, sea constante a efectos de que en todos los casos la frecuencia de corte del filtro sea la misma, $f_c = cte$. Sin embargo, en el caso real de una aplicación tecnológica la única restricción es el tiempo de adquisición, T_{AD} . Luego, una nueva comparación se realiza bajo este condicionamiento diferente, donde (a) $T_\tau/T_{AD} = 10$, (b) $T_\tau/T_{AD} = 1$ y (c) $T_\tau/T_{AD} = 0$, lo que resulta en (a) $E[f_m] = 11T_{AD}$, (b) $E[f_m] = 2T_{AD}$ y (c) $E[f_m] = T_{AD}$, respectivamente. De esta forma la f_c , que es proporcional a la $E[f_m]$, resulta mayor a medida que el grado de aleatoriedad es menor. Este concepto se corrobora a través de las Figs. [4.29](#) y [4.30](#), y es importante ya que el diseño y las prestaciones del sistema podrían mejorar más si la $E[f_m]$ fuese mayor.

Otro aspecto importante de las figuras del *JRS/MA* con $n = 10$, es la existencia de picos que deterioran la deseada atenuación producida por el *JRS* en medias y altas frecuencias. Estos picos son mayores a medida que el grado de aleatoriedad disminuye, acercándose al comportamiento del muestreo uniforme, como se observa en las figuras anteriores. Las graficaciones efectuadas, no sólo para $n = 10$ sino también para $n = 100$ y $n = 1000$, permiten arribar a la Tabla 3.2 donde se expresa la atenuación ideal dada por la *norm2* comparada con una menor atenuación obtenida en los picos en las altas frecuencias. Se puede inferir de la Tabla 3.2 que los resultados son poco satisfactorios para T_τ muy pequeños ($T_\tau = T_{AD}/2$ y $T_\tau = T_{AD}$) ya que la atenuación medida es muy baja (entre 1,5 y 4dB). En contraste, para $T_\tau = 10T_{AD}$, los valores obtenidos presentan una atenuación aceptable. En virtud de su comportamiento, se concluye que el *JRS/MA* sólo es recomendable para grados de aleatoriedad altos ($T_\tau \geq 5T_{AD}$).

Otro aspecto interesante que surge de la Tabla 3.2 es que los resultados para $n = 100$ y para $n = 1000$ difieren en sólo 3dB. Esto significa que, a pesar de aumentar en 10 veces el orden del filtro de reconstrucción, no se observa una ventaja apreciable en $n = 1000$. Por otra parte, al pasar de $n = 100$ a $n = 1000$, la f_c se reduce 10 veces y la implementación se hace más complicada ya que se requiere mayor memoria.

En las Tablas 3.3 y 3.4, se muestran los resultados correspondientes a los filtros *fir1* y *fircls1*, respectivamente, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Para estos filtros se infiere, al igual que con el *MA*, que sólo se puede utilizar esta técnica para grados de aleatoriedad $T_\tau \geq 5T_{AD}$. Adicionalmente, se observa que el filtro *MA* presenta una atenuación levemente mejor que la de los filtros *fir1* y *fircls1*, sumado a la mayor facilidad de implementación propia del filtro *MA* ya que permite una ejecución recursiva.

Como conclusión final, se afirma que el grado de aleatoriedad debe fijarse

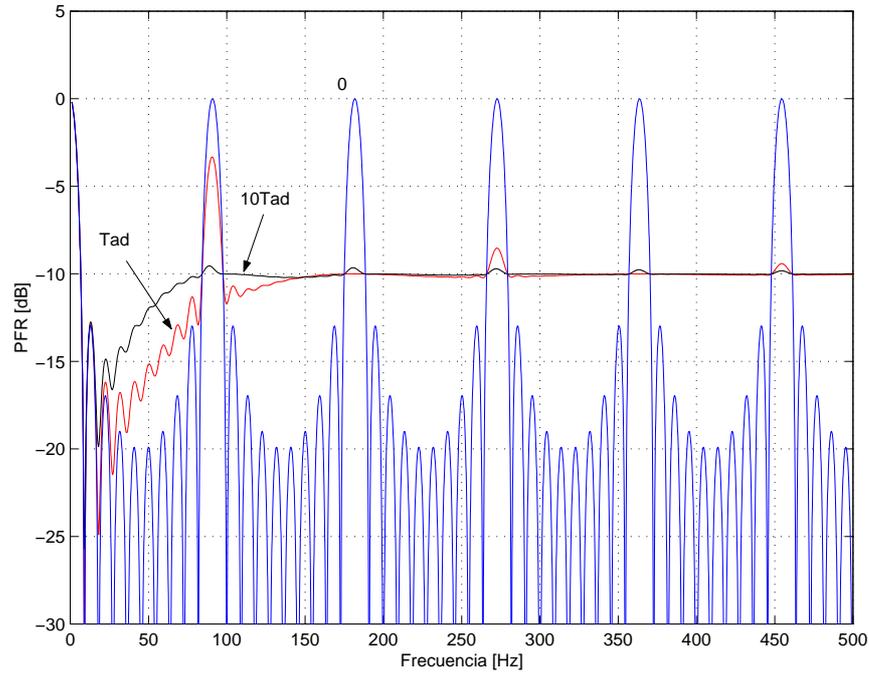


Figura 3.33: *PFR*, entrada senoidal pura, *MA* con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$, $T_\tau = T_{AD}$ y $T_\tau = 0$.

como $T_\tau \geq 5T_{AD}$ para los tres tipos de *FIR* estudiados, el filtro más conveniente es el *MA*, y la mayor complejidad de filtros con $n = 1000$, no justifica la pequeña mejora de atenuación respecto de $n = 100$.

T_τ	0	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
Atenuación ($n = 10$)	0	-1,5	-3,3	-8,7	-9,55	-10
Atenuación ($n = 100$)	0	-1,6	-3,8	-13,5	-17,2	-20
Atenuación ($n = 1000$)	0	-1,7	-4,0	-14,3	-19,7	-30

Tabla 3.2: *JRS/MA*, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

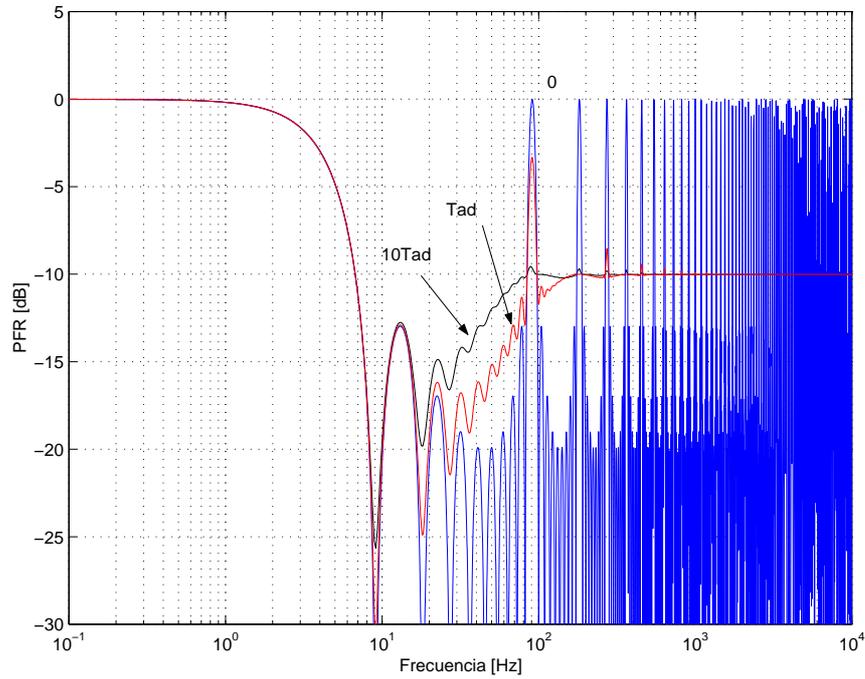


Figura 3.34: *PFR*, entrada senoidal pura, *MA* con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$, $T_\tau = T_{AD}$ y $T_\tau = 0$. Escala logarítmica de f .

T_τ	0	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
Atenuación ($n = 10$)	0	-1,4	-3,1	-7,7	-8,4	-8,8
Atenuación ($n = 100$)	0	-1,6	-3,8	-13,0	-16,2	-18,4
Atenuación ($n = 1000$)	0	-1,6	-3,9	-14,2	-19,6	-28,4

Tabla 3.3: *JRS/fir1*, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

T_τ	0	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
Atenuación ($n = 10$)	0	-1,3	-3,0	-7,3	-7,9	-8,3
Atenuación ($n = 100$)	0	-1,5	-3,7	-12,9	-16,2	-18,4
Atenuación ($n = 1000$)	0	-1,6	-3,8	-14,1	-19,4	-28,4

Tabla 3.4: *JRS/fircls1*, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

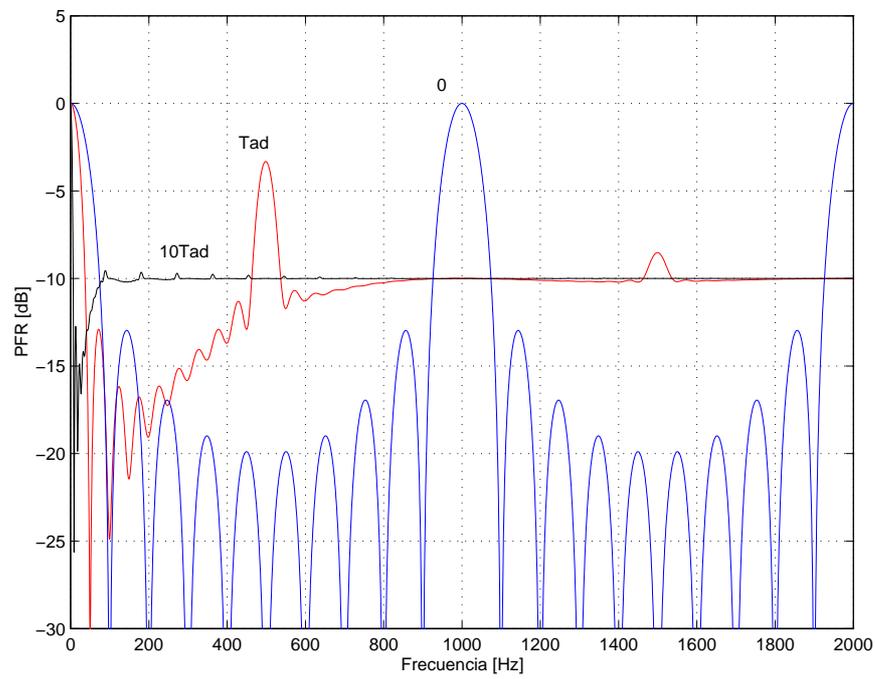


Figura 3.35: *PFR*, entrada senoidal pura, *MA* con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 1\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 1\text{ms}$). En todos los casos T_{AD} es el mismo.

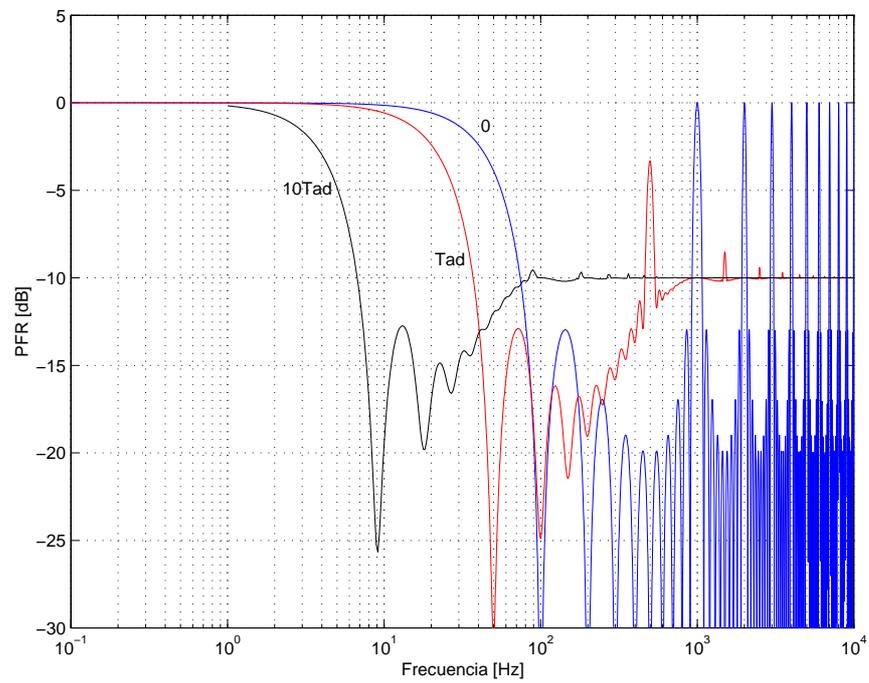


Figura 3.36: *PFR*, entrada senoidal pura, *MA* con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 1\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 1\text{ms}$). En todos los casos T_{AD} es el mismo. Escala logarítmica de frecuencia.

3.10. Desarrollo de la relación señal ruido

El objetivo en esta sección es evaluar el error equivalente producido por el proceso *JRS/FIR* en el rango de bajas frecuencias que es donde existen las señales útiles que se quieren adquirir. A los efectos de determinar tal error se desarrollará la relación S/N . Se supone que la señal de entrada $x(t)$ es diferenciable. Por lo tanto, la salida del muestreo *JRS*, \hat{x}_k , puede ser expandida por Taylor como:

$$\hat{x}_k = x(kT + \tau_k) = x_k + \frac{\tau_k}{1!} \dot{x}_k + \frac{\tau_k^2}{2!} \ddot{x}_k + \frac{\tau_k^3}{3!} \dddot{x}_k + \dots \quad (3.55)$$

Se define el error ε_k como la diferencia entre las muestras \hat{x}_k provenientes del *JRS* y las x_k provenientes de un muestreo uniforme:

$$\varepsilon_k \triangleq \hat{x}_k - x_k = \tau_k \dot{x}_k + \frac{\tau_k^2}{2!} \ddot{x}_k + \frac{\tau_k^3}{3!} \ddot{x}_k + \dots \quad (3.56)$$

Por otro lado, el error de la Ec. (3.56), al pasar por el filtro *FIR*, resulta en un error de salida e_n :

$$e_n = \sum_{k=1}^n h_{n-k} \varepsilon_k \quad (3.57)$$

y

$$E[e_n] = \sum_{k=1}^n h_{n-k} E[\varepsilon_k] \quad (3.58)$$

$$E[e_n^2] = E^2[e_n] + \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \cdot var[\varepsilon_k] \quad (3.59)$$

donde

$$var[\varepsilon_k] = E[(\varepsilon_k - E[\varepsilon_k])^2] = E[\varepsilon_k^2] - E^2[\varepsilon_k]$$

La Ec. (3.59) surge como sigue:

$$\begin{aligned} \text{var} [e_n] &= E [e_n^2] - E^2 [e_n] \implies \\ E [e_n^2] &= \text{var} [e_n] + E^2 [e_n] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \text{var} [e_n] &= E [(e_n - E [e_n])^2] = \\ &= E \left[\left(\sum_{k=1}^n h_{n-k} \varepsilon_k - \sum_{k=1}^n h_{n-k} E [\varepsilon_k] \right)^2 \right] = \\ &= E \left[\left\{ \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cdot (\varepsilon_k - E [\varepsilon_k]) \right\}^2 \right] = \\ &= E \left[\sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \cdot (\varepsilon_k - E [\varepsilon_k])^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n h_{n-k} \cdot (\varepsilon_k - E [\varepsilon_k]) \cdot h_{n-i} \cdot (\varepsilon_i - E [\varepsilon_i]) \right] \end{aligned}$$

donde ε_k y ε_i son variables aleatorias independientes. Luego:

$$\text{var} [e_n] = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \cdot E [(\varepsilon_k - E [\varepsilon_k])^2] + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n h_{n-k} \cdot E [\varepsilon_k - E [\varepsilon_k]] \cdot h_{n-i} \cdot E [\varepsilon_i - E [\varepsilon_i]] \quad (3.61)$$

y como $E [\varepsilon_k - E [\varepsilon_k]] = E [\varepsilon_i - E [\varepsilon_i]] = 0$, entonces:

$$\text{var} [e_n] = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \cdot E [(\varepsilon_k - E [\varepsilon_k])^2] = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \cdot \text{var} [\varepsilon_k] \quad (3.62)$$

Finalmente, aplicando la Ec. (3.62) en la Ec. (3.60), queda demostrada la (3.59).

A fin de arribar a $E[e_n]$ y $E[e_n^2]$, Ecs. (3.58) y (3.59), respectivamente, se deben obtener $E[\varepsilon_k]$ y $E[\varepsilon_k^2]$. De la Ec. (3.56):

$$E[\varepsilon_k] = \dot{x}_k E[\tau_k] + \frac{1}{2} \ddot{x}_k E[\tau_k^2] + \dots \quad (3.63)$$

$$E[\varepsilon_k^2] = \dot{x}_k^2 E[\tau_k^2] + \left[\frac{1}{4} \ddot{x}_k^2 + \frac{1}{6} \dot{x}_k \ddot{x}_k \right] E[\tau_k^4] + \dots \quad (3.64)$$

Se considerará una entrada cosenoidal, $x(t) = A \cos(\omega t)$, con $0 \leq \omega \leq N_f$, donde:

$$N_f = \frac{\pi}{T} \text{ rad/s}$$

es la frecuencia de Nyquist y las derivadas son $\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t)$, $\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t)$, $\ddot{\ddot{x}}(t) = \omega^3 A \sin(\omega t), \dots$. La *pdf* de τ_k está dada por la Ec. (3.4) y los momentos de τ_k son: $E[\tau_k] = 0$, $E[\tau_k^2] = \frac{T_\tau^2}{12}$ y $E[\tau_k^4] = \frac{T_\tau^4}{80}$. Por lo tanto, las Ecs. (3.63) y (3.64) pueden ser reescritas como:

$$E[\varepsilon_k] = -\frac{\omega^2 T_\tau^2}{24} A \cos(k\omega T) + \dots \quad (3.65)$$

$$E[\varepsilon_k^2] = \frac{\omega^2 T_\tau^2}{12} A^2 \sin^2(k\omega T) + \frac{\omega^4 T_\tau^4}{80} A^2 \left[\frac{1}{4} \cos^2(k\omega T) - \frac{1}{6} \sin^2(k\omega T) \right] + \dots \quad (3.66)$$

Además, si consideramos ω y T_τ en términos de N_f y T , respectivamente, $\omega = \beta N_f = \beta\pi/T$ y $T_\tau = \alpha T$:

$$E[\varepsilon_k] = -\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} A \cos(k\omega T) + \dots \quad (3.67)$$

$$E [\varepsilon_k^2] = \frac{(\beta\alpha\pi)^2}{12} A^2 \sin^2 (k\omega T) + \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{80} A^2 \left[\frac{1}{4} \cos^2 (k\omega T) - \frac{1}{6} \sin^2 (k\omega T) \right] + \dots \quad (3.68)$$

Las Ecs. (3.67) y (3.68) son series infinitas que, si $\beta\alpha \leq 0,05$, pueden ser truncadas, resultando las Ecs. (3.69) y (3.70):

$$E [\varepsilon_k] \simeq -\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} A \cos (k\omega T) \quad (3.69)$$

$$E [\varepsilon_k^2] \simeq \frac{(\beta\alpha\pi)^2}{12} A^2 \sin^2 (k\omega T) + \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{80} A^2 \left[\frac{1}{4} \cos^2 (k\omega T) - \frac{1}{6} \sin^2 (k\omega T) \right] \quad (3.70)$$

Por lo tanto $E [e_n]$ es:

$$E [e_n] = -\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} A \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cos (k\omega T) \quad (3.71)$$

y $E [e_n^2]$ es:

$$E [e_n^2] = E^2 [e_n] + \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \{ E [\varepsilon_k^2] - E^2 [\varepsilon_k] \}$$

o

$$\begin{aligned}
 E[e_n^2] &= E^2[e_n] + \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 E[\varepsilon_k^2] - \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 E^2[\varepsilon_k] \simeq \\
 &\simeq E^2[e_n] + \\
 &+ \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \left\{ \frac{(\beta\alpha\pi)^2}{12} A^2 \sin^2(k\omega T) + \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{80} A^2 \left[\frac{1}{4} \cos^2(k\omega T) - \frac{1}{6} \sin^2(k\omega T) \right] \right\} + \\
 &\hspace{15em} (3.72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \left[-\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} A \cos(k\omega T) \right]^2 = \\
 &= E^2[e_n] + \\
 &+ \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 A^2 \left\{ \frac{(\beta\alpha\pi)^2}{12} \sin^2(k\omega T) + \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{80} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{36} \right) \cos^2(k\omega T) - \frac{1}{6} \sin^2(k\omega T) \right] \right\} \\
 &\hspace{15em} (3.73)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E^2[e_n] + \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 A^2 \left\{ \frac{(\beta\alpha\pi)^2}{12} \sin^2(k\omega T) + \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{80} \left[\frac{1}{9} \cos^2(k\omega T) - \frac{1}{6} \sin^2(k\omega T) \right] \right\} \\
 &\hspace{15em} (3.74)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E^2[e_n] + A^2 \left[\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} - \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{2880} \right] \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 + \\
 &+ A^2 \left[-\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} + \frac{5(\beta\alpha\pi)^4}{2880} \right] \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \cos(k2\omega T) \\
 &\hspace{15em} (3.75)
 \end{aligned}$$

A fin de encontrar expresiones más compactas para las Ecs. (3.71) y (3.75):

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cos(k\omega T) &= \sum_{k=1}^n h_{n-k} \frac{e^{jk\omega T} + e^{-jk\omega T}}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} e^{jn\omega T} \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cdot e^{-j(n-k)\omega T} + \frac{1}{2} e^{-jn\omega T} \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cdot e^{j(n-k)\omega T} = \\
 &= \frac{1}{2} e^{jn\omega T} [H(z)]_{z=e^{j\omega T}} + \frac{1}{2} e^{-jn\omega T} [H(z)]_{z=e^{-j\omega T}} \\
 &\hspace{15em} (3.76)
 \end{aligned}$$

donde $H(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_p z^{-p}$ [?]. Continuando:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cos(k\omega T) &= \frac{1}{2} e^{jn\omega T} H(e^{j\omega T}) + \frac{1}{2} (e^{jn\omega T})^* H^*(e^{j\omega T}) = \\ &= \operatorname{Re} [e^{jn\omega T} H(e^{j\omega T})] = \\ &= \operatorname{Re} [|e^{jn\omega T}| |H(e^{j\omega T})| \angle n\omega T + \phi] \end{aligned} \quad (3.77)$$

con $\phi \triangleq \operatorname{Arg} [H(e^{j\omega T})]$. Luego:

$$\sum_{k=1}^n h_{n-k} \cos(k\omega T) = |H(e^{j\omega T})| \cos(n\omega T + \phi) \quad (3.78)$$

Por lo tanto, las Ecs. (3.71) y (3.75) se reescriben como:

$$E[e_n] \simeq -\frac{A}{24} (\beta\alpha\pi)^2 |H(e^{j\omega T})| \cos(n\omega T + \phi) \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} E[e_n^2] &\simeq E^2[e_n] + A^2 \left[\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} - \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{2880} \right] \|h\|_2^2 + \\ &+ A^2 \left[-\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} + \frac{5(\beta\alpha\pi)^4}{2880} \right] |\hat{H}(e^{j2\omega T})| \cos(2n\omega T + \varphi) \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde $\|h\|_2^2 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} h_k^2$, $\hat{H}(z) \equiv \sum_{k=1}^n h_k^2 z^{-k}$ y $\varphi \triangleq \operatorname{Arg} [\hat{H}(e^{j2\omega T})]$.

Luego la relación N/S es:

$$\frac{N}{S}(\omega) \triangleq 10 \log_{10} [P_e(\omega)/P_\nu(\omega)] \text{ dB} \quad (3.81)$$

donde $P_e(\omega)$ y $P_\nu(\omega)$ son las potencias medias de e_n y ν_n , respectivamente, para una frecuencia de entrada ω . La señal ν_n es la salida de un *FIR* muestreado uniformemente. Entonces:

$$\nu_n = A [H(z)]_{z=e^{j\omega T}} \cos(n\omega T) = A |H(e^{j\omega T})| \cos(n\omega T + \phi) \quad (3.82)$$

$$(\nu_n)^2 = A^2 |H(e^{j\omega T})|^2 \cos^2(n\omega T + \phi) \quad (3.83)$$

Promediando $(\nu_n)^2$ a lo largo de un ciclo:

$$P_\nu(\omega) = \frac{A^2}{2} |H(e^{j\omega T})|^2 \quad (3.84)$$

Similarmente:

$$P_e(\omega) = \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{576} \frac{A^2}{2} |H(e^{j\omega T})|^2 + \|h\|_2^2 A^2 \left[\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} - \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{2880} \right] \quad (3.85)$$

Las Ecs. (3.85) y (3.84) resultan:

$$P_e(\omega) = \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{576} P_\nu(\omega) + \|h\|_2^2 A^2 \left[\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} - \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{2880} \right] \quad (3.86)$$

Por lo tanto, la relación N/S resulta:

$$\frac{N}{S}(\omega) = 10 \log_{10} \left\{ \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{576} + \frac{\|h\|_2^2 \left[\frac{(\beta\alpha\pi)^2}{12} - \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{1440} \right]}{|H(e^{j\omega T})|^2} \right\} dB \quad (3.87)$$

Las Ecs. (3.86) y (3.87) pueden simplificarse si $\frac{(\beta\alpha\pi)^4}{1440} \ll \frac{(\beta\alpha\pi)^2}{12}$ y $\frac{(\beta\alpha\pi)^4}{576} \ll \frac{\|h\|_2^2 (\beta\alpha\pi)^2}{24 |H(e^{j\omega T})|^2}$, resultando:

$$P_e(\omega) \simeq \frac{(\beta\alpha\pi)^4}{576} P_\nu(\omega) + \|h\|_2^2 A^2 \frac{(\beta\alpha\pi)^2}{24} \quad (3.88)$$

$$\frac{N}{S}(\omega) = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\|h\|_2^2 (\beta\alpha\pi)^2}{12 |H(e^{j\omega T})|^2} \right\} dB \quad (3.89)$$

válidas para $\beta\alpha \leq 0,05$. Por lo tanto la relación señal ruido es:

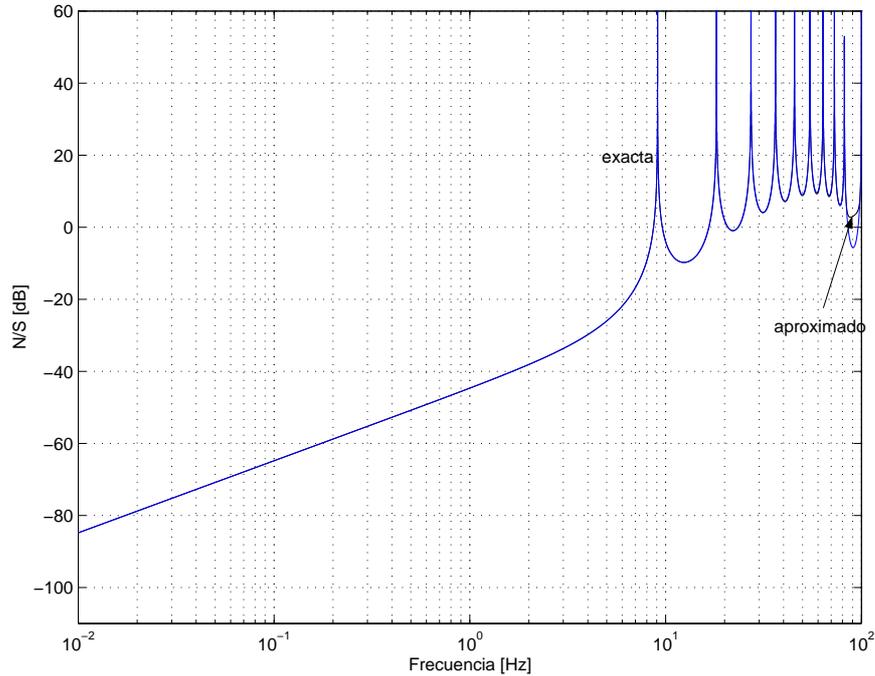


Figura 3.37: Relación N/S , exacta, Ec. (3.87), y relación N/S aproximada, Ec. (3.89). Condiciones: filtro MA , $n = 10$, JRS entrada senoidal pura, $T_r = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$.

$$\frac{S}{N}(\omega) \simeq 10 \log_{10} \left\{ \frac{12 |H(z)|_{z=e^{j\omega T}}^2}{\|h\|_2^2 (\beta\alpha\pi)^2} \right\} \text{ dB} \quad (3.90)$$

Las expresiones (3.87) y (3.89), con $\alpha = 0,9$ y FIR tipo MA con $n = 10$, son graficadas en la Fig. 3.37, donde se observa que ambas curvas coinciden para frecuencias menores de 80Hz. De todas maneras, $f = 80\text{Hz}$ representa un valor de $\beta = 1,76$, por lo que $\beta\alpha = 1,58$, que está fuera del rango de $\beta\alpha$ donde las ecuaciones son válidas. Por lo tanto se verifica que la Ec. (3.89) es una correcta aproximación de la Ec. (3.87). De aquí en más se utilizará entonces la expresión más simple dada por la Ec. (3.89) para representar la relación N/S , y la expresión (3.90) para representar la relación S/N .

En la Fig. 3.38 se grafica la Ec. (3.90) y la simulación de la relación S/N . Se puede observar que las dos curvas son muy aproximadas para frecuencias menores

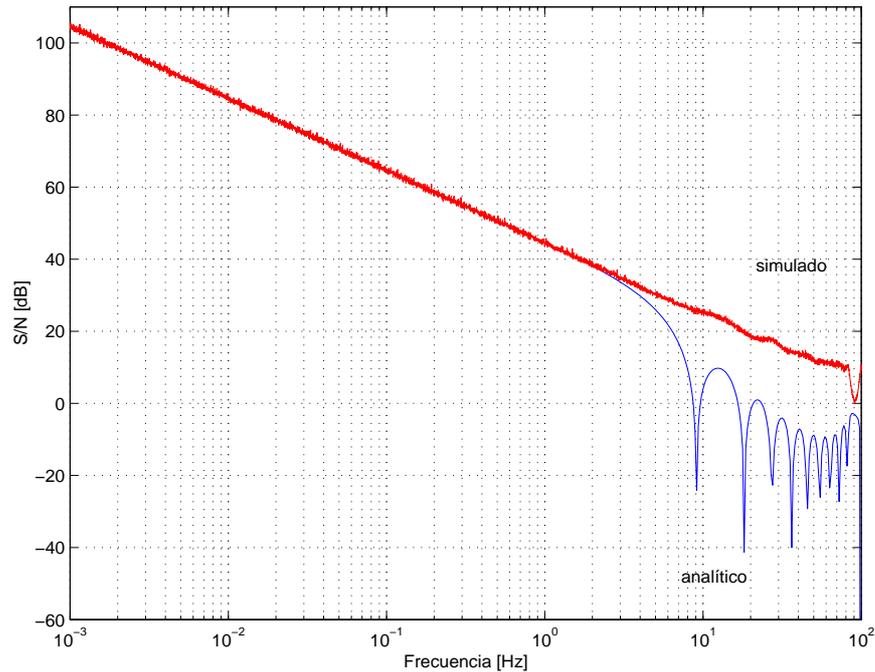


Figura 3.38: Relación S/N , Ec. (3.90), y relación S/N simulada. Condiciones: filtro MA , $n = 10$, JRS entrada senoidal pura, $T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$.

de 2Hz, es decir para $\beta\alpha < 0,044$. Por lo tanto, a través de esta comparación gráfica se verifica que la Ec. (3.90) es válida para calcular la relación S/N que expresa el efecto del muestreo aleatorio JRS/MA sobre la señal de baja frecuencia que se desea medir o adquirir. Adicionalmente, los resultados de la Fig. 3.38 demuestran que el error o ruido equivalente provocado por el método JRS/MA es sumamente reducido en las frecuencias bajas.

La expresión (3.90), así como las curvas simuladas y graficadas están dando cuenta del efecto que produce el muestreo aleatorio en el rango de las bajas frecuencias que es la parte del espectro donde se requiere que el muestreo aleatorio no altere la señal. Lo que se ha obtenido en la Ec. (3.90) es comparar la señal muestreada uniformemente y luego filtrada por un MA , con la señal muestreada con JRS y luego también filtrada por un MA . La diferencia entre ambas es asumido como el ruido equivalente provocado por el JRS . La potencia de la

señal muestreada uniformemente y luego filtrada por el *MA* constituye la señal *S*, de la relación *S/R*, y la potencia del ruido provocado por el *JRS* es el *R* de la relación *S/R*.

A efectos de comprender la magnitud del efecto del *JRS* en bajas frecuencias, contemplado por la Ec. (3.90), se realiza a continuación una comparación del mismo respecto del efecto atenuador producido por el propio filtro *MA*. En este último caso se considera la potencia de la señal, *S*, como la de la señal sin filtrar y la del ruido, *N*, como la de la diferencia entre las señales sin filtrar y filtrada. En la Fig. 3.39 se observa la comparación entre la *S/N* debido exclusivamente al filtro *MA*, y la *S/R* debida exclusivamente al *JRS*. Se puede observar que, para el rango de validez de la Ec. (3.90), la *S/R* debido al *JRS* es alrededor de 30dB mayor que la debida al filtrado *MA*. Por ende se concluye que los efectos negativos que presenta el *JRS* a bajas frecuencias son despreciables.

Se han realizado las mismas comparaciones para otros filtros *FIR*, como *fir1* y *filter1*, con el objeto de verificar las conclusiones obtenidas para el *JRS/MA*. La comparación de la expresión teórica (3.90) aplicada a un filtro *fir1* con $n = 10$ y $\alpha = 0,9$, con su simulación se muestra en la Fig. 3.40 y lo mismo para el filtro *filter1* en la Fig. 3.41. Se verifica que la Ec. (3.90) coincide con las simulaciones para $f < 0,4$ Hz, lo que permite validar dichas expresiones también para los filtros *fir1* y *filter1*.

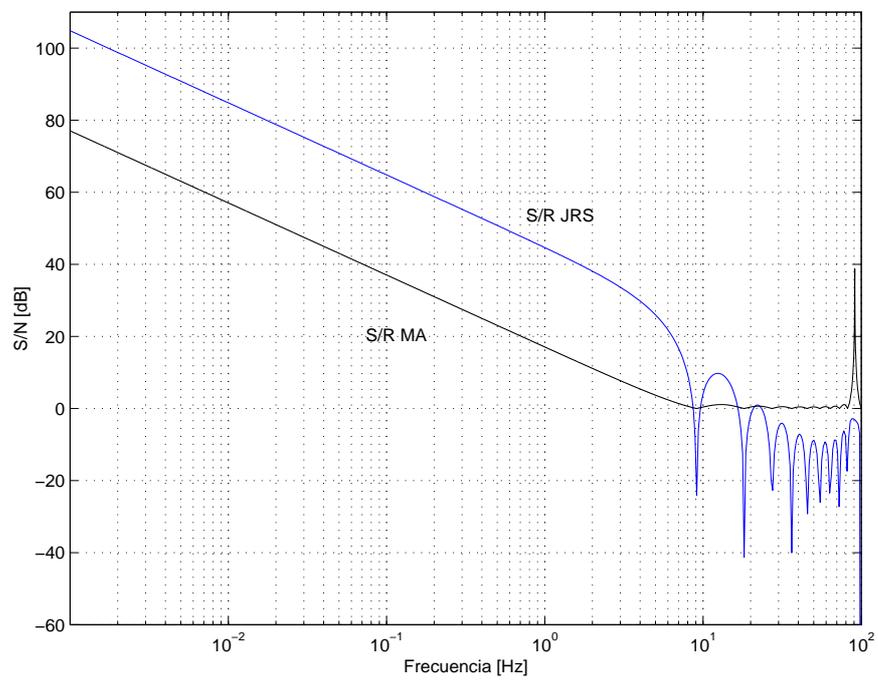


Figura 3.39: S/N con ruido provocado sólo por el método, S/N con error provocado sólo por el filtro MA . Condiciones: filtro MA , $n = 10$, JRS entrada senoidal pura, $T_{\tau} = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$.

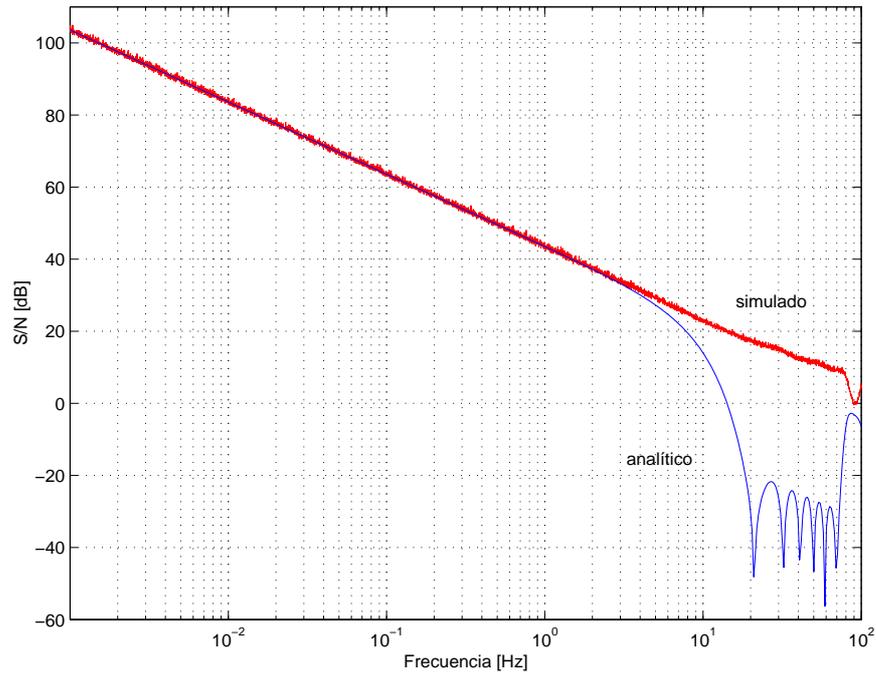


Figura 3.40: Relación S/N , Ec. (3.90) y relación S/N simulada, para $JRS/fir1$, $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

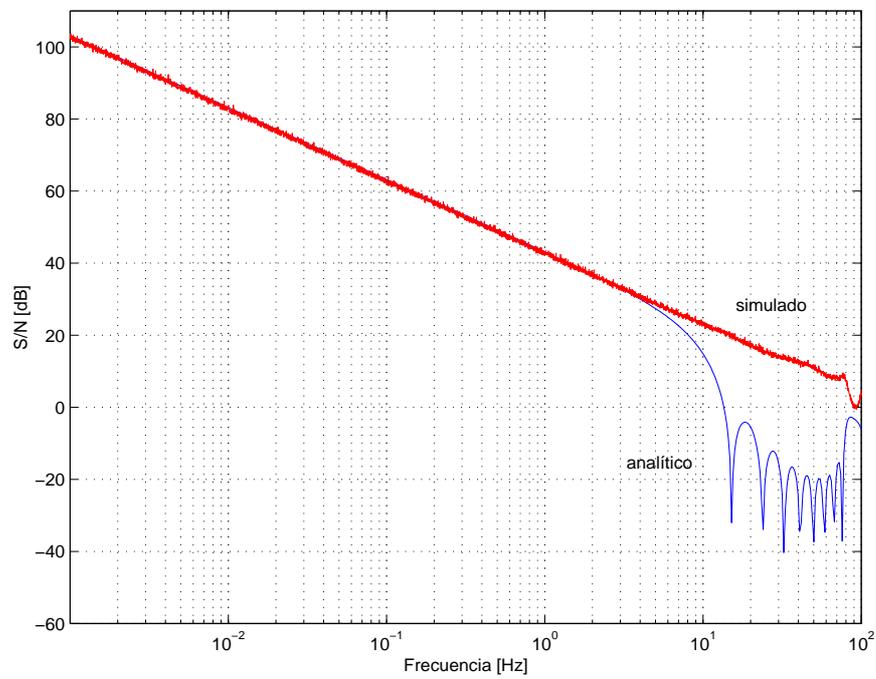


Figura 3.41: Relación N/S , Ec. (3.87) y relación N/S simulada, para $JRS/fircls1$, $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

3.11. Conclusiones

En este capítulo se trataron los siguientes temas:

- Desarrollo de la *PFR* del proceso *JRS/FIR*, para una entrada senoidal.
- Especialización de la formulación desarrollada para los procesos *JRS/MA*, *JRS/fir1* y *JRS/fircls1*, para una entrada senoidal.
- Validación de las formulación en los procesos *JRS/MA*, *JRS/fir1* y *JRS/fircls1*, para una entrada senoidal, a través de simulaciones.
- Desarrollo de la *PFR* del proceso *JRS/FIR*, para una entrada periódica cualquiera.
- Desarrollo de la *PFR* del proceso *JRS/FIR*, para una entrada compuesta por cosenos cuya correlación cruzada sea nula.
- Análisis del efecto del grado de aleatoriedad sobre la *PFR*.
- Desarrollo de la Relación Señal Ruido *S/N* para el rango de frecuencias bajas, donde se supone que la señal de entrada no posee ruido.

Las conclusiones más importantes de este capítulo son las siguientes:

- El proceso *JRS/FIR* demostró ser útil en cuanto a la atenuación de los efectos de aliasing producidos por las perturbaciones de alta frecuencia.
- Las atenuaciones obtenidas a alta frecuencia son coincidentes con al *norm2* del filtro de reconstrucción utilizado. Sin embargo, en el rango de frecuencia donde interesa una buena atenuación aparece el efecto de picos, que deterioran la atenuación buscada. Estos picos reducen el efecto antialiasing del *JRS* cuando el orden del filtro es elevado o el grado de aleatoriedad es bajo.

- El filtro *MA* es el que produce la mayor atenuación en alta frecuencia debido a su menor *norm2*.
- En bajas frecuencias el *JRS/FIR* demostró no producir efectos apreciables en las señales útiles que se desean adquirir. La demostración se realizó a través del desarrollo de relación *S/N*. La relación *S/N* obtenida estableció que los errores producidos por el muestreo aleatorio son incluso menores que los que introduce el propio filtro de reconstrucción.

Capítulo 4

Muestreo Aleatorio Aditivo Asincrónico (Random Additive Asynchronous Sampling, *RAAS*)

4.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla el muestreo aleatorio aditivo asincrónico (*RAAS*), con un filtro digital de reconstrucción tipo *FIR*. En la Fig. 4.1 se muestra un esquema del proceso. El objetivo es adquirir señales de baja frecuencia inmersas en ruido. Al efecto de evaluar el comportamiento de esta técnica, se considerarán dos aspectos: 1) la atenuación del ruido de alta frecuencia, cuyo indicador será la Respuesta en Frecuencia de Potencia (Power Frequency Response, *PFR*). 2) La exactitud de la señal adquirida a bajas frecuencias. En este último caso se aceptará que existe un error de medición en bajas frecuencias producido por el propio método *RAAS/FIR*, y se utilizará la relación señal ruido S/N como indicador. Se desarrolla en este capítulo la formulación analítica de la *PFR*, que es además contrastada con resultados de simulación. En cuanto al S/N , debido a la complejidad

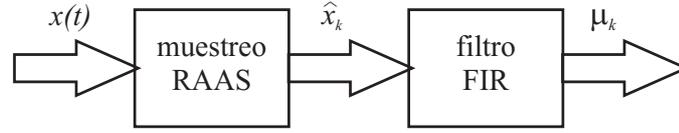


Figura 4.1: *RAAS* seguido por un filtro de reconstrucción *FIR*.

matemática del proceso, se obtuvieron resultados a través de simulaciones.

4.2. Desarrollo de la PFR

A continuación se desarrolla la formulación matemática del problema. El análisis se realiza para una señal de entrada senoidal pura, cuya expresión es:

$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi) \quad (4.1)$$

donde A es la amplitud de la entrada senoidal, f es la frecuencia, φ la fase aleatoria. Esta última posee una densidad de probabilidad uniforme en el entorno $[0, 2\pi]$.

El muestreo aleatorio propuesto es el Random Additive Asynchronous Sampling (*RAAS*) cuya función de muestreo, $s(t)$, se observa en la Fig. 4.2 y vale:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_k) \quad (4.2)$$

$$t_k = \sum_{p=1}^k T_p \quad (4.3)$$

$$T_p = T_{AD} + \tau_p \quad (4.4)$$

donde los T_p son los sucesivos "períodos" de muestreo, T_{AD} es el mínimo intervalo de muestreo que tecnológicamente permite el sistema (normalmente coincide con

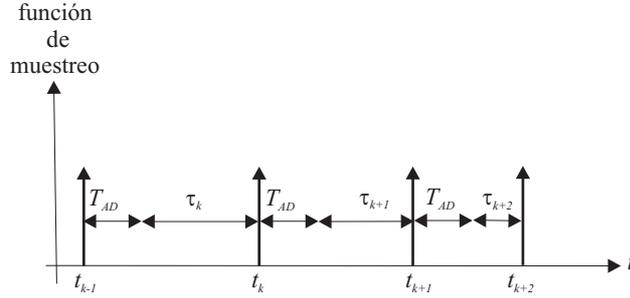


Figura 4.2: Función de muestreo *RAAS*.

el tiempo de adquisición) y τ_p es un tiempo aleatorio que posee una función de densidad de probabilidad uniforme:

$$f(\tau_p) = \frac{1}{T_\tau}, \quad [0, T_\tau] \quad (4.5)$$

donde T_τ es el valor máximo de τ_p .

Se observa que la función de muestreo *RAAS* presenta un carácter acumulativo del tiempo de muestreo, de allí el nombre en inglés *additive*.

Las muestras resultantes del muestreo aleatorio *RAAS* son:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= x(t) \cdot s(t) = A \cos(\omega t_k + \phi) = A \cos \left[\omega \left(\sum_{p=1}^k (T_{AD} + \tau_p) \right) + \phi \right] \\ &= A \cos \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \phi \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por otra parte, se tiene un filtro cuya salida μ posee una expresión:

$$\mu = \sum_{k=1}^n h_{n-k} \hat{x}_k \quad (4.7)$$

donde \hat{x}_k es el valor instantáneo de la señal de entrada en los instantes de muestreo t_k y los $h_0, h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}$ son los coeficientes del filtro. Por lo tanto, al

introducir la Ec. (4.6) en la (4.7), se obtiene

$$\mu = \sum_{k=1}^n h_{n-k} A \cos \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \varphi \right) \quad (4.8)$$

La Ec. (4.8) incluye $n + 1$ variables aleatorias: φ y los tiempos τ_k con $p = 1$ a n .

A fin de caracterizar al proceso bajo estudio, se persigue determinar los momentos primero y segundo de μ . Dado que se trata de un sistema ergódico, el momento primero expresa el valor medio, es decir, la componente CC resultante del muestreo aleatorio de la perturbación y su posterior filtrado. El momento segundo expresa la potencia eléctrica presente luego del proceso citado. En cuanto al momento primero, la expresión del mismo es la siguiente:

$$E[\mu] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mu f_{\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n} d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \quad (4.9)$$

donde $f_{\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n}$ es la *pdf* de μ y φ es la fase. Las variables aleatorias $\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ son estadísticamente independientes. Por esta razón, la función densidad de probabilidad conjunta se puede expresar como:

$$f_{\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n} = f_{\varphi} f_{\tau_1} f_{\tau_2} \cdots f_{\tau_n} \quad (4.10)$$

Reemplazando las *pdfs* de $\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ en (4.10), se obtiene:

$$f_{\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n} = \frac{1}{2\pi T_{\tau}^n} \quad (4.11)$$

La introducción de (4.8) y (4.11) en (4.9) resulta en:

$$E[\mu] = \frac{A}{2\pi T_\tau^n} \int_0^{T_\tau} \cdots \int_0^{T_\tau} \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cos \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \varphi \right) d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \quad (4.12)$$

La Ec. (4.12) se puede expresar como:

$$E[\mu] = \frac{A}{2\pi T_\tau^n} \sum_{k=1}^n h_{n-k} \int_0^{T_\tau} \cdots \int_0^{T_\tau} \cos \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \varphi \right) d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \quad (4.13)$$

donde la integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \varphi \right) d\varphi = 0$$

Por lo tanto, la solución de la Ec. (4.13) es:

$$E[\mu] = 0 \quad (4.14)$$

De acuerdo con la (4.14), el resultado del valor esperado, para cualquier h , T_{AD} y T_τ resulta ser 0. Es decir entonces, que tanto el muestreo uniforme ($T_\tau = 0$) como el aleatorio proveen resultados satisfactorios en cuanto a la media de la estimación.

A fin de probar que el muestreo aleatorio produce mejores resultados que el uniforme, se utilizará la *PFR*, que ya fue definida en el capítulo anterior. La expresión de la *PFR* se desarrolla a continuación para el caso del *RAAS*, con entrada senoidal pura, aplicando un filtro de reconstrucción general tipo *FIR*. La expresión de la *PFR* es la relación entre la potencia de la salida del proceso y la de entrada. La potencia de salida es:

$$E[\mu^2] = E \left[\left(\sum_{k=1}^n h_{n-k} \hat{x}_k \right)^2 \right] \quad (4.15)$$

Se puede verificar algebraicamente que se cumple:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n a_k a_j. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, incluyendo la Ec. (4.16) en la (4.15) resulta:

$$E[\mu^2] = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 E[\hat{x}_k^2] + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} E[\hat{x}_k \hat{x}_j] \quad (4.17)$$

La obtención de la $E[\mu^2]$ requiere el desarrollo de los términos de la Ec. (4.17).

A tal efecto se comienza con el término $E[\hat{x}_k^2]$:

$$\begin{aligned} E[\hat{x}_k^2] &= \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k} A^2 \cos^2 \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \varphi \right) d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \\ &= \frac{A^2}{2\pi T_\tau^k} \int_0^{T_\tau} \cdots \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \cos^2 \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \varphi \right) d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \\ &= \frac{A^2}{2\pi T_\tau^k} \int_0^{T_\tau} \cdots \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2\omega k T_{AD} + 2\omega \sum_{p=1}^k \tau_p + 2\varphi \right) \right] d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \\ &= \frac{A^2}{2\pi T_\tau^k} \int_0^{T_\tau} \cdots \int_0^{T_\tau} \pi d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k = \frac{A^2}{2T_\tau^k} \int_0^{T_\tau} \cdots \int_0^{T_\tau} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k = \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde la pdf $f_{\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k}$ se reemplazó por $\frac{1}{2\pi T_\tau^k}$, ya que $f_{\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k} = f_{\tau_1} f_{\tau_2} \cdots f_{\tau_k} f_{\varphi}$ porque $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \varphi$ son variables independientes.

Por otro lado, el valor $E[\hat{x}_k \hat{x}_j]$ en la Ec. (4.17) puede ser calculado como:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= E \left[A \cos \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \varphi \right) \cdot A \cos \left(\omega j T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^j \tau_p + \varphi \right) \right] \\
 &= A^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots, \tau_j} \cos \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p + \varphi \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \left(\omega j T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^j \tau_p + \varphi \right) d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \dots d\tau_j \\
 &= \frac{A^2}{2\pi T_\tau^j} \int \dots \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} \cos[\alpha + \varphi] \cos[\beta + \varphi] d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \dots d\tau_j
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde $\alpha = \omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p$ y $\beta = \omega j T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^j \tau_p$. Continuando:

$$E[\hat{x}_k \hat{x}_j] = \frac{A^2}{4\pi T_\tau^j} \int \dots \int_0^{T_\tau} \int_0^{2\pi} [\cos(\alpha + \beta + 2\varphi) + \cos(\alpha - \beta)] d\varphi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \dots d\tau_j \tag{4.20}$$

En particular se analiza la integral sobre φ :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} [\cos(\alpha + \beta + 2\varphi) + \cos(\alpha - \beta)] d\varphi = \\
 &= \left[\frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta + 2\varphi) + \varphi \cos(\alpha - \beta) \right]_0^{2\pi} = 2\pi \cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 E [\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{A^2}{2T_\tau^j} \int \cdots \int_0^{T_\tau} \cos \left(\omega k T_{AD} + \omega \sum_{p=1}^k \tau_p - \omega j T_{AD} - \omega \sum_{p=1}^j \tau_p \right) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \dots d\tau_j \\
 &= \frac{A^2}{2T_\tau^j} \int \cdots \int_0^{T_\tau} \cos \left[\omega (k - j) T_{AD} + \omega \left(\sum_{p=1}^k \tau_p - \sum_{p=1}^j \tau_p \right) \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \dots d\tau_j \\
 &= \frac{A^2}{2T_\tau^j} \int \cdots \int_0^{T_\tau} \cos \left[\omega (k - j) T_{AD} - \omega \sum_{p=k+1}^j \tau_p \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \dots d\tau_j \\
 &= \frac{A^2}{2T_\tau^{(j-k)}} \int \cdots \int_0^{T_\tau} \cos \left[\omega (k - j) T_{AD} - \omega \sum_{p=k+1}^j \tau_p \right] d\tau_{k+1} \dots d\tau_j \\
 &= \frac{A^2}{2T_\tau^{(j-k)}} \int \cdots \int_0^{T_\tau} \cos \left[\delta - \omega \sum_{p=k+1}^j \tau_p \right] d\tau_{k+1} \dots d\tau_j \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

donde $\delta = \omega T_{AD} (k - j)$. El desarrollo de la formulación continúa como:

$$\begin{aligned}
 E [\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{A^2}{4T_\tau^{(j-k)}} \int \cdots \int_0^{T_\tau} [e^{i\delta} e^{-i\omega\tau_{k+1}} \dots e^{-i\omega\tau_j} + e^{-i\delta} e^{i\omega\tau_{k+1}} \dots e^{i\omega\tau_j}] d\tau_{k+1} \dots d\tau_j \\
 &= \frac{A^2}{4(i\omega T_\tau)^{j-k}} \int \cdots \int_0^{i\omega T_\tau} [e^{i\delta} e^{-\gamma_{k+1}} \dots e^{-\gamma_j} + e^{-i\delta} e^{\gamma_{k+1}} \dots e^{\gamma_j}] d\gamma_{k+1} \dots d\gamma_j \\
 &= \frac{A^2}{4(i\omega T_\tau)^{j-k}} \left[(-1)^{j-k} e^{i\delta} e^{-\gamma_{k+1}} \dots e^{-\gamma_j} + e^{-i\delta} e^{\gamma_{k+1}} \dots e^{\gamma_j} \right]_0^{i\omega T_\tau} \\
 &= \frac{A^2}{4(i\omega T_\tau)^{j-k}} \left[e^{i\delta} (1 - e^{-i\omega T_\tau})^{j-k} + e^{-i\delta} (e^{i\omega T_\tau} - 1)^{j-k} \right] \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

Expresando la Ec. (4.22) por medio de funciones trigonométricas se obtiene la Ec. (4.23):

$$\begin{aligned}
 E[\hat{x}_k \hat{x}_j] &= \frac{A^2 \left(e^{i\omega \frac{T_\tau}{2}} - e^{-i\omega \frac{T_\tau}{2}} \right)^{j-k}}{4 (i\omega T_\tau)^{j-k}} \left[e^{i\delta} e^{-i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} + e^{-i\delta} e^{i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} \right] \\
 &= \frac{A^2 (2)^{j-k} \left(e^{i\omega \frac{T_\tau}{2}} - e^{-i\omega \frac{T_\tau}{2}} \right)^{j-k}}{4 (\omega T_\tau)^{j-k} (2i)^{j-k}} \left[e^{i\delta} e^{-i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} + e^{-i\delta} e^{i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} \right] \\
 &= \frac{A^2 (2)^{j-k}}{4 (\omega T_\tau)^{j-k}} \sin^{j-k}(\omega T_\tau/2) \left[e^{i\delta} e^{-i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} + e^{-i\delta} e^{i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} \right] \\
 &= \frac{A^2}{4} \text{sinc}^{j-k}(fT_\tau) \left[e^{i\delta} e^{-i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} + e^{-i\delta} e^{i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} \right] \\
 &= \frac{A^2}{2} \text{sinc}^{j-k}(fT_\tau) \frac{\left[e^{i\omega T_{AD}(k-j)} e^{-i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} + e^{-i\omega T_{AD}(k-j)} e^{i\omega \frac{T_\tau}{2}(j-k)} \right]}{2} \\
 &= \frac{A^2}{2} \text{sinc}^{j-k}(fT_\tau) \cos \left[\omega (k-j) \left(T_{AD} - \frac{T_\tau}{2} \right) \right] \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 E[\mu^2] &= \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 \frac{A^2}{2} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \frac{A^2}{2} \text{sinc}^{j-k}(fT_\tau) \cos \left[\omega (k-j) \left(T_{AD} - \frac{T_\tau}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{A^2}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \text{sinc}^{j-k}(fT_\tau) \cos \left[\omega (k-j) \left(T_{AD} - \frac{T_\tau}{2} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{A^2}{2} \left\{ \|h\|_2^2 + 2 \sum_{k=2}^n h_{n-k}^\# \text{sinc}^{k-1}(fT_\tau) \cos [\omega (k-1) (T_{AD} + T_\tau/2)] \right\} \\
 &= \frac{A^2}{2} \left\{ \|h\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} h_{n-k-1}^\# \text{sinc}^k(fT_\tau) \cos [\omega (k) (T_{AD} + T_\tau/2)] \right\} \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{h}^\#$ es el vector obtenido a través de las Ecs. (3.17) y (3.18).

Finalmente la *PFR* se obtiene dividiendo la Ec. (4.24) por la potencia de entrada, resultando:

$$PFR = \|h\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} h_{n-k-1}^{\#} \operatorname{sinc}^k(fT_\tau) \cos[\omega k(T_{AD} + T_\tau/2)] \quad (4.25)$$

La Ec. (4.25) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$PFR = \|h\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} h_{n-k}^{\circledast} \cos[\omega k(T_{AD} + T_\tau/2)] \quad (4.26)$$

donde cada término $h_{n-k}^{\circledast} = h_{n-k-1}^{\#} \cdot \operatorname{sinc}^k(fT_\tau)$, es decir, $h_k^{\circledast} = h_{k-1}^{\#} \operatorname{sinc}^{n-k}(fT_\tau)$.

De esta forma la Ec. (4.26) puede expresarse como:

$$PFR = \|h\|_2^2 + 2 \left| \mathbf{H}^{\circledast}(z) \right|_{z=e^{j\omega(T_{AD}+T_\tau/2)}} \cos[n\omega(T_{AD} + T_\tau/2) + \theta] \quad (4.27)$$

donde $\mathbf{H}^{\circledast}(z) = \sum_{k=1}^n h_k^{\circledast} \cdot z^{-k}$ y $\theta = \operatorname{Arg}[\mathbf{H}^{\circledast}(e^{j\omega(T_{AD}+T_\tau/2)})]$.

A fin de comprender más la PFR resultante, se especializará la misma en los puntos extremos de frecuencia. A muy baja frecuencia, $f \rightarrow 0$:

$$PFR(0) = \|h\|_2^2 + 2 \left| \mathbf{H}^{\circledast}(z) \right|_{z=1} \cos[\theta] = \|h\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} h_{n-k-1}^{\#} \quad (4.28)$$

Para altas frecuencias:

$$PFR(\infty) = \|h\|_2^2$$

ya que los h_k^{\circledast} son nulos porque todos son múltiplos de $\operatorname{sinc}(fTs)$.

4.3. *RAAS/MA* aplicado a una entrada senoidal

Para el caso particular del filtro *MA*, el vector h es $h = \left[\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right]^T$.

Por lo tanto la salida es:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{x}_k \quad (4.29)$$

La norma $\|h\|_2^2 = \frac{1}{n}$ y el vector $\mathbf{h}^\#$ resulta:

$$\begin{bmatrix} h_0^\# \\ h_1^\# \\ h_2^\# \\ \dots \\ h_{n-3}^\# \\ h_{n-2}^\# \\ h_{n-1}^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n^2} \\ \frac{2}{n^2} \\ \frac{3}{n^2} \\ \dots \\ \frac{n-2}{n^2} \\ \frac{n-1}{n^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

por lo que los términos de $\mathbf{h}^\#$ se pueden expresar como:

$$h_k^\# = \frac{k+1}{n^2} \quad \forall k < n-1 \quad (4.31)$$

$$h_{n-1}^\# = 0$$

Luego, los términos de \mathbf{h}^\circledast son:

$$h_k^\circledast = \frac{k}{n^2} \text{sinc}^{n-k}(fT_\tau) \quad 0 \leq k \leq n-1$$

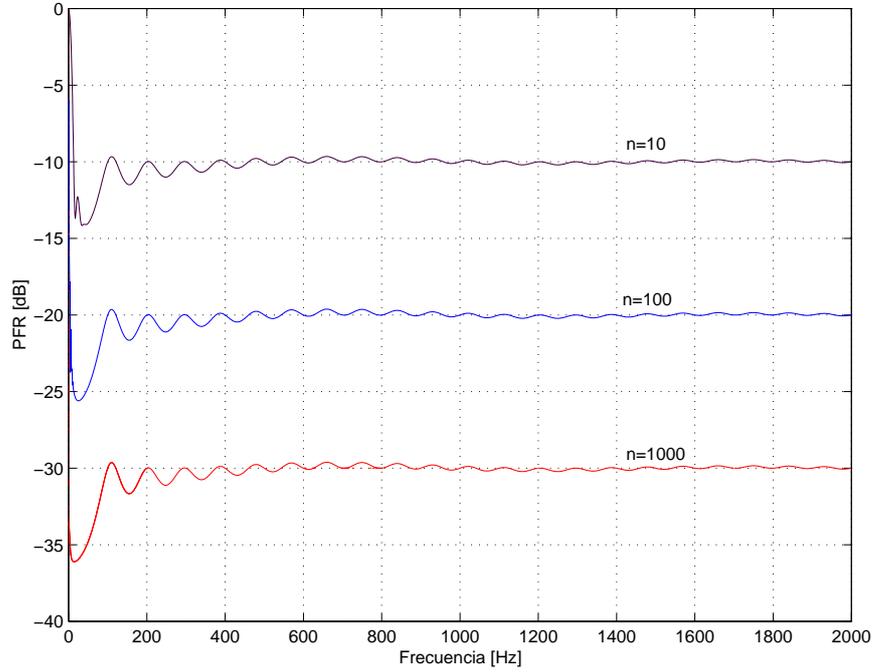


Figura 4.3: *PFR* de *RAAS/MA*, con entrada senoidal pura, $T_{AD} = 1\text{ms}$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$, $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$.

Por lo tanto, a partir de la Ec. (4.26) se arriba a la expresión del segundo momento de μ que resulta:

$$PFR = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{sinc}^k(fT_{\tau}) \cos[\omega k(T_{AD} + T_{\tau}/2)] \quad (4.32)$$

La (4.32) indica que la *PFR* depende del número de muestras del filtro *MA*, de la frecuencia de la perturbación y de los períodos T_{AD} y T_{τ} .

La Fig. 4.3 grafica la *PFR* dada por la (4.32) como una función de la frecuencia f . La Fig. 4.4 grafica la misma expresión pero en función del logaritmo de la frecuencia. De esta manera es posible observar lo que ocurre en todo el rango de frecuencias. La *PFR* de (4.32) presenta un mínimo en aproximadamente

$$\frac{1}{2(T_{\tau} + 2T_{AD})}$$

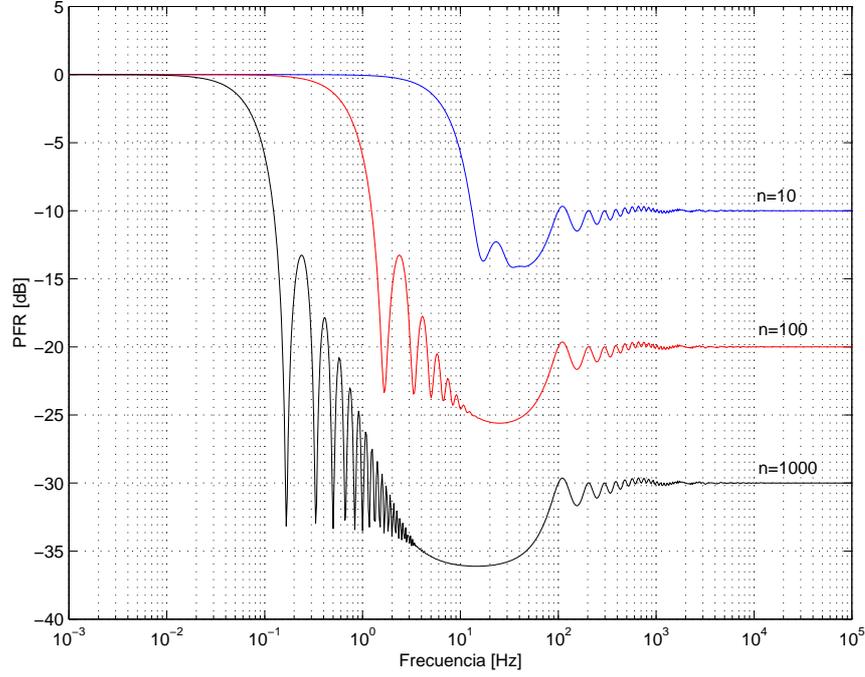


Figura 4.4: *PFR* de *RAAS/MA*, con entrada senoidal pura, $T_{AD} = 1\text{ms}$, $T_\tau = 10\text{ms}$, $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.

Con el objeto de analizar con más detalle la formulación en los límites de frecuencia, se considera a continuación el caso particular en el que $f \rightarrow 0$, es decir cuando la frecuencia de la señal de entrada es sumamente baja:

$$\begin{aligned}
 PFR(0) &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k \right] \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \left[(n-1)n - \frac{n}{2}(n+1) + n \right] \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

donde el resultado de la segunda sumatoria surge la expresión cerrada para la serie aritmética $\sum_{k=1}^n k$ que vale $\frac{n}{2}(n+1)$. Luego, continuando el desarrollo:

$$\begin{aligned}
 PFR(0) &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \left[n^2 - n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n \right] \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \left[\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} (n - 1) = 1
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Si consideramos el caso particular en el que $f \rightarrow \infty$, $\text{sinc}^k(fT_\tau) = 0$, entonces

$$PFR(\infty) = \frac{1}{n}$$

Se advierte que la atenuación es directamente la *norm2* del *MA*. Esta es la menor *norm2* posible de todos los filtros *FIR* ya que todos los coeficientes del *MA* son iguales de valor $\frac{1}{n}$. Esto significa que, en cuanto a la magnitud de la atenuación del ruido de alta frecuencia, objeto central de este análisis, el filtro *FIR* tipo *MA* es el recomendado. Es interesante notar además que la *PFR* es igual a la inversa del número de muestras del filtro *MA*, tal cual ocurre en el caso de ruido blanco gaussiano muestreado en forma uniforme [26]. Más aún, la función representada por (4.32) no presenta los picos característicos del solapamiento de espectros a ninguna frecuencia. Consecuentemente, es posible estimar el valor de baja frecuencia ya que la atenuación está apropiadamente reducida para todas las frecuencias.

Luego, a partir de la *PFR*, relacionada directamente con la varianza, y de la función de densidad de probabilidad de la estimación, se puede obtener la probabilidad de que el error se sitúe entre ciertos límites. Asumiendo que la función densidad de probabilidad de la estimación es gaussiana, es posible establecer, con una probabilidad del 95 % que los márgenes del error serán $\pm 2\Gamma_\mu$ [15]. Si se requiere un error menor se debería aumentar el número de muestras.

Para evaluar la validez de la formulación desarrollada para el *RAAS/MA* se realizaron simulaciones experimentales en el entorno Matlab que consistieron en el ingreso de una entrada senoidal pura que es muestreada aleatoriamente *RAAS* y luego pasada por un filtro *MA*. La salida constituye la estimación de la variable que se desea obtener. Se realizaron experimentos, donde cada experimento constabó de m ensayos. Luego de los m ensayos se calculó la varianza de la estimación del experimento. Esta varianza constituye la potencia eléctrica de la salida, por lo que al ser dividida por la potencia de la entrada senoidal, se obtuvo la *PFR*. Cada experimento se realizó a una determinada frecuencia de entrada y se simuló sobre un amplio rango de frecuencias. El espectro de frecuencias contemplado fue de 10^{-3} a 10^5 Hz, expresado en forma logarítmica, con la frecuencia discretizada en pasos de 0,01 década, lo que resulta en una secuencia de frecuencias $\{f_k\}$ de 800 componentes. En cada ensayo se midió la variable de salida μ_i , obtenida a partir de una entrada senoidal de amplitud unitaria, frecuencia f_k y fase ϕ . La fase ϕ es una variable aleatoria con *pdf* uniforme en el dominio $[0, 2\pi]$.

En cada experimento se calculó el promedio de las μ_i del ensamble, considerando que el sistema es ergódico, es decir que el promedio del ensamble es igual al valor medio en el tiempo. Para obtener la estimación en cada ensayo, μ_i , se aplicó el muestreo aleatorio *RAAS*, y se utilizó el filtro de reconstrucción de orden n , por lo que se necesitó generar variables aleatorias τ_j , con $j = 1, 2, \dots, n$. Para cada componente de la secuencia $\{f_k\}$ se implementó un experimento, constituido por 100 ensayos, donde $i = 1, 2, \dots, 100$ denota el número de cada ensayo. A continuación se expresan con mayor claridad los términos utilizados:

Experimento: consiste en m ensayos.

Ensayo: medición de la salida del filtro *MA*, μ , luego de haber muestreado aleatoriamente una entrada senoidal pura de frecuencia f y fase ϕ .

m : número de ensayos para cada experimento

Conjunto (de Experimentos): conjunto de experimentos realizados para un conjunto de frecuencias de manera de cubrir un rango amplio de las mismas.

En la Fig. 4.5 se presenta la *PFR* obtenida de la simulación realizada con un *MA* de orden $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$, donde el número de ensayos fue $m = 100$. En la misma figura se ha graficado la curva teórica correspondiente a la Ec. (4.32). Se han realizado simulaciones también para $n = 100$ y $n = 1000$, que se muestran en las Figs. 4.6 y 4.7, respectivamente. Se observa en las tres figuras que las gráficas de las simulaciones concuerdan sustancialmente con las curvas teóricas, lo que valida, por lo menos para el caso de un *RAAS/MA*, $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$, la formulación desarrollada. A efectos de corroborar las formulaciones para un rango más extendido de frecuencias, se realizaron las mismas simulaciones pero que se graficaron en escala logarítmica de frecuencia en un rango que va de 10^{-3} hasta 10^5 Hz. Las Figs. 4.8, 4.9 y 4.10 muestran estas gráficas; se observa nuevamente que las simulaciones coinciden con las formulaciones. Es necesario destacar que estas simulaciones constituyen una corroboración experimental confiable ya que el único elemento que se simula es el muestreo aleatorio, el cual se idealizó considerando un muestreo tipo delta, con la aleatoriedad con *pdf* uniforme como se condicionó en el desarrollo teórico. La restricción de estos experimentos a un muestreo idealizado tipo delta es aceptable ya que las frecuencias de muestreo son suficientemente pequeñas.

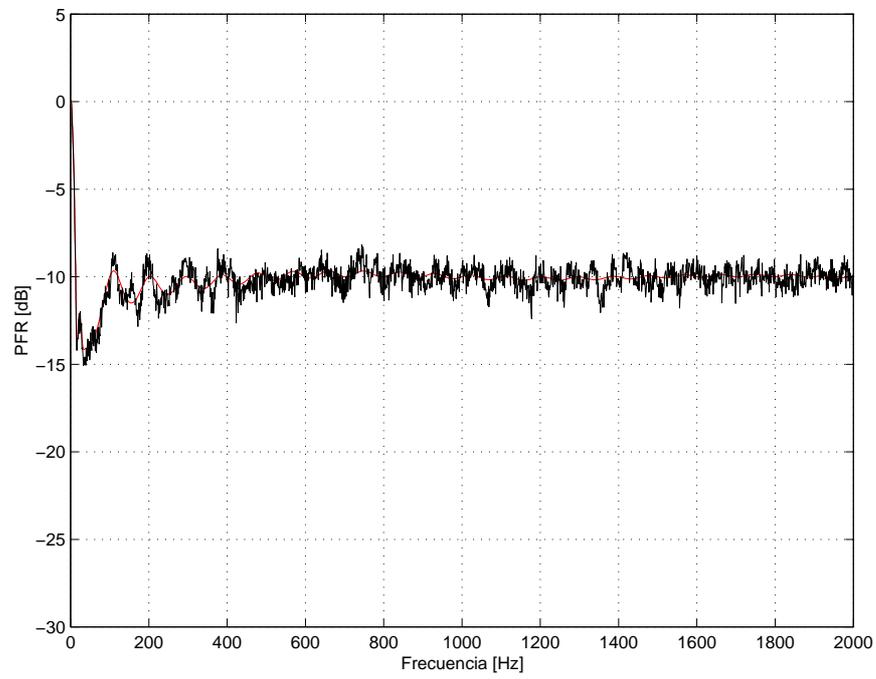


Figura 4.5: *PFR* del proceso *RAAS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

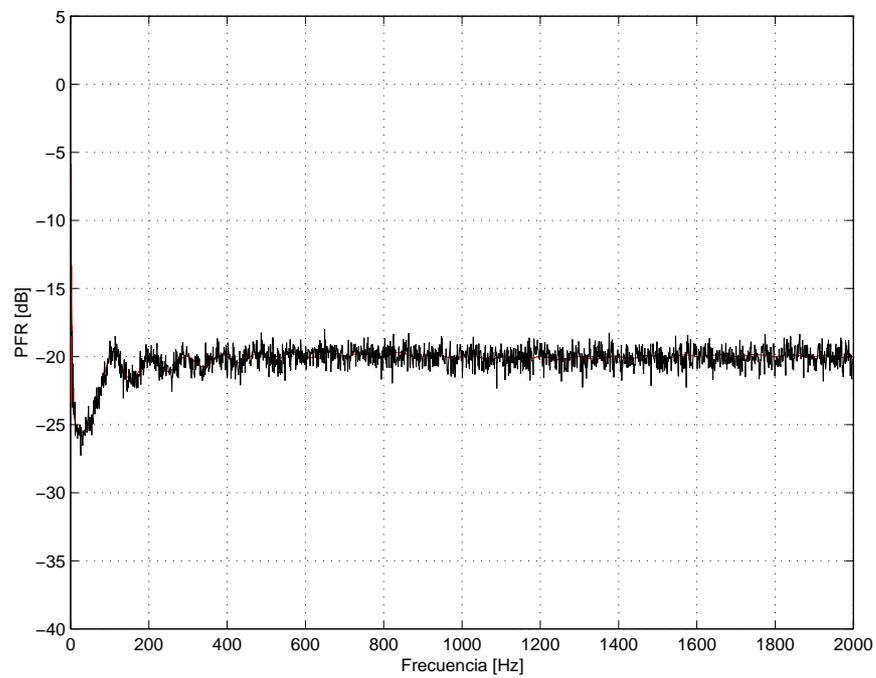


Figura 4.6: *PFR* del proceso *RAAS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

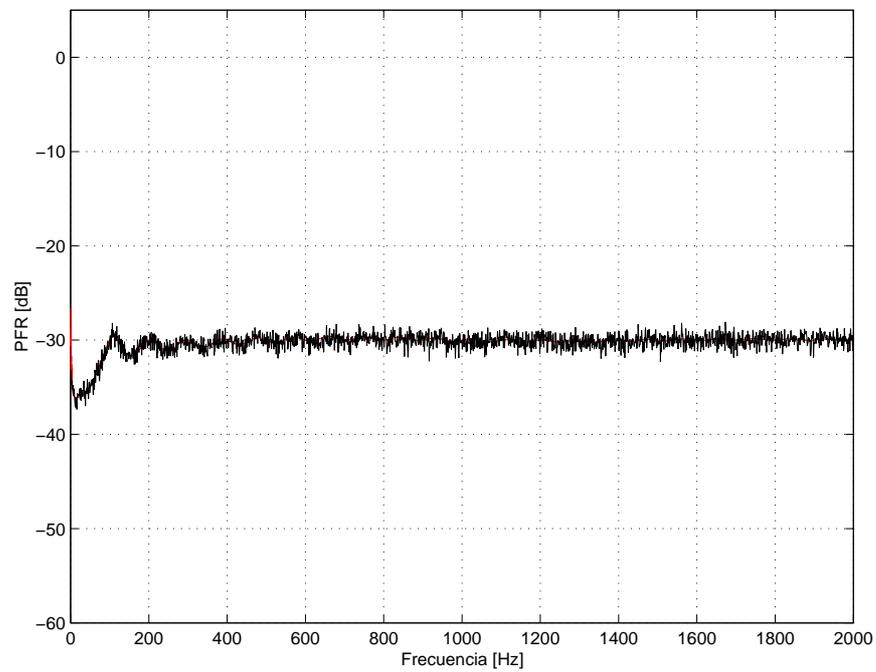


Figura 4.7: *PFR* del proceso *RAAS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

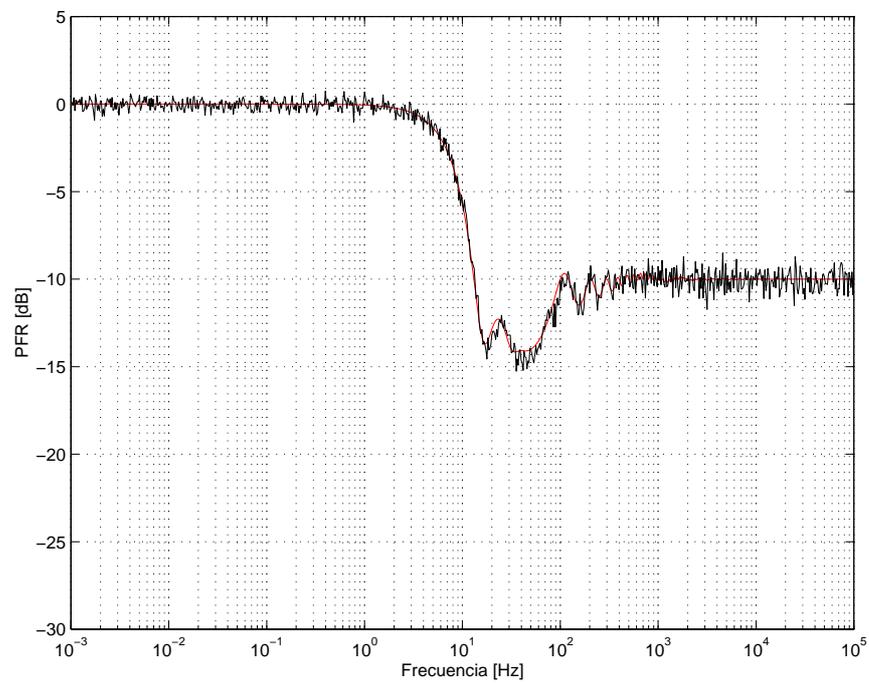


Figura 4.8: *PFR* del proceso *RAAS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

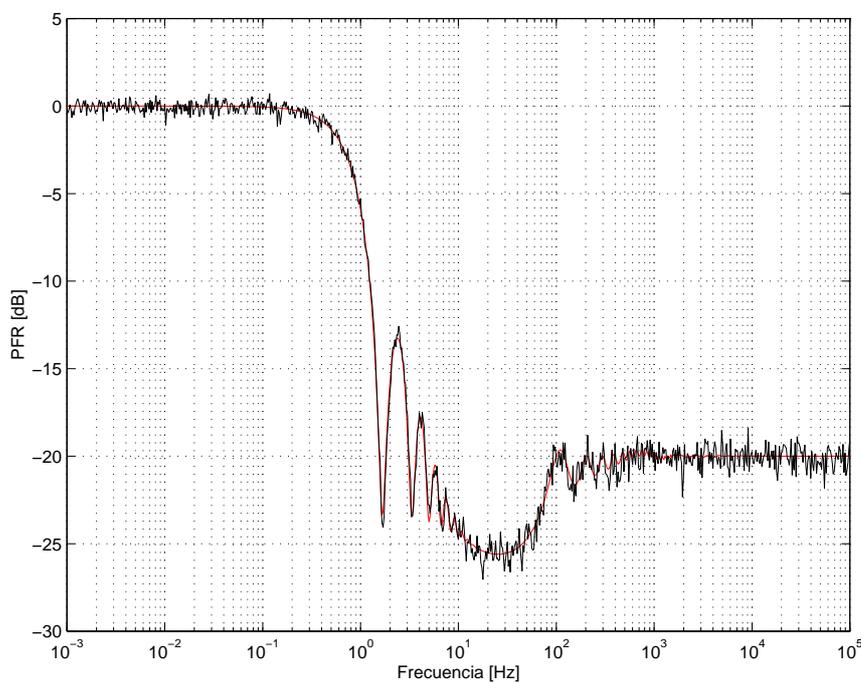


Figura 4.9: *PFR* del proceso *RAAS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

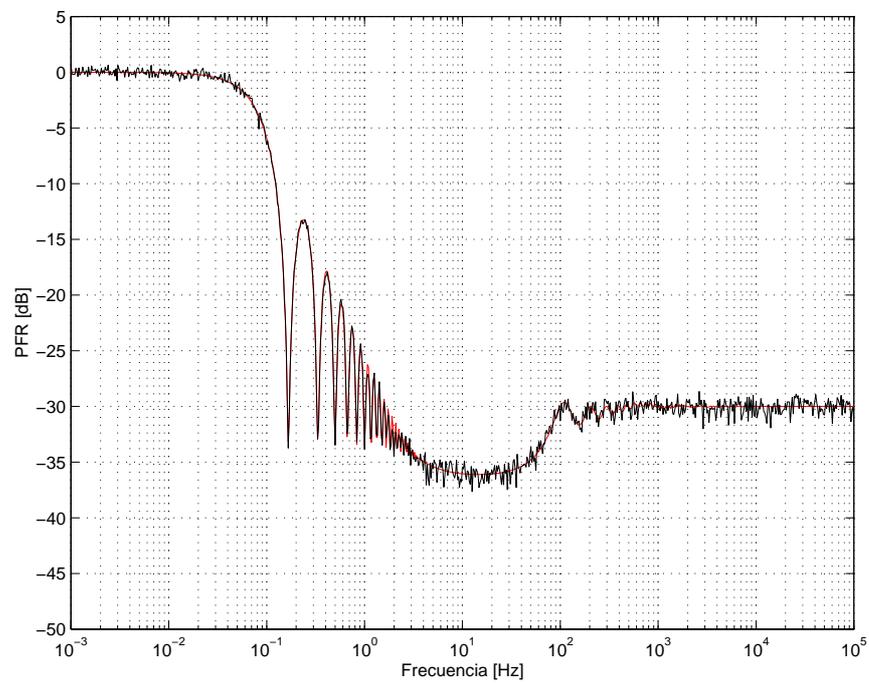


Figura 4.10: *PFR* del proceso *RAAS/MA* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

4.4. *RAAS/fir1* y *RAAS/fircls1* aplicados a una entrada senoidal

A continuación se grafican las *PFRs* resultantes de utilizar filtros *FIR* a efectos de verificar la pertinencia de las expresiones teóricas desarrolladas, Ec. (4.27). El objeto es trabajar con filtros *fir1* y *fircls*. El *fir1* es un filtro pasabajos sintetizado por el método *Ventana de Hamming* [22], obtenido desde las toolbox del MATLAB. El *fircls1* es un filtro pasabajos sintetizado por el método de *Optimización por mínimos cuadrados*, también obtenido desde MATLAB. En las Figs. 4.11 y 4.12 se observan los resultados correspondientes al filtro *fir1*, y en las Figs. 4.13 y 4.14 al filtro *fircls1*.

Se aprecia la menor atenuación que se obtiene en los procesos *RAAS/fir1* y *RAAS/fircls1* respecto del *RAAS/MA*. Aunque por otra parte se logra una mayor selectividad que puede ser importante en el diseño para aplicaciones donde la frecuencia de ruido de alta frecuencia y la de la señal útil no están muy alejadas.

En cuanto a la corroboración experimental por medio de simulaciones, se presentan las gráficas del proceso *RAAS/fir1* en las Figs. 4.15, 4.16 y 4.17, y del *RAAS/fircls1* en las Figs. 4.18, 4.19 y 4.20, para el rango de frecuencias entre 1 y 250Hz, en una escala lineal. Para corroborar los resultados en un rango de frecuencias más extendido, se presentan las simulaciones entre 10^{-3} y 10^5 Hz, en una escala logarítmica en las Figs. 4.21, 4.22 y 4.23, para *RAAS/fir1*, y las Figs. 4.24, 4.25 y 4.26 para *RAAS/fircls1*.

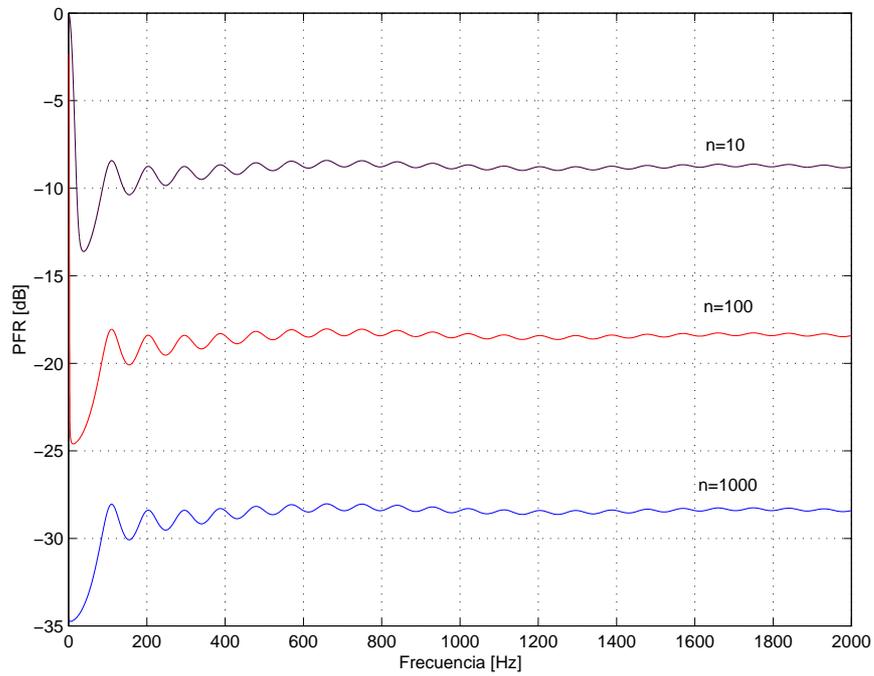


Figura 4.11: *PFR* del proceso *RAAS/fir1*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$.

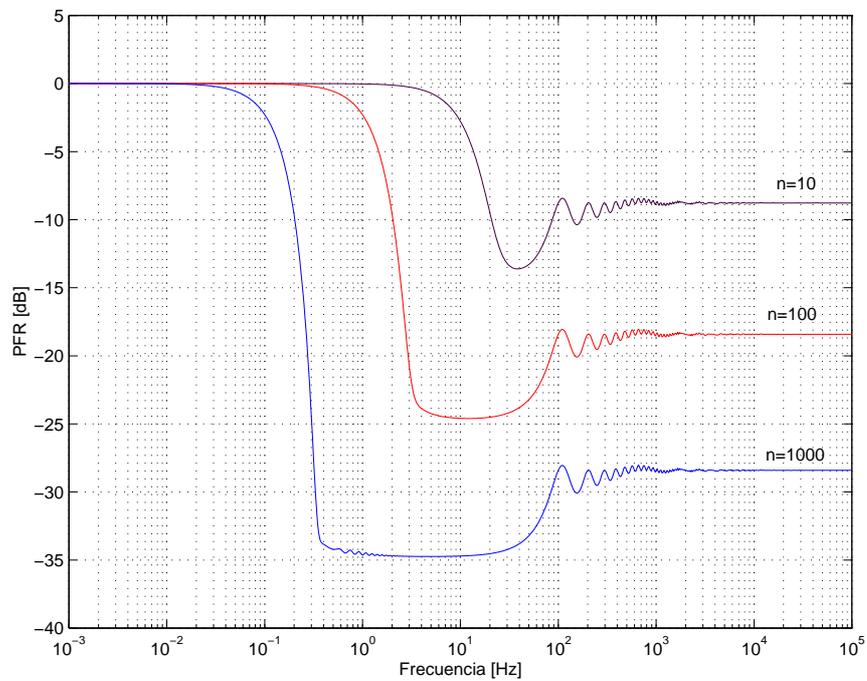


Figura 4.12: *PFR* del proceso *RAAS/fir1*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.

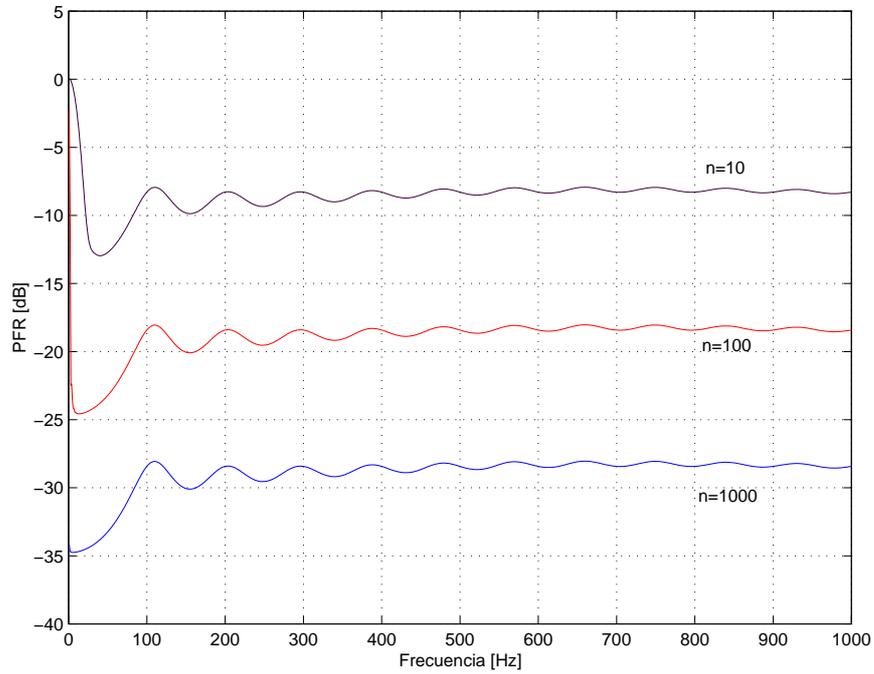


Figura 4.13: *PFR* del proceso *RAAS/fircls1*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$.

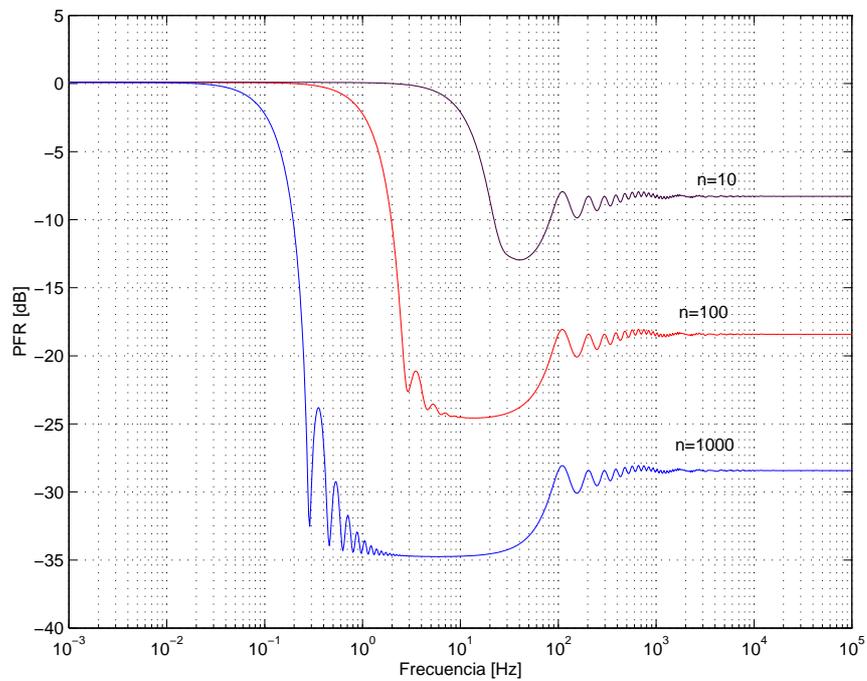


Figura 4.14: *PFR* del proceso *RAAS/fircls1*, con una entrada senoidal, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Escala logarítmica de frecuencia.

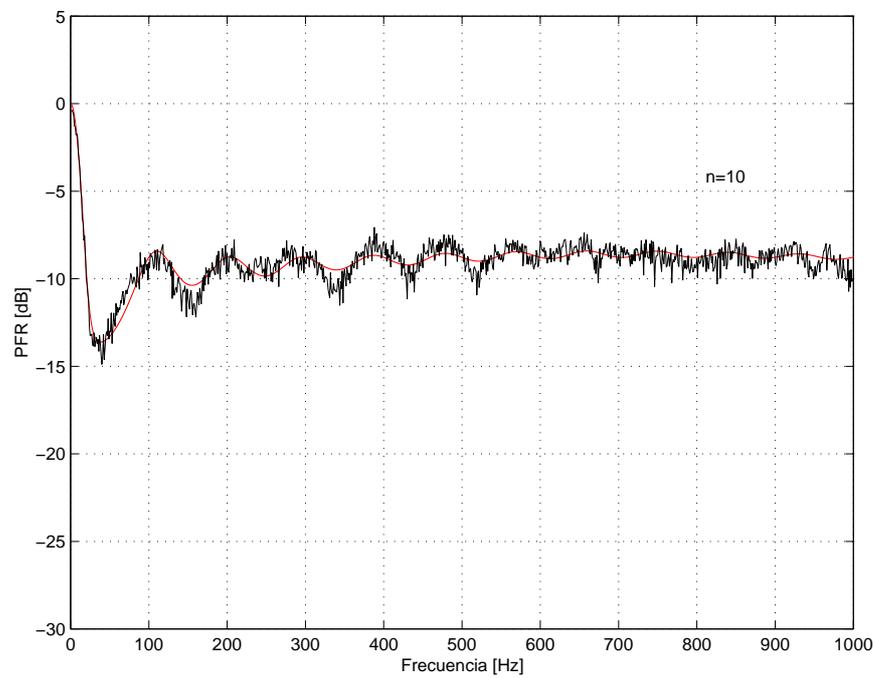


Figura 4.15: *PFR* del proceso *RAAS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

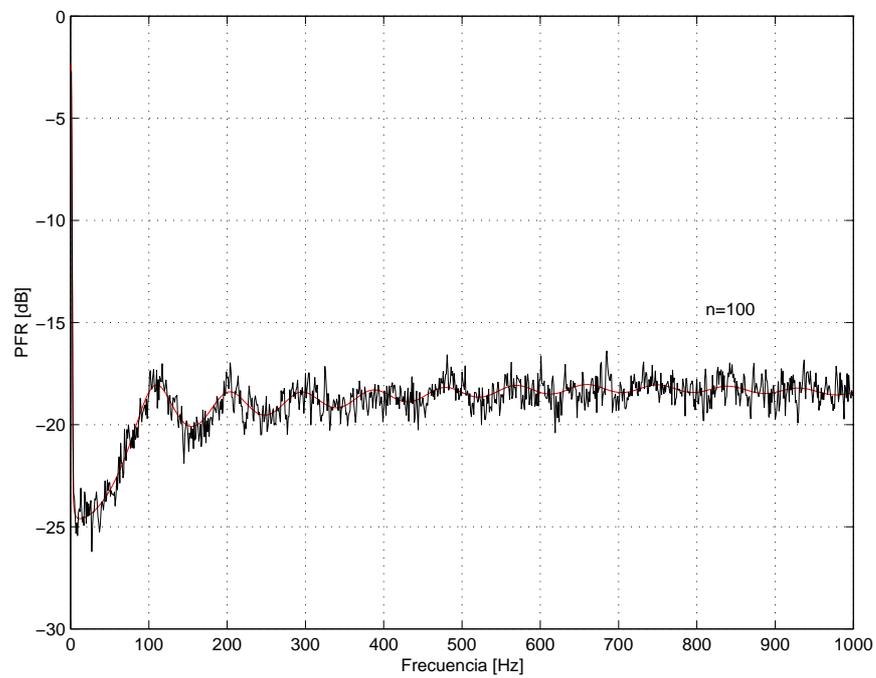


Figura 4.16: *PFR* del proceso *RAAS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

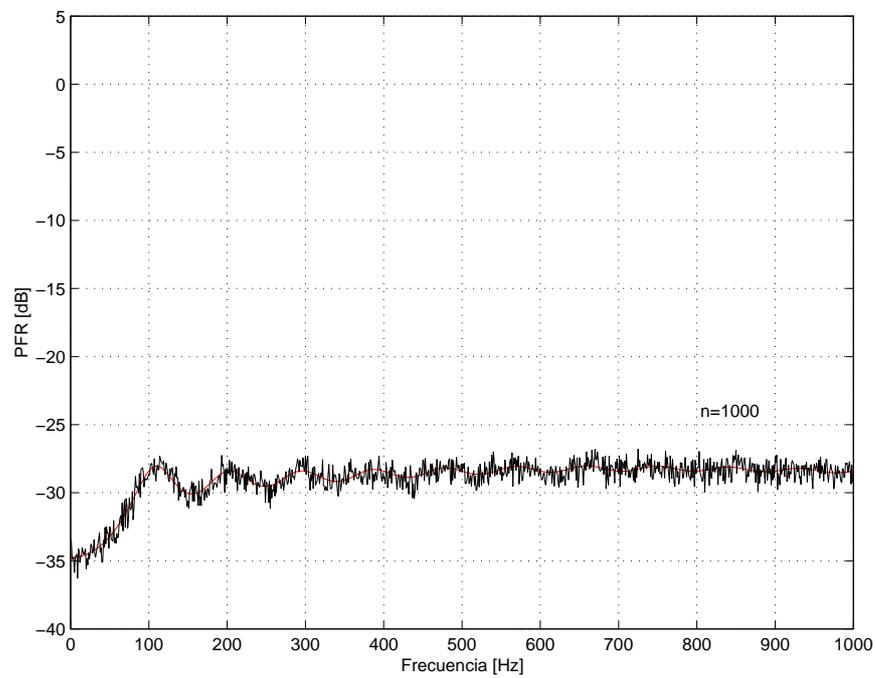


Figura 4.17: *PFR* del proceso *RAAS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

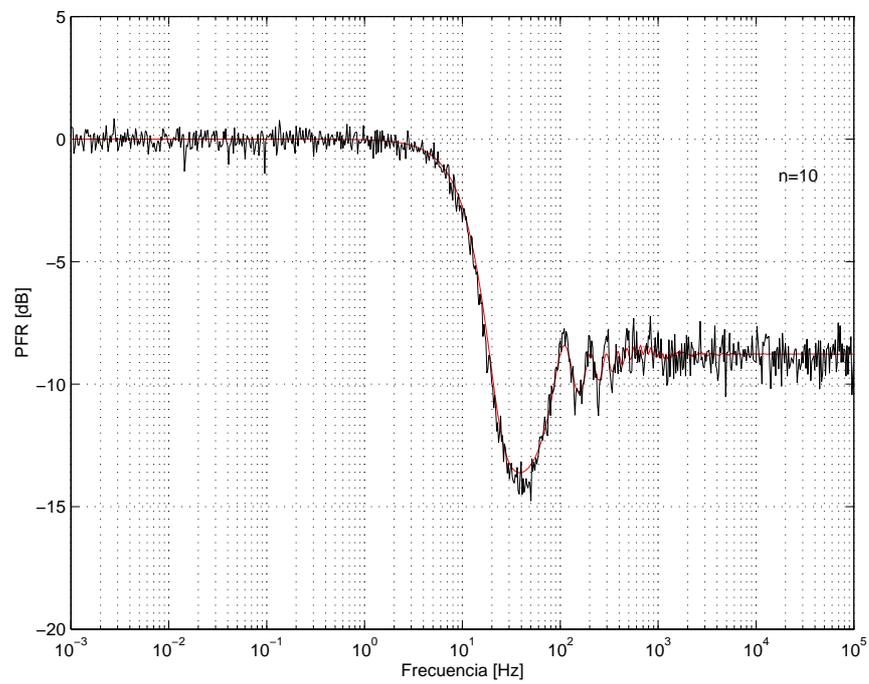


Figura 4.18: *PFR* del proceso *RAAS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

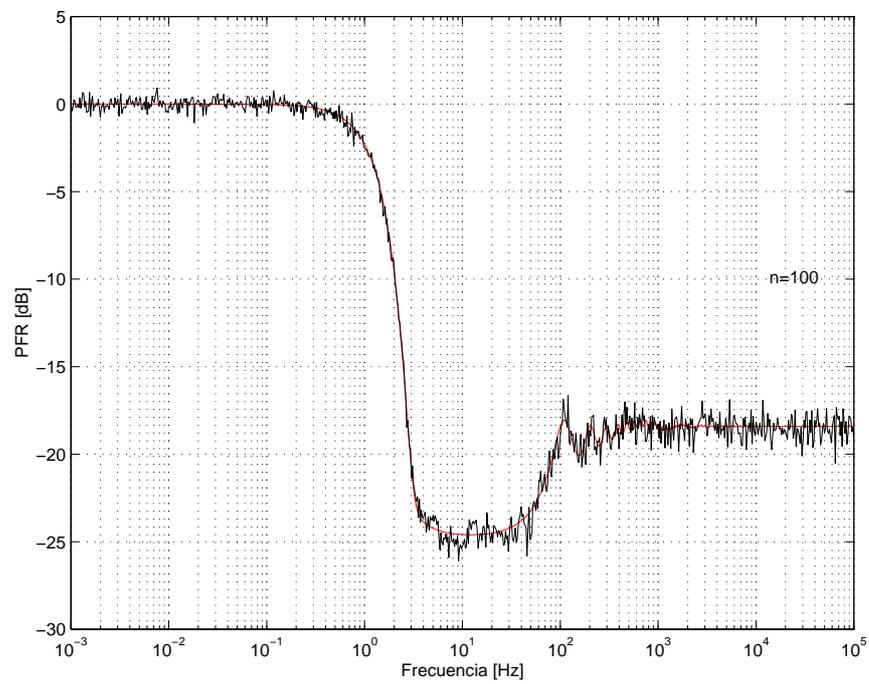


Figura 4.19: *PFR* del proceso *RAAS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

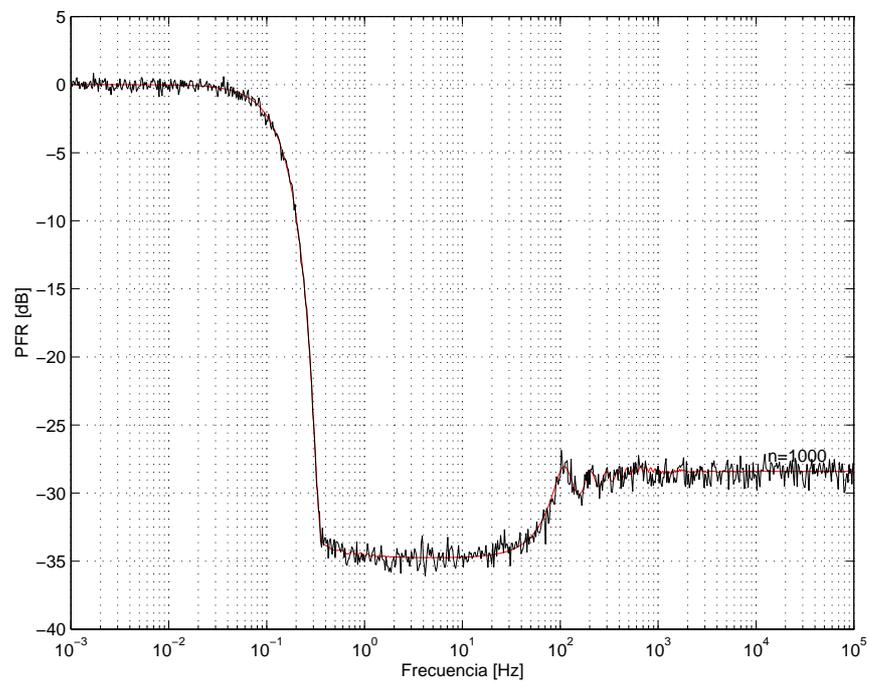


Figura 4.20: *PFR* del proceso *RAAS/fir1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

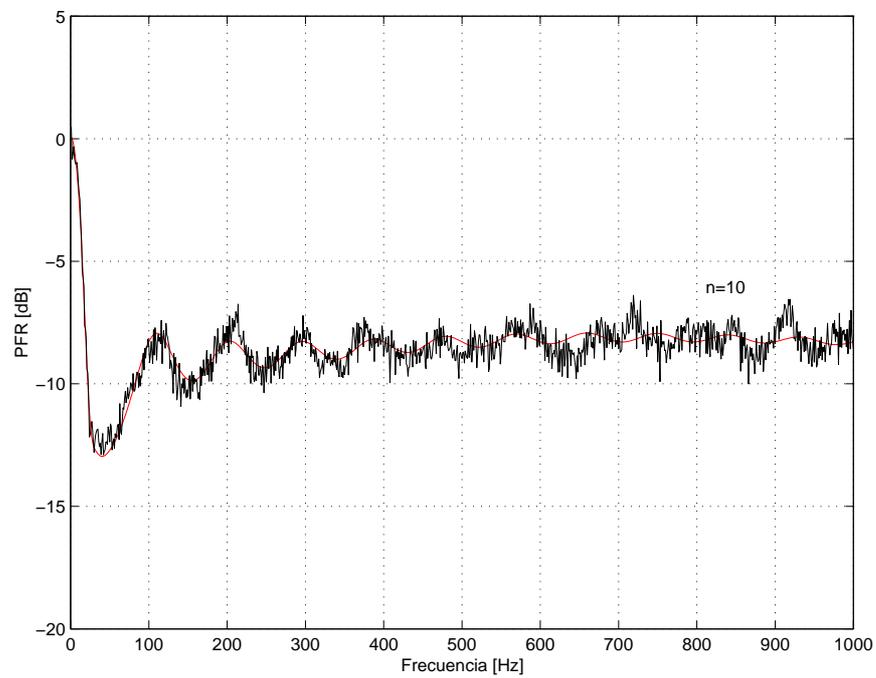


Figura 4.21: *PFR* del proceso *RAAS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

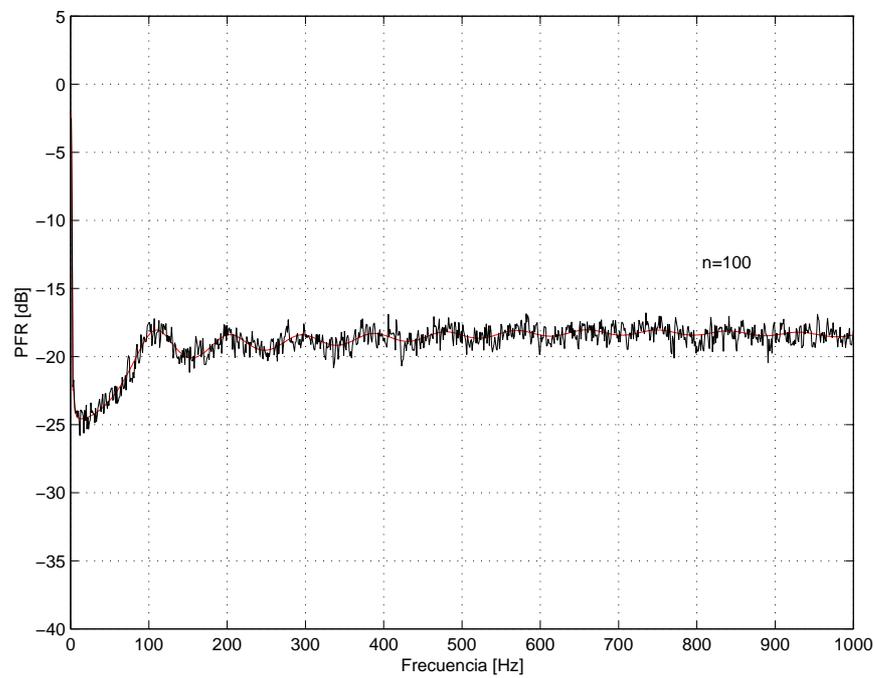


Figura 4.22: *PFR* del proceso *RAAS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

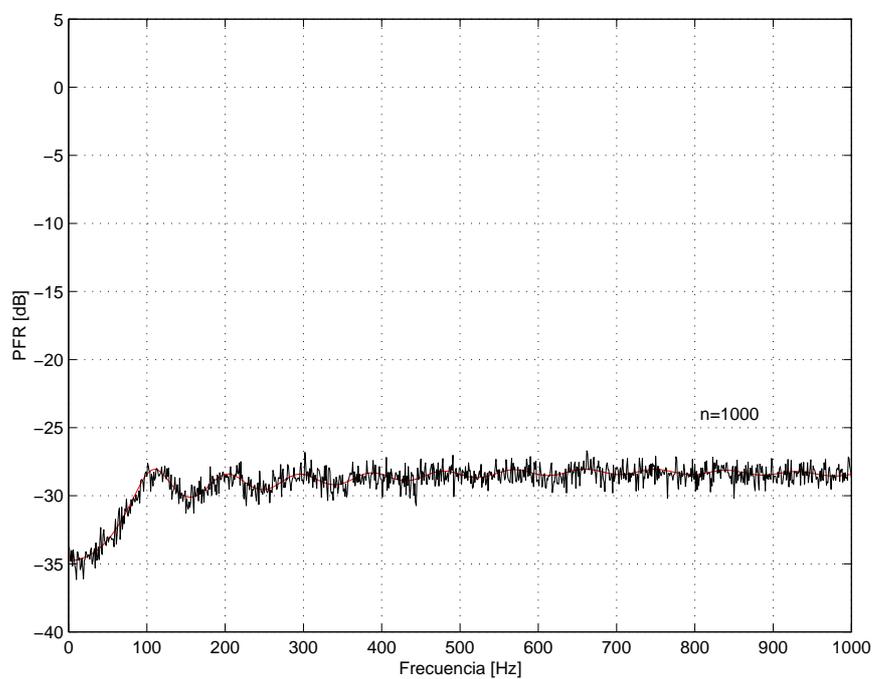


Figura 4.23: *PFR* del proceso *RAAS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$.

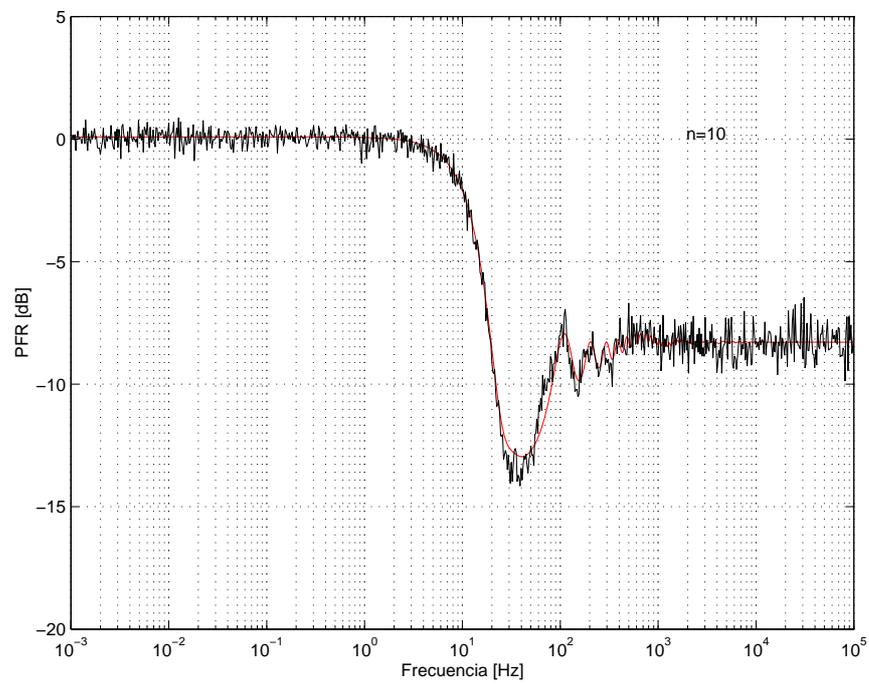


Figura 4.24: *PFR* del proceso *RAAS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 10$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

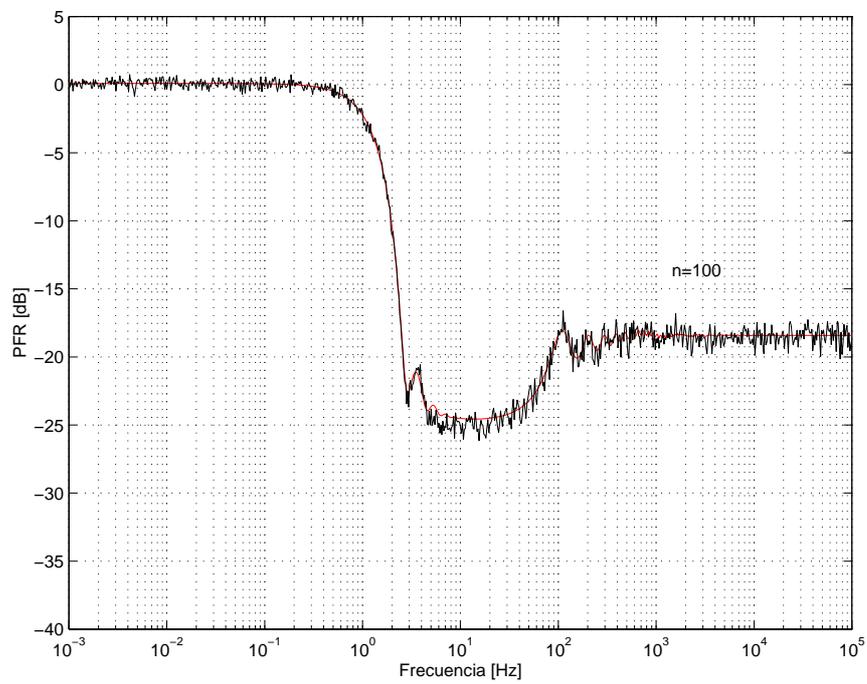


Figura 4.25: *PFR* del proceso *RAAS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 100$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

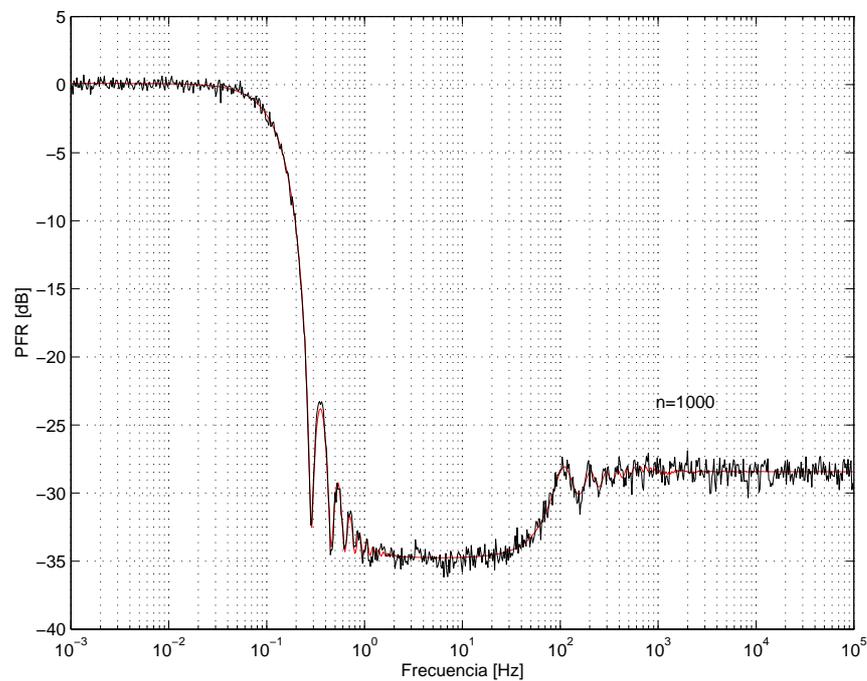


Figura 4.26: *PFR* del proceso *RAAS/fircls1* con una entrada senoidal pura, con $n = 1000$. Curva de simulación en negro, curva teórica en rojo. Cantidad de ensayos por experimento: $m = 100$. Escala logarítmica de frecuencia.

4.5. Grado de aleatoriedad

En esta propuesta de muestreo aleatorio existe aún cierto grado de correlación, el cual depende de la relación $\frac{T_\tau}{T_{AD}}$. Cuanto menor sea esta relación menos aleatorio es el muestreo, es decir más se acerca al muestreo uniforme. En las Figs. (4.27) y (4.28) se muestra la *PFR* para el filtro *MA*, con $n = 10$, para tres casos: (a) $T_\tau/T_{AD} = 10$, (b) $T_\tau/T_{AD} = 1$ y (c) $T_\tau/T_{AD} = 0$. Para $T_\tau/T_{AD} = 0$ la *PFR* presenta picos a las frecuencias que son múltiplos de la frecuencia de muestreo. Más aún, la *PFR* es significativamente menor en el muestreo uniforme que en el aleatorio, excepto en las regiones alrededor de las frecuencias múltiplos de la frecuencia de muestreo. En estas regiones el efecto de la perturbación es muy importante y su eliminación es el objetivo de este trabajo. Un resultado interesante que se observa en las Figs. (4.27) y (4.28), aunque más claramente en la última, es que la *PFR* tiende a la *norm2* del vector filtro, para todos los casos en los que $T_\tau \neq 0$.

Las curvas mostradas en las figuras se realizaron con la condición de que la frecuencia media de muestreo, $E[f_m] = T_{AD} + T_\tau/2$, sea constante a efectos de que en todos los casos la frecuencia de corte del filtro sea la misma, $f_c = cte$. Sin embargo, en el caso real de una aplicación tecnológica la única restricción es el tiempo de adquisición, T_{AD} . Luego, una nueva comparación se realizó bajo este condicionamiento diferente, donde (a) $T_\tau/T_{AD} = 10$, (b) $T_\tau/T_{AD} = 1$ y (c) $T_\tau/T_{AD} = 0$, lo que resulta en (a) $E[f_m] = 6T_{AD}$, (b) $E[f_m] = 3T_{AD}/2$ y (c) $E[f_m] = T_{AD}$, respectivamente. De esta forma la f_c , que es proporcional a la $E[f_m]$, resulta mayor a medida que el grado de aleatoriedad es menor. Este concepto se corrobora a través de las Figs. (4.29) y (4.30), y es importante ya que el diseño y las prestaciones del sistema podrían mejorar más si la $E[f_m]$ fuese mayor.

Otro aspecto importante de las figuras del *RAAS/MA* con $n = 10$, es la existencia de picos que deterioran la deseada atenuación producida por el *RAAS* en medias y altas frecuencias. Estos picos son mayores a medida que el grado de aleatoriedad disminuye, acercándose al comportamiento del muestreo uniforme, como se observa en las figuras anteriores. Las graficaciones efectuadas, no sólo para $n = 10$ sino también para $n = 100$ y $n = 1000$, permiten arribar a la Tabla [4.1](#) donde se expresa la atenuación ideal dada por la *norm2* comparada con la menor atenuación obtenida en los picos en las altas frecuencias. Se puede inferir de la Tabla [4.1](#) que los resultados son muy similares para $T_\tau = 5T_{AD}$, $10T_{AD}$ e ∞T_{AD} , ya que presentan diferencias de menos de 1dB. en cambio para $T_\tau = T_{AD}$ ya existen alrededor de 4dB de diferencia, y para $T_\tau = T_{AD}/2$ esta diferencia se amplía a alrededor de 8dB.

En las Tablas [4.2](#) y [4.3](#), se muestran los resultados correspondientes a los filtros *fir1* y *fircls1*, respectivamente, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$. Para estos filtros se infiere, al igual que con el *MA*, que a partir de $T_\tau = 5T_{AD}$ no existe empeoramiento significativo de la atenuación, mientras que para $T_\tau = T_{AD}$ ya existen alrededor de 4dB de diferencia, y para $T_\tau = T_{AD}/2$ esta diferencia se amplía a alrededor de 8dB.

Se concluye entonces que el grado de aleatoriedad más adecuado es $T_\tau = 5T_{AD}$, ya que se obtiene una buena atenuación con una f_c relativamente elevada.

Otro resultado que se puede extraer de las tablas es que para $n = 10$ y T_τ muy pequeño ($T_\tau = T_{AD}/2$), la atenuación es muy pobre, por lo que se concluye la inconveniencia de utilizar el *RAAS* en estas condiciones.

Además, es interesante observar que cuando se comparan los resultados, bajo condiciones tales que el $n.T_\tau$ sea el mismo, es decir la misma f_c , la atenuación menor se produce para $n = 1000$. Por ende, se concluye que es más conveniente utilizar $n = 1000$ y $T_\tau = T_{AD}/2$ en lugar de $n = 100$ y $T_\tau = 5T_{AD}$, por ejemplo.

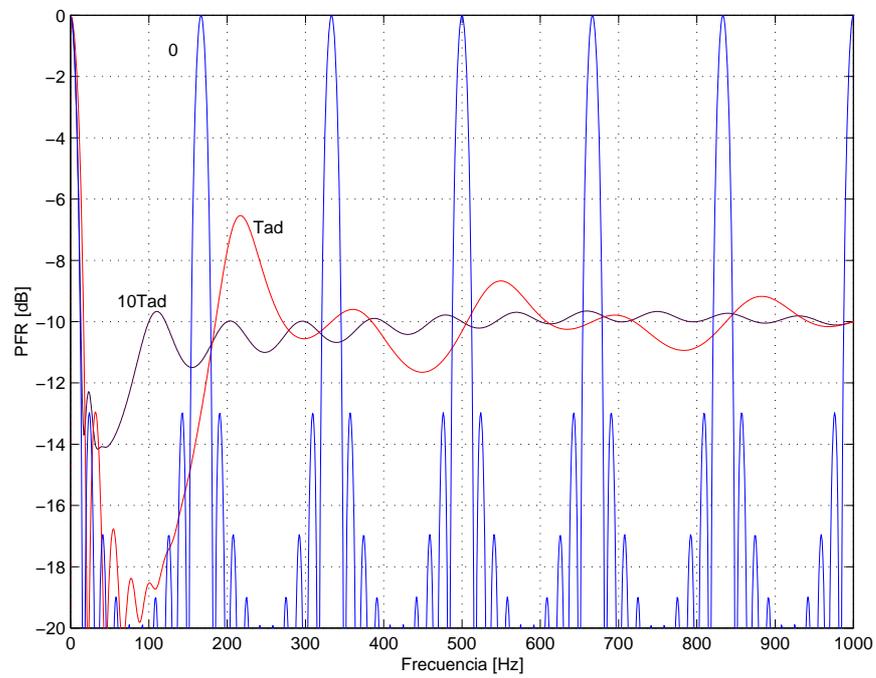


Figura 4.27: *PFR*, entrada senoidal pura, *MA* con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 6\text{ms}$, $T_{AD} = 3\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 6\text{ms}$). En todos los casos la $E[fm]$ es la misma.

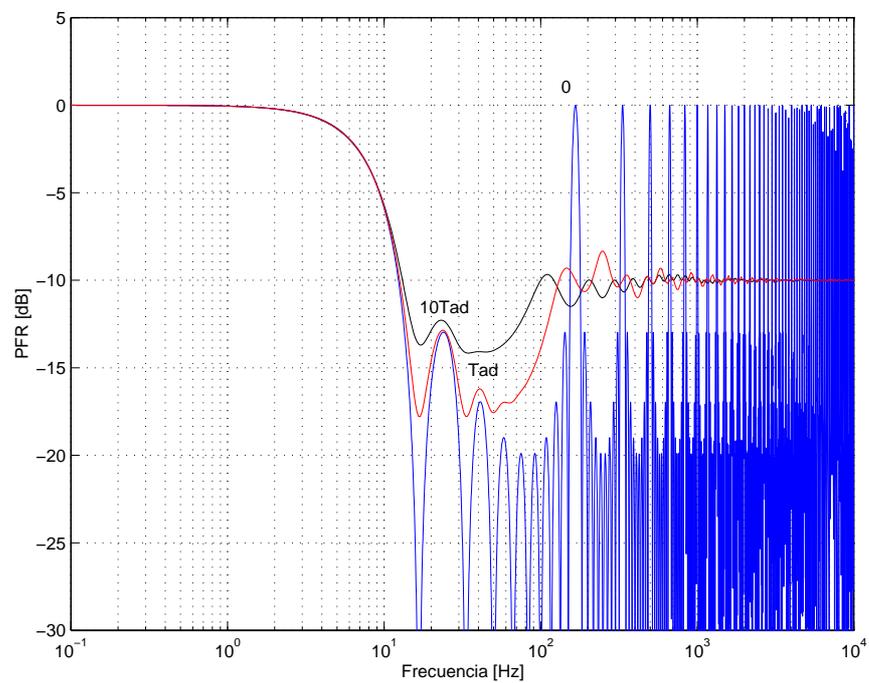


Figura 4.28: *PFR*, entrada senoidal pura, *MA* con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 6\text{ms}$, $T_{AD} = 3\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 6\text{ms}$). En todos los casos la $E[fm]$ es la misma. Escala logarítmica de f .

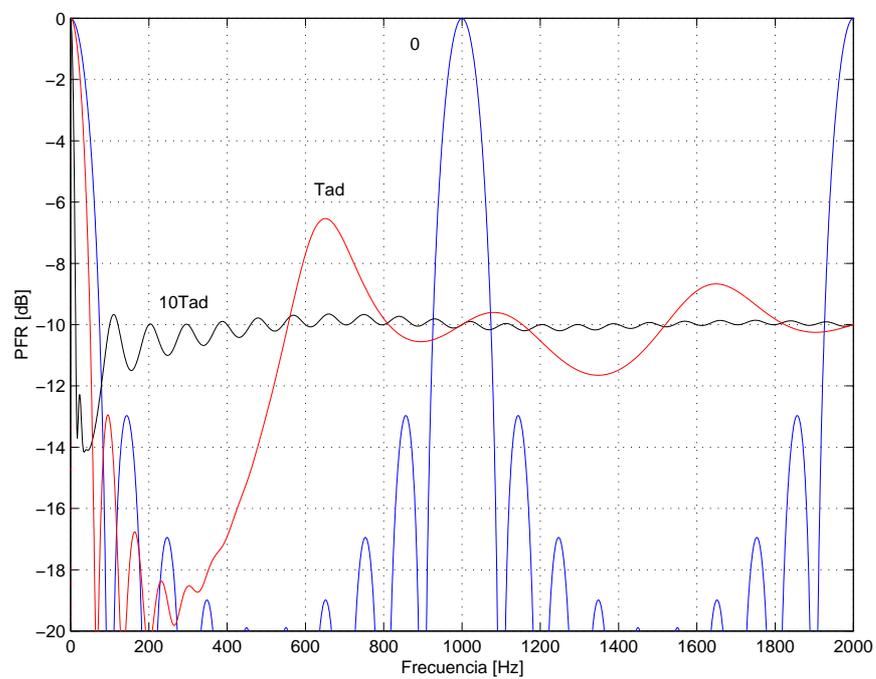


Figura 4.29: *PFR*, entrada senoidal pura, *MA* con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 1\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 1\text{ms}$). En todos los casos T_{AD} es el mismo.

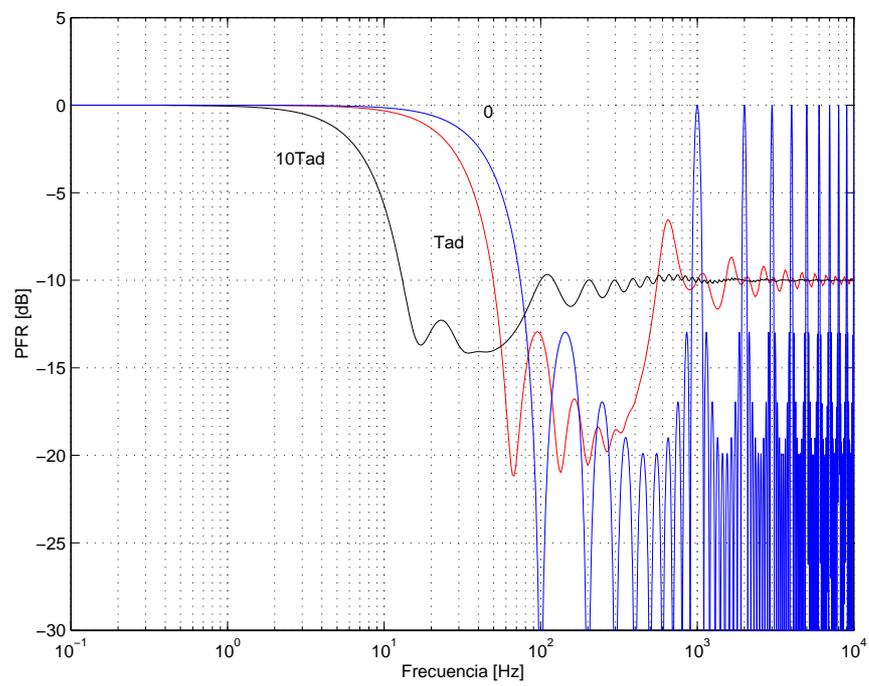


Figura 4.30: *PFR*, entrada senoidal pura, *MA* con $n = 10$, para $T_\tau = 10T_{AD}$ ($T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$), $T_\tau = T_{AD}$ ($T_\tau = 1\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$) y $T_\tau = 0$ ($T_{AD} = 1\text{ms}$). En todos los casos T_{AD} es el mismo. Escala logarítmica de frecuencia.

T_τ	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
<i>Atenuación</i> ($n = 10$)	-3,2	-6,5	-9,3	-9,65	-10
<i>Atenuación</i> ($n = 100$)	-11,55	-16,2	-19,2	-19,6	-20
<i>Atenuación</i> ($n = 1000$)	-21,4	-26,1	-29,2	-29,6	-30

Tabla 4.1: RAAS/MA, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

T_τ	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
<i>Atenuación</i> ($n = 10$)	-2,3	-5,3	-8,1	-8,4	-8,8
<i>Atenuación</i> ($n = 100$)	-9,9	-14,5	-17,7	-18,0	-18,4
<i>Atenuación</i> ($n = 1000$)	-20,0	-24,5	-27,6	-28,0	-28,4

Tabla 4.2: RAAS/fir1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

T_τ	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
<i>Atenuación</i> ($n = 10$)	-2,1	-4,9	-7,6	-7,9	-8,3
<i>Atenuación</i> ($n = 100$)	-9,9	-14,5	-17,6	-18,0	-18,4
<i>Atenuación</i> ($n = 1000$)	-19,8	-24,5	-27,7	-28,0	-28,4

Tabla 4.3: RAAS/fircls1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

4.6. Relación S/N en bajas frecuencias

A efectos de determinar el error que el método *RAAS/MA* produce sobre la señal útil de baja frecuencia se realizaron simulaciones donde se obtuvo la relación S/N equivalente. La simulación consistió en realizar la diferencia entre la señal de salida del método *RAAS/MA* y la que se obtendría de utilizar un muestreo uniforme seguido por el filtro de reconstrucción *MA*; a esta diferencia se la definió como el ruido producido por el *RAAS* en bajas frecuencias. Se realizaron 100 experimentos para cada frecuencia, donde se calculó la potencia del ruido como la varianza de la diferencia para cada frecuencia. Los resultados se muestran en la Fig. [4.31](#), donde se grafica la S/N en función de la frecuencia en una escala logarítmica. A fin de poder calificar la bondad del método, se ha comparado la S/N mencionada con la S/N equivalente de considerar que el filtro *MA* introduce errores debido a la atenuación del propio filtro *MA*. En la misma figura se observa esta S/N y se concluye que la S/N producida por el *RAAS* es similar a la producida sólo por el *MA*.

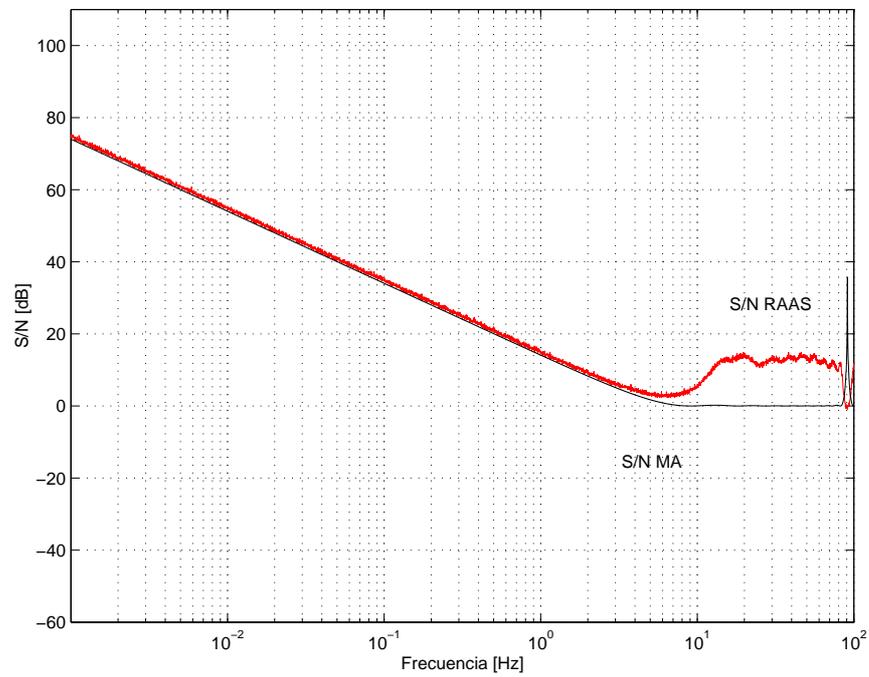


Figura 4.31: S/N con ruido provocado sólo por el método, S/N con error provocado sólo por el filtro MA . Condiciones: filtro MA , $n = 10$, $RAAS$ entrada senoidal pura, $T_\tau = 10\text{ms}$, $T_{AD} = 1\text{ms}$.

4.7. Conclusiones

En este capítulo se trataron los siguientes temas:

- Desarrollo de la *PFR* del proceso *RAAS/FIR*, para una entrada senoidal.
- Especialización de la formulación desarrollada en los procesos *RAAS/MA*, *RAAS/fir1* y *RAAS/fircls1*, para una entrada senoidal.
- Validación de las formulación en los procesos *RAAS/MA*, *RAAS/fir1* y *RAAS/fircls1*, para una entrada senoidal, a través de simulaciones.
- Análisis del efecto del grado de aleatoriedad sobre la *PFR*.
- Análisis de la Relación Señal Ruido *S/N* para el rango de frecuencias bajas, donde se supone que la señal de entrada no posee ruido.

Las conclusiones más importantes de este capítulo son las siguientes:

- El proceso *RAAS/FIR* demostró ser útil en cuanto a la atenuación de los efectos de aliasing producidos por las perturbaciones de alta frecuencia.
- Las atenuaciones obtenidas a alta frecuencia son coincidentes con al *norm2* del filtro de reconstrucción utilizado. Sin embargo, en el rango de frecuencia donde interesa una buena atenuación aparece el efecto de picos, que deterioran la atenuación buscada. Estos picos reducen el efecto antialiasing del *RAAS* cuando el orden del filtro es elevado o el grado de aleatoriedad es bajo. De todas formas, el efecto negativo de estos picos es sustancialmente menor que en el *JRS*.
- El filtro *MA* es el que produce la mayor atenuación en alta frecuencia debido a su menor *norm2*.

- En bajas frecuencias el *RAAS/FIR* demostró no producir efectos apreciables en las señales útiles que se desean adquirir. La verificación se realizó a través de las simulaciones de la relación S/N , que demostraron que los errores producidos por el muestreo aleatorio son similares a los que introduce el propio filtro de reconstrucción.

Capítulo 5

Análisis comparativo de las técnicas de muestreo aleatorio

5.1. Comparación *JRS* versus *RAAS*

El objeto es realizar comparaciones del comportamiento de los dos métodos de muestreo aleatorio.

La función de muestreo, en el caso del *RAAS*, vale:

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \quad (5.1)$$

La función de muestreo, en el caso del *JRS*, es:

$$t_k = kT + \tau_k \quad (5.2)$$

donde $T = T_\tau + T_{AD}$. El tiempo T_{AD} es el menor tiempo posible entre muestra y muestra; su valor está limitado tecnológicamente por la implementación.

El estudio comparativo se realiza bajo las siguientes condiciones: 1) la función densidad de probabilidad (*pdf*) de la variable aleatoria τ_k es uniforme. Para *RAAS*

el dominio de τ_k es $[T_{AD}, T_\tau + T_{AD}]$. Para *JRS* el dominio de τ_k es $[-\frac{T_\tau}{2}, \frac{T_\tau}{2}]$.

Las formulaciones compactas de la *PFR* para cualquier filtro *FIR*, para *JRS* y *RAAS* se transcriben en las (5.3) y (5.4), respectivamente.

$$PFR(f) = \|\mathbf{h}\|_2^2 + 2\text{sinc}^2(fT_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega T}} \cos(2\pi fTn + \theta) \quad (5.3)$$

$$PFR(f) = \|h\|_2^2 + 2|\mathbf{H}^\circledast(z)|_{z=e^{j\omega(T_{AD}+T_\tau/2)}} \cos[n\omega(T_{AD} + T_\tau/2) + \theta] \quad (5.4)$$

Las Ecs. (5.3) y (5.4) se pueden especializar para el caso de un filtro MA, obteniendo las (5.5) y (5.6), respectivamente.

$$PFR(f) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \text{sinc}^2(fT_\tau) \sum_{k=2}^n (n+1-k) \cos[\omega Tk] \quad (5.5)$$

$$PFR(f) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{sinc}^k(fT_\tau) \cos[\omega k(T_{AD} + T_\tau/2)] \quad (5.6)$$

Por lo tanto, con un filtro *MA*, se puede comparar la *PFR* para ambos métodos, lo que se muestra en las Figs. 5.1, 5.2 y 5.3, para $n = 10, 100, 1000$, respectivamente. En dichas figuras se representaron las ecuaciones correspondientes que ya fueron validadas a través de simulaciones en los Capítulos 3 y 4.

En las Figs. 5.4, 5.5 y 5.6 se muestran las comparaciones *JRS* vs *RAAS* para el filtro *fir1*.

Finalmente en las Figs. 5.7, 5.8 y 5.9 se muestran las comparaciones *JRS* vs *RAAS* para el filtro *fircls1*.

En las gráficas se puede observar que los comportamientos de ambos métodos son similares en altas y bajas frecuencias. En altas frecuencias muestran el valor correspondiente a la norma del filtro $\|h\|_2^2$ y, en frecuencias bajas evolucionan igual que con el muestreo uniforme. Tanto en medias como en altas frecuencias se

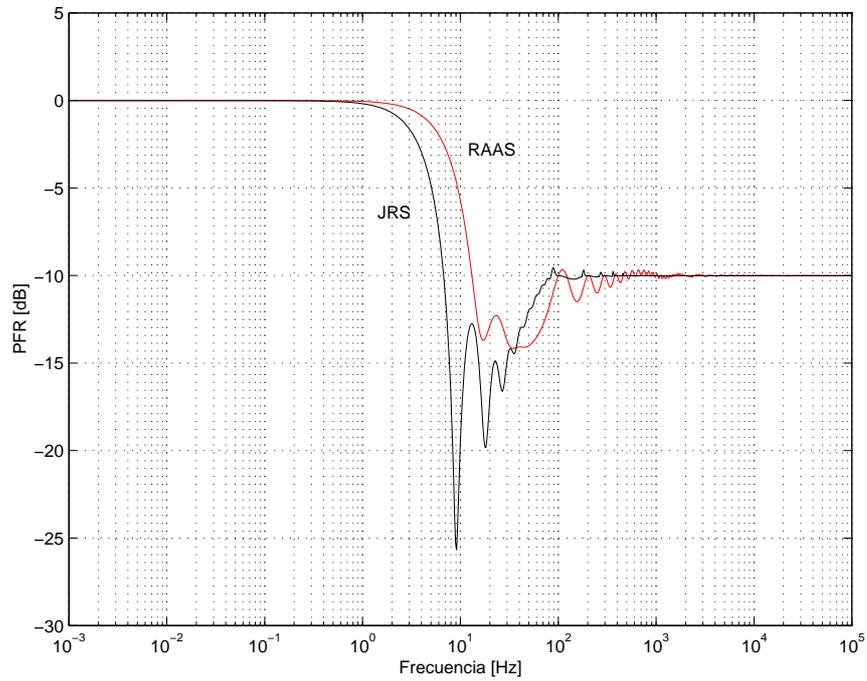


Figura 5.1: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *MA* con $n = 10$.

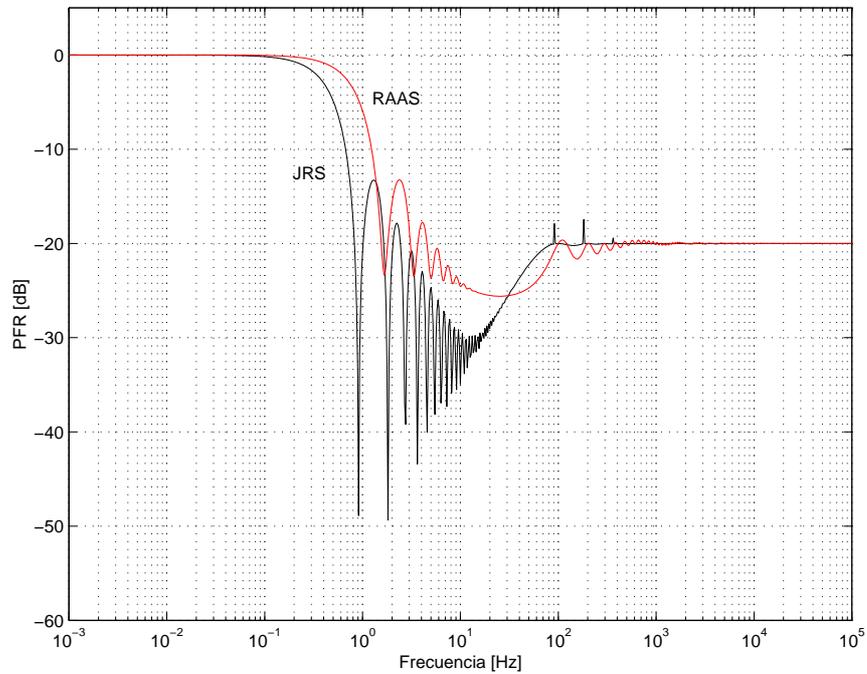


Figura 5.2: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *MA* con $n = 100$.

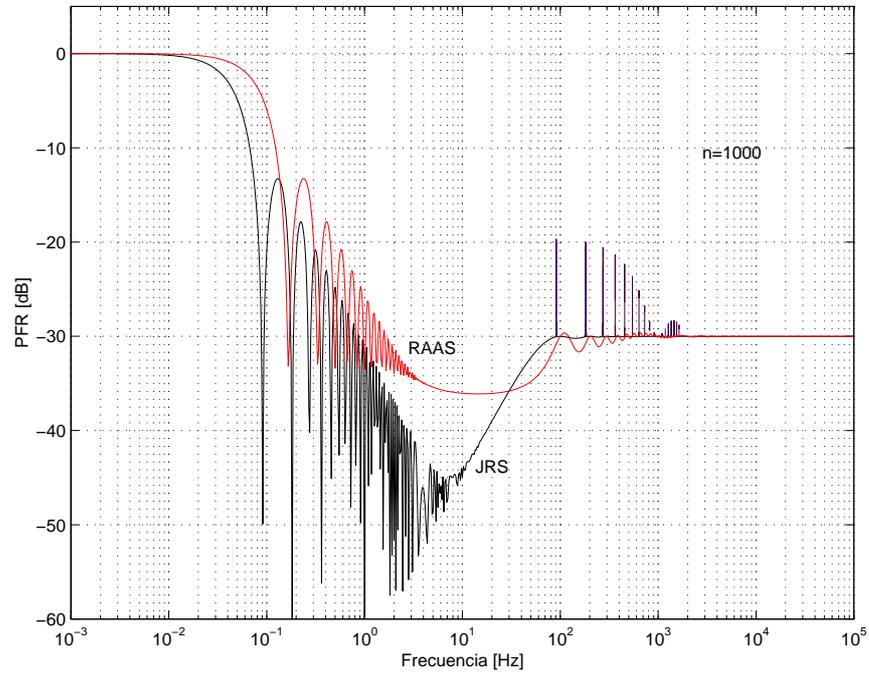


Figura 5.3: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *MA* con $n = 1000$.

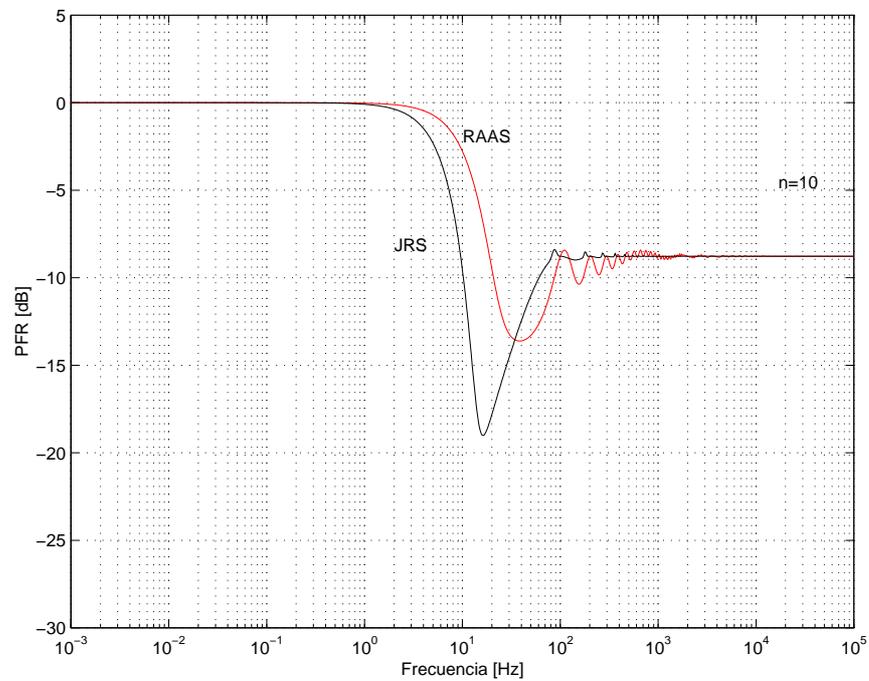


Figura 5.4: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *fir1* con $n = 10$.

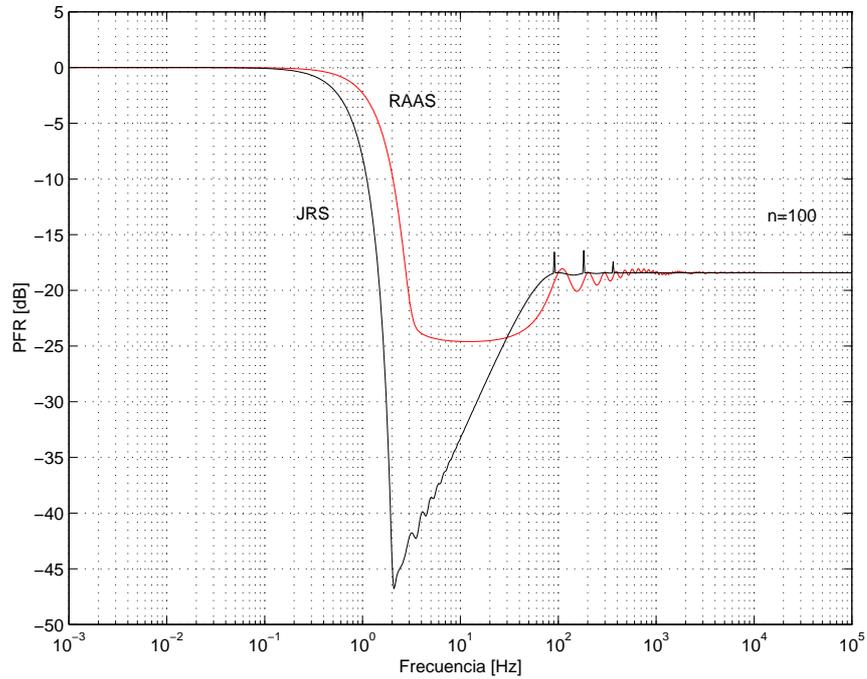


Figura 5.5: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *fir1* con $n = 100$.

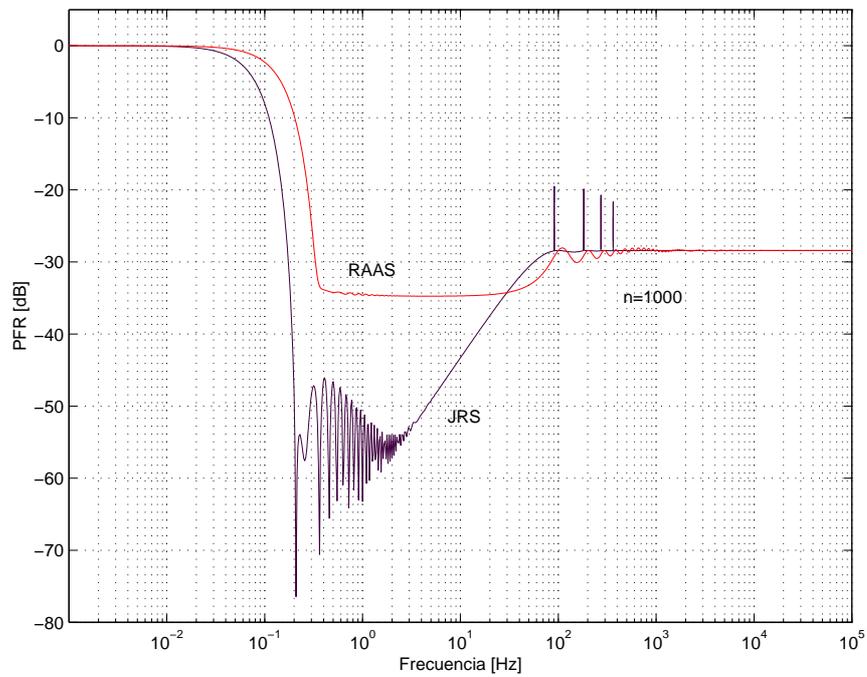


Figura 5.6: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *fir1* con $n = 1000$.

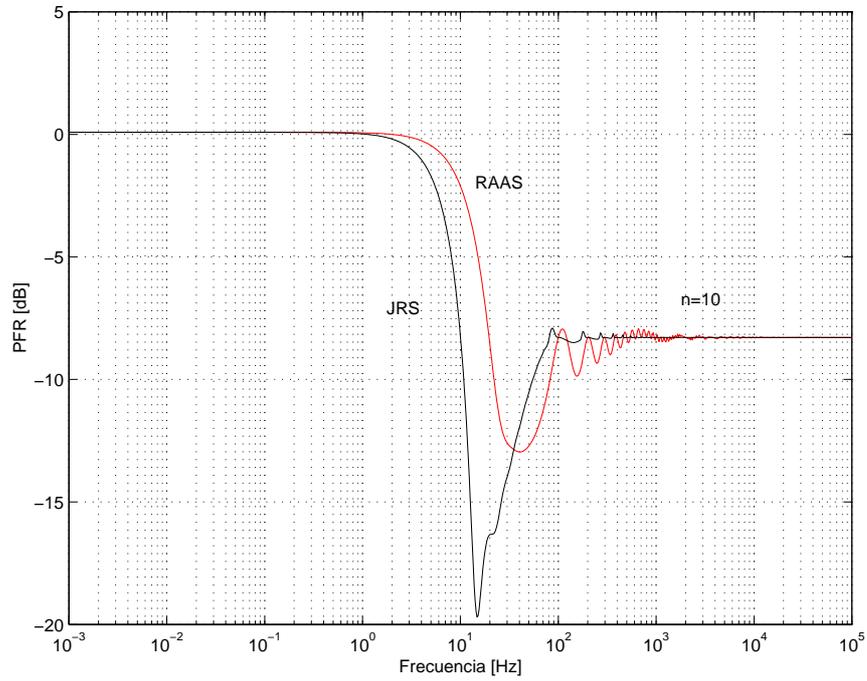


Figura 5.7: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *fircls1* con $n = 10$.

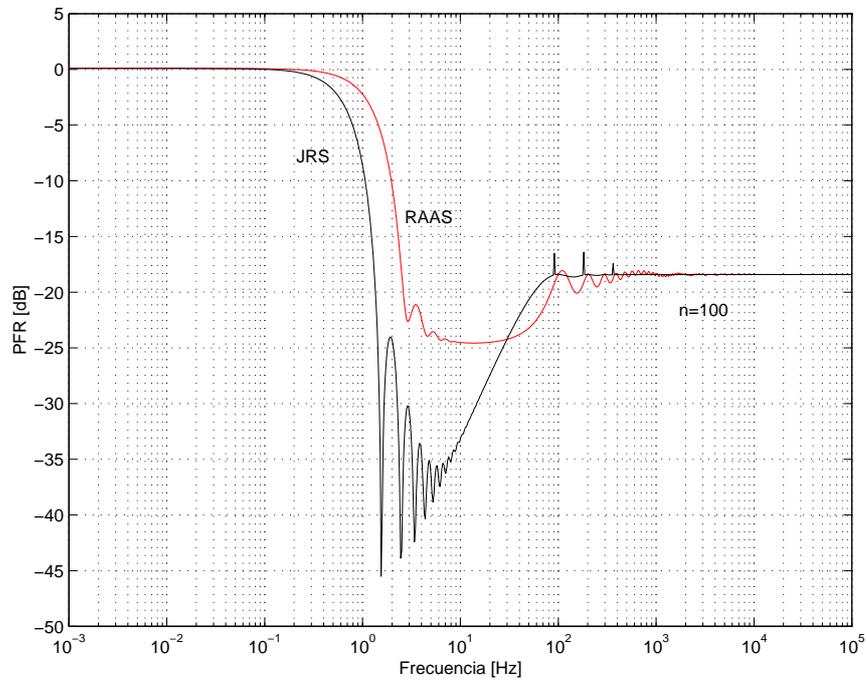


Figura 5.8: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *fircls1* con $n = 100$.

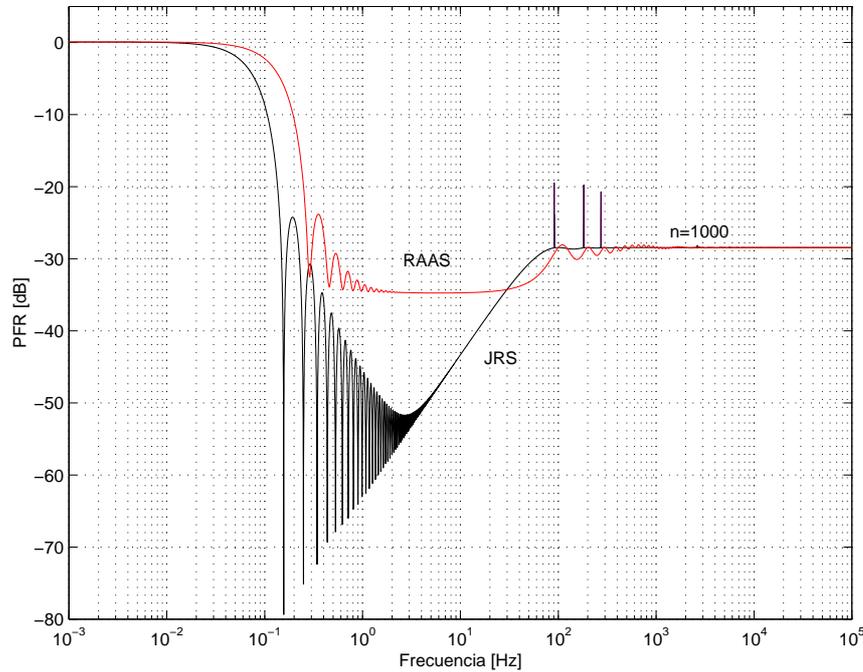


Figura 5.9: Comparación *RAAS* vs. *JRS*, con $T_{AD} = 1$ ms y $T_S = 10$ ms. Filtro *fircls1* con $n = 1000$.

aprecia el efecto provocado por el muestreo aleatorio. Este efecto, que en principio parece deteriorar la respuesta en frecuencia, es el que realmente permite atenuar los picos producidos a frecuencias múltiplos de la de Nyquist en el muestreo uniforme. Se observa que la frecuencia de corte del filtro equivalente es mayor en el *RAAS* que en el *JRS* lo que puede interpretarse como una ventaja ya que el filtro equivalente permite el paso de señales de mayor frecuencia en el rango de bajas frecuencias. La mayor frecuencia de corte del *RAAS* se explica a continuación. La frecuencia de corte de un *MA*, con muestreo uniforme, es coincidente con la obtenida con muestreo aleatorio y vale:

$$f_c = KE[f_m] \quad (5.7)$$

donde f_c es la frecuencia de corte del filtro, K es una constante y f_m es la frecuencia de muestreo. La $E[f_m]$ vale lo siguiente:

$$JRS \quad E[f_m] = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_{AD} + T_\tau} \tag{5.8}$$

$$RAAS \quad E[f_m] = \frac{1}{T_{AD} + \frac{T_\tau}{2}} \tag{5.9}$$

Las Ecs. (5.7) y (5.8) muestran que la frecuencia de muestreo media es mayor en el RAAS. En cambio ambos métodos difieren en las frecuencias medias, donde el JRS posee una mayor atenuación hasta $E[f_m]/3$, lo que puede considerarse como una ventaja. Sin embargo, para el rango de frecuencias entre $E[f_m]/3$ y $100E[f_m]/3$, el RAAS presenta una mayor atenuación.

Por otra parte, el JRS presenta picos en los múltiplos de la frecuencia equivalente de muestreo. La existencia de estos picos significa un deterioro de la atenuación del efecto aliasing que se pretende reducir con el muestreo aleatorio. El muestreo RAAS también presenta picos pero con amplitud menor que en el JRS. En la Tabla 5.1 se reproducen los datos relevados en los Capítulos 4 y 5, para un filtro MA.

T_τ		0	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
JRS	Atenuación ($n = 10$)	0	-1,5	-3,3	-8,7	-9,55	-10
JRS	Atenuación ($n = 100$)	0	-1,6	-3,8	-13,5	-17,2	-20
JRS	Atenuación ($n = 1000$)	0	-1,7	-4,0	-14,3	-19,7	-30
RAAS	Atenuación ($n = 10$)	0	-3,2	-6,5	-9,3	-9,65	-10
RAAS	Atenuación ($n = 100$)	0	-11,55	-16,2	-19,2	-19,6	-20
RAAS	Atenuación ($n = 1000$)	0	-21,4	-26,1	-29,2	-29,6	-30

Tabla 5.1: JRS/MA y RAAS/MA, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

Los datos de la Tabla [5.1](#) correspondiente al *MA* permiten arribar a las siguientes conclusiones:

1. Para $n = 10$ ambos métodos presentan niveles similares de amplitud de picos en $5T_{AD}$ y $10T_{AD}$, es decir que se podría usar indistintamente *RAAS* o *JRS* con $T_\tau \geq 5T_{AD}$.
2. Para $n = 10$ y $n = 100$ es concluyente la mayor atenuación del *RAAS* para todos los grados de aleatoriedad.
3. El *RAAS* presenta valores similares de amplitud de pico para $5T_{AD}$ y $10T_{AD}$, lo que lleva a la elección de $5T_{AD}$ debido al mejor comportamiento de la frecuencia de corte.

En conclusión, si se requiere un nivel de atenuación menor de los -10dB , entonces es necesario utilizar $n = 100$ o 1000 , por lo que es sumamente conveniente aplicar *RAAS*. En caso de requerirse atenuaciones menos exigentes que los 10dB , entonces se puede utilizar indistintamente *RAAS* o *JRS*, con $n = 10$. En cuanto al grado de aleatoriedad, en caso del *JRS* debe cumplirse que $T_\tau \geq 5T_{AD}$. En el caso de utilizarse *RAAS*, se puede aplicar cualquier combinación de n y grado de aleatoriedad que cumpla con lo especificado.

Con el objeto de evaluar otros filtros como el *fir1* y el *fircls1*, se realizaron mediciones de atenuación en los picos también para estos filtros. En las Tablas [5.2](#) y [5.3](#) se muestran las mediciones realizadas para *fir1* y *fircls1*, respectivamente, tanto para *JRS* como para *RAAS*. Las conclusiones formuladas para el *MA*, se pueden extender para estos filtros.

T_τ		0	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
<i>JRS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 10$)	0	-1,4	-3,1	-7,7	-8,4	-8,8
<i>JRS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 100$)	0	-1,6	-3,8	-13,0	-16,2	-18,4
<i>JRS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 1000$)	0	-1,6	-3,9	-14,2	-19,6	-28,4
<i>RAAS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 10$)	0	-2,3	-5,3	-8,1	-8,4	-8,8
<i>RAAS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 100$)	0	-9,9	-14,5	-17,7	-18,0	-18,4
<i>RAAS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 1000$)	0	-20,0	-24,5	-27,6	-28,0	-28,4

Tabla 5.2: JRS/fir1 y RAAS/fir1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

T_τ		0	$0,5T_{AD}$	T_{AD}	$5T_{AD}$	$10T_{AD}$	∞
<i>JRS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 10$)	0	-1,3	-3,0	-7,3	-7,9	-8,3
<i>JRS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 100$)	0	-1,5	-3,7	-12,9	-16,2	-18,4
<i>JRS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 1000$)	0	-1,6	-3,8	-14,1	-19,4	-28,4
<i>RAAS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 10$)	0	-2,1	-4,9	-7,6	-7,9	-8,3
<i>RAAS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 100$)	0	-9,9	-14,5	-17,6	-18,0	-18,4
<i>RAAS</i>	<i>Atenuación</i> ($n = 1000$)	0	-19,8	-24,5	-27,7	-28,0	-28,4

Tabla 5.3: JRS/fircls1 y RAAS/fircls1, Atenuación mínima en alta frecuencia (durante peor pico).

Capítulo 6

Resultados Experimentales

6.1. Ensayos de validación de resultados teóricos y de simulación

Se realizaron ensayos experimentales a fin de validar las expresiones teóricas previamente desarrolladas. El objetivo de estos ensayos fue obtener la *PFR* para distintos valores de frecuencia y comparar los puntos medidos con la *PFR* teórica. En los ensayos se adquirieron señales de tipo senoidal, con muestreo aleatorio, *JRS* o *RAAS*, para luego procesarlas mediante filtros de reconstrucción, *MA* o *fir1*. La salida del procesamiento fue luego convertida en una señal analógica a través de un convertidor *DA*, la cual fue observada a través de un osciloscopio. La adquisición, el procesamiento y la conversión *DA* fueron implementadas en un *DSP* de Analog Devices, ADSP271. En el Apéndice 2 se presentan las características básicas del *DSP*, los listados de los programas utilizados en el *DSP* y se muestran las conexiones básicas realizadas para la implementación experimental.

Los ensayos se dividieron en doce grupos de manera de cubrir todas las combinaciones de tipo de muestreo (*JRS* o *RAAS*), tipo de filtro (*MA* o *fir1*) y

orden del mismo ($n = 10, 100$ o 1000). En todos los casos los tiempos de muestreo fueron $T_{AD} = 1\text{ms}$ y $T_\tau = 10\text{ms}$, la señal de entrada de amplitud $1\hat{V}$ y las frecuencias fueron elegidas teniendo en cuenta los valores críticos de las *PFRs*.

Adicionalmente, para todos los experimentos se realizó la medición de la potencia de salida, a partir de la adquisición y procesamiento off-line de las señales de salida.

6.1.1. Grupo 1: *JRS/MA* con $n=10$

El grupo 1 reúne los ensayos realizados con *JRS/MA*, con $n = 10$. Se realizaron ensayos para $f = 0, 1\text{Hz}, 4\text{Hz}, 8\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz . En las Figs. [6.1](#), [6.2](#), [6.3](#), [6.4](#), [6.5](#), [6.6](#) y [6.7](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0, 1\text{Hz}, 4\text{Hz}, 8\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , respectivamente. En la Fig. [6.1](#), donde la $f = 0, 1\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *MA* posee una frecuencia de corte que se encuentra en $f_c = \frac{E[f_m]}{3n} = 3,03\text{Hz}$, es decir más de una década superior a la frecuencia de entrada. Para el caso donde $f = 4\text{Hz}$, Fig. [6.2](#), la salida presenta cierta atenuación que obedece a la atenuación del filtro ya que la frecuencia es muy cercana a f_c . Aquí se observa que el muestreo aleatorio tampoco presenta efectos sobre la salida. Para frecuencias un poco mayores como $f = 8\text{Hz}$, Fig. [6.3](#), la señal de entrada ha sufrido una gran atenuación, atribuible al propio filtro. Todavía no se observan efectos del muestreo aleatorio. En cambio para los otros ensayos, $f = 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , Figs. [6.4](#), [6.5](#), [6.6](#) y [6.7](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido

que se origina exclusivamente en el método *JRS*. Las frecuencias $f = 90,9\text{Hz}$ y $181,8\text{Hz}$ no fueron elegidas caprichosamente sino que coinciden con la existencia de picos en la curva teórica. Sin embargo los picos mencionados no pudieron observarse.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 10ms, para los casos $f = 0,1\text{Hz}$, 8Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, 1000Hz y 10000Hz , y $0,4\text{ms}$ para $f = 4\text{Hz}$. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [A.1](#), luego se graficaron junto con la curva teórica de *PFR* en la Fig. [6.8](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

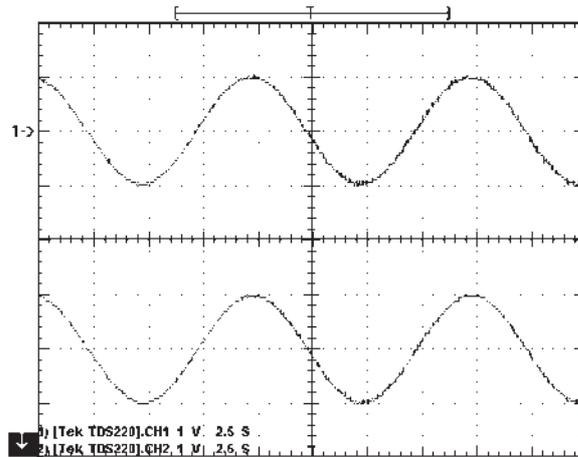


Figura 6.1: *JRS/MA*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y $0,1\text{Hz}$. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,1	4	8	90,9	181,8	1,000	10,000
<i>PFR</i> [dB]	-0,19	-3,29	-19,29	-10,82	-10,35	-10,18	-10,63

Tabla 6.1: *PFR* vs. frecuencia. Condiciones: *JRS/MA*, $n=10$.

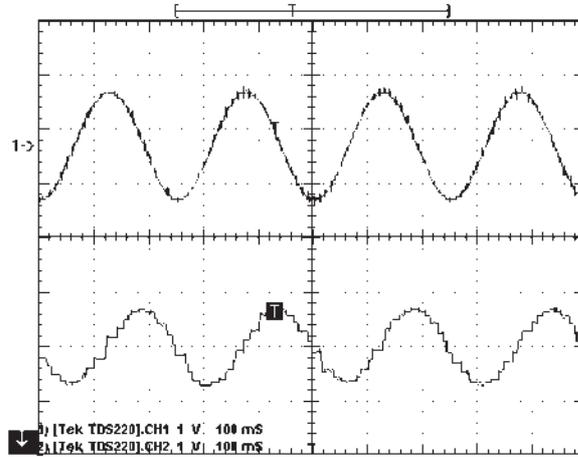


Figura 6.2: *JRS/MA*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 4 Hz. Señal de salida (abajo).

6.1.2. Grupo 2: *RAAS/MA* con $n=10$

El grupo 2 reúne los ensayos realizados con *RAAS/MA* de $n = 10$. Se realizaron ensayos para $f = 0, 1\text{Hz}, 7\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz . En las Figs. [6.9](#), [6.10](#), [6.11](#), [6.12](#) y [6.13](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0, 1\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , respectivamente. En la Fig. [6.9](#), donde la $f = 0, 1\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *MA* posee una frecuencia de corte que se encuentra en $f_c = \frac{E[f_m]}{3n} = 5,55\text{Hz}$, es decir más de una década superior a la frecuencia de entrada. Para las frecuencias $f = 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , Figs. [6.10](#), [6.11](#), [6.12](#) y [6.13](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *RAAS*.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2500 puntos de la señal

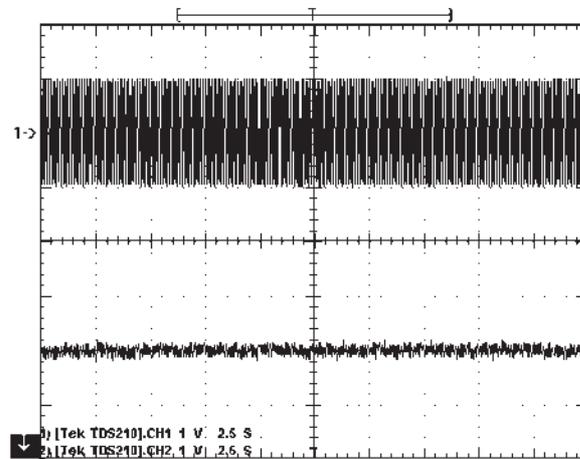


Figura 6.3: JRS/MA , $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 8 Hz. Señal de salida (abajo).

de salida, espaciadas con un período de 10ms, para los casos $f = 0, 1\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , y 2ms para $f = 7\text{Hz}$. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [A.2](#), luego se graficaron junto con la curva teórica de PFR en la Fig. [6.14](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

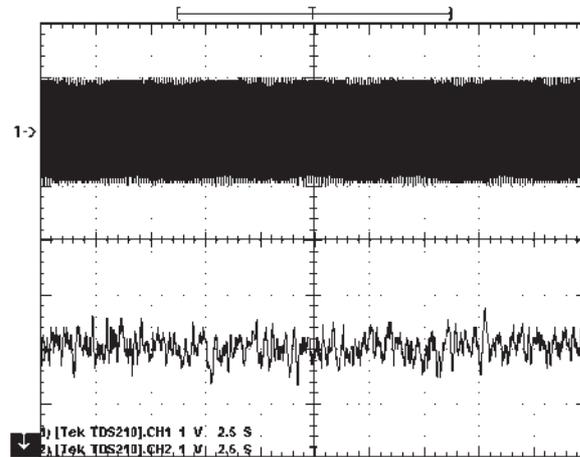


Figura 6.4: *JRS/MA*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

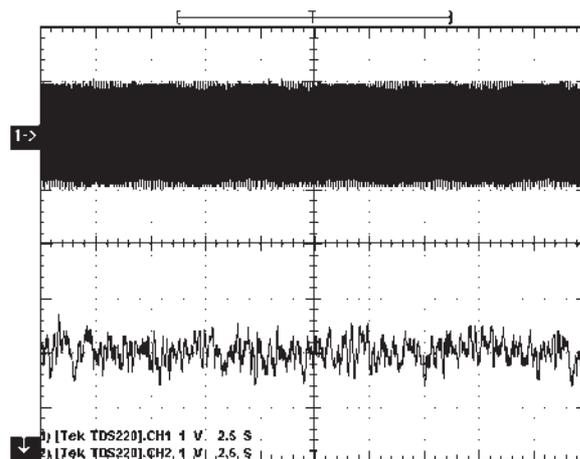


Figura 6.5: *JRS/MA*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

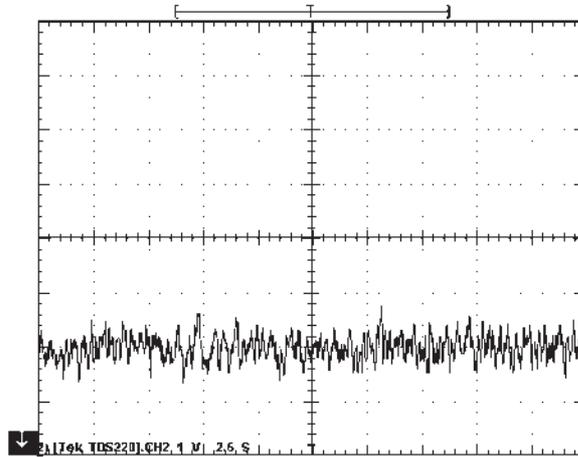


Figura 6.6: JRS/MA , $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

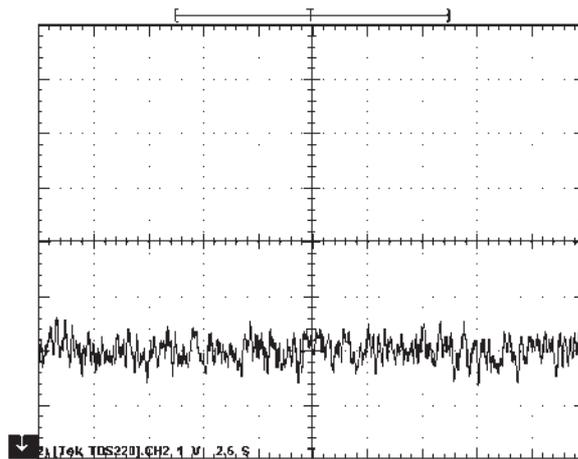


Figura 6.7: JRS/MA , $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

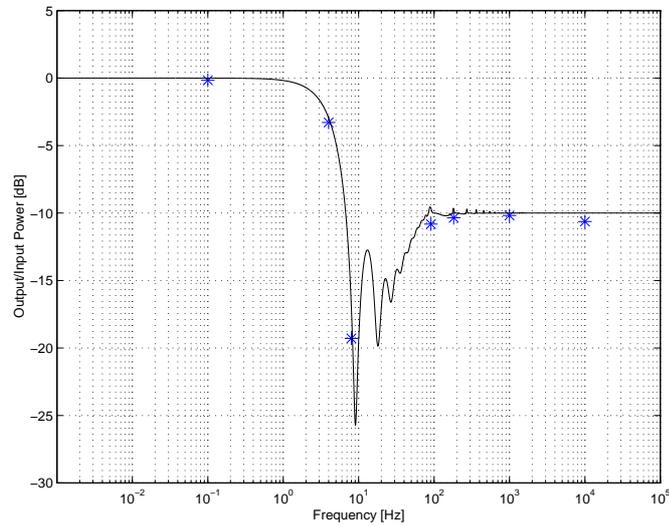


Figura 6.8: Resultados experimentales (*) y curva teórica para JRS/MA , $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

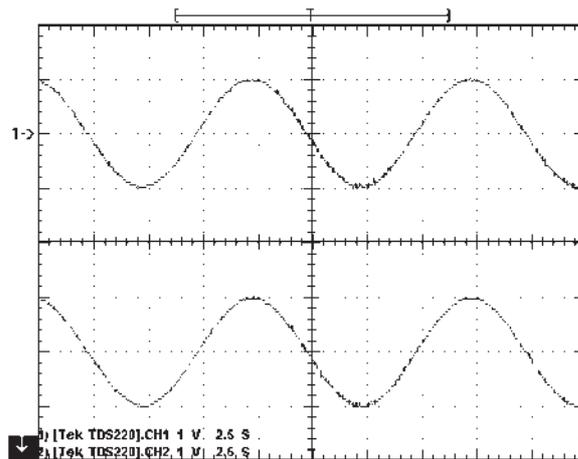


Figura 6.9: $RAAS/MA$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y $0,1\text{ Hz}$. Señal de salida (abajo).

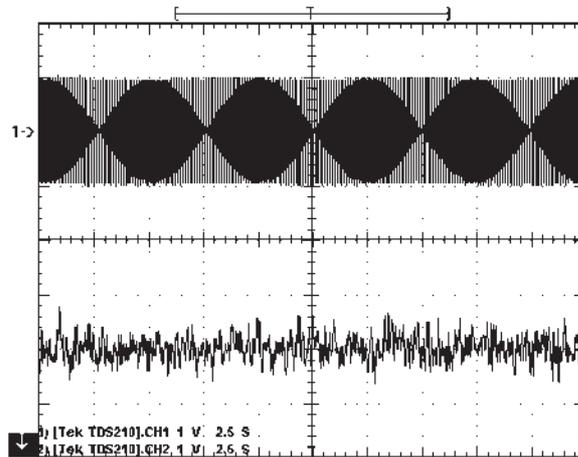


Figura 6.10: *RAAS/MA*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

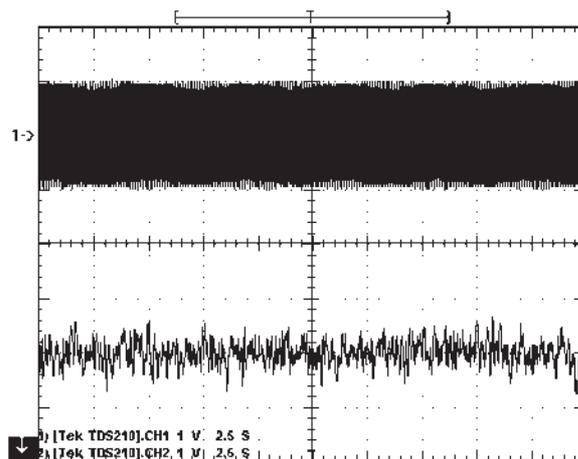


Figura 6.11: *RAAS/MA*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

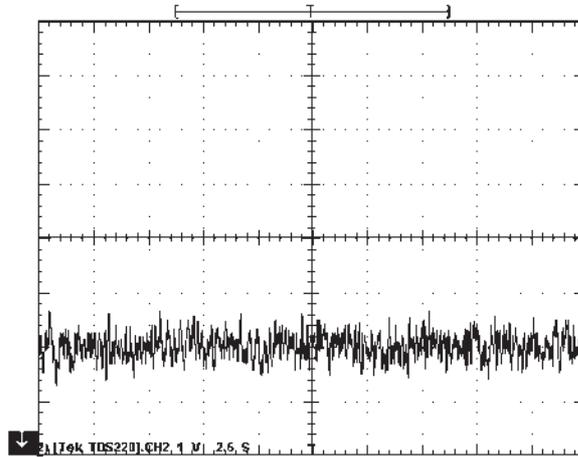


Figura 6.12: *RAAS/MA*, $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

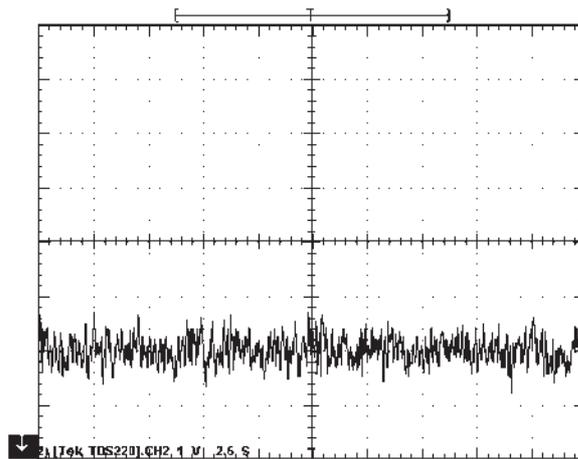


Figura 6.13: *RAAS/MA*, $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

f [Hz]	0,1	7	90,9	181,8	1000	10000
PFR [dB]	-0,15	-2,96	-10,77	-10,00	-9,93	-9,75

Tabla 6.2: PFR vs. frecuencia. Condiciones: RAAS/MA, n=10.

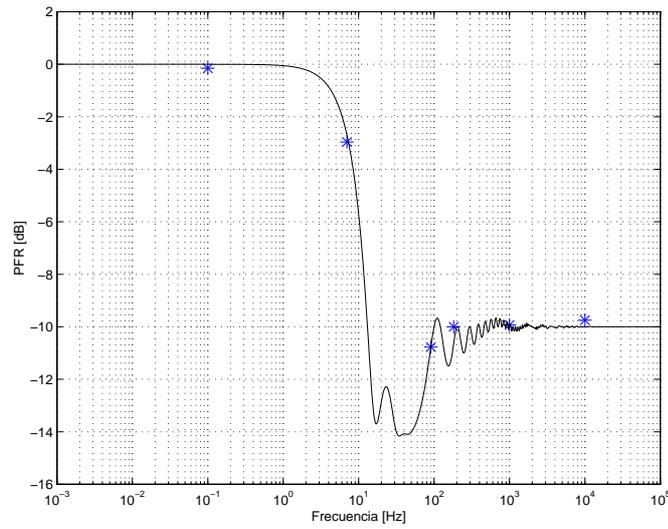


Figura 6.14: Resultados experimentales (*) y curva teórica para RAAS/MA, $n = 10$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.3. Grupo 3: *JRS/MA*, con $n=100$

El grupo 3 reúne a los ensayos realizados con *JRS/MA*, con $n = 100$. Se realizaron ensayos para $f = 0, 1\text{Hz}, 0, 4\text{Hz}, 10\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz . En las Figs. [6.15](#), [6.16](#), [6.17](#), [6.18](#), [6.19](#), [6.20](#) y [6.21](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0, 1\text{Hz}, 0, 4\text{Hz}, 10\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , respectivamente. En la Fig. [6.15](#), donde la $f = 0, 1\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *MA* posee una frecuencia de corte $f_c = \frac{E[f_m]}{3n} = 0, 3\text{Hz}$, que es superior a la frecuencia de entrada. Para el caso donde $f = 0, 4\text{Hz}$, Fig. [6.16](#), la salida presenta una atenuación cercana a los 3dB, que obedece a exclusivamente a la atenuación del filtro ya que la frecuencia es muy cercana a f_c . Aquí también el muestreo aleatorio no presenta efectos sobre la salida. Para frecuencias un poco mayores como $f = 10\text{Hz}$, Fig. [6.17](#), la señal de entrada ha sufrido una gran atenuación, atribuible al propio filtro. Todavía no se observa el efecto del muestreo aleatorio. En cambio para los otros ensayos, $f = 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , Figs. [6.18](#), [6.19](#), [6.20](#) y [6.21](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *JRS*. Las frecuencias $f = 90, 9\text{Hz}$ y $181, 8\text{Hz}$ se eligieron porque coinciden con la existencia de picos en la curva teórica. Sin embargo los picos mencionados no pudieron observarse.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 10ms, para los casos $f = 0, 1\text{Hz}, 10\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , y 4ms para $f = 4\text{Hz}$. Los datos obtenidos

fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [A.3](#), luego se graficaron junto con la curva teórica de *PFR* en la Fig. [6.22](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

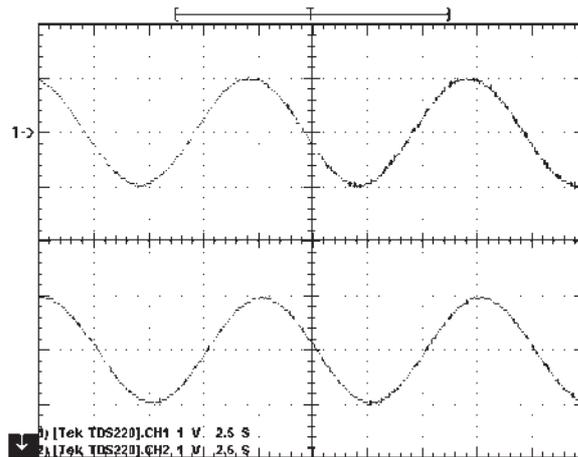


Figura 6.15: *JRS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).

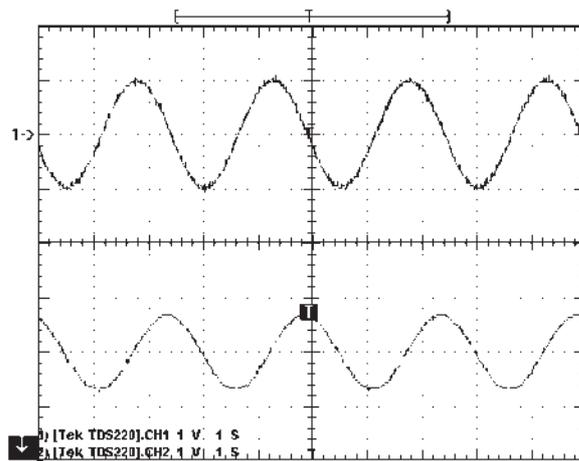


Figura 6.16: JRS/MA , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y $0,4$ Hz. Señal de salida (abajo).

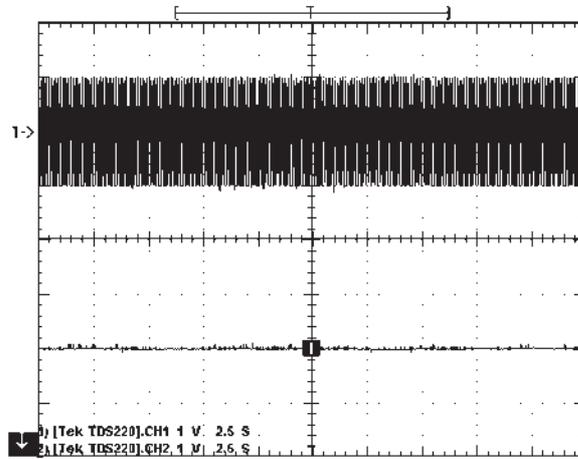


Figura 6.17: *JRS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10 Hz. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,1	0,4	10	90,9	181,8	1000	10000
PFR [dB]	-0,34	-3,27	-28,72	-21,11	-19,50	-20,90	-20,25

Tabla 6.3: PFR vs. frecuencia. Condiciones: *JRS/MA*, $n=100$.

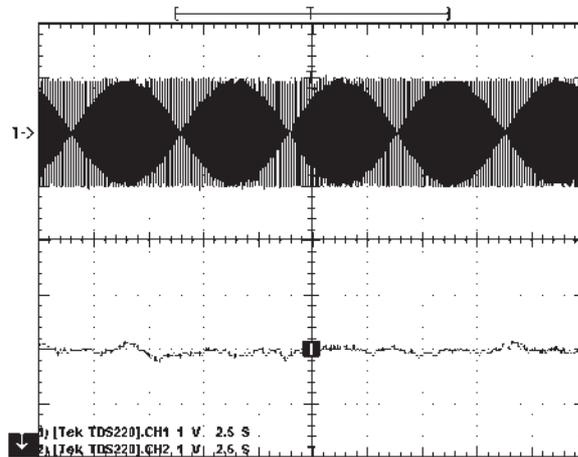


Figura 6.18: JRS/MA , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

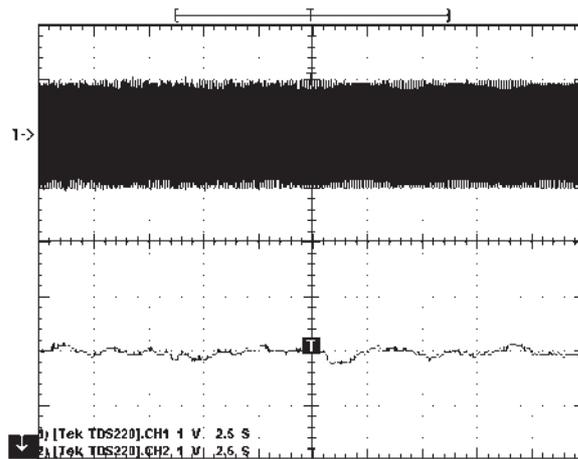


Figura 6.19: JRS/MA , $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

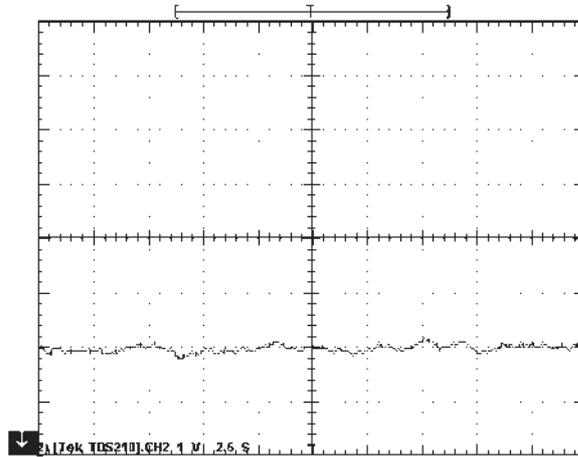


Figura 6.20: JRS/MA , $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

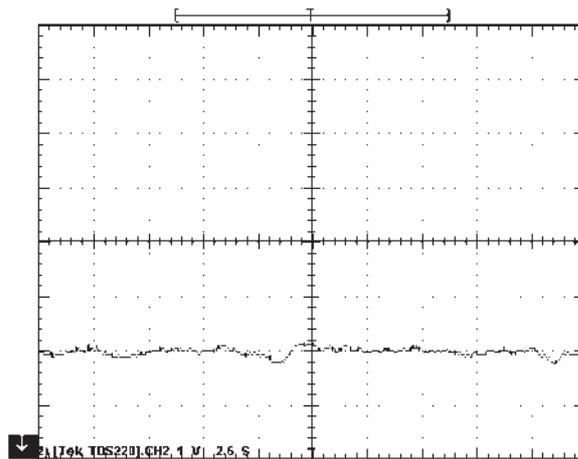


Figura 6.21: JRS/MA , $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

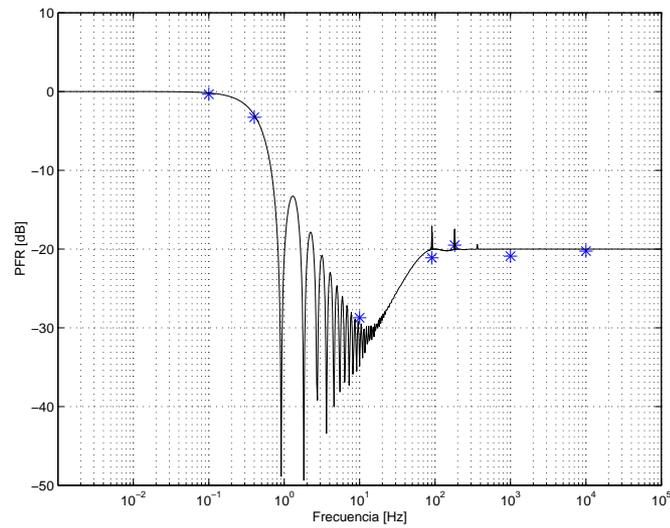


Figura 6.22: Resultados experimentales (*) y curva teórica para JRS/MA , $n = 100$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.4. Grupo 4: *RAAS/MA*, con $n=100$

El grupo 4 reúne los ensayos realizados con *RAAS/MA*, con $n = 100$. Se realizaron ensayos para $f = 0,1\text{Hz}$, $0,7\text{Hz}$, 10Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$ y 1000Hz . En las Figs. [6.23](#), [6.24](#), [6.25](#), [6.26](#), [6.27](#) y [6.28](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0,1\text{Hz}$, $0,7\text{Hz}$, 10Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, respectivamente. En la Fig. [6.23](#), donde la $f = 0,1\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *MA* posee una frecuencia de corte $f_c \simeq \frac{E[f_m]}{3n} = 0,55\text{Hz}$, que es superior a la frecuencia de entrada. Para el caso donde $f = 0,7\text{Hz}$, Fig. [6.24](#), la salida posee una atenuación cercana a los 3dB ya que la frecuencia es muy cercana a f_c . El muestreo aleatorio aquí tampoco presenta efectos sobre la salida. Para la $f = 10\text{Hz}$ la atenuación observada es más pronunciada y se explica por la mayor atenuación del filtro y un aporte poco significativo del muestreo *RAAS*, Fig. [6.25](#). Para las frecuencias $f = 90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, Figs. [6.26](#), [6.27](#) y [6.28](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *RAAS*.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 10ms, para los casos $f = 0,1\text{Hz}$, 10Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, y 2ms para $f = 0,7\text{Hz}$. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [A.4](#), luego se graficaron junto con la curva teórica de *PFR* en la Fig. [6.29](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

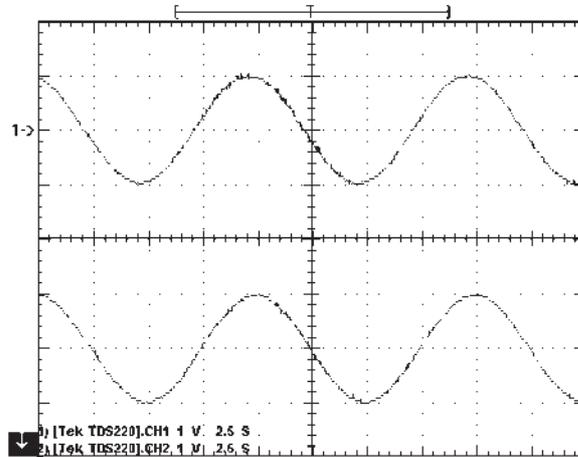


Figura 6.23: *RAAS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,1	0,7	10	90,9	181,8	10,000
PFR [dB]	-0,21	-2,67	-24,00	-20,82	-20,43	-19,58

Tabla 6.4: PFR vs. frecuencia. Condiciones: *RAAS/MA*, $n=100$.

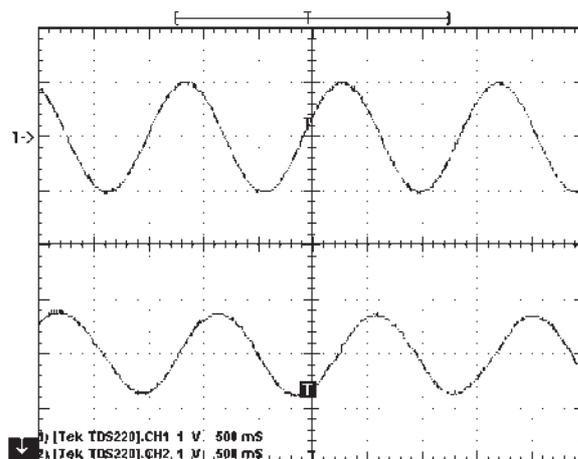


Figura 6.24: *RAAS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,7 Hz. Señal de salida (abajo).

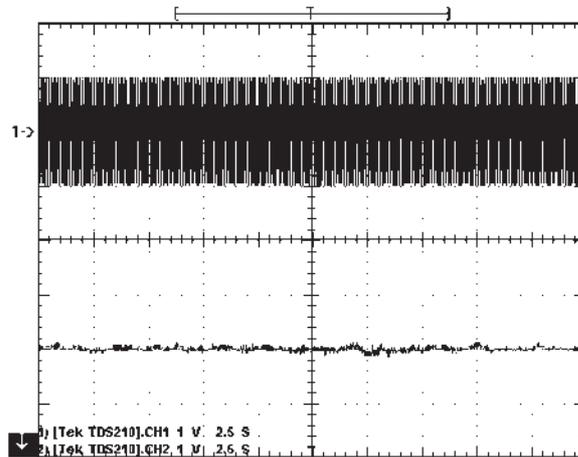


Figura 6.25: *RAAS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10 Hz. Señal de salida (abajo).

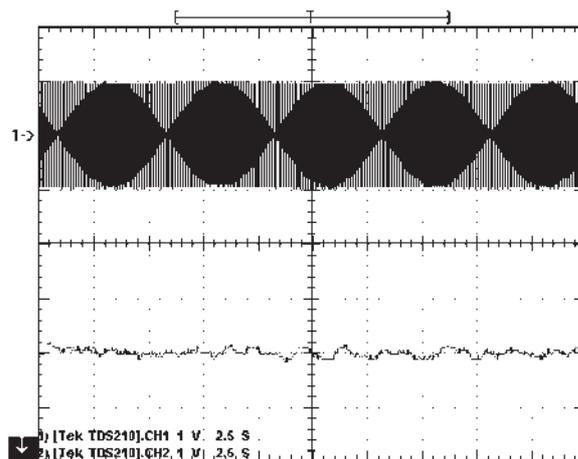


Figura 6.26: *IRAAS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

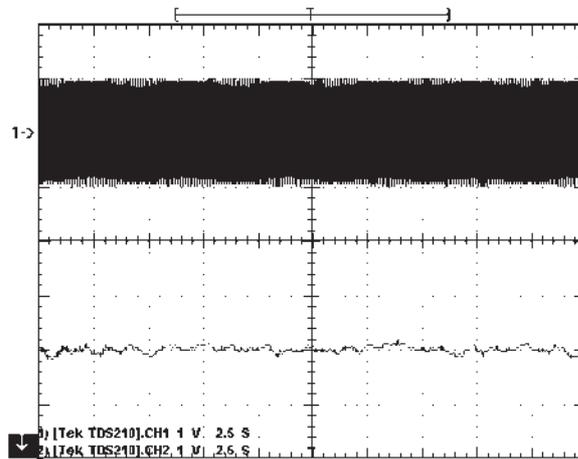


Figura 6.27: *RAAS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

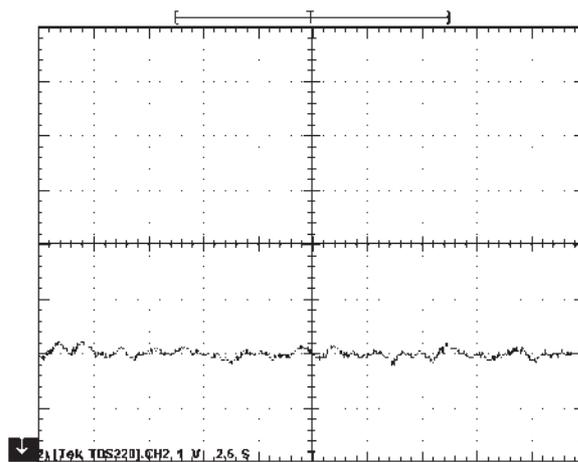


Figura 6.28: *RAAS/MA*, $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

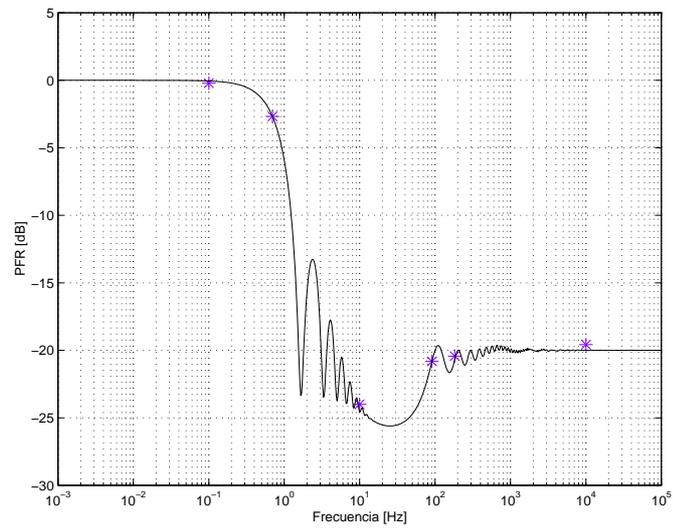


Figura 6.29: Resultados experimentales (*) y curva teórica para *RAAS/MA*, $n = 100$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.5. Grupo 5: *JRS/MA*, con $n=1000$

El grupo 5 reúne los ensayos realizados con *JRS/MA*, con $n = 1000$. Se realizaron ensayos para $f = 0,01\text{Hz}$, $0,04\text{Hz}$, 7Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$. En las Figs. [6.30](#), [6.31](#), [6.32](#), [6.33](#), [6.34](#), [6.35](#) y [6.36](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0,01\text{Hz}$, $0,04\text{Hz}$, 7Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, respectivamente. En la Fig. [6.30](#), donde la $f = 0,01\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *MA* posee una frecuencia de corte $f_c = \frac{E[f_m]}{3n} = 0,03\text{Hz}$, que es superior a la frecuencia de entrada. Para el caso donde $f = 0,04\text{Hz}$, Fig. [6.31](#), la salida presenta una atenuación cercana a los 3dB, que obedece a exclusivamente a la atenuación del filtro ya que la frecuencia es muy cercana a f_c . Aquí también el muestreo aleatorio no presenta efectos sobre la salida. Para frecuencias un poco mayores como $f = 7\text{Hz}$, Fig. [6.32](#), la señal de entrada ha sufrido una gran atenuación, atribuible al propio filtro. Todavía no se observa el efecto del muestreo aleatorio. En cambio para los otros ensayos, $f = 90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, Figs. [6.33](#), [6.34](#), [6.35](#) y [6.36](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *JRS*. Las frecuencias $f = 90,9\text{Hz}$ y $181,8\text{Hz}$ fueron elegidas porque coinciden con la existencia de picos en la curva teórica. Sin embargo los picos mencionados no pudieron observarse en los ensayos experimentales, lo que se explica por la dificultad del sistema implementado (*DSP*) en obtener exactamente el valor $T = 11,00\text{ms}$. Un error de sólo $0,01\text{ms}$ respecto de los 11ms deseados ya implica que el ensayo se estaría realizando a una frecuencia que cae fuera del pico

que se pretende observar experimentalmente.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2,500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 20ms, para los casos $f = 0,01\text{Hz}$ y $0,04\text{Hz}$, y 10ms para $f = 7\text{Hz}$, $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [A.5](#), luego estos valores se graficaron junto con la curva teórica de PFR en la Fig. [6.37](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica, excepto para los casos de $f = 90,9\text{Hz}$ y $181,8\text{Hz}$, por las razones mencionadas.

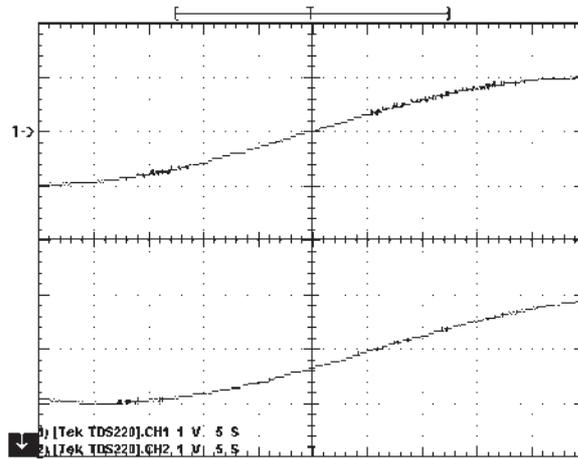


Figura 6.30: JRS/MA , $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y $0,01\text{Hz}$. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,01	0,04	7	90,9	181,8	1,000	10,000
PFR [dB]	-0,76	-3,28	-41,30	-30,26	-29,64	-31,83	-31,88

Tabla 6.5: PFR vs. frecuencia. Condiciones: JRS/MA , $n=1000$.

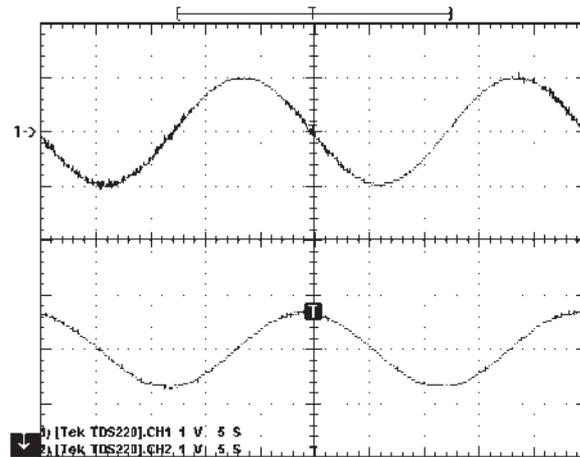


Figura 6.31: *JRS/MA*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y $0,04\text{ Hz}$. Señal de salida (abajo).

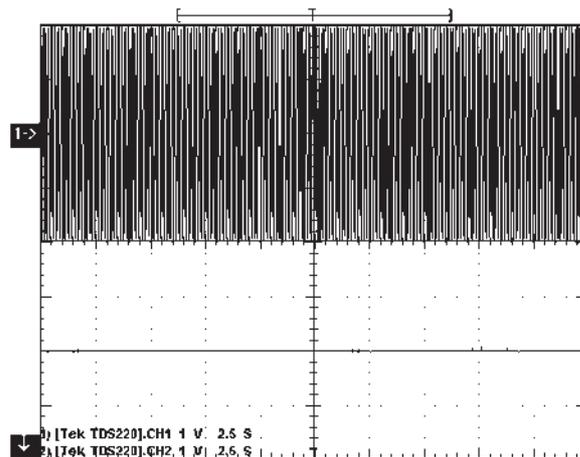


Figura 6.32: *JRS/MA*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 7 Hz . Señal de salida (abajo).

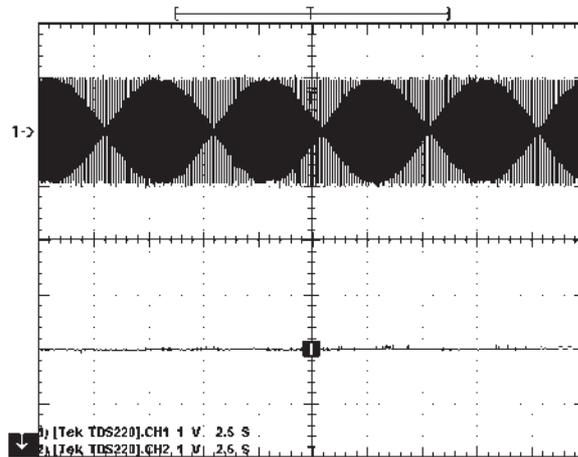


Figura 6.33: *JRS/MA*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

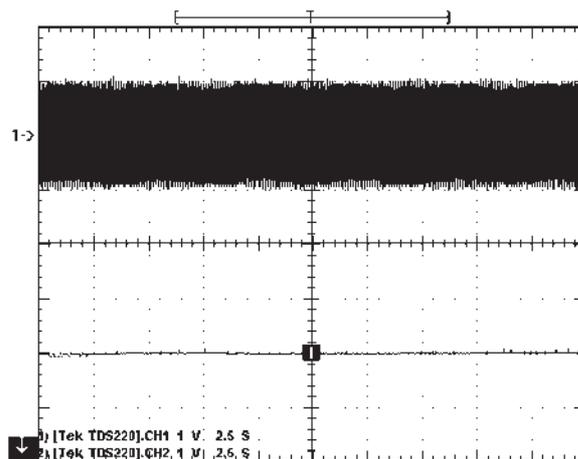


Figura 6.34: *JRS/MA*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

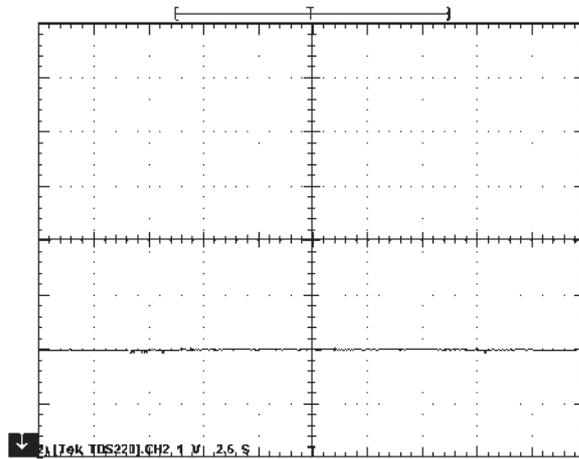


Figura 6.35: *JRS/MA*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10,000 Hz. Señal de salida (abajo).

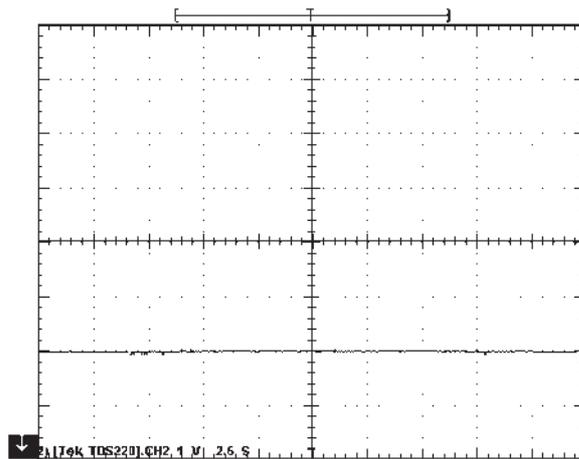


Figura 6.36: *JRS/MA*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10,000 Hz. Señal de salida (abajo).

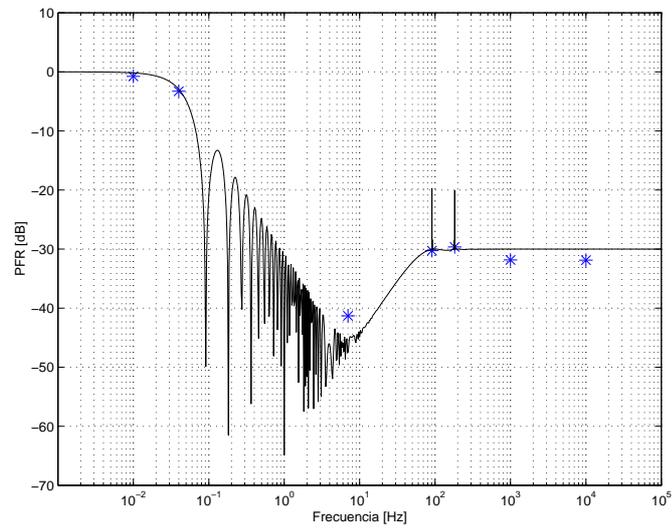


Figura 6.37: Resultados experimentales (*) y curva teórica para JRS/MA , $n = 1000$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.6. Grupo 6: *RAAS/MA*, con $n=1000$

El grupo 6 reúne los ensayos realizados con *RAAS/MA*, con $n = 1000$. Se realizaron ensayos para $f = 0,01\text{Hz}$, $0,07\text{Hz}$, 10Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$. En las Figs. [6.38](#), [6.39](#), [6.40](#) y [6.41](#), se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0,01\text{Hz}$, 10Hz , $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, respectivamente. En la Fig. [6.38](#), donde la $f = 0,01\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *MA* posee una frecuencia de corte $f_c \simeq \frac{E[f_m]}{3n} = 0,055\text{Hz}$, que es superior a la frecuencia de entrada. Para la $f = 10\text{Hz}$ la atenuación observada es más pronunciada y se explica por la mayor atenuación del filtro y un aporte poco significativo del muestreo *RAAS*, Fig. [6.40](#). Para las frecuencias $f = 1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, Figs. [6.40](#) y [6.41](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *RAAS*.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2,500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 20ms para $f = 0,01\text{Hz}$, y 10ms para $f = 0,07\text{Hz}$, 10Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [A.6](#), luego estos valores se graficaron junto con la curva teórica de *PFR* en la Fig. [6.42](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

f [Hz]	0,01	0,07	10	90,9	181,8	1,000	10,000
<i>PFR</i> [dB]	-0,19	-2,83	-33,94	-32,27	-32,21	-30,01	-30,87

Tabla 6.6: *PFR* vs. frecuencia. Condiciones: *RAAS/MA*, $n=1000$.

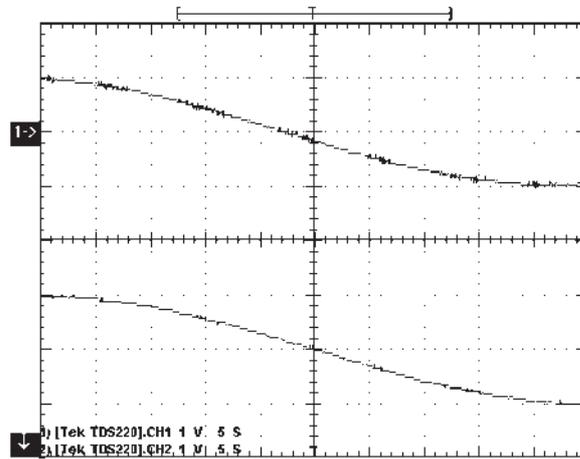


Figura 6.38: *RAAS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,01 Hz. Señal de salida (abajo).

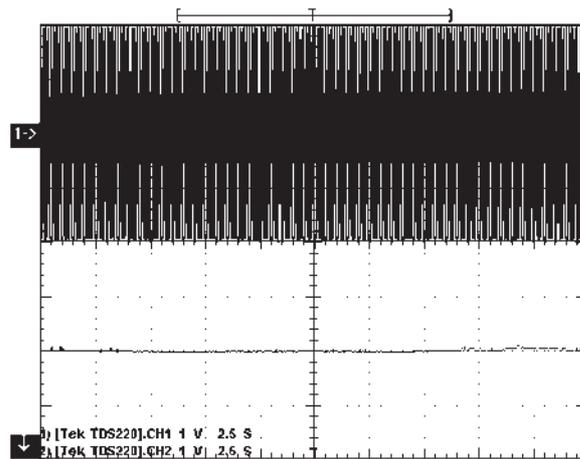


Figura 6.39: *IRAAS/MA*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10 Hz. Señal de salida (abajo).

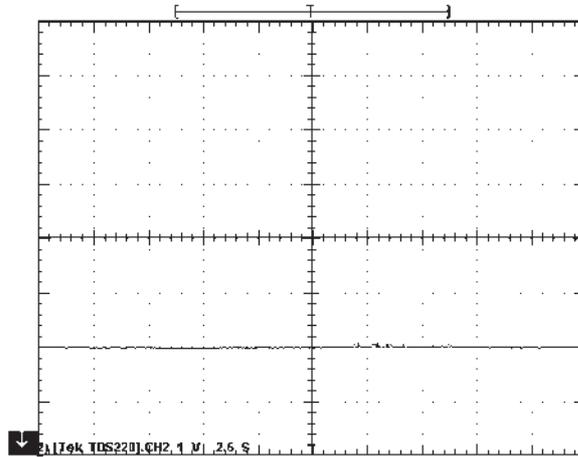


Figura 6.40: *RAAS/MA*, $n = 1000$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

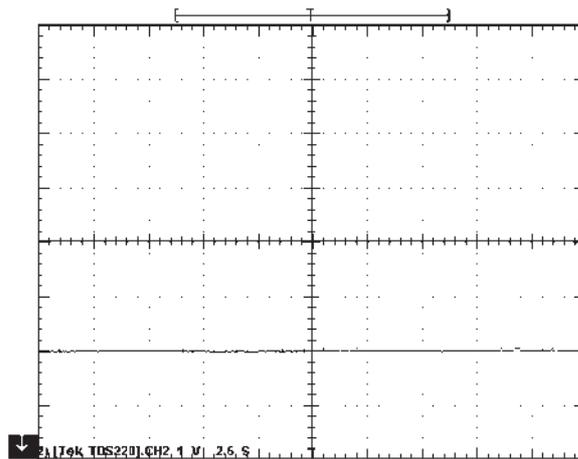


Figura 6.41: *RAAS/MA*, $n = 1000$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

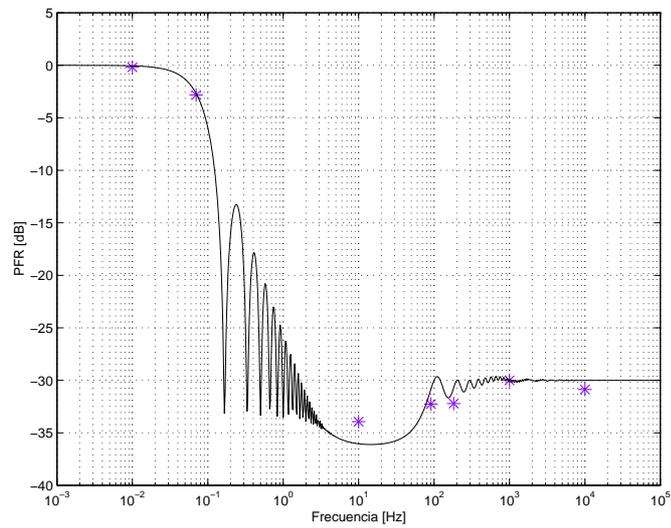


Figura 6.42: Resultados experimentales (*) y curva teórica para *RAAS/MA*, $n = 1000$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.7. Grupo 7: *JRS/fir1*, con $n=10$

El grupo 7 reúne los ensayos realizados con *JRS/fir1*, con $n = 10$. Se realizaron ensayos para $f = 0, 1\text{Hz}, 6\text{Hz}, 20\text{Hz}, 30\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz . En las Figs. [6.43](#), [6.44](#), [6.45](#), [6.46](#), [6.47](#), [6.48](#), [6.49](#) y [6.50](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0, 1\text{Hz}, 6\text{Hz}, 20\text{Hz}, 30\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , respectivamente. En la Fig. [6.43](#), donde la $f = 0, 1\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *fir1* posee una frecuencia de corte que se encuentra en $f_c = \frac{2E[f_m]}{3n} = 6, 06\text{Hz}$, es decir más de una década superior a la frecuencia de entrada. Para el caso donde $f = 6\text{Hz}$, Fig. [6.44](#), la salida presenta 3dB de atenuación ya que la frecuencia es la f_c . Aquí también el muestreo aleatorio no presenta efectos sobre la salida. Para frecuencias un poco mayores como $f = 20\text{Hz}$ y 30Hz , Figs. [6.45](#) y [6.46](#), la señal de entrada ha sufrido una gran atenuación, atribuible al propio filtro. Todavía no se observa el efecto del muestreo aleatorio. En cambio para los otros ensayos, $f = 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , Figs. [6.47](#), [6.48](#), [6.49](#) y [6.50](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *JRS*. Las frecuencias $f = 90, 9\text{Hz}$ y $181, 8\text{Hz}$ fueron elegidas porque coinciden con la existencia de picos en la curva teórica. Sin embargo los picos mencionados no pudieron observarse debido a las razones mencionadas anteriormente.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 10ms, para los casos $f = 0, 1\text{Hz}, 20\text{Hz}, 30\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , y 2ms para $f = 6\text{Hz}$. Las muestras

de la salida fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [A.7](#), luego estos valores se graficaron junto con la curva teórica de PFR en la Fig. [6.5](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

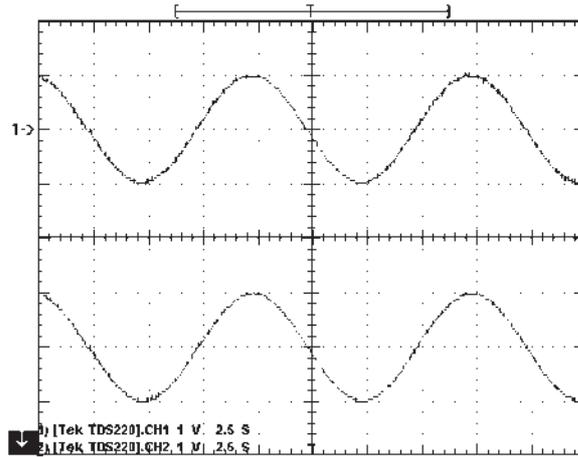


Figura 6.43: $JRS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,1	6	20	30	90,9	181,8	1000	10000
PFR [dB]	-0,15	-3,06	-17,34	-14,17	-8,31	-8,47	-8,90	-8,67

Tabla 6.7: PFR vs. frecuencia. Condiciones: $JRS/fir1$, $n=10$.

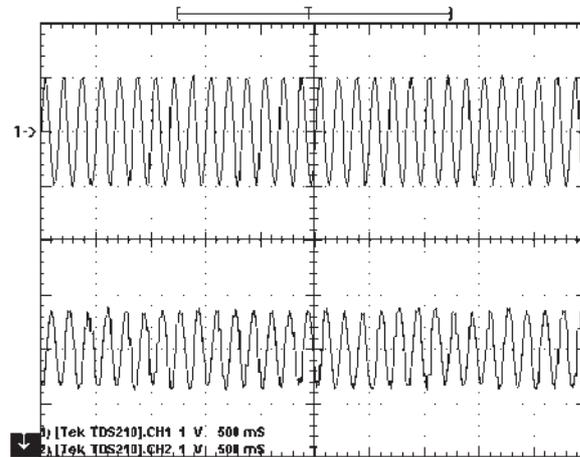


Figura 6.44: $JRS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 6 Hz. Señal de salida (abajo).

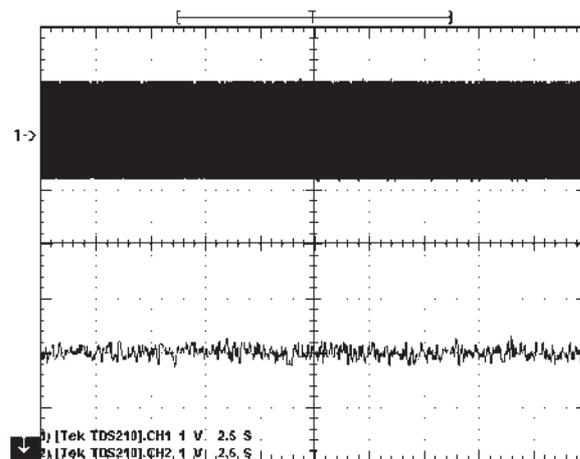


Figura 6.45: $JRS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 20 Hz. Señal de salida (abajo).

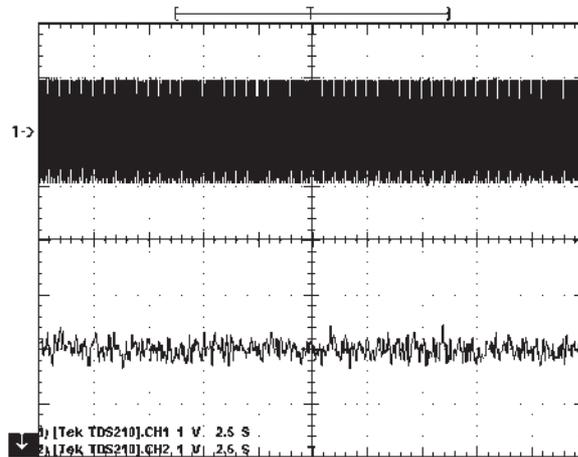


Figura 6.46: $JRS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 30 Hz. Señal de salida (abajo).

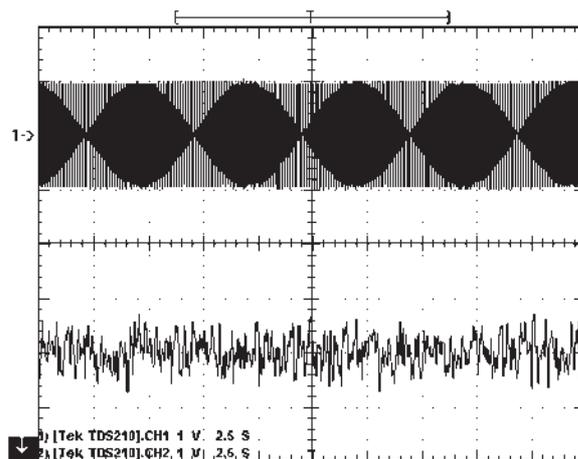


Figura 6.47: $JRS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

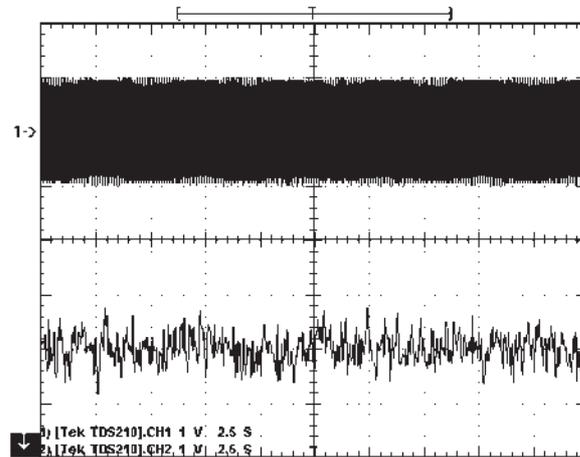


Figura 6.48: $JRS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

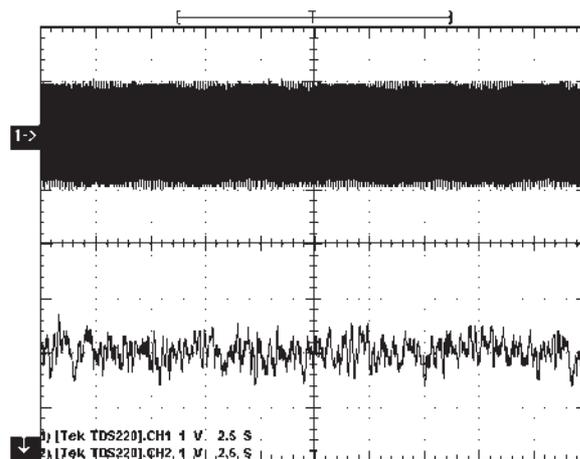


Figura 6.49: $JRS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. Señal de salida (abajo).

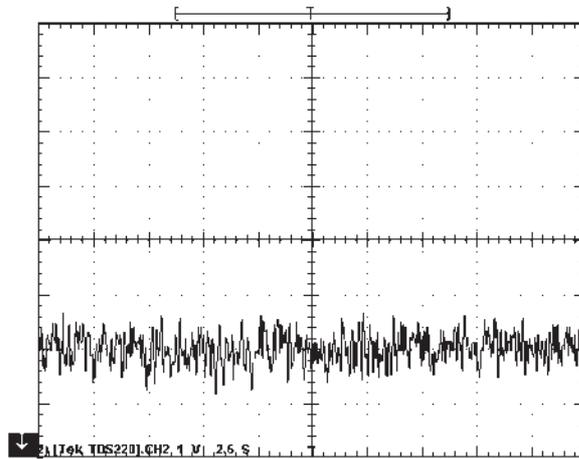


Figura 6.50: $JRS/fir1$, $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

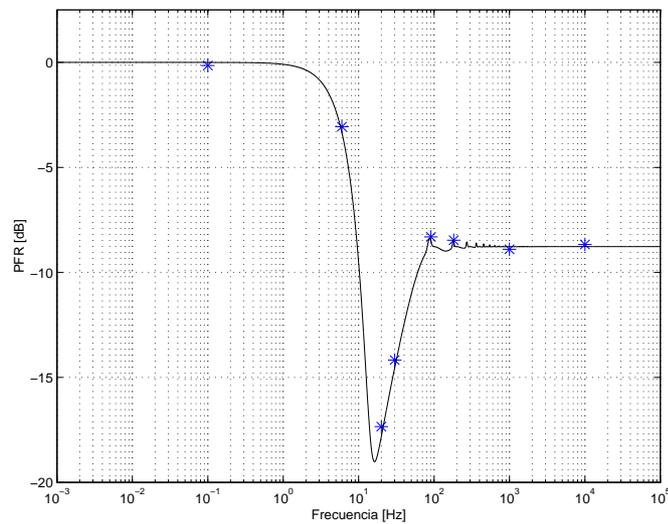


Figura 6.51: Resultados experimentales (*) y curva teórica para $JRS/fir1$, $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.8. Grupo 8: *RAAS/fir1*, con $n=10$

El grupo 8 reúne los ensayos realizados con *RAAS/fir1*, con $n = 10$. Se realizaron ensayos para $f = 0, 1\text{Hz}, 10\text{Hz}, 20\text{Hz}, 30\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz . En las Figs. [6.52](#), [6.53](#), [6.54](#), [6.55](#), [6.56](#), [6.57](#) y [6.58](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0, 1\text{Hz}, 20\text{Hz}, 30\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , respectivamente. En la Fig. [6.52](#), donde la $f = 0, 1\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *fir1* posee una frecuencia de corte que se encuentra en $f_c = \frac{2E[f_m]}{3n} = 11, 11\text{Hz}$, es decir más de dos décadas superior a la frecuencia de entrada. Para las frecuencias $f = 20\text{Hz}$ y 30Hz , Figs. [6.53](#) y [6.54](#), la atenuación es importante y se debe a la propia respuesta del filtro. En estas frecuencias el muestreo aleatorio *RAAS* todavía no incide en la *PFR*. En cambio para las frecuencias $f = 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , Figs. [6.55](#), [6.56](#), [6.57](#) y [6.58](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *RAAS*.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 10ms, para los casos $f = 0, 1\text{Hz}, 20\text{Hz}, 30\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , y 2ms para $f = 10\text{Hz}$. Los valores medidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [A.8](#). Luego estos valores se graficaron junto con la curva teórica de *PFR* en la Fig. [6.59](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

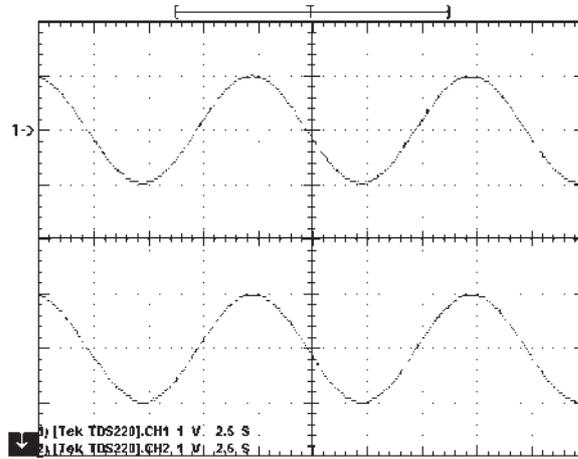


Figura 6.52: $RAAS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,1	10	20	30	90,9	181,8	1000	10000
PFR [dB]	-0,15	-2,65	-10,02	-12,50	-8,73	-9,00	-8,64	-8,86

Tabla 6.8: PFR vs. frecuencia. Condiciones: $RAAS/fir1$, $n=10$.

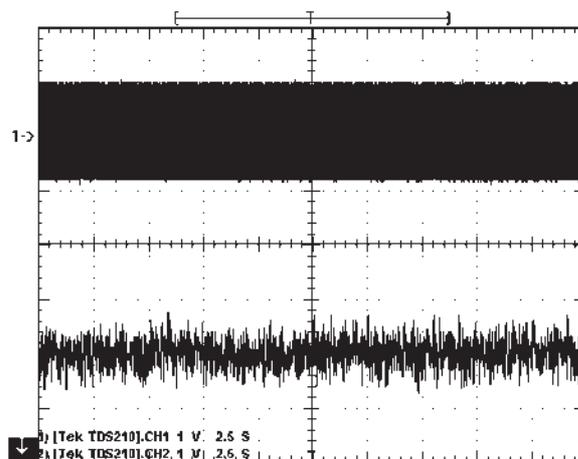


Figura 6.53: $RAAS/fir1$, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 20 Hz. Señal de salida (abajo).

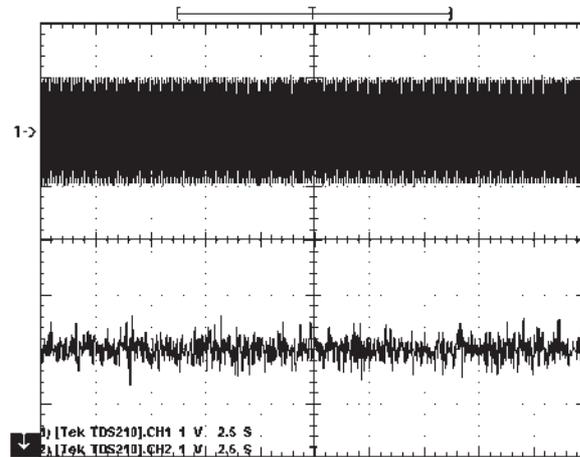


Figura 6.54: *RAAS/fir1*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 30 Hz. Señal de salida (abajo).

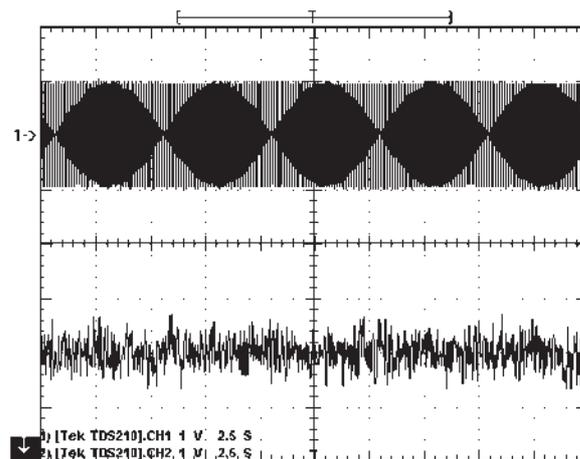


Figura 6.55: *RAAS/fir1*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

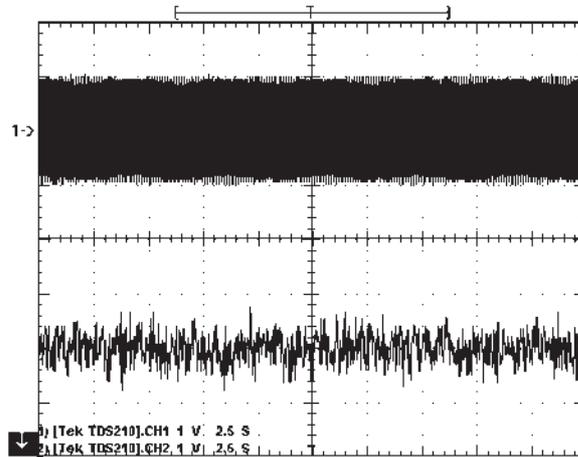


Figura 6.56: *RAAS/fir1*, $n = 10$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

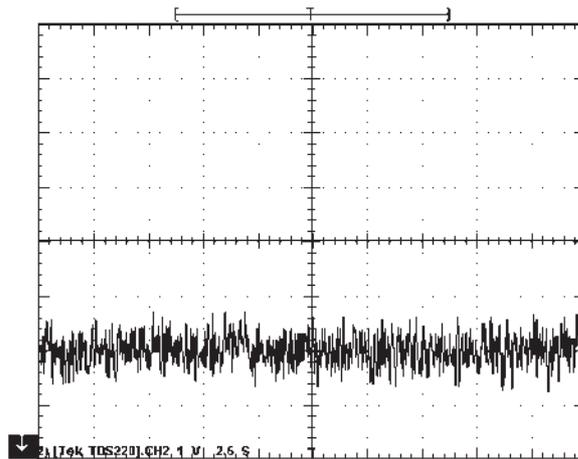


Figura 6.57: *RAAS/fir1*, $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

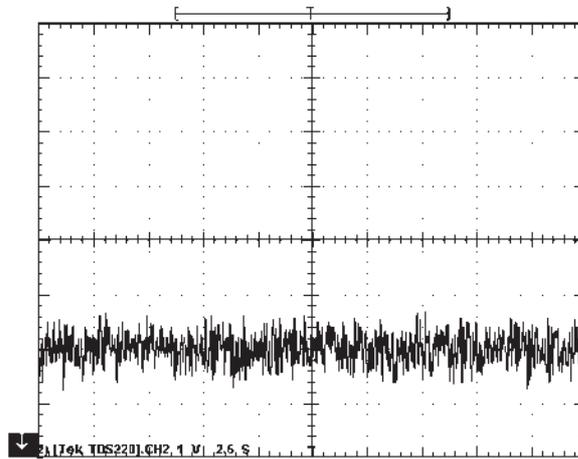


Figura 6.58: $RAAS/fir1$, $n = 10$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

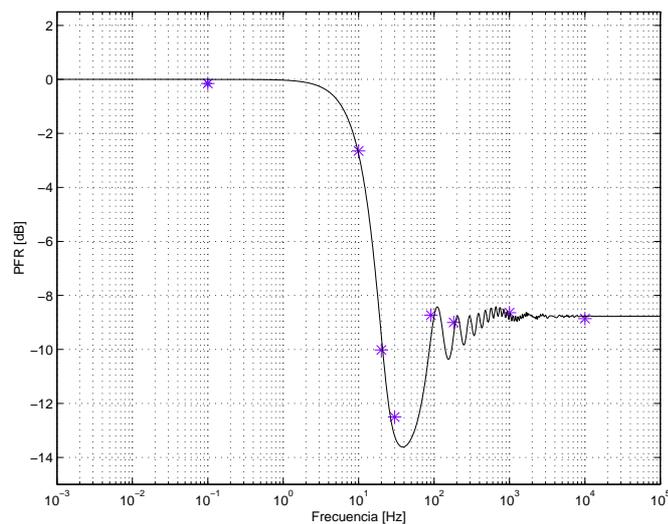


Figura 6.59: Resultados experimentales (*) y curva teórica para $RAAS/fir1$, $n = 10$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.9. Grupo 9: *JRS/fir1*, con $n=100$

El grupo 9 reúne los ensayos realizados con *JRS/fir1*, con $n = 100$. Se realizaron ensayos para $f = 0, 1\text{Hz}, 0, 6\text{Hz}, 4\text{Hz}, 40\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz . En las Figs. [6.60](#), [6.61](#), [6.62](#), [6.63](#), [6.64](#), [6.65](#), [6.66](#) y [6.67](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0, 1\text{Hz}, 0, 6\text{Hz}, 4\text{Hz}, 40\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , respectivamente. En la Fig. [6.60](#), donde la $f = 0, 1\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *fir1* posee una frecuencia de corte $f_c = \frac{2E[f_m]}{3n} = 0, 6\text{Hz}$, que es superior a la frecuencia de entrada. Para el caso donde $f = 0, 4\text{Hz}$, Fig. [6.61](#), la salida presenta una atenuación cercana a los 3dB, que obedece a exclusivamente a la atenuación del filtro ya que la frecuencia es muy cercana a f_c . Aquí el muestreo aleatorio tampoco presenta efectos sobre la salida. Para frecuencias un poco mayores como $f = 4\text{Hz}$, Fig. [6.62](#), la señal de entrada ha sufrido una gran atenuación, atribuible al propio filtro, aunque algo empeorada por el efecto del *JRS*. En cambio para los otros ensayos, $f = 40\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}, 1000\text{Hz}$ y 10000Hz , Figs. [6.63](#), [6.64](#), [6.65](#), [6.66](#) y [6.67](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *JRS*. Las frecuencias $f = 90, 9\text{Hz}$ y $181, 8\text{Hz}$ fueron elegidas porque coinciden con la existencia de picos en la curva teórica. Sin embargo los picos mencionados no pudieron observarse.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 10ms, para todos los casos. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla

A.9, luego estos valores se graficaron junto con la curva teórica de PFR en la Fig. 6.68, donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

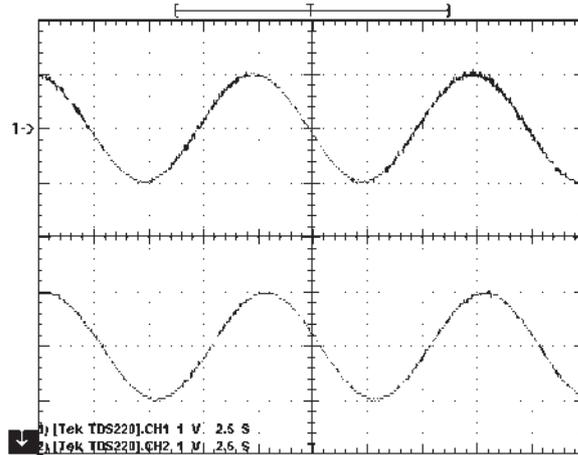


Figura 6.60: $JRS/fir1$, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,1	0,6	4	40	90,9	181,8	1000	10000
PFR [dB]	-0,22	-3,04	-40,57	-20,09	-18,56	-17,28	-16,63	-19,81

Tabla 6.9: PFR vs. frecuencia. Condiciones: $JRS/fir1$, $n=100$.

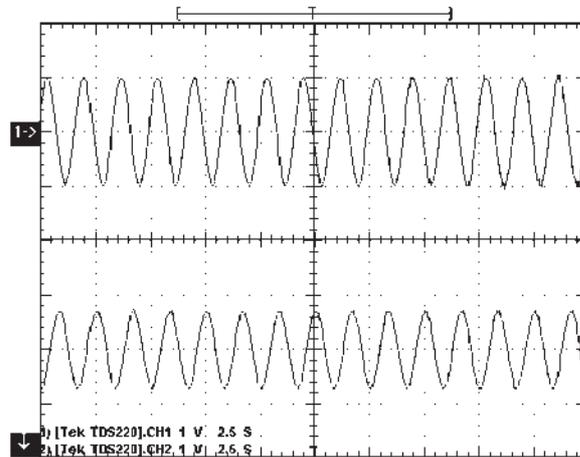


Figura 6.61: $JRS/fir1$, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,6 Hz. Señal de salida (abajo).

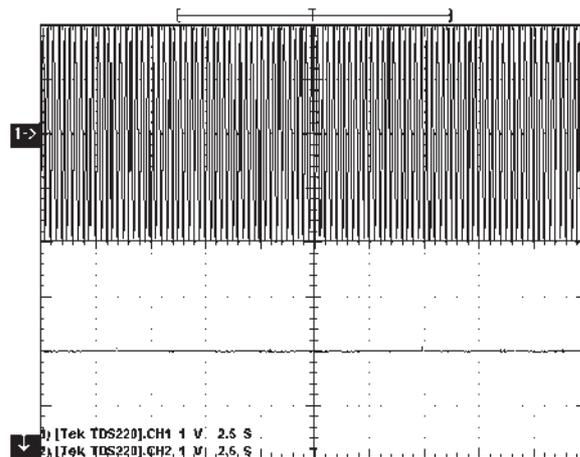


Figura 6.62: $JRS/fir1$, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 4 Hz. Señal de salida (abajo).

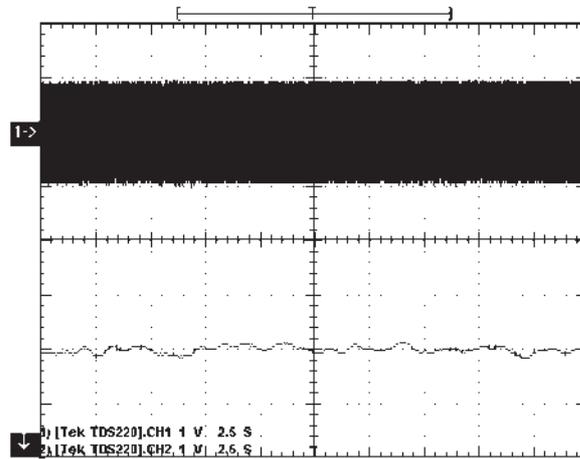


Figura 6.63: $JRS/fir1$, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 40 Hz. Señal de salida (abajo).

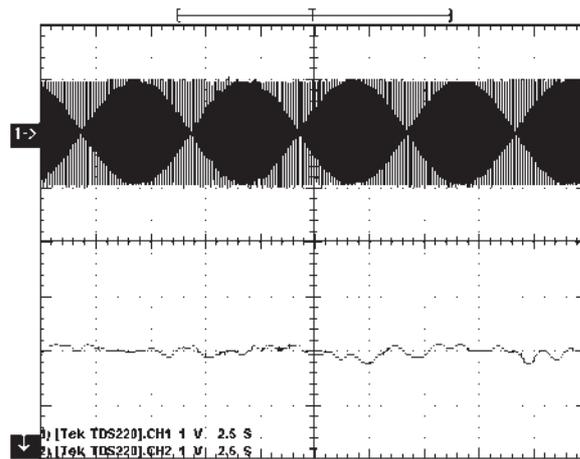


Figura 6.64: $JRS/fir1$, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

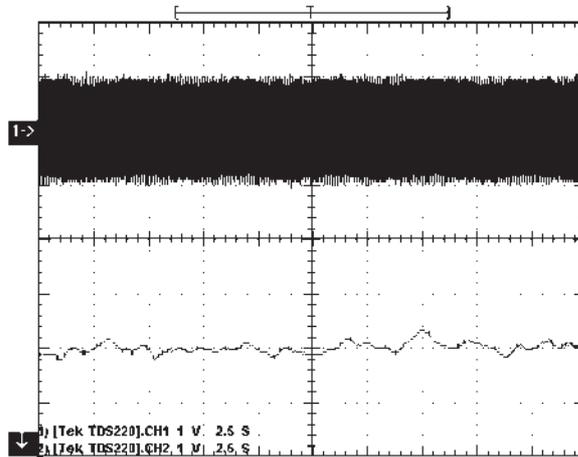


Figura 6.65: $JRS/fir1$, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

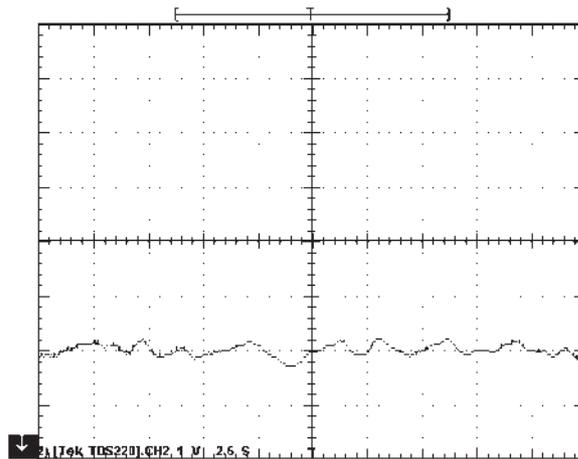


Figura 6.66: $JRS/fir1$, $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

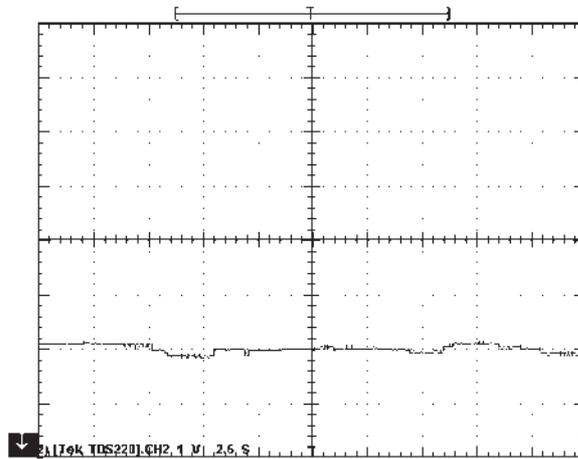


Figura 6.67: $JRS/fir1$, $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

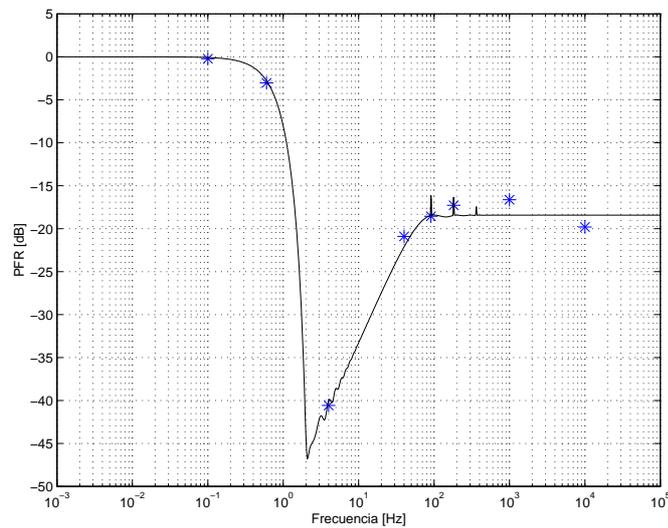


Figura 6.68: Resultados experimentales (*) y curva teórica para $JRS/fir1$, $n = 100$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.10. Grupo 10: *RAAS/fir1*, con $n=100$

El grupo 10 reúne los ensayos realizados con *RAAS/fir1*, con $n = 100$. Se realizaron ensayos para $f = 0, 1\text{Hz}, 1, 1\text{Hz}, 4\text{Hz}, 40\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}$ y $1,000\text{Hz}$. En las Figs. [6.69](#), [6.70](#), [6.71](#), [6.72](#), [6.73](#), [6.74](#) y [6.75](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0, 1\text{Hz}, 1, 1\text{Hz}, 4\text{Hz}, 40\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}$ y $1,000\text{Hz}$, respectivamente. En la Fig. [6.69](#), donde la $f = 0, 1\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *fir1* posee una frecuencia de corte $f_c \simeq \frac{2E[f_m]}{3n} = 1, 1\text{Hz}$, que supera en más de una década a la frecuencia de entrada. Para el caso donde $f = 1, 1\text{Hz}$, Fig. [6.70](#), la salida presenta una atenuación de 3dB ya que la frecuencia es f_c . El muestreo aleatorio aquí tampoco presenta efectos sobre la salida. Para la $f = 4\text{Hz}$ la atenuación observada es más pronunciada y se explica por la mayor atenuación del filtro y un aporte poco significativo del muestreo *RAAS*, Fig. [6.71](#). Para las frecuencias $f = 40\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}$ y $1,000\text{Hz}$, Figs. [6.72](#), [6.73](#), [6.74](#) y [6.75](#) no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *RAAS*.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2,500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 10ms, para los casos $f = 0, 1\text{Hz}, 4\text{Hz}, 40\text{Hz}, 90, 9\text{Hz}, 181, 8\text{Hz}$ y $1,000\text{Hz}$, y 2ms para $f = 1, 1\text{Hz}$. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [6.10](#), luego estos valores se graficaron junto con la curva teórica de *PFR* en la Fig. [6.76](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

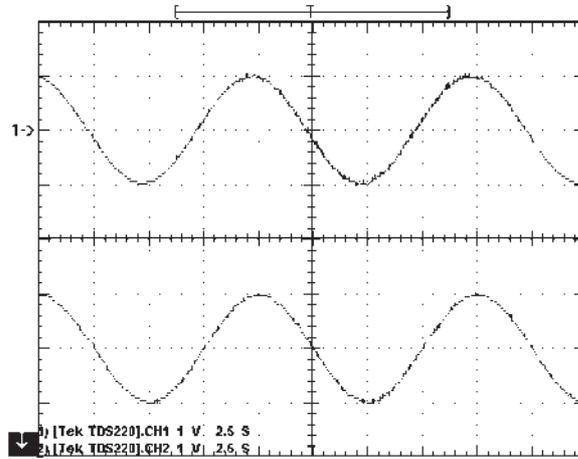


Figura 6.69: $RAAS/fir1$, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,1 Hz. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,1	1,1	4	40	90,9	181,8	1000	10000
PFR [dB]	-0,19	-2,99	-22,73	-22,21	-19,39	-19,42	-17,17	-18,11

Tabla 6.10: PFR vs. frecuencia. Condiciones: $RAAS/fir1$, $n=100$.

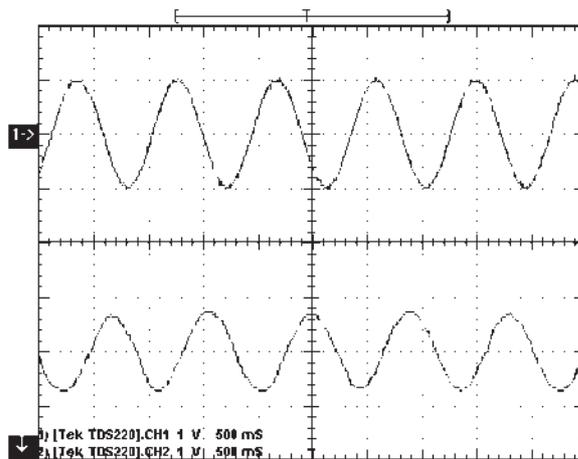


Figura 6.70: $RAAS/fir1$, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1,1 Hz. Señal de salida (abajo).

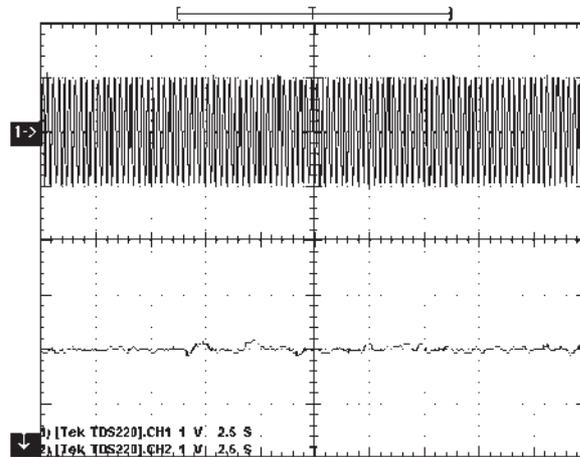


Figura 6.71: *RAAS/fir1*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 4 Hz. Señal de salida (abajo).

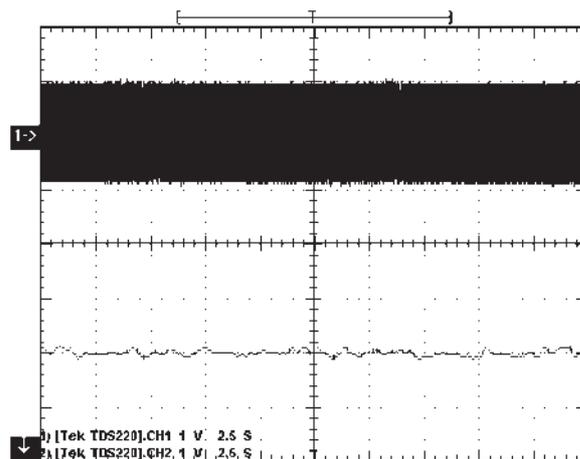


Figura 6.72: *RAAS/fir1*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 40 Hz. Señal de salida (abajo).

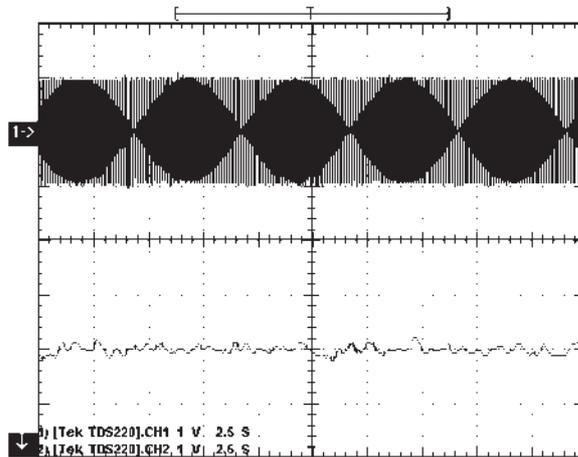


Figura 6.73: *RAAS/fir1*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

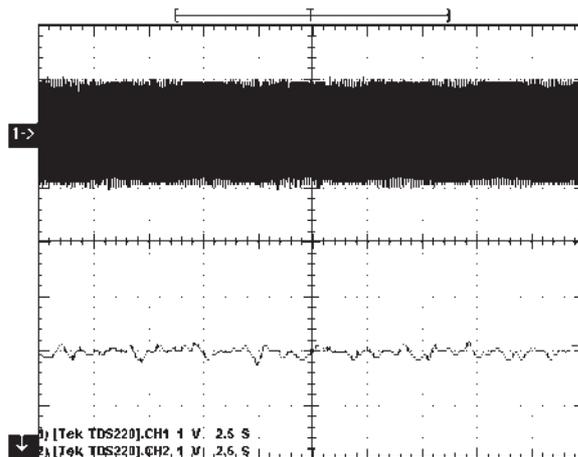


Figura 6.74: *RAAS/fir1*, $n = 100$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

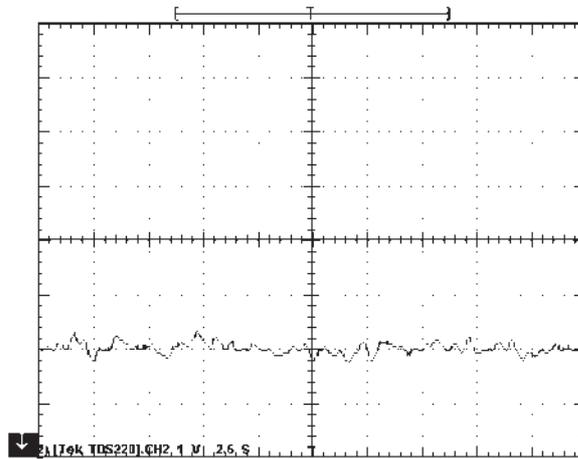


Figura 6.75: $RAAS/fir1$, $n = 100$. Señal de salida. Señal de entrada: Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

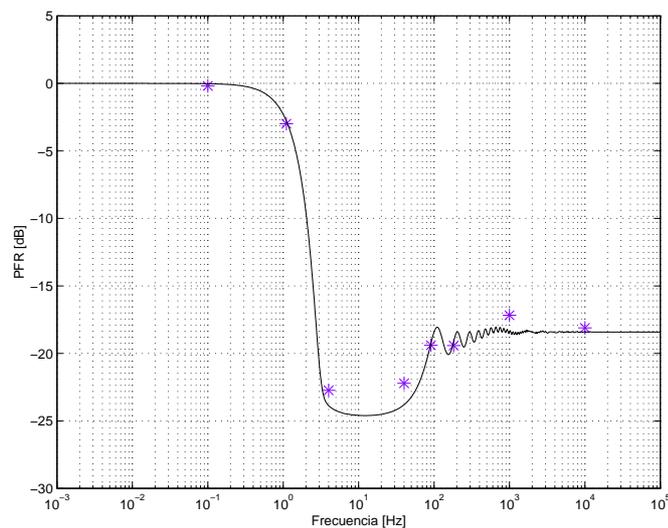


Figura 6.76: Resultados experimentales (*) y curva teórica para $RAAS/fir1$, $n = 100$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.11. Grupo 11: *JRS/fir1*, con $n=1000$

El grupo 11 reúne los ensayos realizados con *JRS/fir1*, con $n = 1000$. Se realizaron ensayos para $f = 0,03\text{Hz}$, $0,06\text{Hz}$, $0,3\text{Hz}$, $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$. En las Figs. [6.77](#), [6.78](#), [6.79](#), [6.80](#), [6.81](#), [6.82](#) y [6.83](#) se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para $f = 0,03\text{Hz}$, $0,06\text{Hz}$, $0,3\text{Hz}$, $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, respectivamente. En la Fig. [6.77](#), donde la $f = 0,03\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida está levemente atenuada respecto de la entrada, lo que se explica debido a la baja frecuencia de la misma, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *fir1* posee una frecuencia de corte $f_c = \frac{2E[f_m]}{3n} = 0,06\text{Hz}$, que es superior a la frecuencia de entrada. Para el caso donde $f = 0,06\text{Hz}$, Fig. [6.78](#), la salida presenta una atenuación cercana a los 3dB, que obedece a exclusivamente a la atenuación del filtro ya que la frecuencia es prácticamente f_c . Aquí el muestreo aleatorio tampoco presenta efectos sobre la salida. Para frecuencias un poco mayores como $f = 0,30\text{Hz}$, Fig. [6.79](#), la señal de entrada ha sufrido una gran atenuación, atribuible al propio filtro. Todavía no se observa el efecto del muestreo aleatorio. En cambio para los otros ensayos, $f = 90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, Figs. [6.80](#), [6.81](#), [6.82](#) y [6.83](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *JRS*. Las frecuencias $f = 90,9\text{Hz}$ y $181,8\text{Hz}$ fueron elegidas porque coinciden con la existencia de picos en la curva teórica. Sin embargo los picos mencionados no pudieron observarse en los ensayos experimentales, lo que se explica por la dificultad del sistema implementado (*DSP*) en obtener exactamente el valor $T = 11,00\text{ms}$. Un error de sólo $0,01\text{ms}$ respecto de los 11ms deseados ya implica que el ensayo se estaría realizando a una frecuencia que cae fuera del pico

que se pretende observar experimentalmente.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2,500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 20ms, para los casos $f = 0,03\text{Hz}$ y $0,06\text{Hz}$, y 10ms para el resto. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla 6.11, luego estos valores se graficaron junto con la curva teórica de PFR en la Fig. 6.84, donde se puede apreciar la validez de la curva teórica, excepto para los casos de $f = 90,9\text{Hz}$ y $181,8\text{Hz}$, por las razones mencionadas.

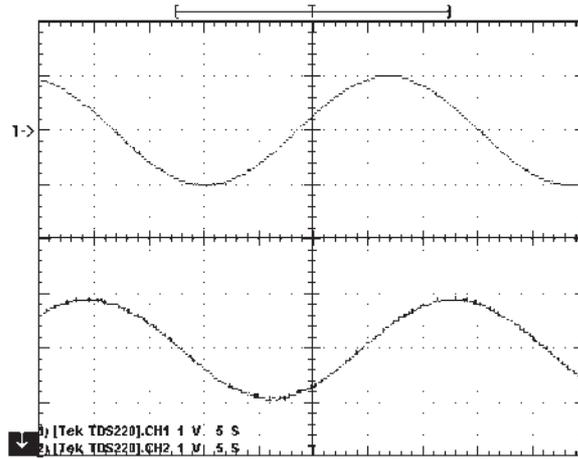


Figura 6.77: $JRS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y $0,03\text{Hz}$. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,03	0,06	0,30	90,9	181,8	1,000	10,000
PFR [dB]	-1,05	-2,98	-43,36	-27,51	-26,56	-28,63	-27,42

Tabla 6.11: PFR vs. frecuencia. Condiciones: $JRS/fir1$, $n=1000$.

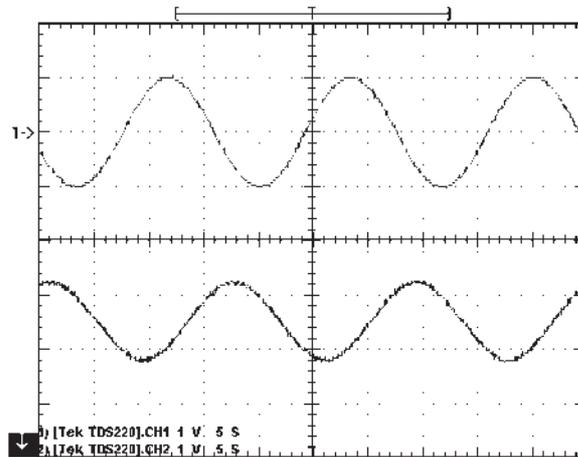


Figura 6.78: $JRS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y $0,06$ Hz. Señal de salida (abajo).

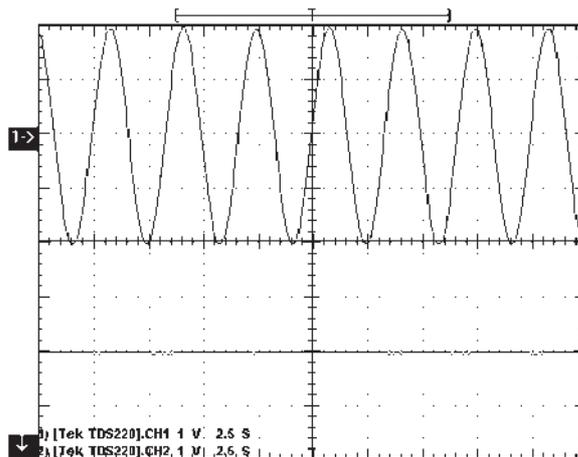


Figura 6.79: $JRS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $2\hat{V}$ y $0,3$ Hz. Señal de salida (abajo).

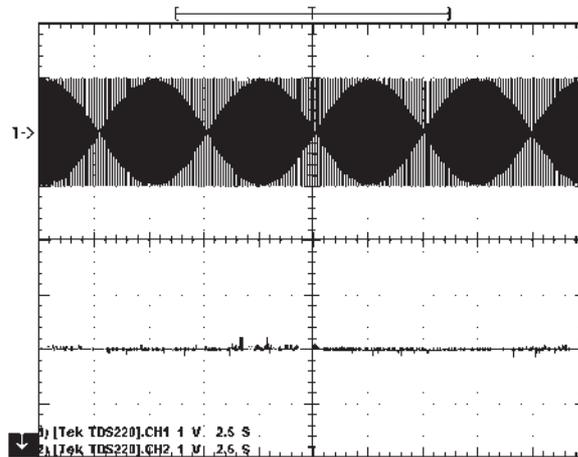


Figura 6.80: $JRS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

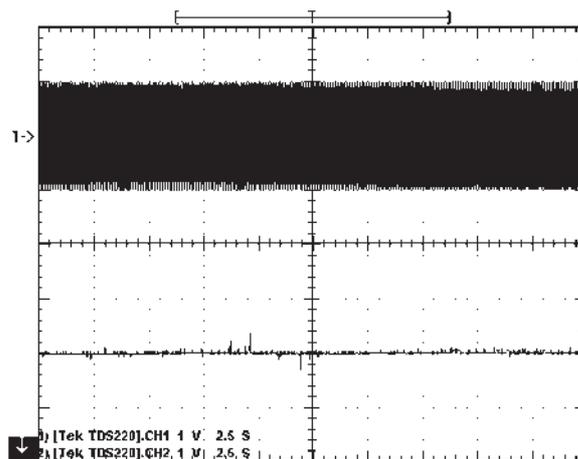


Figura 6.81: $JRS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

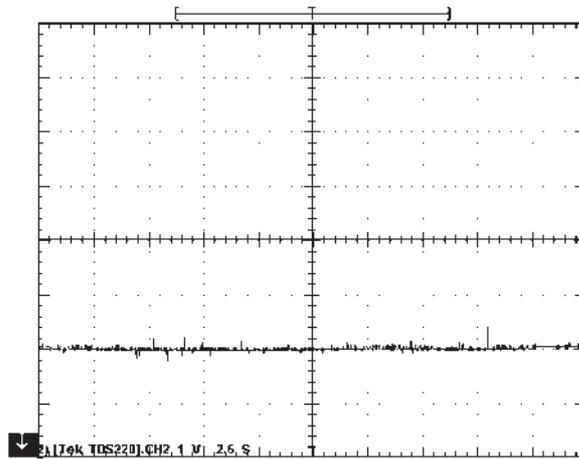


Figura 6.82: $JRS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

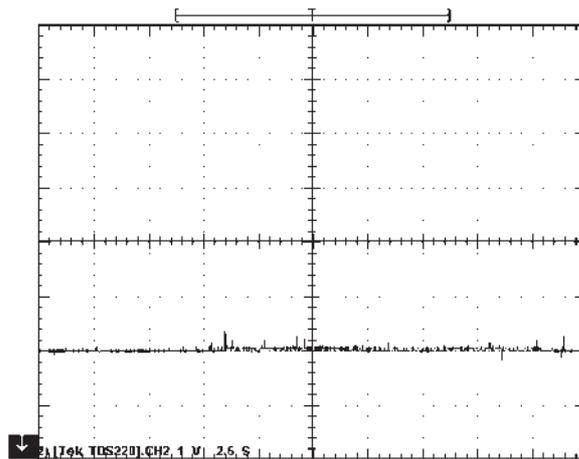


Figura 6.83: $JRS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

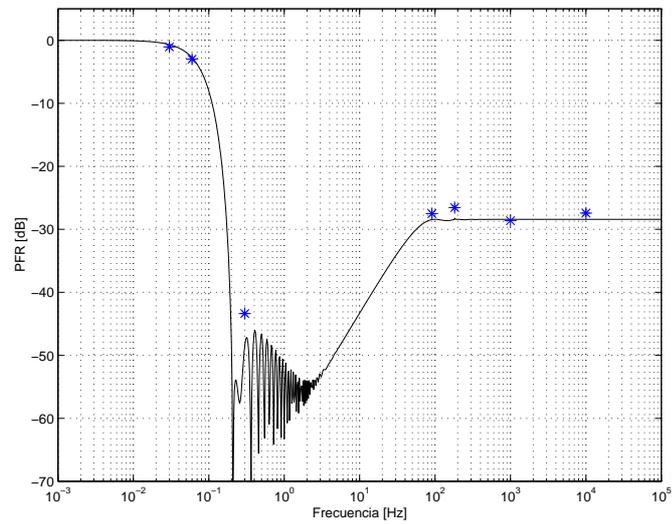


Figura 6.84: Resultados experimentales (*) y curva teórica para $JRS/fir1$, $n = 1000$, $T_\tau = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

6.1.12. Grupo 12: *RAAS/fir1*, con $n=1000$

El grupo 12 reúne los ensayos realizados con *RAAS/fir1*, con $n = 1000$. Se realizaron ensayos para $f = 0,03\text{Hz}$, $0,10\text{Hz}$, 1Hz , 10Hz , $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$. En las Figs. [6.85](#), [6.86](#), [6.87](#), [6.88](#), [6.89](#), [6.90](#), [6.91](#) y [6.92](#), se muestran las formas de onda de las señales de entrada y de salida para las frecuencias mencionadas. En la Fig. [6.85](#), donde la $f = 0,03\text{Hz}$, se puede apreciar que la salida copia a la entrada, lo cual se explica debido a la baja frecuencia de la señal de entrada, para la cual la aleatoriedad del muestreo no presenta efectos reales; por otra parte, el filtro *fir1* posee una frecuencia de corte $f_c \simeq \frac{2E[f_m]}{3n} = 0,11\text{Hz}$, que es superior a la frecuencia de entrada. Justamente, para $f = 0,1\text{Hz}$, que coincide prácticamente con la frecuencia de corte, se observa en la Fig. [6.86](#) una atenuación de alrededor de 3dB. Para las frecuencias $f = 1\text{Hz}$ y $f = 10\text{Hz}$ la atenuación observada es más pronunciada y se explica por la mayor atenuación del filtro, donde además el efecto del muestreo *RAAS*, es despreciable, Figs. [6.87](#) y [6.88](#). Para las frecuencias $90,9\text{Hz}$, $181,8\text{Hz}$, $1,000\text{Hz}$ y $10,000\text{Hz}$, Figs. [6.89](#), [6.90](#), [6.91](#) y [6.92](#), no se observan vestigios de la señal de entrada, que a estas frecuencias puede considerarse como una perturbación de entrada, pero como contrapartida existe un ruido que se origina exclusivamente en el método *RAAS*.

Las mediciones de potencia consistieron en adquirir 2,500 puntos de la señal de salida, espaciadas con un período de 20ms para $f = 0,03\text{Hz}$, y 10ms para el resto. Los datos obtenidos fueron procesados off-line y los resultados se incluyeron en la Tabla [6.12](#), luego estos valores se graficaron junto con la curva teórica de *PFR* en la Fig. [6.93](#), donde se puede apreciar la validez de la curva teórica.

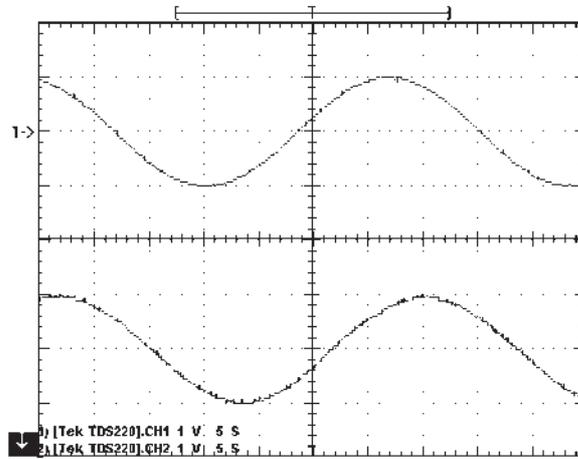


Figura 6.85: $RAAS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y $0,03$ Hz. Señal de salida (abajo).

f [Hz]	0,03	0,10	1	10	90,9	181,8	1000	10000
PFR [dB]	-0,34	-2,63	-33,08	-33,75	-26,70	-26,56	-28,22	-27,87

Tabla 6.12: PFR vs. frecuencia. Condiciones: $RAAS/fir1$, $n=1000$.

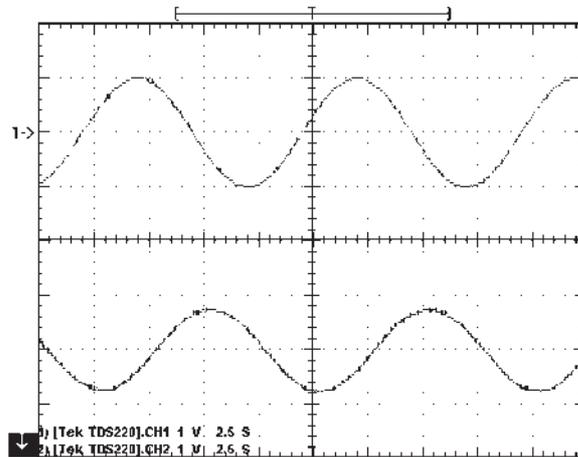


Figura 6.86: *RAAS/fir1*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 0,10 Hz. Señal de salida (abajo).

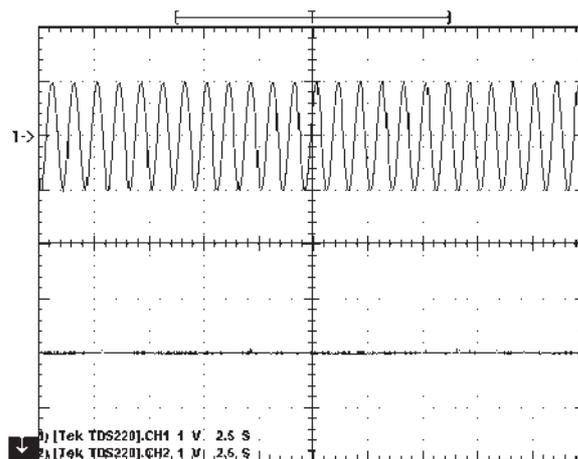


Figura 6.87: *RAAS/fir1*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1 Hz. Señal de salida (abajo).

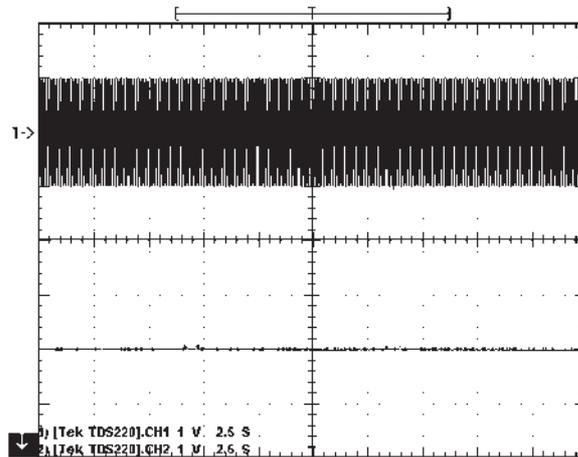


Figura 6.88: *RAAS/fir1*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10 Hz. Señal de salida (abajo).

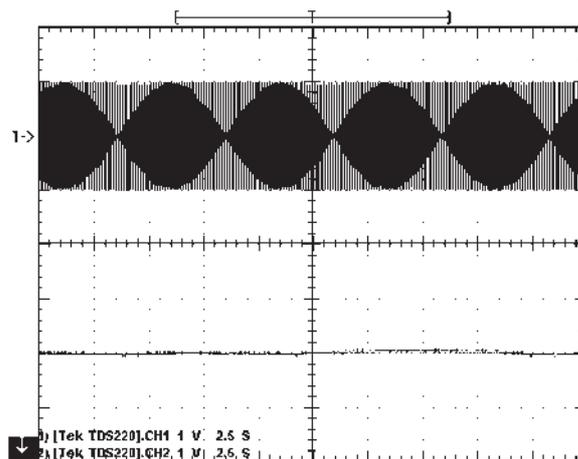


Figura 6.89: *RAAS/fir1*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 90,9 Hz. Señal de salida (abajo).

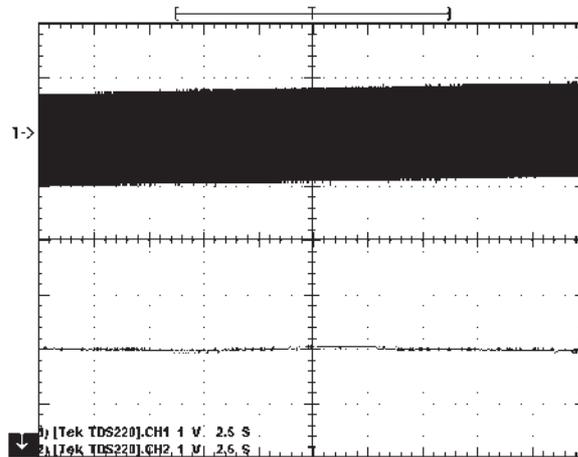


Figura 6.90: *RAAS/fir1*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 181,8 Hz. Señal de salida (abajo).

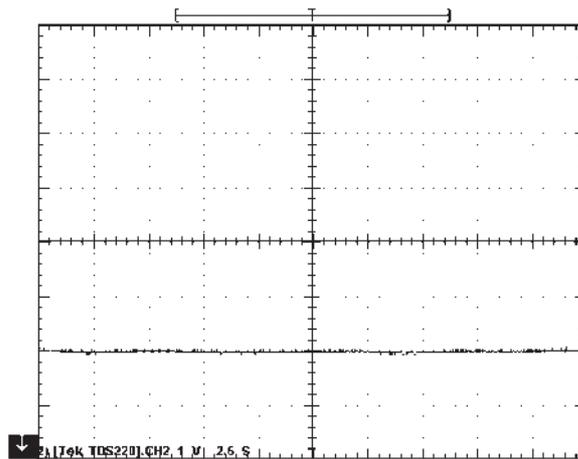


Figura 6.91: *RAAS/fir1*, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 1000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

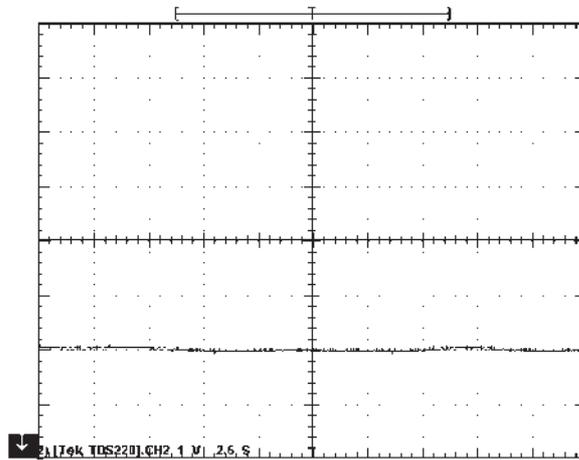


Figura 6.92: $RAAS/fir1$, $n = 1000$. Señal de entrada (arriba): Sinusoidal de $1\hat{V}$ y 10000 Hz. (La señal de entrada no se muestra).

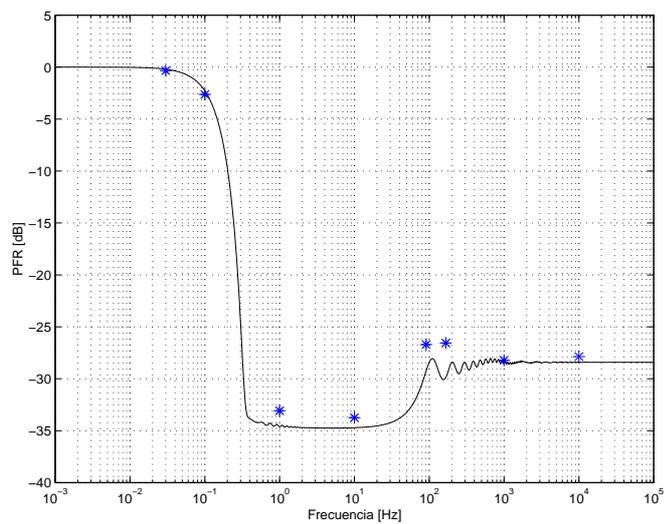


Figura 6.93: Resultados experimentales (*) y curva teórica para $RAAS/fir1$, $n = 1000$, $T_{\tau} = 10\text{ms}$ y $T_{AD} = 1\text{ms}$.

Capítulo 7

Conclusiones

Las conclusiones de esta tesis fueron las siguientes:

1. Se realizó un desarrollo analítico original de los métodos de muestreo aleatorio tipo *JRS* y *RAAS* con filtros *FIR* en general.
2. Se obtuvieron resultados de simulaciones que verificaron las ecuaciones teóricas desarrolladas. Se elaboró un *kit* de simulación de técnicas de muestreo aleatorio en *MATLAB*.
3. Se realizó un estudio comparativo de ambos métodos de muestreo aleatorio.
4. Las evaluaciones experimentales demostraron que el muestreo aleatorio es aplicable. Las evaluaciones experimentales demostraron la validez de las ecuaciones teóricas desarrolladas.
5. Se demostró que las técnicas de muestreo aleatorio son una solución para eliminar los filtros antialiasing.

7.1. Desarrollo analítico del *JRS* y *RAAS*

Se realizó el desarrollo analítico de las ecuaciones que gobiernan la *PFR* de los métodos *JRS/FIR* y *RAAS/FIR*. El desarrollo fue abordado desde un marco temporal, lo que permitió una comprensión mayor del problema. Las ecuaciones fueron obtenidas a partir de bases estadísticas y algebraicas conocidas, así como de conocimientos ingenieriles básicos, aunque requirieron cierta laboriosidad. En ambos casos se analizó el problema desde dos planos, por un lado la magnitud de la atenuación del aliasing y, por otro lado, el error que el método introduce en la adquisición de las bajas frecuencias. En el primer caso se utilizó la *PFR* y en el segundo se aplicó el concepto de la relación señal ruido *S/R*.

Los resultados obtenidos para la *PFR* se resumen en las Ecs. (7.1) y (7.2).

$$PFR(f) = \|\mathbf{h}\|_2^2 + 2\text{sinc}^2(fT_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega T}} \cos(2\pi fTn + \theta) \quad (7.1)$$

donde $\mathbf{H}^\#(z) = \sum_{k=1}^n h_k^\# \cdot z^{-k}$ y $\theta = \text{Arg}[\mathbf{H}^\#(e^{j\omega T})]$

$$PFR = \|h\|_2^2 + 2 |\mathbf{H}^\circledast(z)|_{z=e^{j\omega(T_{AD}+T_\tau/2)}} \cos[n\omega(T_{AD} + T_\tau/2) + \theta] \quad (7.2)$$

donde $\mathbf{H}^\circledast(z) = \sum_{k=1}^n h_k^\circledast \cdot z^{-k}$ y $\theta = \text{Arg}[\mathbf{H}^\circledast(e^{j\omega(T_{AD}+T_\tau/2)})]$ y cada término $h_{n-k}^\circledast = h_{n-k-1}^\# \cdot \text{sinc}^k(fT_\tau)$, es decir, $h_k^\circledast = h_{k-1}^\# \text{sinc}^{n-k}(fT_\tau)$.

Las Ecs. (7.1) y (7.2) muestran la existencia de dos efectos: el producido por la teoría del muestreo convencional más el efecto propio de la aleatoriedad incorporada a la función de muestreo. Más aún, en realidad estas ecuaciones mostraron un mayor grado de generalidad que las del muestreo uniforme, ya que para el caso particular en el que T_τ sea 0, coinciden con las del muestreo uniforme.

En el caso del proceso *JRS*, los resultados teóricos se generalizaron a una señal de entrada periódica, cuya forma de onda no esté restringida a una senoidal. Inclusive se extendió más el desarrollo hacia el caso distintivo en el que la entrada esté compuesta por cosenos no correlacionados (más propio de ruido impulsivo). Ambos casos fueron representados por la Ec. (7.3).

$$PFR(f) = \|\mathbf{h}\|_2^2 + \frac{\sum_{h=1}^{\infty} C_h^2 \text{sinc}^2(fhT_\tau) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega hT}} \cos(h\omega Tn + \theta_1)}{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{C_h^2}{2}} \quad (7.3)$$

donde los C_h son las amplitudes de las componentes armónicas h para el caso de la entrada periódica o de las componentes no correlacionadas para el caso del ruido impulsivo.

Luego se especializó la formulación desarrollada para tres tipos de filtros: *MA*, *fir1* y *fircls1*, para una entrada senoidal. Los procesos *JRS/FIR* y *RAAS/FIR* demostraron ser útiles en cuanto a la atenuación de los efectos de aliasing producidos por las perturbaciones de alta frecuencia.

Las atenuaciones obtenidas a alta frecuencia son coincidentes con la *norm2* del filtro de reconstrucción utilizado. Sin embargo, en el rango de frecuencia donde interesa una buena atenuación, se observó el efecto de picos que deterioran la atenuación buscada. Estos picos reducen el efecto antialiasing cuando el orden del filtro es elevado o el grado de aleatoriedad es bajo. El efecto negativo de estos picos es sustancialmente más importante en el *JRS* que en el *RAAS*.

En cuanto al filtro más conveniente, el *MA* es el que produce la mayor atenuación en alta frecuencia, tanto para *RAAS* como para *JRS*, debido a su menor *norm2*.

Respecto del grado de aleatoriedad y su influencia en ambos métodos. se demostró que el mismo presenta un mayor efecto sobre el *JRS* que sobre el *RAAS*.

Se verificó que el *JRS* requiere valores de T_τ mayores que $5T_{AD}$. Mientras que en el *RAAS* se puede operar con relaciones menores.

En bajas frecuencias tanto el *JRS/FIR* como el *RAAS/FIR* demostraron no producir efectos apreciables en las señales útiles que se desean adquirir. La demostración del *JRS/FIR* se realizó a través del desarrollo de relación *S/R*. La relación *S/R* obtenida estableció que los errores producidos por el muestreo aleatorio son incluso menores que los que introduce el propio filtro de reconstrucción. Dicha relación fue también verificada por medio de simulaciones. La validación del *RAAS/FIR* se realizó también a través de las simulaciones de la relación *S/R*, que demostraron que los errores producidos por el muestreo aleatorio son incluso menores que los introducidos por el filtro de reconstrucción.

7.2. Simulaciones

Se validaron las formulaciones de la *PFR* de los procesos *JRS/FIR* y *RAAS/FIR* para los tres tipos de filtro, para una entrada senoidal, a través de simulaciones. Las simulaciones se realizaron en el ambiente *MATLAB*. Se desarrolló un conjunto de rutinas que cubre dos modalidades. Por un lado se graficaron las formulaciones teóricas desarrolladas, para *JRS* y para *RAAS*, para los tres filtros *MA*, *fir1* y *fircls1*, aunque la rutina soporte cualquier otro filtro *FIR*. Por otro lado, se realizaron simulaciones estadísticas en las que se generaban señales senoidales de amplitud definida, con fase aleatoria, que fueron muestreadas aleatoriamente según *JRS* o *RAAS*.

En el caso de las simulaciones estadísticas, la entrada senoidal pura fue muestreada aleatoriamente *JRS* o *RAAS* y luego pasada por un filtro sea *MA*, *fir1* o *fircls1*. La salida constituyó la estimación de la variable que se deseaba obtener. Se realizaron experimentos, donde cada experimento constó de m ensayos. Luego

de los m ensayos se calculó la varianza de la estimación del experimento. Esta varianza constituyó la potencia eléctrica de la salida, por lo que al ser dividida por la potencia de la entrada senoidal, se obtuvo la relación entre la potencia de salida y la de entrada. Cada experimento se realizó a una determinada frecuencia de entrada y se simuló sobre un amplio rango de frecuencias, por lo que se arribó a la *PFR*. El espectro de frecuencias contemplado fue de 10^{-3} a 10^5 Hz, expresado en forma logarítmica, con la frecuencia discretizada en pasos de 0,01 década, lo que resultó en una secuencia de frecuencias $\{f_k\}$ de 800 componentes. En cada ensayo se midió la variable de salida μ_i , obtenida a partir de una entrada senoidal de amplitud unitaria, frecuencia f_k y fase ϕ . La fase ϕ fue una variable aleatoria con *p.d.f.* uniforme en el dominio $[0, 2\pi]$.

En cada experimento se calculó el promedio de las μ_i del ensamble, considerando que el sistema es ergódico, es decir que el promedio del ensamble es igual al valor medio en el tiempo. Para obtener la estimación en cada ensayo, μ_i , se aplicó el muestreo aleatorio *RAAS*, y se utilizó el filtro de reconstrucción de orden n , por lo que se necesitó generar variables aleatorias τ_j , con $j = 1, 2, \dots, n$. Para cada componente de la secuencia $\{f_k\}$ se implementó un experimento, constituido por 100 ensayos, donde $i = 1, 2, \dots, 100$ denota el número de cada ensayo.

A efectos de corroborar las formulaciones para un rango más extendido de frecuencias, se realizaron las simulaciones y se graficaron tanto en escala lineal, de 1 a 2000Hz, como logarítmica de frecuencia en un rango que va de 10^{-3} hasta 10^5 Hz.

7.3. Comparación *JRS* vs *RAAS*

Los comportamientos de ambos métodos resultaron similares en altas y bajas frecuencias. En altas frecuencias mostraron el valor correspondiente a la norma

del filtro $\|h\|_2^2$ y en frecuencias bajas evolucionaron igual que con el muestreo uniforme. Tanto en medias como en altas frecuencias se apreció el efecto provocado por el muestreo aleatorio. Este efecto, que en principio parecía deteriorar la respuesta en frecuencia, fue el que realmente permitió atenuar los picos producidos a frecuencias múltiplos de la de Nyquist en el muestreo uniforme. Se observó que la frecuencia de corte del filtro equivalente fue mayor en el *RAAS* que en el *JRS* lo que se interpretó como una ventaja ya que el filtro equivalente permitió el paso de señales de mayor frecuencia en el rango de bajas frecuencias. La frecuencia de corte, con muestreo uniforme, fue coincidente con la obtenida con muestreo aleatorio y su valor fue:

$$f_c = KE[f_m] \quad (7.4)$$

donde f_c era la frecuencia de corte del filtro, K era una constante y f_m era la frecuencia de muestreo. La $E[f_m]$ resultó lo siguiente:

$$JRS \quad E[f_m] = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_{AD} + T_\tau} \quad (7.5)$$

$$RAAS \quad E[f_m] = \frac{1}{T_{AD} + \frac{T_\tau}{2}} \quad (7.6)$$

Las Ecs. (7.5) y (7.6) mostraron que la frecuencia de muestreo media es mayor en el *RAAS*.

En cambio ambos métodos fueron diferentes en las frecuencias medias, donde el *JRS* presentó una mayor atenuación hasta $E[f_m]/3$, lo que se consideró como una ventaja. Sin embargo, para el rango de frecuencias entre $E[f_m]/3$ y $100E[f_m]/3$, el *RAAS* mostró una mayor atenuación.

Por otra parte, el *JRS* presentó picos en los múltiplos de la frecuencia equivalente de muestreo. La existencia de estos picos significó un deterioro de la atenuación del efecto aliasing que se pretendía reducir con el muestreo aleatorio. El muestreo *RAAS* también mostró picos pero con amplitud menor que en el *JRS*.

7.4. Resultados experimentales

Se realizaron ensayos experimentales a fin de validar las expresiones teóricas desarrolladas. El objetivo de estos ensayos fue obtener la *PFR* para distintos valores de frecuencia y comparar los puntos medidos con la *PFR* teórica. En los ensayos se adquirieron señales de tipo senoidal, con muestreo aleatorio, *JRS* o *RAAS*, para luego procesarlas mediante filtros de reconstrucción, *MA* o *fir1*. La salida del procesamiento fue luego convertida en una señal analógica a través de un convertidor *DA*, la cual fue observada a través de un osciloscopio. La adquisición, el procesamiento y la conversión *DA* fueron implementadas en un *DSP* de Analog Devices, *ADSP271*.

Los ensayos se dividieron en doce grupos de manera de cubrir todas las combinaciones de tipo de muestreo (*JRS* o *RAAS*), tipo de filtro (*MA* o *fir1*) y el orden del mismo ($n = 10, 100$ o 1000). En todos los casos se utilizaron valores $T_{AD} = 1\text{ms}$ y $T_{\tau} = 10\text{ms}$, y se aplicó una señal de entrada de una amplitud de $1\hat{V}$. Se realizaron ensayos para las distintas frecuencias que remiten a los valores críticos de las *PFRs* y que cubren todo el espectro.

Se realizaron centenares de ensayos, de los cuales se transcribieron cerca de 70 en esta tesis. Se realizaron mediciones a partir de la adquisición de la salida para los ensayos realizados. Las mediciones consistieron en adquirir 2,500 puntos de la señal de salida. Los datos obtenidos fueron procesados off-line para obtener

la potencia de salida. La conclusión general de los ensayos es que se verificaron las curvas teóricas desarrolladas.

7.5. Trabajos futuros

En cuanto a los trabajos futuros que se vislumbran a partir de los resultados de esta tesis, uno de los más importantes es el análisis orientado al diseño de los procesos en relación con la aplicación específica. Es decir, la elaboración de un procedimiento de diseño que involucre en forma sistemática y, tal vez simplificada, las ecuaciones ya desarrolladas, orientada hacia las especificaciones concretas de una aplicación determinada. Por ejemplo, dado un espectro útil, dado un espectro de ruido, dadas las limitaciones tecnológicas del sistema de adquisición, qué método de muestreo, qué T_{AD} , qué T_τ , qué filtro y qué cantidad de coeficientes n utilizar.

Otro aspecto que resulta interesante a fin de complementar los resultados teóricas de este trabajo es el desarrollo de la relación S/R en el rango de bajas frecuencias para el método $RAAS/FIR$.

Otro campo de estudio previsible es el de otros filtros FIR . Las verificaciones de simulación y experimentales realizadas para los filtros MA , $fir1$ y $fircls1$ deberían extenderse a otros filtros FIR . Más aún, sería interesante realizar una comparación pormenorizada de los distintos filtros FIR , desde la perspectiva de su aplicación al muestreo aleatorio tipo $RAAS$ o JRS .

También es importante realizar la aplicación generalizada de los resultados de esta tesis a sistemas de adquisición de baja frecuencia a fin de eliminar filtros antialiasing, en los múltiples casos donde es problemático el cumplimiento del Teorema de Shannon.

En particular, se pretende aplicar estas técnicas en el campo de la experimentación de Física de las Partículas. En el Centro Europeo de Investigación Nuclear (*CERN*), los sistemas de adquisición se utilizan en todo el espectro de aplicaciones, desde el control de las fuentes de alimentación de los imanes de los aceleradores hasta la instrumentación de los detectores de partículas. Una de estas aplicaciones es el Control de Alineación del Acelerador Lineal de Partículas que está desarrollando el CERN, denominado *CLIC* (Compact Linear Collider). Este sistema requiere la adquisición de alrededor de 40 variables analógicas por metro lineal del acelerador, estimándose que el CLIC poseerá una longitud total de 32Km. Se hace evidente la importancia de la adquisición en esta aplicación.

Bibliografía

- [1] N. Aakvaag A. P. Guerrero, J.-Y. Tournet. Estimation of sampling jitter variance using autocorrelation function and higher order statistics. In *1997 IEEE International Symposium on Information Theory*, page 78, June 1997.
- [2] J. Adut and J. Silva Martinez. A high q switched-capacitor filter with reduced capacitance spread using a randomized nonuniform sampling technique. In *IEEE 2002 International Symposium on Circuits and Systems*, volume 4, pages 449–452, 2002.
- [3] A. Balakrishnan. On the problem of time jitter in sampling. *IEEE Transactions on Information Theory*, 8(3):226–236, April 1962.
- [4] F. Beutler. Alias-free randomly timed sampling of stochastic processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-16(2):147–152, March 1970.
- [5] D.M. Bland and A. Tarczynski. The effect of sampling jitter in a digitized signal. In *1997 IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS '97*, volume 4, pages 2685–2688, June 1997.
- [6] W.M. Brown. Sampling with random jitter. *SIAM J. Appl. Math.*, 4(11):460 – 473, December 1963.
- [7] N. DaDalt, M. Harteneck, C. Sandner, and A. Wiesbauer. On the jitter requirements of the sampling clock for analog-to-digital converters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part 1 Fundamental Theory and Applications*, 49(9):1354–1359, 2002.
- [8] B. E. Jhonsson. Sampling jitter in high-speed si circuits. In *1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS '98*, volume 1, pages 524–526, May 1998.
- [9] H. Jin and E.K.F. Lee. A digital technique for reducing clock jitter effects in time-interleaved ad converter. In *1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS '99*, volume 2, pages 330–333, May 1999.
- [10] E. Kan and J. Aggarwal. Randomly sampled digital filters. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, AU-20:52–57, March 1972.

-
- [11] Eel-Wan Lee and Soo-Ik Chae. Analysis of non-uniform sampling effects in sigma-delta modulated signals. In *1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS '98*, volume 1, pages 377–380, May 1998.
- [12] O. Leneman. Random sampling of random processes: Mean-square comparison of various interpolators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-11(3):396–403, July 1966.
- [13] A. Purvis Lo K.C. Hybrid additive random sampling and its realization. In *1994 IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS '94*, volume 2, pages 105–108, June 1994.
- [14] E. Masry. Alias-free sampling: An alternative conceptualization and its applications. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-24(3):317–324, May 1978.
- [15] W. Mendelhall and T. Sincich. *Statistics for Engineering and Computer Sciences*. Della, 1984.
- [16] D. Mirri, G. Iuculano, F. Filicori, A. Menchetti, G. Pasini, L. Peretto, and M. Catelani. A broad-band harmonic vector voltmeter based on a random sampling strategy. In *1994 Instrumentation and Measurement Technology Conference, IMTC/94*, volume 2, pages 1012–1015, May 1994.
- [17] D. Mirri, G. Iuculano, G. Menchetti, F. Filicori, and G. Pasini. Performance function for time-jittered equispaced sampling wattmeters. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 44(3):671–674, June 1995.
- [18] D. Mirri, G. Iuculano, G. Pasini, and F. Filicori. The effect of time-jitter in equispaced sampling wattmeters. *Ieee transactions on instrumentation and measure*, 47(3):720–727, June 1998.
- [19] D. Mirri, G. Pasini, L. Peretto, F. Filicori, G. Iuculano, and A. Dolfi. Implementation and performance evaluation of a broad-band digital harmonic vector voltmeter. In *1997 Instrumentation and Measurement Technology Conference, IMTC/97*, volume 2, pages 1495–1499, May 1997.
- [20] Filicori F.; G. Iuculano; A. Menchetti; D. Mirri. Random asynchronous sampling strategy for measurement instruments based on nonlinear signal conversion. *IEE Proceedings. part A. Physical Science, Mea*, 136(3):141, May 1989.
- [21] A. Menchetti Mirri D., G. Iuculano. Recursive random-sampling strategy for a digital wattmeter. *IEEE transactions on instrumentation and measure*, 41(6):979, December 1992.
- [22] A. Oppenheim and Ronald Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1989.

- [23] A. Ouahabi, C. Depollier, L. Simon, D. Kouame, and M. Lethiecq. Random sampling: Spectrum of fluid measured by doppler velocimetry. In *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 1996. IMTC-96.*, pages 531–536, June 1996.
- [24] F. Papenfuss, Y. Artyukh, E. Boole, and D. Timmermann. Nonuniform sampling driver for optimal ADC utilization. In *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, volume 4, pages IV – 516–519. IEEE, 2003.
- [25] F. Papenfuss, Y. Artyukh, E. Boole, and D. Timmermann. Optimal sampling functions in nonuniform sampling driver designs to overcome the nyquist limit. In *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, volume 6, pages VI – 257–260. IEEE, 2003.
- [26] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [27] I. B. Rogozhkin and M. S. Chernyakov. The characteristics of digital filters with random changes in the sampling period. *Telecommunications and radio engineering*, 47(2):97, FEBRUARY 1992.
- [28] H. S. Shapiro and R. A. Silverman. Alias-free smpling of random noise. *SIAM J. Appl. Math.*, 2(8):245–248, 1960.
- [29] S. W. Sin, U. SengPan, and R. P. Martins. Quantitative noise analysis of jitter-induced nonuniformly sample-and-held signals. In *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing 2003*, volume 6, pages VI – 253–256. IEEE, 2003.
- [30] T. J. Sobering and R. R. Kay. The impact of multiplexing on the dynamic requirements of analog-to-digital. *Ieee transactions on instrumentation and measure*, 45(2):616, April 1996.
- [31] T.M. Souders, D.R. Flach, C. Hagwood, and G.L. Yang. The effects of timing jitter in sampling systems. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 39(1):80–85, Feb 1990.
- [32] A. Tarczynski. FIR filters for systems with input clock jitter. In *2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2001*, volume 2, pages 617–620, May 2001.
- [33] A. Tarczynski and D. M. Bland. Optimum nonuniform sampling sequence for alias frequency suppression. In *1997 IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS '97*, volume 4, pages 2693–2696, June 1997.

-
- [34] A. Tarczynski, V. Valimaki, and G.D. Cain. Fir filtering of nonuniformly sampled signals. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1997. ICASSP-97., 1997 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2237–2240 vol.3, 1997.
- [35] Yih-Chyun Jenq; Yuan-Tzu Ting;. Discrete time method for power measurement with nonuniformly sampled signals. In *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, IMTC/94*, volume 3, pages 1451 –1454, May 1994.

Apéndice A

Archivos MATLAB

Los gráficos de las expresiones teóricas y de las simulaciones realizados en los Capítulos 4, 5 y 6, fueron construidos en base a rutinas de *MATLAB*. En las Tablas se relacionan las diferentes figuras con las expresiones teóricas o las simulaciones, y con las rutinas de *MATLAB* que se utilizaron para construir cada figura. Para las expresiones teóricas de la *PFR* de procesos *JRS/FIR*, para cualquier filtro *FIR*, sea este *MA*, *fir1* o *fircls1* y con distintos n , para cualquier conjunto de valores T_S y T_{AD} , se utilizaron los archivos *SHELL_JRS.m* y *PFR.m*. Las expresiones teóricas de la relación *N/S* de procesos *JRS/FIR*, para cualquier filtro *FIR*, sea este *MA*, *fir1* o *fircls1* y con distintos n , para cualquier conjunto de valores T_S y T_{AD} , se obtuvieron en base a los archivos *SHELL_JRS.m* y *NS.m*. Las simulaciones de la *PFR* para cualquier proceso *JRS/FIR*, para cualquier filtro *FIR*, sea este *MA*, *fir1* o *fircls1* y con distintos n , para cualquier conjunto de valores T_S y T_{AD} , se realizaron a partir de los archivos *SHELL_EXP.m*, *JRS.m* y *EXP_PFR.m*. Las simulaciones de la relación *N/S*, *JRS/FIR* o *RAAS/FIR*, para cualquier filtro *FIR*, sea este *MA*, *fir1* o *fircls1* y con distintos n , para cualquier conjunto de valores T_S y T_{AD} , se realizaron a partir de los archivos *SHELL_EXP.m* y *PFR.m*.

Figuras	3.3 y 3.4	3.5 , 3.6 , 3.7 , 3.8 , 3.9 y 3.10	3.12 y 3.13
Ecuación	Ec. (3.27)	Simulación	Ec. (3.20)
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>
Filtro	<i>MA</i>	<i>MA</i>	<i>fir1</i>
Rutinas	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_JRS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>EXP_PFR</i> , <i>Graf</i> y <i>JRS</i>	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_JRS</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.1: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

Figuras	3.16 , 3.18 , 3.19 , y 3.21	3.17 , 3.20	3.14 y 3.15	3.23 , 3.24 , 3.25 , 3.26 , y 3.27 y 3.28
Ecuación	simulación	Ec. (3.20)	simulación	simulación
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>
Filtro	<i>fir1</i>	<i>fircls1</i>	<i>fircls1</i>	<i>fircls1</i>
Rutinas	<i>SHELL_EXP</i> , <i>EXP_PFR</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_JRS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>EXP_PFR</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>EXP_PFR</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.2: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

A continuación se explicitan, en el lenguaje propio de *MATLAB*, las diferentes rutinas utilizadas.

Figuras	3.30	3.34	3.32
Ecuación	Ec. (3.27)	Ec. (3.27)	Ec. (3.27)
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>
Filtro	<i>MA</i> , uniforme	<i>fir1</i> , uniforme	<i>fircls1</i> , uniforme
Rutinas	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_JRS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_JRS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_JRS</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.3: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

Figuras	3.38	3.38	3.39
Ecuación	Ec. (3.87)	simulación	Ec. (3.87)
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>N/S</i>	<i>N/S</i>	<i>N/S</i>
Filtro	<i>MA</i>	<i>MA</i>	<i>MA</i>
Rutinas	<i>SHELLTEOR</i> , <i>NS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>ExpNSmetodo</i> , <i>JRS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELLTEOR</i> , <i>NS</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.4: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

Figuras	3.39	3.40	3.40
Ecuación	simulación	Ec. (3.87)	simulación
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>N/S</i> , filtro	<i>N/S</i>	<i>N/S</i>
Filtro	<i>MA</i>	<i>fir1</i>	<i>fir1</i>
Rutinas	<i>SHELL_EXP</i> , <i>ExpNSmetodo</i> , <i>JRS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELLTEOR</i> , <i>NS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>ExpNSfiltro</i> , <i>JRS</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.5: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

Figuras	3.41	3.41	3.33 y 3.34
Ecuación	Ec. (3.87)	simulación	Ec. (3.27)
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>N/S</i>	<i>N/S</i>	<i>PFR</i>
Filtro	<i>fircls1</i>	<i>fircls1</i>	<i>MA</i>
Rutinas	<i>SHELLTEOR</i> , <i>NS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>ExpNSfiltro</i> , <i>JRS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_JRS</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.6: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

Figuras	4.3 y 4.4	4.5 , 4.6 , 4.7 , 4.8 , 4.9 y 4.10	4.11 y 4.12
Ecuación	Ec. (4.32)	Simulación	Ec. (3.20)
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>
Filtro	<i>MA</i>	<i>MA</i>	<i>fir1</i>
Rutinas	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_RAAS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>EXP_PFR</i> , <i>Graf</i> y <i>RAAS</i>	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_RAAS</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.7: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

Figuras	4.13 y 4.14	4.15 , 4.16 , 4.17 , 4.18 , 4.19 y 4.20	4.21 , 4.22 , 4.23 , 4.24 , 4.25 y 4.26
Ecuación	Ec. (4.27)	simulación	simulación
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>	<i>PFR</i>
Filtro	<i>fircls1</i>	<i>fir1</i>	<i>fircls1</i>
Rutinas	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_RAAS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>EXP_PFR</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>EXP_PFR</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.8: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

Figuras	4.27 y 4.28	4.31	4.21 , 4.22 , 4.23 , 4.24 , 4.25 y 4.26
Ecuación	Ec. (4.32)	simulación	simulación
<i>PFR</i> o <i>N/S</i>	<i>PFR</i>	<i>N/S</i>	<i>PFR</i>
Filtro	<i>MA</i>	<i>MA</i>	<i>fircls1</i>
Rutinas	<i>SHELLTEOR</i> , <i>PFR_RAAS</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>ExpNSmetodo</i> , <i>ExpNSfiltro</i> y <i>Graf</i>	<i>SHELL_EXP</i> , <i>EXP_PFR</i> y <i>Graf</i>

Tabla A.9: Rutinas MATLAB utilizadas en las simulaciones y figuras.

A.1. *SHELL_TEOR.m*

```

% SHELL_TEOR
% Formulacion teorica de la PFR o de N/S frente al JRS/FIR o al RAAS/FIR.
% N/S puede ser debido al filtro o debido al metodo.
% Senal entrada senoidal:
% In=cos(wt+fi)
% Valores configurables: ts, TAD, fmin, fmax, Df, Dflog, l, h, n.
% Configuracion Filtro FIR: h puede ser MA o fir1 o fircls1, con n=orden del f
% Configuracion muestreo:\
% ts: valor maximo de la parte aleatoria del periodo de muestreo.\
%\ TAD: valor fijo del periodo de muestreo (esta limitada tecnologicamente por
% el convertidor AD)
% Ejemplo\\ ts = 0.01
% Ejemplo TAD = 0.01
% Configuracion de la escala de frecuencia, lineal o logaritmica, l='lin'
% o l='log'.
% Configuracion de calculo y graficacion. f=[fmin:fmax].
% Paso entre f y f dado por Df si es lin, Dflog si es logaritmico.\
% Ejemplo\\ fmin=0.01
% Ejemplo fmax=10000
% Ejemplo\\ Df=0.1
% El resultado es la PFR o el NS.
% La PFR denota la potencia de la salida frente a una
% perturbacion senoidal, dividida por la potencia de la perturbaci\on. De esta
% manera se tiene informacion de la atenuaci\on que produce el proceso JRS/FIR
% El N/S denota la relaci\on de potencia de ruido versus

```

```
% potencia de la entrada senoidal.

\ clear;
\ pack;
\ format long e;

%Inicializaci\on de parametros.
\ ts = 0.01 ; TAD = 0.001 ;fmin = .001 ;
\ fmax = 10 ; Df = .01 ; Dflog = .01; n = 10;

% Definicion del filtro.
\ h = (1/n)*ones(1,n)'; %Filtro MA
\%F = [.012 .12 .3 .9]; %Filtro Cremez
\%h = cremez(10,F,'lowpass')'; %Filtro Cremez
\%h = fir1(n,.01)'; %Filtro pasabajos disenado por metodo Window
\%h = fircls1(n,2/n,0.01,1)'; % Filtro pasabajos metodo Window minimos cuadrados
\
% Tipo de graficacion, log o lin: l = 'log' o l = 'lin'.
\ l = 'log';

% Muestreo, filtrado y calculo de la PFR
\%PFR_JRS;
\%PFR_RAAS;
\ NS;

% Graficacion. El color de las curvas se define con color: 'k':negro,
% 'r': rojo, 'b': azul, 'g': verde.
```

```
\ color = 'b';
```

```
\ Graf;
```

A.2. *PFR_JRS.m*

```

% PFR_JRS
% Transformaci\on h a h#.
\ h1 = flipud(h);
\ A = fliplr(tril(toeplitz(h1)));
\ A(length(h1),:) = 0;
\ h_numeral = A*h1;
\ J = (norm(h))^2; % (norma h)^2

T = ts + TAD;

if l == 'lin'
    % Calculo de PFR
    for i = fmin:Df:fmax;
        f = i;
        k = (f-fmin)/Df + 1;
        w = 2*pi*f;
        T1 = exp(-j*w*T);
        G = (sinc(f*ts))^2;
        Z = T1.^[1:length(h)]
        Pa = Z*h_numeral;
        P = abs(Pa); % abs(H#)
        delta = angle(Pa); %arg(H#)
        Q = cos(w*length(h)*T+delta);
        var_mu = J+2*G*P*Q;
        var_mu_dB(k) = 10*log10(var_mu);
    end
end

```

```
end

end

if l == 'log'
    % Calculo de PFR
    fminlog=log10(fmin);
    fmaxlog=log10(fmax);

    for i = fminlog:Dflog:fmaxlog;
        f = 10^i;
        k = (i-fminlog)/Dflog +1;
        w = 2*pi*f;
        T1 = exp(-j*w*T);
        G = (sinc(f*ts))^2;
        Z = T1.^[1:length(h)]
        Pa = Z*h_numeral;
        P = abs(Pa); % abs(H#)
        delta = angle(Pa); %arg(H#)
        Q = cos(w*length(h)*T+delta);
        var_mu = J+2*G*P*Q;
        var_mu_dB(k) = 10*log10(var_mu);
    end

end

end
```

A.3. *Graf.m*

```
% Grafica de Var[mu] en dB vs w
```

```
if l == 'log'
```

```
\\ j = fminlog:Dflog:fmaxlog;
```

```
\\ f = 10.^j;
```

```
\\ figure(1)
```

```
\\
```

```
if color == 'k'
```

```
    semilogx(f,var_mu_dB,'k')
```

```
end
```

```
if color == 'r'
```

```
    semilogx(f,var_mu_dB,'r')
```

```
end
```

```
if color == 'b'
```

```
    semilogx(f,var_mu_dB,'b')
```

```
end
```

```
if color == 'g'
```

```
    semilogx(f,var_mu_dB,'g')
```

```
end
```

```
\\ grid on
```

```
\\ hold on
```

```
end

if l == 'lin'

f=fmin:Df:fmax;
figure(1)

if color == 'k'
    plot(f,var_mu_dB,'k')
end

if color == 'r'
    plot(f,var_mu_dB,'r')
end

if color == 'b'
    plot(f,var_mu_dB,'b')
end

if color == 'g'
    plot(f,var_mu_dB,'g')
end

grid on
hold on
```

end

A.4. *SHELL_EXP.m*

```
% SHELL_EXP
% Experimentos con RAAS o JRS.
% Valores configurables: F, ts, TAD, fmin, fmax, Df, Dflog, l, h, n, m.
% Senal entrada senoidal:
% \ In=cos(wt+fi)          fi aleatorio: F=1 s\{'\i}, F=0 no.
% Configuracion Filtro FIR: h puede ser MA o fir1 o fircls1, con n=orden del f
% Configuracion muestreo:\
% ts: valor m\aximo de la parte aleatoria del periodo de muestreo.\
%\ TAD: valor fijo del periodo de muestreo (esta limitada tecnologicamente por
% el convertidor AD)
% Ejemplo\ \ ts = 0.01
% Ejemplo  TAD = 0.01
%\ Configuracion de la cantidad de ensayos por experimento
% Ejemplo\ \ m=100
% Configuracion de la escala de frecuencia, lineal o logaritmica, l='lin'
% o l='log'.
% Configuracion de calculo y graficacion. f=[fmin:fmax].
% Paso entre f y f dado por Df si es lin, Dflog si es logaritmico.\
% Ejemplo\ \ fmin=0.01
% Ejemplo  fmax=10000
% Ejemplo\ \ Df=0.1
% El resultado es la PFR, que denota la potencia de la salida frente a una
% perturbacion senoidal, dividida por la potencia de la perturbacion. De esta
% manera se tiene informacion de la atenuacion que produce el proceso JRS/FIR.
```

```
\ clear;

%Inicializacion de parametros.
    ts = 0.01; TAD = 0.001 ; fmin = .001 ; n=10;
    fmax = 10 ; Df = 1 ; Dflog = .01 ; m = 100;

% Definicion del filtro.
    h = (1/n)*ones(1,n)'; %Filtro MA
    %F = [.012 .12 .3 .9]; %Filtro Cremez
    %h = cremez(10,F,'lowpass')'; %Filtro Cremez
    %h = fir1(n,.01)'; %Filtro pasabajos disenado por metodo Window
    %h = fircls1(n,2/n,0.01,1)'; % Filtro pasabajos metodo Window minimos cuadra

% Muestreo RAAS o JRS.
\%RAAS;
\ JRS;

% Tipo de graficacion, log o lin: l = 'log' o l = 'lin'.
\ l = 'log';

% Calculo de PFR o N/S.
\%ExpPFR;
\%ExpNSfiltro;
\ ExpNSmetodo;

% Graficacion. El color de las curvas se define con color: 'k':negro,
% 'r': rojo, 'b': azul, 'g': verde.
```

```
\ color = 'k'\;
```

```
\ Graf;
```

A.5. *EXP_PFR.m*

```
% ExpPFR;
% Determina el PFR, valido para cualquier filtro h;

if l == 'lin';

    for f = fmin:Df:fmax;

        % Determinaci\on de la salida
        fi = rand(m,1)*ones(1,length(h));
        fase = a*2*pi*f + 2*pi*fi    ;
        mn = cos(fase) ;
        mu = mn*h ;

        % PFR
        mu2 = mu.^2;
        var_mu = sum(mu2)/m ;
        j = (f-fmin)/Df + 1 ;
        var_mu_dB(j) = 10*log10(var_mu)+3;
    end

end

if l == 'log';

    fminlog=log10(fmin);
```

```
fmaxlog=log10(fmax);

for i = fminlog:Dflog:fmaxlog;
    f = 10^i;

    % Determinaci\on de la salida
    fi = rand(m,1)*ones(1,length(h));
    fase = a*2*pi*f + 2*pi*fi    ;
    mn = cos(fase) ;
    mu = mn*h ;

    % PFR
    mu2 = mu.^2;
    var_mu = sum(mu2)/m ;
    j = (i-fminlog)/Dflog + 1 ;
    var_mu_dB(j) = 10*log10(var_mu)+3;
end
end
```

A.6. *JRS.m*

```
% JRS
```

```
% Generacion del muestreo aleatorio JRS con pdf uniforme
```

```
\ T = TAD + ts;
```

```
% Definci\on del Muestreo.
```

```
\ a = ones(m,1)*[1:length(h)]*T + (rand(m,length(h)))*ts - 0.5*ts*ones(m,length(h))
```

```
\ a1 = ones(m,1)*[1:length(h)]*T; %muestreo uniforme
```

A.7. *NS.m*

```
% NS

\ J = (norm(h))^2; % (norma h)^2
\ T = ts + TAD;
\ a = ts/T;
\ f2 = ts*2*pi;

\ if l == 'lin'
    for i = fmin:Df:fmax;
        \ f = i;
        \ k = (f-fmin)/Df + 1;
        \ w = 2*pi*f;
        \ T1 = exp(-j*w*T);
        \ Z = T1.^[1:length(h)]
        \ Pa = Z*h;
        \ P = abs(Pa); % abs(H)
        \ f1 = (f2*f)^2;
        \ var_mu_dB(k) = 10*log10((f1^2)/576+J*f1*(1/12-f1/1440)/(P^2));
    end
\ end

\ if l == 'log'

    fminlog=log10(fmin);
    fmaxlog=log10(fmax);
```

```
for i = fminlog:Dflog:fmaxlog;
    f = 10^i;
    k = (i-fminlog)/Dflog +1;
    w = 2*pi*f;
    T1 = exp(-j*w*T);
    Z = T1.^[1:length(h)]
    Pa = Z*h;
    P = abs(Pa); % abs(H)
    f1 = (f2*f)^2;
    var_mu_dB(k) = -10*log10((f1^2)/576+J*f1*(1/12-f1/1440)/(P^2));
end
\ end
```

A.8. *ExpNSmetodo.m*

```
% EXPNSmetodo;
% Determina la relacion S/N donde N est\o dado por el error debido al
% m\{e}todo. Valido para cualquier filtro h;

\ if 1 == 'lin';

    for f = fmin:Df:fmax;

        % Determinaci\on del error
        fi = rand(m,1)*ones(1,length(h));
        fase = a*2*pi*f + 2*pi*fi    ;
        fase1 = a1*2*pi*f + 2*pi*fi    ;
        mn = cos(fase);
        mn1 = cos(fase1) ;
        mu = mn*h-mn1*h ;

        % Determinacion de S/N
        mu2 = mu.^2;
        var_mu = sum(mu2)/m ;
        j = (f-fmin)/Df + 1 ;
        var_mu_dB(j) = -10*log10(var_mu)-3; % relacion S/N
    end

\ end
```

```
\ if l == 'log';

    fminlog=log10(fmin);
    fmaxlog=log10(fmax);

    for i = fminlog:Dflog:fmaxlog;
        f = 10^i;

        % Determinaci\on del error
        fi = rand(m,1)*ones(1,length(h));
        fase = a*2*pi*f + 2*pi*fi    ;
        fase1 = a1*2*pi*f + 2*pi*fi    ;
        mn = cos(fase);
        mn1 = cos(fase1) ;
        mu = mn*h - mn1*h ;

        % Determinacion de S/N
        mu2 = mu.^2;
        var_mu = sum(mu2)/m ;
        j = (i-fminlog)/Dflog + 1 ;
        var_mu_dB(j) = -10*log10(var_mu)-3; % relacion S/N
    end
\ end
```

A.9. *ExpNSfiltro.m*

```
% ExpNSfiltro

\ J = (norm(h))^2; % (norma h)^2
\ T = ts + TAD;

\ if l == 'lin'
    \ for i = fmin:Df:fmax;
        f = i;
        k = (f-fmin)/Df + 1;
        w = 2*pi*f;
        T1 = exp(-j*w*T);
        Z = T1.^[1:length(h)]
        Pa = Z*h;
        P = abs(Pa); % abs(H)
        var_mu_dB(k) = 10*log10(1/(1-P^2));
    \ \ end
\ end

\ if l == 'log'
\ \ fminlog=log10(fmin);
\ \ fmaxlog=log10(fmax);

\ \ for i = fminlog:Dflog:fmaxlog;
    f = 10^i;
    k = (i-fminlog)/Dflog +1;
```

```
w = 2*pi*f;  
T1 = exp(-j*w*T);  
Z = T1.^[1:length(h)]  
Pa = Z*h;  
P = abs(Pa); % abs(H)  
var_mu_dB(k) = 10*log10(1/(1-P^2));  
  
\ end  
  
\ end
```

Apéndice B

Banco de Ensayos

B.1. Arquitectura

En este apéndice se describe el banco de ensayos, destinado a evaluar experimentalmente el desenvolvimiento de los métodos de muestreo aleatorio *JRS* y *RAAS*, y verificar la validez de las formulaciones desarrolladas. Para cumplir con tales objetivos, el banco de ensayos está diseñado para adquirir, a través del método *JRS* o *RAAS*, una señal senoidal de frecuencia ajustable, y luego procesar las muestras mediante un *FIR*. Finalmente, las muestras filtradas son convertidas a una señal analógica por medio de un convertidor *DA*. La señal es visualizada por un osciloscopio y, además, es medida a efectos de determinar los parámetros que interesan, como el valor medio y la potencia de *CC* y de *CA*.

En la Fig. [B.1](#) se muestra la arquitectura básica del Banco de Ensayos. La implementación del mismo se realizó a partir de un Kit de Desarrollo de *DSP*, *ADS401* de Analog Devices, basado en el *DSP ADSP271*. El propio *DSP* se ocupa de generar los tiempos de muestreo en el *A/D*, de realizar el filtrado *FIR* y de disparar la conversión *DA*.

El kit de desarrollo es monitoreado desde una *PC*. Además se utiliza la *PC*

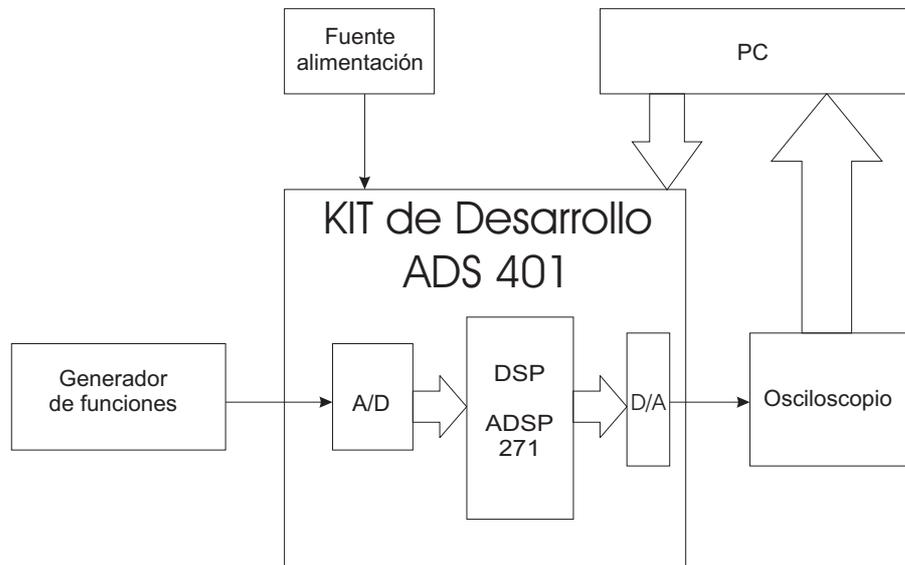


Figura B.1: Arquitectura básica del Banco de Ensayos.

para descargar los programas del *DSP*. El código del *DSP* fue programado en *C++* y luego compilado al lenguaje de máquina. La descarga de las rutinas del *DSP* es realizada desde la *PC* a través del puerto serie *RS232*.

En cuanto a la obtención de las formas de onda de la salida analógica, se realiza por medio del osciloscopio. Estas formas de onda se exponen junto con el resto de los resultados en el Capítulo 6. El osciloscopio es controlado desde una *PC*, que también es utilizada para visualizar las imágenes del osciloscopio y adquirirlas en forma digital a través de una tabla de 2500 muestras por pantalla. Las citadas muestras se utilizan luego para obtener, por medio de planillas de cálculo, el valor medio y la potencia de *CC* y de *CA*. Estos parámetros constituyen parte de los resultados que también son mostrados en el Capítulo 6.

B.2. Rutinas del DSP

Existen dos rutinas diferentes para los ensayos, una dedicada al muestreo *JRS* y la otra al *RAAS*. Ambas sólo difieren en la obtención del tiempo de



Figura B.2: Diagrama de flujo del programa principal.

disparo para la adquisición. A continuación se muestran los diagramas de flujo correspondientes al *JRS* y luego se muestran las modificaciones realizadas en esta rutina para arribar a la del *RAAS*.

B.2.1. Rutina *JRS*

La filosofía de estas rutinas consiste en utilizar interrupciones para la ejecución de las diferentes tareas. Por lo tanto existe un programa principal denominado *MAIN*, Fig. [B.2](#), compuesto por la subrutina de inicialización de variables y parámetros, denominada justamente *Inicialización*, seguida por un simple lazo de espera llamado *MAINLOOP*. Durante este lazo arriban las interrupciones; las subrutinas de servicio de interrupciones son las que ejecutan lo sustantivo del programa del *DSP*.

El programa fue concebido a partir de las interrupciones generadas por el *TIMER* y por el convertidor *AD*. Por lo tanto existen dos rutinas de atención de interrupciones, *TIMER_ISR*, y *ADC_ISR*, respectivamente. La primera se encarga de generar pulsos periódicos por un lado, y pulsos aleatorios por otro, así como de disparar la conversión analógica digital con los pulsos aleatorios. La

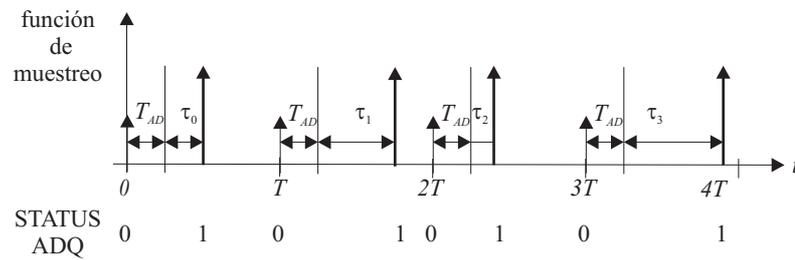


Figura B.3: Diagrama de tiempos de las interrupciones utilizadas en la rutina *ISR*.

segunda, disparada por el fin de la conversión analógico digital, se dedica al procesamiento de las muestras obtenidas, realizando el filtrado *FIR* y desencadenando finalmente la conversión digital analógica.

Rutina *TIMER_ISR*

En la Fig. [B.3](#) se muestra un diagrama de tiempos, donde se observan los pulsos periódicos y los aleatorios del muestreo *JRS*.

En la Fig. ??, se muestra el diagrama de flujo de la rutina *TIMER_ISR*, cuya primer tarea es identificar si el pulso es periódico o aleatorio a través del bit *STATUS_ADQ*. Luego, si el pulso es periódico, inicia el proceso de Generación de Números Aleatorios (*RNG*, Random Number Generator), verificando si el número aleatorio obtenido es mayor que el tiempo de conversión *A/D*, T_{AD} . Repite el proceso *RNG* hasta cumplir con esta condición. Esto requiere ser cumplimentado a fin de garantizar que el tiempo entre dos conversiones sea mayor que T_{AD} . Con el valor aleatorio aceptado se carga el timer y se lo dispara. Luego, se setea el bit *STATUS_ADQ*. y se sale de la rutina. Si el pulso es aleatorio, la rutina dispara la conversión analógica digital, resetea el bit *STATUS_ADQ* y se sale de la rutina.

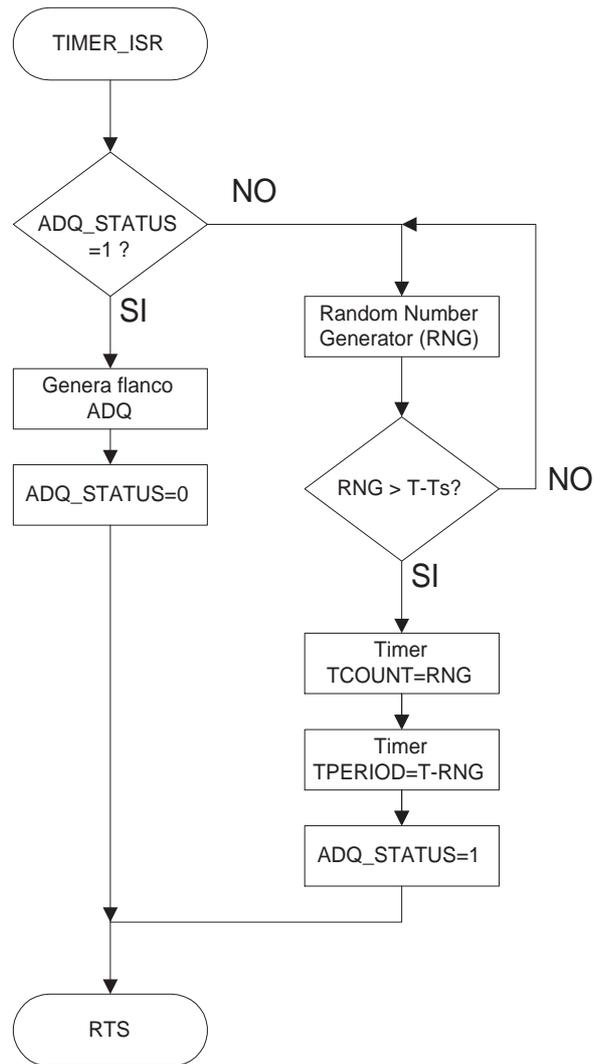


Figura B.4: Diagrama de flujo de la subrutina de atención a interrupciones *TIMER_ISR*.

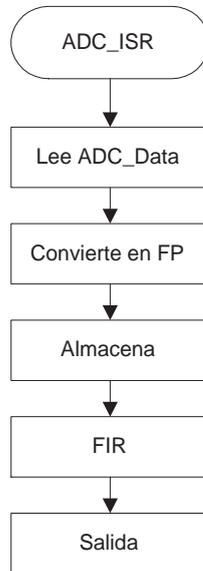


Figura B.5: Diagrama de flujo de la subrutina de atención a interrupciones *ADC_ISR*.

Rutina *ADC_ISR*

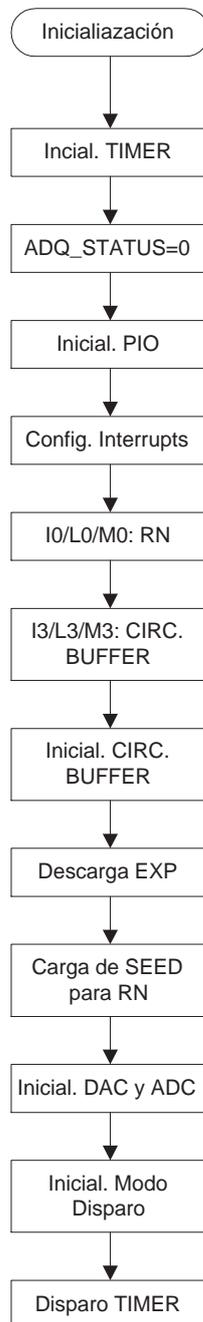
En la Fig. B.5 se muestra la rutina, la cual lee el dato adquirido, lo convierte en formato de punto flotante, lo procesa en el *FIR*, y finalmente lo entrega a la salida para su conversión digital analógica.

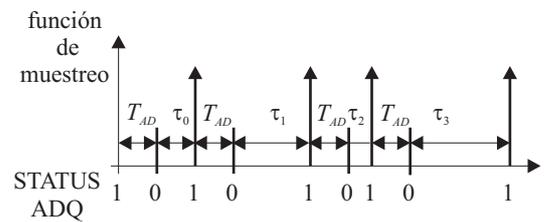
Rutina *Inicialización*

En la Fig. B.6 se observa la rutina de *Inicialización*.

B.2.2. Rutina *RAAS*

En la Fig. ?? se muestra el diagrama de tiempos correspondiente, donde no se observan los pulsos periódicos ya que éstos no existen en el *RAAS*. La rutina *RAAS* posee las mismas subrutinas que la *JRS*, pero con algunas simplificaciones en la subrutina *TIMER_ISR*, ya que no es necesario generar los pulsos periódicos. De esta forma la subrutina *TIMER_ISR*, es accedida a través de

Figura B.6: Diagrama de flujo de la rutina de *Inicialización*.

Figura B.7: Diagrama de tiempos en la rutina *RAAS*.

los pulsos aleatorios y de los pulsos que se observan en la Fig. ?? separados en T_{AD} , en un caso disparándose el proceso de conversión analógico digital, y en otro generándose el *RNG* correspondiente al τ .

En la Fig. B.8 se aprecia la rutina *TIMER_ISR* correspondiente al *RAAS*, donde la única diferencia respecto de la del *JRS* es la carga del timer con *TAD* en lugar de *T-RNG*. De esta forma se permite eliminar el marco periódico del muestreo.

B.2.3. Listado de las rutinas

Rutina *JSR*

```
.MODULE/RAM/SEG=USER_PM1/ABS=0x60      RANDOM; { Description
-----
Hardware description
-----
ADC
---
1 ----> se{\~n}al de entrada
DAC
---
1 ----> salida de la se{\~n}al muestreada 2 ----> salida de la se{\~n}al
muestreada y post-procesada por un FIR
Author: Sergio Alejandro
Gonz{\ 'a}lez y Rogelio Garcia Revision: 0.06 Date: 27/10/2004 Notes:
Hardware Modifications of the ADC connector board: ** IF3C-11
(CONVST) wired to IF3A-26 (PI021).
      PI021 is unavailable at the ADC-401 but is since the connector
      is readily available, I decided to work around this.
      PI021 should be connected to PI02.
}
```

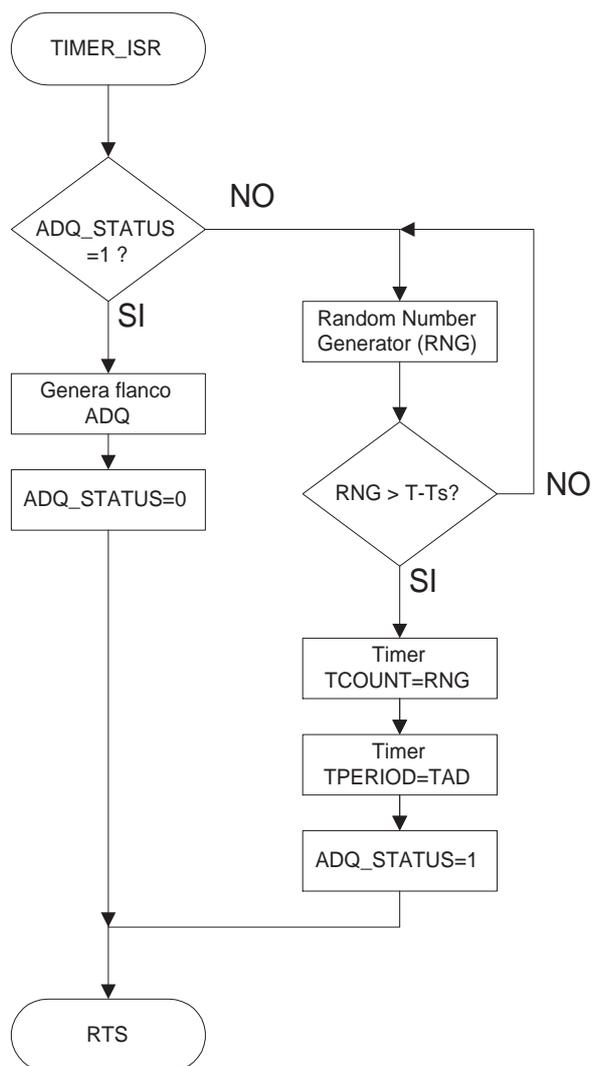


Figura B.8: Diagrama de flujo de la subrutina *TIMER_ISR* para la rutina *RAAS*.


```

IFC   = 0x80;           {Clear any pending IRQ2 interrupt }
ICNTL = 0x03;          {Configure interrupt format      }

AR = DM(PICMASK);
AR = CLRBIT 9 OF AR;    { PICMASK enables PIO3  }
AR = CLRBIT 8 OF AR;    { PICMASK enables PIO2  }
AR = CLRBIT 6 OF AR;    { PICMASK disables PIO0 }
AR = CLRBIT 5 OF AR;    { PICMASK enables ETU   }
AR = SETBIT 1 OF AR;    { PICMASK enables PWM   }
AR = SETBIT 0 OF AR;    { PICMASK disables ADC  }
DM(PICMASK) = AR;

ay0   = 0x201;          { unmask irq2 interrupts. }
ar    = IMASK;
ar    = ar or ay0;
IMASK = ar;             { IRQ2 fully enabled here }

IO = ^RAND_NUM;        { set up adr ptr }
LO = 0;                 { set up buffer length}
MO = 1;                 { post-modify IO by 1 }

I3 = ^BUFFER;          { set up adr ptr }
L3 = %BUFFER;          { set up buffer length}
M3 = 1;                 { post-modify IO by 1 }

DM(BUFFER_START) = I3;   { }
DM(BUFFER_LENGTH) = L3;  { }
ax0 = DM(BUFFER_START);  { }
ay0 = DM(BUFFER_LENGTH); { }
ar = ax0 + ay0;          { }
DM(BUFFER_LAST_INDEX) = ar;

ax0 = ^COEFS;           { }
ay0 = %COEFS-2;        { }
ar = ax0 + ay0;         { }
I4 = ar;
AR = PM(I4,M4);
DM(H_EXP)=AR;           {Get 1st Ey}
AR = PM(I4,M4);
DM(AMP_EXP)=AR;         {Get Last exp. for magnificat}

{ Seed initalization SR = 0x00005555 }

SR1 = 0x5555;
SR0 = 0x0000;

ADC_Init;
{ Calibrates the ADC block. This calibration requires }
{ values from the ADC and so the PWMSYNC must be     }
{ running when it is called. Here all the offset are }
{ stored.                                             }
{ Thus, ADC_init is placed after IRQ2 is enabled     }

```



```

SRO = B#0000000000000000;   { PIO's sensibles al flanco }
DM(PIOMODE) = SRO;

        AR=B#0000000000000011;           {V0.05: NO NESTED interr.}
ICNTL=AR;           {Interr. por flanco y anidadas}
RTS;

{} {
I N T E R R U P T   S E R V I C E   R O U T I N E S }
{}

{*****} {
PWM Interrupt Service Routine           }
{*****}

PWMSYNC_ISR:
    nop;
    rti;

{*****} {
PWM Trip Interrupt Service Routine           }
{*****}

PWMTRIP_ISR:
    nop;
    rti;

{*****} {
TIMER Interrupt Service Routine           }
{*****}

TIMER_ISR:

{   DIS TIMER;           { poner a correr el timer }

{ Seed initialization SR = 0x00005555 }

{   SRO = 0x5555; } {   SR1 = 0x0000;}

    AX0 = DM(STATUS);           {   }
    AF = AX0 AND 1;           {   }
    if NE jump ADQ;           {   }

NO_ADQ:

DADO:   CNTR = 1;           { Wait approximately one }
        IO = ^RAND_NUM;           { set up adr ptr }
        LO = 0;           { set up buffer length}
        MO = 1;           { post-modify IO by 1 }

        CALL   urand;
        ar = SR1;           { result in AR}
        call   CHK_RAN;

```



```

AR=CLRBIT 0 OF AR;
DM(PIODATA) = AR;          {  }

    AR = DM(STATUS);
    AR = CLRBIT 0 OF AR;
    DM(STATUS) = AR;          { set flag }

{ ENA TIMER;                { poner a correr el timer }
  rti;

{*****} {
A/D Interrupt Service Routine      }
{*****} {

ADC_ISR: {ac{\`a} vengo antes que el primer TIMER ISR}
        ADC_Read(ADCO, Offset_0to3);  { toma el valor de la muestra, le }
        { saca el offset y lo deja en AR }
        DAC_Put(1, AR);                { }

{ * * * D E B U G * * *}

    {guardar lo adquirido}
    AX0 = 0;                          { 0 bias  }
    call    fltone;                    { Convert 1.15 fix to 2-word float}
    DM(I3,M3) = AR;                    { temp store the sample  }
    DM(I3,M3) = SR1;                   { exp, frct          }

    call    procesodedaniel;
    DAC_Update;
    rti;

{*****} {
procesodedaniel                      }
{*****} {
    FIR Filter Subroutine

    Calling Parameters
    AR --> input data value in delay line

} procesodedaniel:
    CNTR = MaxBuffer-1;                { Wait approximately one }

    I4 = ^COEFS;                       { set up adr ptr }
    L4 = %COEFS-2;                     { set up buffer length}
    M4 = 1;                             { post-modify I4 by 1 }

    AR = I3;                            { set up adr ptr }
    {take 2 memory to hold sample }

    IO = AR;
    LO = %BUFFER;                      { set up buffer length}

```

```

MO = 1;                { post-modify IO by 1 }
MX0 = 0;              { bias in 0      }

CALL fp_mac;

AY0 = DM(AMP_EXP);    {Load extra exp for amplification}
AX0 = AR;             {16.0 signed twos complement}
SI = SR1;            {1.15 signed twos complement}
CALL fixone;
DAC_Put(2, SR1);
rts;

{
  Linear Congruence Uniform Random Number Generator

  Calling Parameters
    IO --> Output buffer    L0 = 0
    MO = 1
    SR1 = MSW of seed value
    SR0 = LSW of seed value
    CNTR = desired number of random numbers

  Return Values
    Desired number of random numbers in output buffer
    SR1 = MSW of updated seed value
    SR0 = LSW of updated seed value

  Altered Registers
    MY0,MY1,MR,SI,SR

  Computation Time
    10*N + 4 cycles
}

urand: MY1=25;                {Upper half of a}
        MY0=26125;           {Lower half of a}
        DO randloop UNTIL CE;
            DM(IO,MO)=SR1, MR=SR0*MY1(UU); {a(hi)*x(lo)}
            MR=MR+SR1*MY0(UU);           {a(hi)*x(lo) + a(lo)*x(hi)}
            SI=MR1;
            MR1=MR0;
            MR2=SI;
            MR0=H#FFFE;                {c=32767, left-shifted by 1}
            MR=MR+SR0*MY0(UU);          {(above) + a(lo)*x(lo) + c}
            SR=ASHIFT MR2 BY 15 (HI);
            SR=SR OR LSHIFT MR1 BY -1 (HI); {right-shift by 1}
randloop: SR=SR OR LSHIFT MR0 BY -1 (LO);
          RTS;

CHK_RAN: {chequeo signo de AR}
          ar= ar + 0;
            { Test bit, in order to determine if + or - }
          if LT jump _pos;                \c{c}

```

```

    { test bit AS = 0 to determine if positive, then jump } {11ms}

ax0 = ar;                { read }
AR=ABS AX0;
ax0=AR;

ax1 = 0x1715;           { limite ---> 11ms  }

ar = ABS ax1;          { complemento }
ay0 = ar;

AR = ax0 - ay0;

{POS --> mal}
{ Test bit, in order to determine if + or -          }
    if GT jump _pos;          { test AS=0, if >0, then jump }

_neg:                    { negative }
    ar = DM(STATUS);        { toggle PIO1      }
    AR=CLRBIT 1 OF AR;
    DM(STATUS) = AR;        { toggle PIO1      }
    RTS;

_pos:
    AR = DM(STATUS);        { toggle PIO1      }
    AR=SETBIT 1 OF AR;
    DM(STATUS) = AR;        { toggle PIO1      }
    RTS;

MULTIPLICICO:
    ENA M_MODE;            { Integer mode for MAC }
    MY0 = 0xE61D;
    MR = ar*MY0 (SS);      { Compute LSW  }

    se = EXP mr0 (HI);
    sr = ASHIFT mr0 (HI);  {compute actual speed w(n+2)
                           by scaling, multiply by 2}

    MR1 = SR1;
    MR0 = SR0;

    AR = ASTAT;
    AR = SETBIT 6 OF AR;
    ASTAT = AR;
    if MV sat mr;
    DIS M_MODE;           { Disable integer mode for MAC }

    RTS;

{
    Floating-Point Multiply/Accumulate
        n
        z =sum ( x(i) * y(i) )
        i=1

```

```

Calling Parameters
    IO --> x Buffer
    LO = buffer data length (2*N)
    I4 --> y Buffer
    L4 = coef table length (N)
    M0, M4 = 1
    CNTR = Filter length - 1 (N-1)
    MX0 = Excess Code

Return Values
    AR = Exponent of z
    SR1 = Fraction of z

Altered Registers
    AF, AR, AX0, AX1, AY0, AY1, MX1, MY1, SE, MR, SR

Computation Time
    13*(n-1)+16
}

.ENTRY fp_mac;

fp_mac: AX0=DM(IO,M0);           {Get 1st Ex}
      AY0=DM(H_EXP);           {Get 1st Ey}
      AF=AX0+AY0, MX1=DM(IO,M0); {Add exp., get 1st Fx}
      AR=PASS AF, MY1=PM(I4,M4); {Get 1st Fy}
      AX1=AR, MR=MX1*MY1(RND);  {Multiply fractions}
      IF MV SAT MR;            {Check for overflow}
      SE=EXP MR1(HI);
      AY1=SE, SR=NORM MR1(HI);  {Normalize}
      AR=AX1+AY1, AX0=DM(IO,M0); {Add, take 2nd Ex}
      AX1=AR;
      DO macc UNTIL CE;
      AF=AX0+AY0, MX1=DM(IO,M0); {Compute product exp.}
      AR=AX1-AF, MY1=PM(I4,M4);  {Sum exp. > product exp.?.}
      IF GT JUMP shiftp;        {Yes, shift product}
      SE=AR, MR=MX1*MY1(RND);   {No, shift sum}
      IF MV SAT MR;
      AY1=MR1, AR=PASS AF;
      AX1=AR, SR=ASHIFT SR1(HI);
      JUMP add;
shiftp: AF=PASS AR;
      AR=-AF;
      SE=AR, MR=MX1*MY1(RND);
      IF MV SAT MR;
      AY1=SR1, SR=ASHIFT MR1(HI);
add:    AR=SR1+AY1, AX0=DM(IO,M0); {Accumulate}
      SE=EXP AR(HIX);
      AY1=SE, SR=NORM AR(HI);   {Normalize}
      AR= AX1+AY1;              {}
macc:   AX1=AR;
      SRO=MX0;                  {Get bias}

```

```

    AF=PASS SR0;
    AR=AX1-AF;                                {Subtract bias}
    RTS;
{
    Convert 1.15 fixed-point to two-word floating-point

    Calling Parameters
        AR = fixed point number                [1.15 signed 2s complement]
        AX0 = exponent bias (0=unbiased)      [16.0 signed 2s complement]

    Return Values
        AR = biased exponent                  [16.0 signed 2s complement]
        SR1 = mantissa                        [1.15 signed 2s complement]

    Altered Registers
        SE,SR,AY0,AR

    Computation Time
        5 cycles
}

.ENTRY fltone;

fltone: SE=EXP AR (HI);                       {Determine exponent}
        SR=NORM AR (HI);                     {Remove redundant sign bits}
        AY0=SE;
        AR=AX0+AY0;                          {Add bias}
        RTS;
{
    Convert two-word floating-point to 1.15 fixed-point

    Calling Parameters
        AX0 = exponent                        [16.0 signed twos complement]
        AY0 = exponent bias                  [16.0 signed twos complement]
        SI = mantissa                        [1.15 signed twos complement]

    Return Values
        SR1 = fixed-point number             [1.15 signed twos complement]

    Altered Registers
        AR,SE,SR

    Computation Time
        4 cycles
} .ENTRY fixone;

fixone: AR=AX0-AY0;                            {Compute unbiased
exponent}
        SE=AR;
        SR=ASHIFT SI (HI);                  {Shift fractional part}
        RTS;

.ENDMOD;

```

Rutina RAAS

```

.MODULE/RAM/SEG=USER_PM1/ABS=0x60      RANDOM; { Description
-----
Hardware description
-----

ADC
---
1 ----> se{\~n}al de entrada

DAC
---
1 ----> salida de la se{\~n}al muestreada 2 ----> salida de la se{\~n}al
muestreada y post-procesada por un FIR

Author: Sergio Alejandro Gonz{\'}lez y Rogelio Garcia Revision:
0.06 Date: 27/10/2004 Notes: Hardware Modifications of the
ADMC connector board: ** IF3C-11 (CONVST) wired to IF3A-26
(PIO21).

        PIO21 is unavailable at the ADCM-401 but is since the connector
        is readily available, I decided to work arround this.
}
{ Include files }

#include <random.h>;           { Program Definitions      }
#include <pwm401.h>;           { macros for the PWM block }
#include <dac401.h>;           { macros for the DAC block }
#include <adc401.h>;           { macros for the A/D }

{ Program constant definitions }

.CONST MaxBuffer = 1024;      { max number of bytes to
buffer } .CONST adc_maricon = 0x0009;      {ADCCTRL
[0000,0000,0000,1001] } .CONST maxsamples = 1024;      { max
number of samples per channel }

.VAR/DM/RAM/SEG=USER_DM1 H_EXP; .VAR/DM/RAM/SEG=USER_DM1
AMP_EXP; .VAR/PM/RAM/CIRC/SEG=USER_PM2 COEFS[MaxBuffer+2];

.VAR/RAM/DM/CIRC/SEG=USER_DM1 RAND_NUM[1];      { }
.VAR/RAM/DM/CIRC/SEG=USER_DM1 BUFFER_START[1];   { }
.VAR/RAM/DM/CIRC/SEG=USER_DM1 BUFFER_LENGTH[1]; { }
.VAR/RAM/DM/CIRC/SEG=USER_DM1 BUFFER_LAST_INDEX[1]; {
BUFFER_LAST_INDEX} .VAR/RAM/DM/CIRC/SEG=USER_DM1
BUFFER[2*MaxBuffer];      { SAMPLES BUFFER      }

.VAR/DM/RAM/CIRC/SEG=USER_DM1 STATUS;           { STATUS flag
structure is as follows:
        BIT # 1|1|1|1|1|1|1|0|0|0|0|0|0|0|0|0|0|
        5|4|3|2|1|0|9|8|7|6|5|4|3|2|1|0|

```



```

    ar = ax0 + ay0;          { }
    DM(BUFFER_LAST_INDEX) = ar;

{   I4 = ^COEFS + %COEFS;    {}
    ax0 = ^COEFS;           { }
    ay0 = %COEFS-2;        { }
    ar = ax0 + ay0;        { }
    I4 = ar;
    AR = PM(I4,M4);
    DM(H_EXP)=AR;          {Get 1st Ey}
    AR = PM(I4,M4);
    DM(AMP_EXP)=AR;        {Get Last exponent for magnification}

{ Seed initalization SR = 0x00005555 }

SR1 = 0x5555;
SR0 = 0x0000;

ADC_Init;                 { Calibrates the ADC block. This calibration requires }
                           { values from the ADC and so the PWMSYNC must be      }
                           { running when it is called. Here all the offset are  }
                           { stored.                                         }
                           { Thus, ADC_init is placed after IRQ2 is enabled    }

write_dm(ADCCTRL, adc_maricon); {Setup for simultaneous sampling
and external conversion start}

DAC_Init;                 { inicilaizaci{\'}n de D/A }

ENA TIMER;                { poner a correr el timer }

{}
{----- M A I N   C O D E }
{}

MAINLOOP:

    jump MAINLOOP;

    rts;                   { Para mi est{\'}a dem{\'}a}s..    }

{}
{--- S U B R O U T I N E S }
{}
{%%%%%%%%%% O N E T I M E O N L Y S E T U P %%%%%%%%%%%}
{ initializes M and L registers in address generators, and sets
ICNTL to edge-sensitive } setup: {      AR=0xFD20;          {
Periodo de 110ms          }
    AR=0x1964;            { Periodo de 11ms          }

    DM(TCOUNT)=AR;      { Per{\'}i}odo de Tclk=110 mSeg. }

{      AR=0xFD20;        { Periodo de 110ms          }

```



```

    nop;
    rti;

{*****} {
TIMER Interrupt Service Routine      }
{*****}

TIMER_ISR:

{   DIS TIMER;                { poner a correr el timer }

{ Seed initialization SR = 0x00005555 }

{   SR0 = 0x5555; } {   SR1 = 0x0000;}

    AX0 = DM(STATUS);          {   }
    AF = AX0 AND 1;            {   }
    if NE jump ADQ;           {   }

NO_ADQ:

DADO:   CNTR = 1;              { Wait approximately one }
        IO = ^RAND_NUM;       { set up adr ptr }
        LO = 0;                { set up buffer length}
        MO = 1;                { post-modify IO by 1 }

        CALL   urand;
        ar = SR1;              { result in AR}
{ call   MULTIPLICICO;}
  call   CHK_RAN;
  AX0 = DM(STATUS);           {   }
  AF = AX0 AND 2;             {   }
  if NE jump DADO;           {   }

  ar = SR1;
  DM(RAND_NUM) = ar;
  DM(TCOUNT)=AR;            { Perf{\i}odo de Tclk=110 mSeg. }

{
*****}
{ Esta cuenta se usa cuando se requiere un evento sincronizado
} { Inicio de tiro de dado cada 11ms
}

{   ax0 = 0xFD20;                { 110ms } {   ax0 = 0x1964;
{ 11ms } {   ay0 = ar; {   ar = ax0 - ay0; {   DM(TPERIOD)=AR;
{ Inicializaci{\o}n del Timer de Tclk } {
*****}

{
*****}
{ Esta cuenta se usa cuando se requiere un evento no sincronizado

```



```

        nop;
        AR=DM(PIODATA);
        AR=CLRBIT 0 OF AR;
        DM(PIODATA) = AR;           {  }

        AR = DM(STATUS);
        AR = CLRBIT 0 OF AR;
        DM(STATUS) = AR;           { set flag }

{   ENA TIMER;                     { poner a correr el timer }
    rti;

{*****} {
A/D Interrupt Service Routine      }
{*****}

ADC_ISR: {ac{'a} vengo antes que el primer TIMER ISR}
        ADC_Read(ADC0, Offset_0to3);   {toma muestra le saca offset y lo}
            { deja en AR }
        DAC_Put(1, AR);                 {}

{* * * D E B U G * * *} {   ar=0; {* * * D E B U G * * *}

```

```

    {guardar lo adquirido}
{  DM(I3,M3)=AR;          { save the data }

    {guardar lo adquirido}
AX0 = 0;                  { 0 bias }
call  fltone;            { Convert 1.15 fix to 2-word float}
DM(I3,M3) = AR;          { temp store the sample }
DM(I3,M3) = SR1;         { exp, frct }

call  procesodedaniel;
DAC_Update;
rti;

{*****} {
procesodedaniel          }
{*****} {
    FIR Filter Subroutine

    Calling Parameters
        AR --> input data value in delay line

} procesodedaniel:
    CNTR = MaxBuffer-1;    { Wait approximately one }

    I4 = ^COEFS;           { set up adr ptr }
    L4 = %COEFS-2;         { set up buffer length}
    M4 = 1;                { post-modify I4 by 1 }

    AR = I3;               { set up adr ptr }
                           { it take 2 memory positions to hold a sample, }
    IO = AR;
    LO = %BUFFER;          { set up buffer length}
    MO = 1;                { post-modify IO by 1 }
    MX0 = 0;               { bias in 0 }

    CALL fp_mac;
    AYO = DM(AMP_EXP);     {Load extra exponent for amplification}
    AX0 = AR;              {16.0 signed twos complement}
    SI = SR1;              {1.15 signed twos complement}
    CALL fixone;
    DAC_Put(2, SR1);
    rts;
{
    Linear Congruence Uniform Random Number Generator

    Calling Parameters
        IO --> Output buffer    L0 = 0
        MO = 1
        SR1 = MSW of seed value
        SR0 = LSW of seed value
        CNTR = desired number of random numbers

    Return Values

```

```

        Desired number of random numbers in output buffer
        SR1 = MSW of updated seed value
        SR0 = LSW of updated seed value

    Altered Registers
        MY0,MY1,MR,SI,SR

    Computation Time
        10*N + 4 cycles
}
urand: MY1=25;                {Upper half of a}
        MY0=26125;            {Lower half of a}
        DO randloop UNTIL CE;
            DM(IO,M0)=SR1, MR=SR0*MY1(UU); {a(hi)*x(lo)}
            MR=MR+SR1*MY0(UU);            {a(hi)*x(lo) + a(lo)*x(hi)}
            SI=MR1;
            MR1=MRO;
            MR2=SI;
            MRO=H#FFFE;                {c=32767, left-shifted by 1}
            MR=MR+SR0*MY0(UU);          {(above) + a(lo)*x(lo) + c}
            SR=ASHIFT MR2 BY 15 (HI);
            SR=SR OR LSHIFT MR1 BY -1 (HI); {right-shift by 1}
randloop: SR=SR OR LSHIFT MRO BY -1 (LO);
        RTS;

CHK_RAN: {chequeo signo de AR}
        ar = ar + 0;
        { Test bit, in order to determine if + or - }
{
    if GT jump _neg;            {AS=0 ? then jump } {110ms}
    if LT jump _pos;            {AS=0 ? then jump } {11ms}

    ax0 = ar;                    { read }
    AR=ABS AX0;
    ax0=AR;

{
    ax1 = 0x004D;                { limite } { ax1 =
0xE61D;                          { limite ---> 110ms }
    ax1 = 0x1715;                { limite ---> 11ms }

    ar = ABS ax1;                { complemento }
    ay0 = ar;

    AR = ax0 - ay0;

    {POS --> mal}
    { Test bit, in order to determine if + or - }
{
    if LT jump _pos;            {AS=0 ? then jump }
    if GT jump _pos;            {AS=0 ? then jump }

_neg:                            { negative }
    ar = DM(STATUS);            { toggle PI01 }
    AR=CLRBIT 1 OF AR;
    DM(STATUS) = AR;            { toggle PI01 }
}

```

```

        RTS;

_pos:
        AR = DM(STATUS);           { toggle PI01           }
        AR=SETBIT 1 OF AR;
        DM(STATUS) = AR;           { toggle PI01           }
        RTS;

MULTIPLICICO:
        ENA M_MODE;                { Integer mode for MAC }
        MYO = 0xE61D;
        MR = ar*MYO (SS);          { Compute LSW }

        se = EXP mr0 (HI);
        sr = ASHIFT mr0 (HI);      {scaling actual speed w(n+2), multiply by 2}
        MR1 = SR1;
        MR0 = SR0;

        AR = ASTAT;
        AR = SETBIT 6 OF AR;
        ASTAT = AR;
        if MV sat mr;
        DIS M_MODE;                { Disable the integer mode for MAC }

        RTS;

{
        Floating-Point Multiply/Accumulate
                n
                z =sum ( x(i) * y(i) )
                i=1

        Calling Parameters
                I0 --> x Buffer
                L0 = buffer data length (2*N)
                I4 --> y Buffer
                L4 = coef table length (N)
                M0, M4 = 1
                CNTR = Filter length - 1 (N-1)
                MX0 = Excess Code

        Return Values
                AR = Exponent of z
                SR1 = Fraction of z

        Altered Registers
                AF,AR,AX0,AX1,AY0,AY1,MX1,MY1,SE,MR,SR

        Computation Time
                13*(n-1)+16
}

.ENTRY fp_mac;

```

```

fp_mac: AX0=DM(IO,MO);           {Get 1st Ex}
      AYO=DM(H_EXP);           {Get 1st Ey}
      AF=AX0+AYO, MX1=DM(IO,MO); {Add exp., get 1st Fx}
      AR=PASS AF, MY1=PM(I4,M4); {Get 1st Fy}
      AX1=AR, MR=MX1*MY1(RND);  {Multiply fractions}
      IF MV SAT MR;            {Check for overflow}
      SE=EXP MR1(HI);
      AY1=SE, SR=NORM MR1(HI);  {Normalize}
      AR=AX1+AY1, AX0=DM(IO,MO); {Add, take 2nd Ex}
      AX1=AR;
{ AYO=DM(H_EXP);           {take 2 Ey}
  DO macc UNTIL CE;
      AF=AX0+AYO, MX1=DM(IO,MO); {Compute product exp.}
      AR=AX1-AF, MY1=PM(I4,M4);  {Sum exp. > product exp.?}
      IF GT JUMP shiftp;        {Yes, shift product}
      SE=AR, MR=MX1*MY1(RND);   {No, shift sum}
      IF MV SAT MR;
      AY1=MR1, AR=PASS AF;
      AX1=AR, SR=ASHIFT SR1(HI);
      JUMP add;
shiftp: AF=PASS AR;
      AR=-AF;
      SE=AR, MR=MX1*MY1(RND);
      IF MV SAT MR;
      AY1=SR1, SR=ASHIFT MR1(HI);
add:    AR=SR1+AY1, AX0=DM(IO,MO); {Accumulate}
      SE=EXP AR(HIX);
      AY1=SE, SR=NORM AR(HI);    {Normalize}
{      AR= AX1+AY1, AYO=DM(I1,MO); {}
      AR= AX1+AY1;              {}
macc:   AX1=AR;
      SR0=MX0;                  {Get bias}
      AF=PASS SR0;
      AR=AX1-AF;                {Subtract bias}
      RTS;
{
  Convert 1.15 fixed-point to two-word floating-point

  Calling Parameters
      AR = fixed point number    [1.15 signed twos complement]
      AX0 = exponent bias (0=unbiased) [16.0 signed twos complement]

  Return Values
      AR = biased exponent       [16.0 signed twos complement]
      SR1 = mantissa             [1.15 signed twos complement]

  Altered Registers
      SE,SR,AYO,AR

  Computation Time
      5 cycles
}

```

```

.ENTRY fltone;

fltone: SE=EXP AR (HI);      {Determine exponent}
        SR=NORM AR (HI);    {Remove redundant sign bits}
        AYO=SE;
        AR=AXO+AYO;        {Add bias}
        RTS;

{
  Convert two-word floating-point to 1.15 fixed-point

  Calling Parameters
    AXO = exponent          [16.0 signed twos complement]
    AYO = exponent bias    [16.0 signed twos complement]
    SI = mantissa          [1.15 signed twos complement]

  Return Values
    SR1 = fixed-point number [1.15 signed twos complement]

  Altered Registers
    AR,SE,SR

  Computation Time
    4 cycles
}
.ENTRY fixone;

fixone: AR=AXO-AYO;          {Compute unbiased
exponent}
        SE=AR;
        SR=ASHIFT SI (HI);  {Shift fractional part}
        RTS;

.ENDMOD;

```

Apéndice C

Publicaciones realizadas por el autor

Las publicaciones realizadas por el autor en relación con el tema de tesis son las siguientes:

- Muestreo aleatorio aplicado a procesos que no satisfacen el teorema de Shannon. D. Carrica, M. Benedetti, R. Petrocelli. Anales Vol. 2, pags. 535-539. Congreso Internacional IFAC, Viña del Mar, Chile, Noviembre 1998.
- Electrónica de alta performance para control de alineación de un acelerador lineal de partículas, D. Carrica, M. Benedetti, G. Gonnet. VIII Reunión de trabajo en Procesamiento de la Información y Control (VIIIIRPIC), Vol. 1, pags. 57-1 a 64-1, Septiembre 1999, Mar del Plata.
- Random Sampling Applied to the Measurement of a DC Signal Immersed in Noise. D. Carrica, M. Benedetti, R. Petrocelli, IEEE Tr. on Instrumentation Measurement, Vol. 50, N. 5, pp.1319-1324, October 2001.
- A Comparison between Additive Asynchronous and Jitter Random Sampling. D.O. Carrica, S.A. González, R. García Retegui. Trabajos Completos (CD,

ISBN 950-665-340-2)) XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de Información y Control, Río Cuarto, Sept. 2005.

- Measurement of low-frequency signals immersed in noise by random sampling and FIR filters. D. Carrica, R. Petrocelli, M. Benedetti. Review of Scientific Instruments. Enviado para su publicación, Diciembre 2005.

Las copias de las publicaciones mencionadas se presentan a continuación.

MUESTREO ALEATORIO APLICADO A PROCESOS QUE NO SATISFACEN EL TEOREMA DE SHANNON

Daniel Carrica^{1,2}, Mario Benedetti^{1,2} Roberto Petrocelli²

¹CONICET

²Laboratorio de Instrumentación y Control (LIC)
Departamento de Electrónica, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Mar del Plata
J. B. Justo 4302 - (7600) Mar del Plata - Argentina

Resumen: Se analizan en este artículo las ventajas de la aplicación del muestreo aleatorio a un sistema donde se requiere recuperar en forma digital una señal CC inmersa en ruido de gran amplitud. La señal perturbadora es de tipo impulsivo, con una amplitud de la primera armónica del orden de la CC que se desea medir, y con una frecuencia desconocida aunque, se sabe, mayor que la frecuencia de muestreo. Se demuestran las ventajas de este método y se dan conclusiones.

Palabras Clave: Procesamiento de Señales, Control, Control Digital, Muestreo Aleatorio.

1. INTRODUCCIÓN

En múltiples aplicaciones se requiere la medición de una señal CC que está inmersa en ruido. La solución convencional a este problema requiere la aplicación de filtros de tipo pasabajo. Esta solución puede implementarse en forma analógica o digital.

En el caso de utilizar filtros digitales, se debe muestrear la señal a medir. A fin de evitar problemas de superposición de espectros debido al ruido es imperioso el uso de filtros antialiasing y de frecuencias de muestreo mayores al doble de la frecuencia de corte del mismo (teorema de Shannon).

Existen casos donde hay límites tecnológicos para lograr que el sistema de adquisición satisfaga esta premisa. Por ejemplo, el tiempo de adquisición de los convertidores AD involucrados puede ser

comparable al periodo de la señal a rechazar. Este caso es más probable cuando se tiene una gran cantidad de canales multiplexados para ser adquiridos por un mismo AD.

En estos casos, resulta necesario colocar un filtro antialiasing para cada una de las entradas, ya que la utilización de un único filtro a la salida del multiplexor implica tiempos de establecimiento prohibitivos. Estos filtros pueden ser voluminosos y costosos en el caso de bajas frecuencias de corte.

Ante la presencia de perturbaciones con frecuencias múltiples de la frecuencia de muestreo, la no utilización de filtros antialiasing hace imposible extraer la componente de CC por medio de un filtrado pasabajos, sea éste implementado en forma analógica o digital [5]. Un ejemplo claro se observa en la fig. 1, donde una senoidal de frecuencia f es muestreada a esa misma frecuencia. La información muestreada puede interpretarse como una CC.

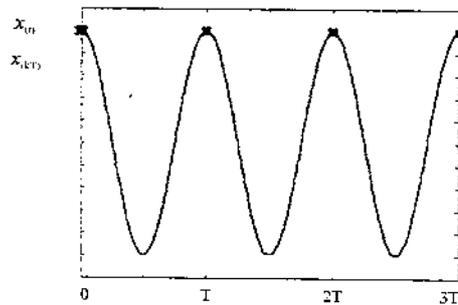


Fig. 1. Senoidal de frecuencia f muestreada a esta misma frecuencia.

En aplicaciones donde la señal que interfiere es de frecuencia cercana a la de muestreo o a un múltiplo de esta, la componente de CC aparece sumamente alterada. Este es un típico problema de aliasing. Se podría inferir que la perturbación de CC se acentúa en la medida en que exista una correlación entre la señal a medir y la función de muestreo.

Es interesante estudiar el comportamiento de un filtro cuando sus muestras son tomadas en forma aleatoria en vez de ser tomadas en forma periódica. Esta técnica se realiza con el propósito que no exista una correlación entre la señal y la señal de muestreo a fin de evitar la utilización de filtros antialiasing.

El tema del muestreo no uniforme fue tratado ya por Openheim y Jhonson [1] y luego por Steiglitz [2] que lo analizan para su aplicación en el campo de la estimación de funciones espectrales. Recientemente se ha utilizado muestreo aleatorio para la medición de funciones espectrales [3]. Otros autores, como Kan et al [4], lo han aplicado para el análisis de les perturbación que provoca el jitter aleatorio que se produce en sistemas donde se requiere muestreo uniforme. En ninguno de estos trabajos esta desarrollado el caso particular que se trata en este artículo.

En este trabajo se presenta la aplicación de técnicas de muestreo aleatorio para señales que contienen perturbaciones de gran amplitud y de frecuencia fundamental múltiplo de la frecuencia de muestreo, además de la componente de CC que es la información relevante que se pretende medir. La recuperación de la información a partir de la señal muestreada se realiza a través de un filtro

536 promediador tipo ARMA.

2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA.

A continuación se planteará la formulación matemática del problema. Sin pérdida de generalidad se realizará el análisis suponiendo que la señal que ha ser eliminada es una senoidal pura con las siguientes características.

Su frecuencia ω es fija aunque desconocida, posee fase aleatoria ϕ y una amplitud B . La componente CC es de amplitud A . La expresión de la señal de entrada es entonces:

$$x_{(t)} = A + B \cos(\omega t + \phi) \quad [1]$$

La variable aleatoria ϕ posee función de densidad de probabilidad uniforme entre $-\pi$ y π .

Para realizar el muestreo se propone una función de muestreo ideal, $\delta(k)$, cuyo intervalo de muestreo vale:

$$T_i = T_{AD} + \tau_i \quad [2]$$

Donde T_{AD} es el menor intervalo de muestreo que tecnológicamente permite el sistema, lo que normalmente coincide con el tiempo de adquisición. Siendo τ_i es una variable aleatoria que puede tomar valor entre 0 y el parámetro T_S , con una función de densidad de probabilidad uniforme:

$$f_{(\tau_i)} = 1/T_S, 0 < \tau_i < T_S \quad [3a]$$

$$f_{(\tau_i)} = 0, \text{ para todo otro } \tau_i. \quad [3b]$$

En la fig. 2 se muestra la función de muestreo $\delta(k)$.

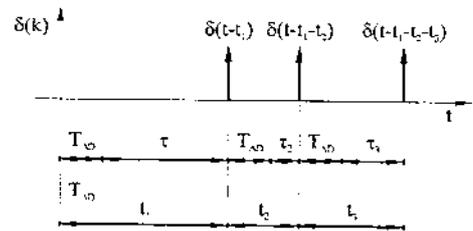


Fig. 2. Función de muestreo propuesta.

Se observa de las Ec. [2] y [3] que la variable aleatoria T_i esta acotada entre T_{AD} y $T_{AD} + T_S$. Para el caso extremo en el que T_S fuera 0, se tendría un período de muestreo constante. Es decir que estamos en el caso del muestreo uniforme. En este caso la "coherencia" entre la función de muestreo y la señal a medir es total. Se advierte por lo tanto que T_S tiene que ser lo suficientemente grande como para garantizar que el grado de correlación entre la señal a medir y la función de muestreo sea

baja.

La salida μ_n del filtro ARMA es la estimación de la componente de CC de la señal de entrada. Su expresión es:

$$\mu_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \quad [4]$$

Siendo x_k el valor de la señal de entrada en los instantes aleatorios k , y n el número de muestras a promediar. El valor instantáneo de la señal ya muestreada para un tiempo de muestreo t_k es:

$$x_k = A + B \cos \left(\omega \sum_{i=1}^k t_i + \phi \right) \quad [5]$$

Se observa que la Ec.[5] presenta $n+1$ variables aleatorias, ϕ y las n variables t_i .

Introduciendo la [5] en la [4], resulta:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A + B \cos \left(\omega \sum_{i=1}^k t_i + \phi \right) \quad [6]$$

A continuación se analizará la calidad de la estimación presentada a través de los indicadores clásicos: la media y la varianza.

La media se puede expresar como:

$$E_{[\mu_n]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n f_{\phi, t_1, t_2, \dots, t_n} d\phi dt_1 dt_2 \dots dt_n \quad [7]$$

Donde $\phi, t_1, t_2, \dots, t_n$ son variables aleatorias estadísticamente independientes. Por esta razón, la función densidad de probabilidad conjunta se puede expresar como:

$$f_{\phi, t_1, t_2, \dots, t_n} = f_{\phi} f_{t_1} f_{t_2} \dots f_{t_n} \quad [8]$$

La cual se reduce a la [9] en virtud de las funciones de densidad ya definidas para ϕ y los t_i .

$$f_{\phi, t_1, t_2, \dots, t_n} = \frac{1}{2\pi T_S^n} \quad [9]$$

Reemplazando la [9] y la [6] en la [7], se obtiene:

$$E_{[\mu_n]} = A + \frac{B}{n2\pi T_S^n} \int_{t_{AD}}^{t_{AD}+T_S} \int_{t_{AD}}^{t_{AD}+T_S} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(\omega \sum_{i=1}^k t_i + \phi \right) d\phi dt_1 dt_2 \dots dt_n \quad [10]$$

En virtud de la [2], la [10] puede expresarse como:

$$E_{[\mu_n]} = A + \frac{B}{n2\pi T_S^n} \int_{t_{AD}}^{t_{AD}+T_S} \int_{t_{AD}}^{t_{AD}+T_S} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(\omega \left(\sum_{i=1}^k T_{AD} + \tau_i \right) + \phi \right) d\phi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad [11]$$

La resolución de la Ec. [11] lleva a la Ec [12]:

$$E_{[\mu_n]} = A \quad [12]$$

Según la ec [12], el resultado del cálculo de la media, para cualquier valor de n, T_{AD} y T_S resulta ser A , que es el valor de CC.

Dicho resultado coincide exactamente con el valor que se quiere medir para cualquier valor de T_{AD} y T_S . Es decir que tanto con muestreo uniforme ($T_S=0$) como con muestreo aleatorio, la media de la estimación resulta satisfactoria.

2.1 Cálculo del error cometido

El resultado anterior no es suficiente para avalar la propuesta ya que no sólo interesa que la media sea coincidente con el valor CC sino también que el nivel de error que se produce en cada estimación posea una probabilidad de aparición suficientemente baja. Esto último se aprecia por medio de la varianza. La expresión de la varianza es:

$$\Gamma_{\mu}^2 = E[\mu_n^2] - E[\mu_n]^2 \quad [13]$$

donde

$$E_{[\mu_n^2]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n^2 f_{\phi, t_1, t_2, \dots, t_n} d\phi dt_1 dt_2 \dots dt_n \quad [14]$$

Introduciendo las ecuaciones [8] y [9] en la [14], resulta:

$$E_{[\mu_n^2]} = \frac{1}{2\pi T_S^n} \int_{t_{AD}}^{t_{AD}+T_S} \int_{t_{AD}}^{t_{AD}+T_S} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \mu_n^2 d\phi dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Esta puede expresarse como:

$$E[\mu_i^2] = \frac{B^2}{n^2 2\pi T_s^n} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \dots \int_0^{T_s} \left(A + \sum_{k=1}^n \cos\left(\omega \sum_{i=1}^k (T_{AD} + \tau_i) + \phi\right) \right)^2 d\phi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad [16]$$

La resolución de la [16] lleva a la siguiente formulación:

$$E[\mu_i^2] = A^2 + \frac{B^2}{2n} + \frac{B^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\pi^k \cos(2\pi k f(T_{AD} - T_s)) \text{sinc}^2\left(\frac{T_s}{2} f\right) \quad [17]$$

Por lo tanto se puede expresar la varianza de la estimación como:

$$\Gamma_\mu^2 = \frac{B^2}{2n} + \frac{B^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\pi^k \cos(2\pi k f(T_{AD} + T_s)) \text{sinc}^2\left(\frac{T_s}{2} f\right) \quad [18]$$

De la [18] se desprende que la varianza depende del número de muestras que se incluyan en el filtro ARMA, de la frecuencia de la perturbación senoidal, y de los valores de los periodos de tiempo T_{AD} y T_s .

Es importante notar que la varianza tiende a un valor constante $\frac{B^2}{2n}$ a medida que aumenta la frecuencia debido a que la sumatoria de la Ec. [18] tiende a cero. Ese valor residual es igual al de la varianza de la señal de entrada dividida el número de muestras, resultado idéntico al obtenido la muestrear ruido blanco gaussiano en forma uniforme.

Además la función representada por la ec [18] no presenta los picos característicos del solapamiento de espectros a ninguna frecuencia. Por esta razón es posible estimar el valor de CC sin hallar frecuencias para las cuales no existe atenuación de la varianza.

Luego, a partir de la varianza y de la función de densidad de probabilidad de la estimación se puede obtener la probabilidad que el error se sitúe entre ciertos límites. Asumiendo que la función densidad de probabilidad de μ es gaussiana, es posible establecer, con un 95% de certeza que los márgenes del error serán $\pm 2\Gamma(\mu)$. De los resultados obtenidos respecto a la varianza, resulta que el error disminuye a medida que el número de muestras se hace mayor.

3. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

538 Como una forma de ratificar estos resultados se realizaron experimentos en MATLAB en los cuales

se muestreó aleatoriamente una señal senoidal cuya fase se estableció en forma también aleatoria para cada experimento. En un conjunto de experimentos se tomo $n=10$ y en otro $n=100$. En todos los casos $T_s=10 T_{AD}$ con $T_{AD}=10$ ms. Se calculó la media según la Ec [4] y se estimó la varianza de 100 experimentos ($m=100$) mediante la formula:

$$\hat{\Gamma}_\mu^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\mu_n(i) - E[\mu_n])^2 \quad [19]$$

Estos experimentos se realizaron para distintas frecuencias de la señal de entrada

En la fig.3 se grafica la varianza normalizada [dB], en función de la frecuencia. Se presentan en forma comparativa los resultados de los experimentos numéricos mediante puntos y las curvas de la ecuación [18] en línea llena. En ambos casos la varianza está normalizada respecto a la varianza de la señal de entrada. Se puede observar que existe una muy buena coincidencia entre ambos

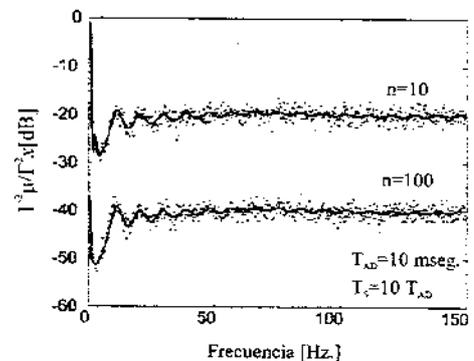


Fig.3. Varianza normalizada en función de la frecuencia. Los puntos representan a los experimentos. Las curvas a la Ec.[18].

En la figura 3 se verifica que la varianza se reduce a medida que la frecuencia se aleja del origen, es decir de la componente CC, llegando a un valor de saturación que es sensible al número de muestras. A mayor número de muestras menor es el valor de saturación de la varianza.

Otro concepto interesante es el relacionado con el grado de correlación entre la señal muestreada y la función de muestreo. Esto está gobernado por la magnitud relativa de la variable T_s respecto a T_{AD} . En la medida en que T_s sea pequeña frente a T_{AD} nos

acercamos más al caso de muestreo uniforme. Esto se aprecia en la fig. 4 donde se observan las gráficas de la varianza normalizada [dB] en función de la frecuencia para $T_{AD}=10\text{ms}$, con $T_S=0$ (muestreo uniforme), $T_S=T_{AD}$ y $T_S=10T_{AD}$. Para $T_S=0$ se observan los picos de varianza en las frecuencias coincidentes con la frecuencia de muestreo o múltiplos de ésta.

La varianza normalizada es mucho menor en el muestreo uniforme que en el muestreo aleatorio para toda frecuencia excepto en los entornos de las frecuencias de "sincronismo". De todos modos el efecto perturbador alrededor de las frecuencias de "sincronismo" es determinante. En cambio, si bien la varianza es mayor, no están presentes los picos cuando se muestrea en forma aleatoria.

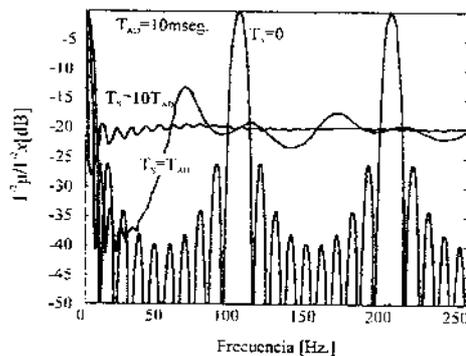


Fig.4. Varianza normalizada, Ec.[18], en función de la frecuencia para $T_S=0$, $T_S=T_{AD}$ y $T_S=10T_{AD}$.

4. CONCLUSIONES

La aplicación del muestreo aleatorio y la promediación mediante un filtro tipo ARMA surge como una solución para realizar la medición de una componente de CC inmersa en señales de gran

amplitud y de frecuencias cercanas a los múltiplos de la frecuencia de muestreo.

Se obtuvieron las expresiones de la media y de la varianza de la estimación así realizada. Estas se contrastaron con los experimentos realizados con Matlab. Los resultados muestran una importante reducción del efecto perturbador y permiten seleccionar el número de muestras apropiado de acuerdo a las necesidades de precisión.

5. AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), a la Universidad Nacional de Mar del Plata y a la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN) por el apoyo para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Oppenheim A. V. and Johnson D. H., Discrete Representation of Signals, Proc. IEEE, Vol.60, No.6, pp 681-691, June 1972.
- [2] Steiglitz K., The Equivalence of Analog and Digital Signal Processing, Information and Control, Vol. 8, No.5, pp. 455-467, Oct. 1965.
- [3] Mirri D et al. A Broad-band Harmonic Vector Voltimeter Based on a Random Sampling Strategy, Proceedings of Instrumentation and Measurement Tech. Conference (IMTC/94), pp. 1012-1015, Hamamatsu, Japan, May 1994.
- [4] Kan E.P.F., Aggarwal, J.K. (1972). Randomly Sampled Digital Filters, IEEE Tr. On Audio and ElectroAcustics, March 1972.
- [5] Oppenheim A. V. Shafer R. W. Discrete-time Signal Processing. 1989. Prentice Hall.

VIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control – 23 al 25 de setiembre de 1999 – Mar del Plata

ELECTRÓNICA DE ALTA PERFORMANCE PARA EL CONTROL DE ALINEACIÓN DE UN ACELERADOR LINEAL DE PARTÍCULAS

D. Carrica^{1,2}, M. Benedetti^{1,2}, G. Gonnet²

¹CONICET

²Laboratorio de Instrumentación y Control - Dto. de Electrónica
 Fac. de Ingeniería - Universidad Nacional de Mar del Plata
 J. B. Justo 4302 – (7600) Mar del Plata, Argentina
 e-mail: carrica@fi.mdp.edu.ar

Abstract: Se presentan los lineamientos generales de la Electrónica de alta performance para el Sistema de Alineación del acelerador lineal de partículas CLIC. También se muestran las características más importantes del mismo. El objetivo central es tener una visión global de los problemas y de las soluciones encontradas.

1. INTRODUCCIÓN

La Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN) está estudiando un nuevo acelerador lineal (CLIC) a fin de obtener colisiones electrón-positrón con energías en el rango de los TeV. El CLIC tiene una longitud de 4 km y se fundamenta en un alto gradiente de aceleración del haz (100 MV/m) y una alta frecuencia (30 GHz) con una generación RF por medio del método del doble acelerador (Two Beam Acceleration). Los pulsos de potencia son extraídos del acelerador excitador (Drive Beam) por medio de estructuras de transferencia de potencia y alimentan al acelerador principal (Probe Beam) a través de guías de onda.

La principal desventaja de la opción de alta frecuencia surge del pequeño iris del acelerador que ocasiona la generación de fuertes campos parásitos

que aumentan con la tercera potencia de la frecuencia. A fin de evitar que la emitancia teórica del haz sea diluida por el efecto mencionado, se han incluido sofisticados métodos de corrección de la trayectoria del haz así como una alineación de la estructura del haz con una alta precisión.

Con el objeto de verificar la factibilidad del CLIC, se construyó un acelerador similar pero de menor longitud, denominado (CLIC Test Facilities 2, CTF2) [1]. El CTF2 consiste en cuatro módulos idénticos. Cada módulo tiene una longitud de 1.4 mts y consiste en dos aceleradores con un "girder" y un "quadrupole" por acelerador. Los girders son los elementos que soportan mecánicamente las cavidades del acelerador mientras que los cuadrupoles tienen por objeto la concentración de los haces de partículas. En la fig. 1 se esquematiza la distribución de los módulos con sus girders y cuadrupoles.

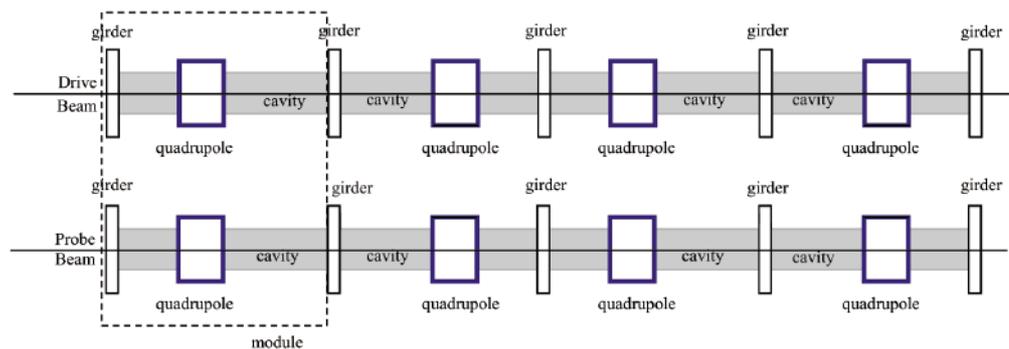


Fig. 1. Girders y cuadrupoles en el CTF2.

El sistema de control de alineación del CTF2, tal como el del CLIC, debe regular con una precisión de 10 μ la posición de los girders y de los cuadrupoles a fin de que la trayectoria del haz evolucione alineada a lo largo del eje axial de cavidades y cuadrupoles, a pesar de las múltiples perturbaciones que afectan la posición del mismo.

El control de alineación requiere por lo tanto sensores, que miden la posición respecto del haz de partículas, y accionamientos que desplacen girders y cuadrupoles para mantener alineado el sistema.

Sin embargo no es posible realizar el control de alineación tomando al haz como referencia debido a su dinámica mucho más rápida respecto del sistema de alineación (lento por ser un sistema mecánico).

VIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control – 23 al 25 de setiembre de 1999 – Mar del Plata

Por lo tanto, la alineación se realiza respecto de una catenaria que está pre-alineada con la trayectoria teórica del haz [2] en lugar de hacerlo respecto de éste. La catenaria se aparta de una recta y los errores correspondientes son conocidos y por lo tanto pueden ser corregidos. Los términos de corrección afectan sólo a las componentes verticales de las mediciones. Los sensores de posición de la catenaria se denominan WPS (Wire Position Sensor) y están dispuestos solidariamente a girders y cuadrupoles, como se observa en la fig. 2.

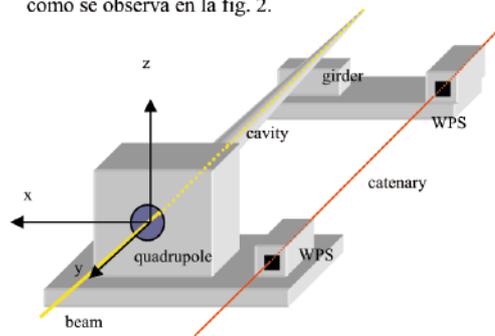


Fig. 2. Disposición de los WPS en girders y cuadrupoles.

En cuanto a las características dinámicas de las lecturas de los WPS, éstas exhiben perturbaciones senoidales amortiguadas de gran nivel en el rango de frecuencias entre 30 y 50 Hz. Este efecto se debe a la resonancia mecánica de la referencia. A frecuencias menores de 30 Hz no existen alteraciones significativas en comparación con la resolución solicitada. A fin de filtrar las perturbaciones se

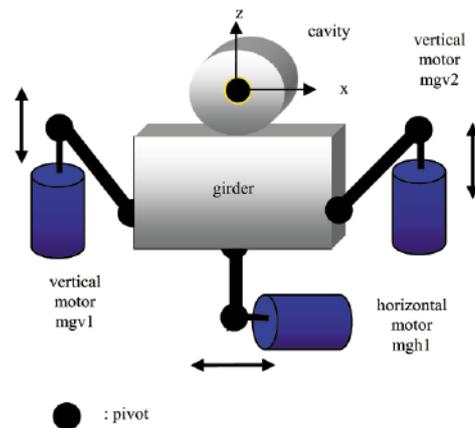


Fig. 3. Disposición de motores en girders y cuadrupoles.

Los desplazamientos deben respetar las leyes mecánicas a fin de evitar los errores por “pérdida de paso”. En virtud de la inercia mecánica, el rozamiento y el par de carga a vencer, es necesario limitar las aceleraciones. Por esta razón se optó por velocidades bajas y constantes para los

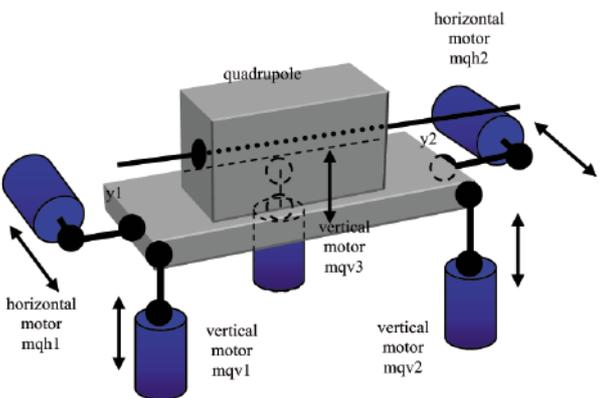
implementan filtros de promediación (MF) que son aplicados a todas las salidas de los sensores.

Existen errores de alineación tanto según el eje x como según el eje z, de acuerdo a los ejes de coordenadas de la fig. 2. El error de alineación máximo permitido, tanto para girders como para cuadrupoles, según x o según z, es de 10 μ .

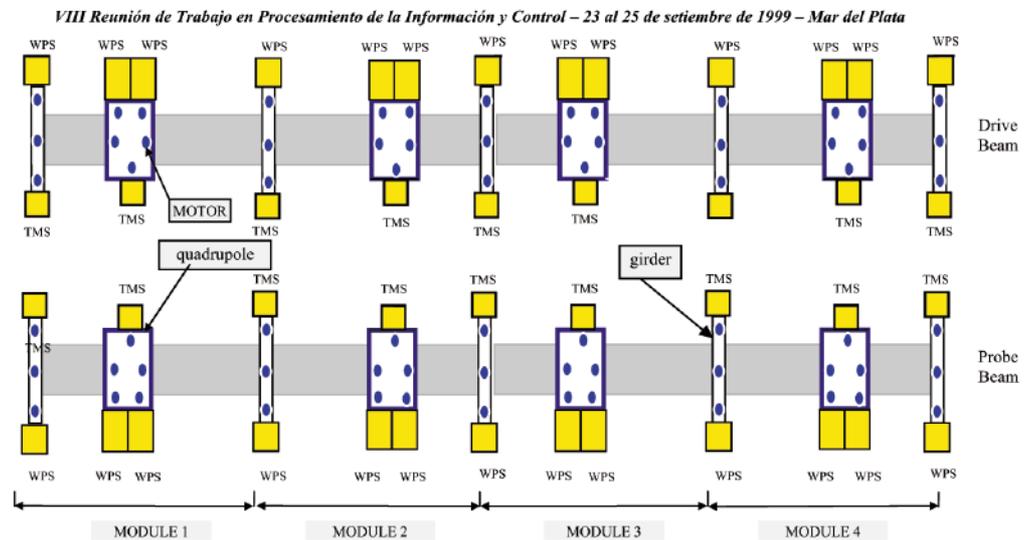
El desplazamiento de girders y cuadrupoles se realiza por medio de motores paso a paso. Los girders, que soportan las cavidades, están movidos por tres motores, mientras que los cuadrupoles están movidos por cinco motores, todo a través de acoplamientos por rótulas, como se representa en la fig. 3.

Los mecanismos mostrados en la fig. 3 están asociados a movimientos circulares, cuyas ecuaciones no lineales están desarrolladas en [3]. Estas ecuaciones incluyen la inclinación de girders y cuadrupoles. Los ángulos de inclinación, según las tres dimensiones, α_x , α_y y α_z , son medidos por sensores de inclinación, TMS (Tilt Meter Sensor).

En la fig. 4 se observa la distribución de motores y sensores para la sección completa de cuatro módulos del CTF2. La cantidad total de recursos a controlar es: 70 motores, 26 WPS y 18 TMS. Como cada WPS entrega dos señales (una para x y otra para z) y cada TMS provee tres (una para cada dimensión), se deben adquirir 106 señales correspondientes a WPSs y TMSs. A esto hay que agregar las lecturas de sensores de temperatura y de nivel hidrostático, presentes en el sistema, con lo que se llega a 134 señales a adquirir para una sección de cuatro módulos.



desplazamientos de poca cantidad de pasos (<100) y la ejecución de perfiles de velocidad para los movimientos de mayor cantidad de pasos. Los perfiles de velocidad implican una variación de la velocidad que en este caso es de tipo trapezoidal.



Del desarrollo anterior puede concluirse que la electrónica del sistema de alineación debe cumplir con las siguientes especificaciones:

- Gran cantidad de señales a leer, filtrar y procesar (134).
- Gran cantidad de motores a accionar (70), siguiendo perfiles de velocidad.
- Alta exactitud (10 micrones).
- Velocidad de procesamiento: debido a la dinámica del sistema, la lectura de las 134 señales, su procesamiento, la ejecución de los correspondientes algoritmos de control, la ejecución de algoritmos de movimiento de los motores (perfiles de velocidad) deben realizarse en menos de 3 ms. Esto impone exigencias en el tiempo de procesamiento.
- Capacidad de comunicación con sistemas más jerárquicos: el sistema debe comunicarse con otro a través de un bus VME. La cantidad de datos y parámetros a intercambiar demanda un flujo de información de 512 palabras de 16 bits.
- Bajo costo: la perspectiva de aplicar la electrónica del CTF2 (4x1.4 mts.) al CLIC (4000 mts), lo que implica multiplicarlo por aproximadamente 700 veces, impone condiciones de costo.
- Reducción de volumen de cableado: La cantidad de motores y sensores justifican la búsqueda de alternativas de cableado que permitan una significativa reducción del mismo.
- Inmunidad a ruidos eléctrico y por radiación: la exigencia de gran exactitud y la presencia de un ambiente fuertemente radiactivo generan restricciones en cuanto a las condiciones de EMC (Compatibilidad Electromagnética).
- Flexibilidad y programabilidad: son necesarias para dar respuesta a cambios propios de una etapa de desarrollo experimental como la del CTF2 y luego poder extenderlo al CLIC.
- Modularidad: a fin de poder adicionar módulos con la misma tecnología a versiones cada vez más elaboradas.

En este trabajo se presenta un sistema electrónico capaz de cumplir con las exigencias planteadas en el CTF2 y aplicable posteriormente al CLIC.

2. ARQUITECTURA GENERAL DEL SISTEMA

A fin de cumplir las especificaciones, la electrónica propuesta se sustenta en los siguientes principios:

- Utilización generalizada de arreglos lógicos programables (FPGA).
- Utilización de sistemas inteligentes de alta velocidad y alta capacidad de procesamiento.
- División del sistema en módulos de características semejantes.
- Aislación galvánica entre placas y módulos.

La electrónica del sistema de alineación en el CTF2 está compuesta por dos sistemas casi idénticos que operan independientemente uno de otro, salvo por el hecho de que ambos son esclavos del control más jerárquico. Uno está dedicado al control del Drive Beam y el otro al del Probe Beam.

Cada uno de estos sistemas consta a su vez de tres subsistemas: subsistema de control, subsistema de adquisición, y subsistema de accionamientos, como se observa en la fig. 5.

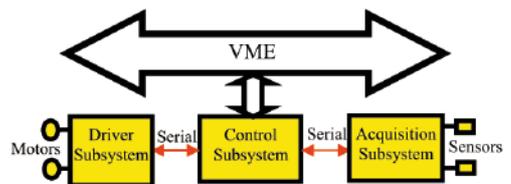


Fig. 5. Arquitectura general de la electrónica del CTF2.

2.1 Subsistema de Control

El subsistema de control realiza cíclicamente las funciones que se observan en el diagrama de flujo de la fig. 6:

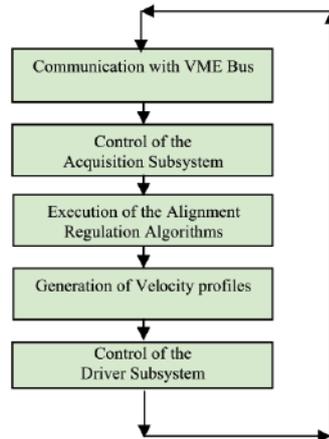


Fig. 6. Diagrama de flujo del Subsistema de Control.

El sistema de control de alineación debe comunicarse con un sistema de mayor jerarquía a través de un bus standard VME [4]. La comunicación es bidireccional, es decir que el sistema de alineación recibe y envía información al sistema más jerárquico.

A continuación se detalla el tipo de información recibida y transmitida.

- Información recibida: Offsets para corrección de la catenaria, ajuste individual de sensores, parámetros de los MF, parámetros de los perfiles de velocidad, características de cada motor (relación μ /paso, corrientes), desplazamiento deseado de cada motor, características de los contadores de μ acumulados por motor.

- Información transmitida: Adquisiciones TMS y WPS, salidas MFA de los TMS y WPS, estado de cada motor (falla, posición), estado de los contadores de μ acumulados.

El subsistema de control opera como esclavo del control más jerárquico y está implementado a través de una placa 3U, (Alignment Main Control Card, AMCC), que se inserta en el rack VME. La comunicación con el bus VME es de tipo paralelo.

Luego de comunicarse con el bus VME, la AMCC inicia el proceso de adquisición de todos los sensores. Para ello envía al subsistema de adquisiciones el comando de start conversion e inmediatamente comienza a recibir las lecturas correspondientes al ciclo anterior, que son transmitidas por el subsistema de adquisiciones.

Una vez obtenidos los parámetros vía bus VME y luego de realizadas las adquisiciones, el subsistema

de control está en condiciones de ejecutar los algoritmos de regulación de alineación. Los resultados de este proceso sirven para obtener los desplazamientos que debe realizar cada motor. Los mismos son previamente procesados a fin de realizar los movimientos en el marco de perfiles de velocidad. Finalmente las secuencias a ejecutar por cada motor son enviadas al subsistema de accionamientos donde se encuentran las etapas de potencia.

La arquitectura de la AMCC se observa en la fig. 7.

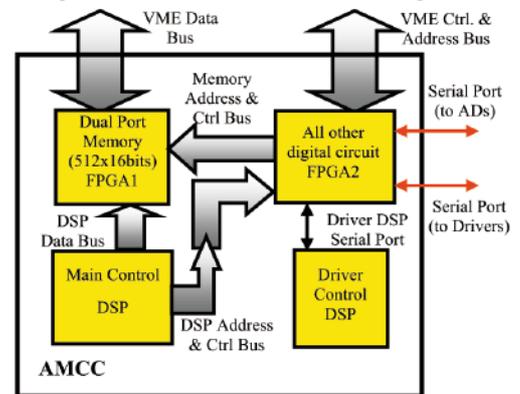


Fig. 7. Arquitectura de la AMCC.

La AMCC posee una memoria “dual port” de interfase, la mitad destinada a la recepción de datos desde el bus VME y la otra mitad a la transmisión. Esta placa utiliza 2 DSP. Uno está dedicado al control de todas las comunicaciones del sistema de alineación y a la ejecución de los algoritmos de la regulación. El otro DSP se encarga de la generación de los perfiles de velocidad y el control del movimiento de todos los motores paso a paso.

La AMCC utiliza además tecnología FPGA (Arreglos Lógicos Programables). Toda la lógica y la “dual port memory” de interfase están implementadas a través de las FPGA. La utilización de las tecnologías DSP y FPGA permite la ejecución de todas las actividades en una sola placa. Además, en virtud de que todo es programable, se logra una gran flexibilidad en el desarrollo. Esto es importante teniendo en cuenta la etapa todavía experimental del CTF2.

2.2 Subsistema de adquisición

El subsistema de adquisición realiza las siguientes funciones:

- Adquisición de las señales de los sensores (67 señales) con una resolución de 16 bits.
- Comunicación con el subsistema de control.

La arquitectura del subsistema de adquisición consiste en un conjunto de chasis que se intercomunican entre sí a través de una comunicación

VIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control – 23 al 25 de setiembre de 1999 – Mar del Plata

serie tipo daisy-chain, fig. 8. Cada chasis contiene placas donde se realiza el acondicionamiento electrónico de las señales provenientes de los sensores. Además cada chasis dispone de una placa de adquisición.

Las placas de adquisición son de 14 canales cada una, con una resolución de 16 bits y una frecuencia de muestreo máxima de 500 Hz. Esta placa posee una electrónica digital que administra la selección de

canales, así como la comunicación serie del convertidor AD. La placa de adquisición posee también la lógica de comunicación serie del chasis y el correspondiente circuito de decodificación. Todos los elementos digitales mencionados están implementados en una FPGA, permitiendo lograr una placa de dimensiones reducidas (3U: 100x160 mm), cuya distribución se observa en la fig. 9.

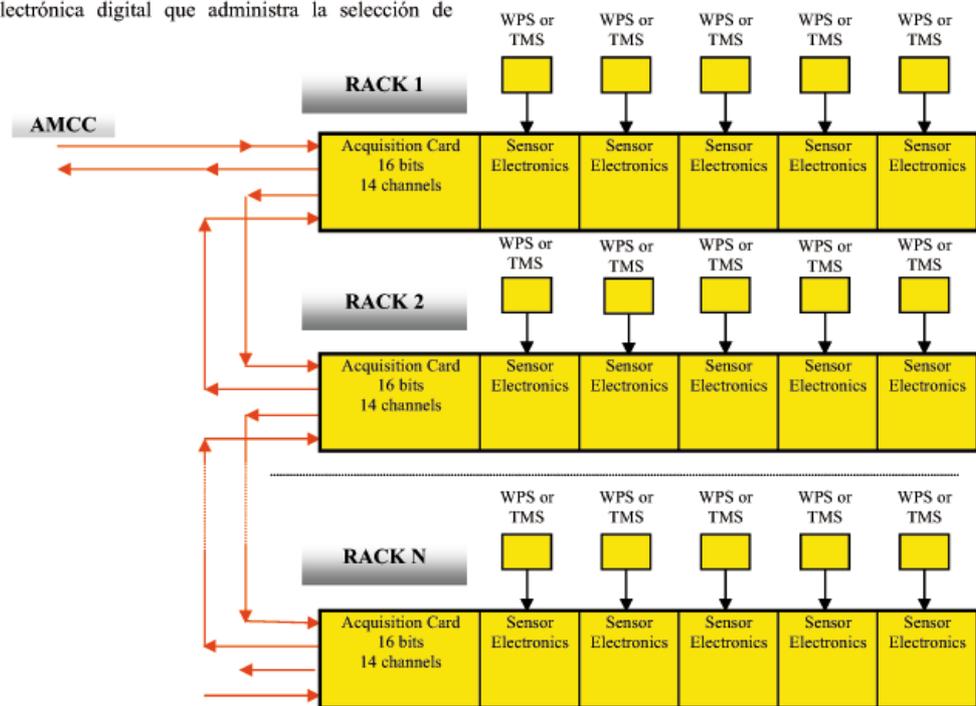


Fig. 8. Subsistema de Adquisiciones.

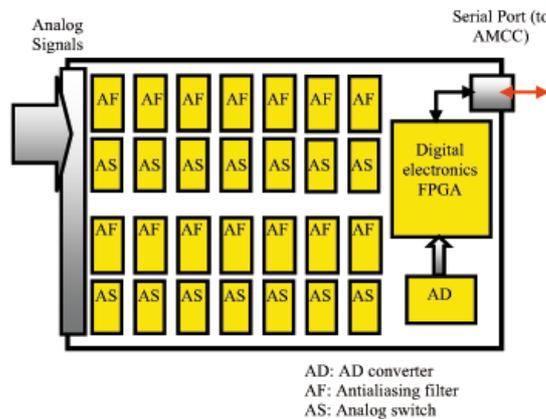


Fig. 9. PCB de Adquisición.

La comunicación serie tipo daisy-chain permite una gran flexibilidad ya que posibilita agregar tantos

chasis como se necesite. Esto está limitado sólo por la capacidad de ser direccionada de cada placa de adquisición. Dado que poseen 5 bits de dirección, la capacidad máxima es de 32 placas, o sea 32 chasis. Esto expresado en cantidad de señales, a 14 canales por placa, resulta en 448 señales. Estas cifras corresponden a la cantidad máxima de canales que puede atender cada una de las AMCC. En la aplicación CTF2 se necesita atender sólo a 67 señales.

La comunicación serie entre los subsistemas de control y de adquisición es asincrónica, con una velocidad de 5 Mbits/s y se utilizan fibras ópticas como medio físico a fin de eliminar las perturbaciones electromagnéticas producidas por la radiación generada por los haces de partículas.

2.3 Subsistema de accionamientos

VIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control – 23 al 25 de setiembre de 1999 – Mar del Plata

El subsistema de accionamientos está estructurado alrededor de un conjunto de racks, comunicados entre sí en forma daisy-chain, fig. 10. Cada rack contiene hasta cinco placas (Driver PCB) que poseen

la electrónica de accionamiento para 6 motores cada una. Por lo que cada rack es capaz de manejar hasta 30 motores. La comunicación interna del rack se realiza a través de un bus plane.

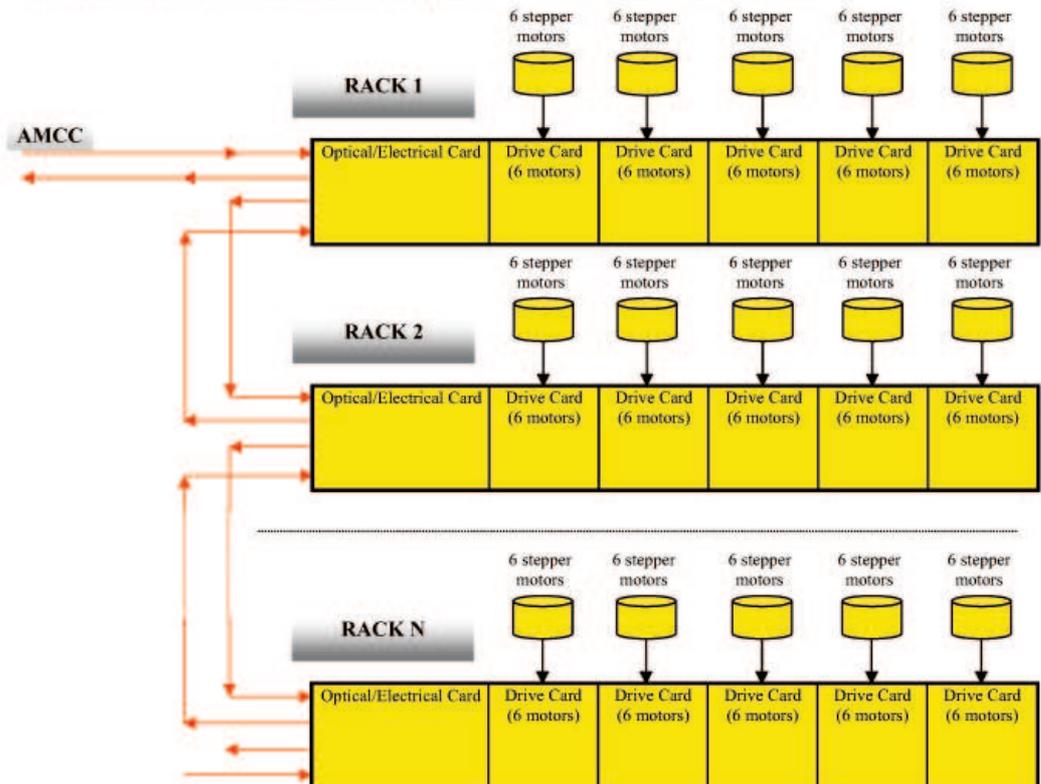


Fig. 10. Subsistema de Accionamientos.

La comunicación inter-racks y con la respectiva AMCC se realiza a través de fibra óptica debido a los problemas de ruido ocasionados por la radiación del haz de partículas. En cada rack existe una placa que transforma la señales ópticas en eléctricas. La comunicación entre el subsistema de control y cada Driver PCB (a través del rack) es serie asincrónica, con una velocidad de 5 Mbits/s.

La electrónica de potencia necesaria para el accionamiento de los seis motores, con una corriente de fase máxima por motor de 2 A, se realiza en la Driver PCB. Cada motor es accionado con pulsos de corriente (corrientes impuestas) que son generados en forma PWM. Aquí se incluye un sistema de monitoreo de fallas (fallas de circuito abierto) y la correspondiente protección.

En la Driver PCB, además de la lógica de control asociada a la generación del PWM y a la protección de fallas, existe circuitería adicional para la programación de la corriente máxima de cada motor, el manejo de la información del estado de cada motor

(falla y posición de cada motor), la comunicación asincrónica, y la decodificación de direcciones. Todo esto está implementado a través de una FPGA con una capacidad de 6000 compuertas lógicas. De esta forma se obtiene una placa 3U (100x160mm), direccionable, capaz de accionar seis motores, con protecciones incluidas, muy flexible, que permite la programación de las corrientes de cada motor, fig. 11.

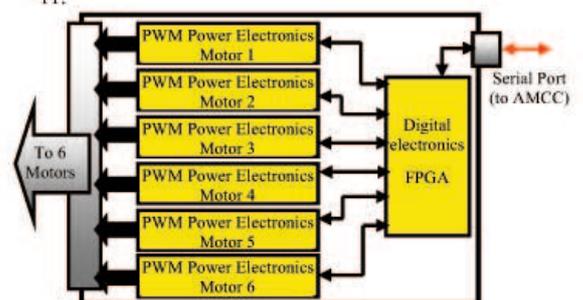


Fig. 11. Driver PCB.

VIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control – 23 al 25 de setiembre de 1999 – Mar del Plata

La dirección de cada Driver PCB consiste en una palabra de 5 bits, por lo que la AMCC puede controlar hasta 32 Driver PCB, es decir hasta 192 motores. En la aplicación CTF2, cada AMCC acciona sólo 35 motores.

De todas formas, la cantidad de motores que se pueden controlar está limitada por la velocidad de procesamiento de la AMCC. Con los algoritmos de movimiento desarrollados para esta aplicación, el tiempo de procesamiento necesario para que un grupo de seis motores se mueva un paso es de $30 \mu\text{s}$. En términos de velocidad de movimiento esto significa que la velocidad máxima a la que se puede mover un motor es de $1/(N \cdot 30 \mu\text{s})$, siendo N la cantidad de grupos de seis motores que se desea mover simultáneamente. Por lo tanto, las velocidades máximas posible varían entre 33333 pasos/s y 1040 pasos/s según se accionen en simultáneo un solo grupo o 32, respectivamente.

Dado que el CTF2 requiere el movimiento simultáneo de 7 grupos de motores ($N=7$), la velocidad máxima que permite el sistema es de 4760 pasos/s, que excede las necesidades del CTF2 cuando el sistema está a lazo cerrado. En este modo los desplazamientos son pequeños y las velocidades son reducidas.

Cuando el sistema está a lazo abierto, pueden ser necesarios grandes desplazamientos pero accionando un solo motor a la vez. En este caso las velocidades, que siguen perfiles de velocidad, alcanzan los 33333 pasos/s, que excede largamente la velocidad mecánica máxima de los motores que se utilizan en esta aplicación.

3. RESULTADOS

Se cumplieron todos los requerimientos de CTF2, a saber: (a) 134 señales a leer y procesar; (b) 70 motores a accionar, siguiendo perfiles de velocidad con velocidades máximas de hasta 5000 pasos por segundo; (c) 3 ms de tiempo de procesamiento para adquirir las 134 señales, ejecutar los algoritmos de control y ejecutar los algoritmos de movimiento de los motores (perfiles de velocidad); (d) comunicación con un sistema más jerárquico vía bus VME.

La magnitud del sistema resultante es la siguiente:

- 2 AMCC,
- 4 Driver Racks que incluyen a 12 Driver PCBs,
- 13 AD Racks que incluyen a 13 AD16bits PCBs.
- Todo el sistema es comandado a través de sólo 4 fibras ópticas en el subsistema de adquisición y otras 4 fibras ópticas en el subsistema de accionamientos. Esto es gracias a la utilización de esquemas de tipo serie en todas las comunicaciones.

Se verificó experimentalmente la exactitud obtenida en los sistemas de adquisición con el sistema a lazo abierto. Las entradas al sistema de adquisición fueron

señales cc de alta estabilidad. Se realizaron ensayos para mostrar la variación de las lecturas alrededor del valor adquirido. Los resultados obtenidos se muestran en la fig. 12(a). Se observa que en 100 adquisiciones la desviación máxima ha sido de 2 lsb (1 lsb corresponde a $0,3 \mu$). Los valores estadísticos obtenidos son los siguientes: valor medio = 4000,16, desviación standard = 0,746.

Se verificó luego la exactitud del sistema de alineación a lazo cerrado. Para ello se realizaron lecturas de los WPS durante el proceso de alineación activa. Las lecturas mostraron una desviación máxima de 1μ como se aprecia en la fig. 12(b). Los valores estadísticos correspondientes son los siguientes: valor medio = 0,08, desviación standard = 0,493.

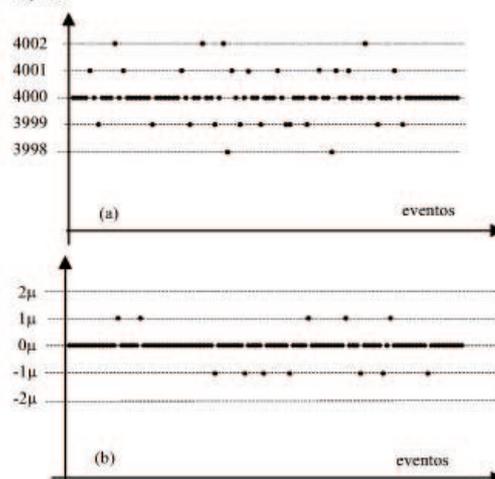


Fig. 12. (a) Tests de Adquisición: entrada 5,000 V (4000 cuentas), 100 adquisiciones. (b) Errores de Alineación, 100 adquisiciones.

4. CONCLUSIONES

A pesar de la magnitud y complejidad del sistema a controlar, se ha concebido un esquema sumamente modular y compacto, implementado en sus diferentes placas con tecnología FPGA y procesadores de alta velocidad y gran capacidad de procesamiento (DSP).

El sistema posee una gran inmunidad al ruido debido principalmente a la utilización de aislación galvánica (fibras ópticas) entre los distintos componentes del sistema. Además se ha logrado una gran reducción del cableado de fibras ópticas gracias a la utilización generalizada de comunicaciones tipo serie.

Se han logrado muy buenos indicadores de performance, en particular el bajo error de alineación, que, en los ensayos, dio valores de 1μ frente a los 10 exigidos.

VIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control – 23 al 25 de setiembre de 1999 – Mar del Plata

Gracias a la flexibilidad lograda así como a la simplicidad y reducción de componentes, el sistema ha demostrado ser apto para su utilización en el desarrollo del CLIC, aún ante ulteriores adiciones de cantidad de módulos a controlar. De hecho el sistema podría controlar módulos que involucraran hasta un máximo de 384 motores y 896 sensores sin realizar modificaciones sustanciales.

El sistema se ha montado en el CTF2 y está funcionando correctamente.

REFERENCIAS

- [1] R. Bossart, H. Braun, F. Chautard, M. Comunian, J.P. Delahaye, J.C.Godot, I. Kamber, J.H.B. Madsen,, L. Rinolfi, S. Schreiber, G. Suberlucq, I. Wilson, W. Wuensch, "Performances obtained with the CERN Linear Collider Test Facility", European Particle Accelerator Conference, London, 1994, pp. 680-682.
- [2] W. Coosemans, H. Mainaud, "Pre-Alignment of CLIC Using the Double-Wire Method", CLIC-Note 343, 21/5/97, CERN.
- [3] P. Poirier, "L'Alignement Dynamique submicrometrique de Sections Acceleratrices", Memoire de soutenance du Diplome de Recherche Specialisee en Sciences, Universite Louis Pasteur de Strasbourg, 1991.
- [4] "American National Standard for VME64", VMEbus International Trade Association, 1995.

Random Sampling Applied to the Measurement of a DC Signal Immersed in Noise

Daniel Carrica, *Senior Member, IEEE*, Mario Benedetti, and Roberto Petrocelli

Abstract—This paper introduces the use of random sampling for the recovery of dc signals immersed in noise. This technique avoids the use of antialiasing filters even if the disturbance frequencies are higher than the maximum sampling frequency available. The use of random sampling and a moving average (MA) filter for the measurement of dc signals is mathematically and experimentally demonstrated.

Index Terms—A/D acquisition, dc measurement, random sampling, signal processing.

I. INTRODUCTION

MEASUREMENTS of a dc component immersed in an ac disturbance require either analog or digital processing in order to recover the actual value of the dc component. When digital processing is used, the signal to be measured has to be sampled with a frequency higher than the double of the highest input frequency (Shannon Theorem). There are certain cases in which the acquisition system has restrictions to meet this requirement. For example, the acquisition time of the system could not be short enough. This is even more likely if the same A/D converter acquires numerous multiplexed channels. In these cases, a bulky and expensive low-frequency antialiasing filter per input is needed. Furthermore, the use of a single filter at the multiplexer output results in unacceptable settling times even for low-resolution acquisition system.

Elimination of antialiasing filters leads to distortion in the measurement because the information resulting from the uniform sampling can be wrongly interpreted as a dc. Moreover, a low-frequency distortion is more noticeable when the sampling frequency is close to any disturbance harmonics. These errors are bigger when the correlation between the interfering signal and the sampling function is higher. For this reason, it is worth considering the use of random sampling instead of uniform. The purpose of the random sampling is to reduce or even eliminate the correlation between the disturbance and the sampling signal.

The issue of nonuniform sampling was already addressed by Steiglitz [1], and later on by Oppenheim and Johnson [2]. They analyzed its possible application for estimating spectral func-

tions. Filicori *et al.* [3] applied a random sampling strategy and an associated filtering algorithm for the efficient implementation of broad-band measurement instruments based on nonlinear signal conversion. Recently, random sampling has been used for measuring spectral functions [4], [5]. Other authors, such as Kan *et al.* [6] and Frey *et al.* [7], used it to analyze the distortions of the random jitter that occur in those systems where uniform sampling is required.

In the following sections, the elimination of antialiasing filters by using random sampling is analyzed. In Section II, the mathematical formulation of the proposal is developed. The formulation considers a moving average (MA) filter as digital processing. Numerical simulations and experimental results are presented in Sections III and IV, respectively.

II. MATHEMATICAL FORMULATION

The mathematical formulation of the method is presented in this section. The analysis considers that the signal to be eliminated is a pure sinusoidal. This is compatible with an impulsive disturbance, which means signals of the type

$$f(t) = \sum_{n=1}^n \cos(n\omega t). \quad (1)$$

The interference sinusoidal signal has the following characteristics:

- frequency f unknown;
- random phase ϕ , with a uniform probability density function (uniform pdf), ranging from $-\pi$ to π ;
- amplitude B .

Being A , the amplitude of the dc component to recover, the input signal is

$$x(t) = A + B \cos(2\pi ft + \phi). \quad (2)$$

The random sampling is carried out using an ideal sampling function $\delta(t)$, illustrated in Fig. 1. The sampling interval of $\delta(t)$ is T_i

$$T_i = T_{A/D} + \tau_i \quad (3)$$

where $T_{A/D}$ is the minimum sampling interval that the acquisition system can produce. (This is limited by technological factors, usually the acquisition time) and τ_i is a random time with a uniform pdf

$$\begin{aligned} f(\tau_i) &= \frac{1}{T_S}, & 0 < \tau_i < T_S \\ f(\tau_i) &= 0 & \text{for any other } \tau_i \end{aligned} \quad (4)$$

where T_S is the maximum value of τ_i .

Manuscript received September 22, 1998; revised March 19, 2001. This work was supported by the Universidad Nacional de Mar del Plata, CONICET, and the Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (Programa de Modernización Tecnológica, Contrato de Préstamo BID 802/OC-AR), Argentina.

D. Carrica and M. Benedetti are with the Laboratorio de Instrumentación y Control, Departamento de Electrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, 7600 Mar del Plata, Argentina, and also with the Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.

R. Petrocelli is with the Laboratorio de Instrumentación y Control, Departamento de Electrónica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, 7600 Mar del Plata, Argentina.

Publisher Item Identifier S 0018-9456(01)08104-9.

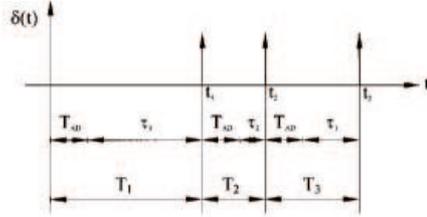


Fig. 1. Proposed sampling function.

The value of T_S sets the correlation between the sampling and input signals. If T_S is zero, the sampling period is constant and randomness disappears. In such cases, coherence occurs between the sampling function and those input signals whose frequencies are multiples of $1/T_{A/D}$. Therefore, T_S must be long enough to ensure a low degree correlation between the sampling function and any input signal.

The output of the MA filter μ_n is an estimation of the dc value and it is given by

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (5)$$

where x_k is the instantaneous value of the input at the sampling time t_k and n is the number of samples in the MA filter. The values x_k are given by

$$x_k = A + B \cos \left(2\pi f \sum_{i=1}^k T_i + \phi \right). \quad (6)$$

It can be seen that (6) includes $k + 1$ random values: ϕ and the sampling intervals T_i , for $i = 1$ to k .

Using (6), (5) becomes

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ A + B \cos \left(2\pi f \sum_{i=1}^k T_i + \phi \right) \right\}. \quad (7)$$

The expected value of μ_n is calculated in order to check the quality of the proposed estimate. The expected value of a function of several random variables is [8]

$$E[\mu_n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n f_{\phi, T_1, T_2, \dots, T_n} d\phi dT_1 dT_2 \dots dT_n \quad (8)$$

where

- $f_{\phi, T_1, T_2, \dots, T_n}$ joint pdf of μ_n ;
- ϕ phase of the perturbation;
- T_1, T_2, \dots, T_n successive sampling periods of the n samples.

Random variables $\phi, T_1, T_2, \dots, T_n$ are statistically independent. Consequently, the joint pdf yields [8]

$$f_{\phi, T_1, T_2, \dots, T_n} = f_{\phi} f_{T_1} f_{T_2} \dots f_{T_n}. \quad (9)$$

Substituting the pdf of $\phi, T_1, T_2, \dots, T_n$ in (9) results in

$$f_{\phi, T_1, T_2, \dots, T_n} = \frac{1}{2\pi T_S^n} \quad \pi \leq \phi \leq \pi, \quad T_{A/D} \leq T_1, T_2, \dots, T_n \leq T_{A/D} + T_S$$

$$f_{\phi, T_1, T_2, \dots, T_n} = 0 \text{ otherwise.} \quad (10)$$

The introduction of (7) and (10) in (8), leads to

$$E[\mu_n] = A + \frac{B}{n2\pi T_S^n} \int_{T_{A/D}}^{T_{A/D}+T_S} \int_{T_{A/D}}^{T_{A/D}+T_S} \dots \dots \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \cos \left(2\pi f \sum_{i=1}^k T_i + \phi \right) d\phi dT_1 dT_2 \dots dT_n. \quad (11)$$

According to (3), (11) can be expressed as

$$E[\mu_n] = A + \frac{B}{n2\pi T_S^n} \int_0^{T_S} \int_0^{T_S} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \cos \left(2\pi f \sum_{i=1}^k (T_{A/D} + \tau_i) + \phi \right) d\phi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n. \quad (12)$$

Finally, the solution of (12) is

$$E[\mu_n] = A. \quad (13)$$

According to (13), the result of the expected value is the dc value to be measured, whatever the values of $n, T_{A/D}$, and T_S . Therefore, uniform sampling ($T_S = 0$) and random sampling give satisfactory values the estimation.

In order to prove that random sampling produces better results than uniform sampling, the error of the former one should be smaller. The variance of the estimate is used to compare both methods and is calculated using the following expression [8]:

$$\Gamma_{\mu}^2 = E[\mu_n^2] - (E[\mu_n])^2 \quad (14)$$

where $E[\mu_n^2]$ is the second-order moment of μ_n and its definition is

$$E[\mu_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n^2 f_{\phi, T_1, T_2, \dots, T_n} d\phi dT_1 dT_2 \dots dT_n. \quad (15)$$

By introducing (10) in (15), we obtain

$$E[\mu_n^2] = \frac{1}{2\pi T_S^n} \int_{T_{A/D}}^{T_{A/D}+T_S} \int_{T_{A/D}}^{T_{A/D}+T_S} \dots \dots \int_{-\pi}^{\pi} \mu_n^2 d\phi dT_1 dT_2 \dots dT_n \quad (16)$$

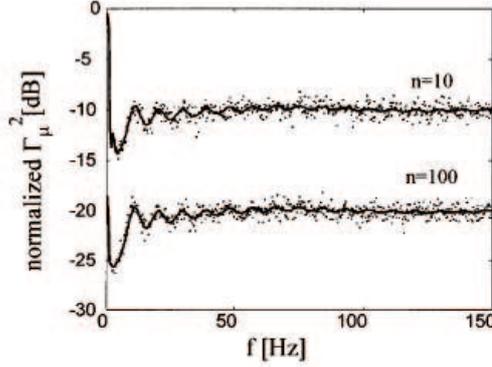


Fig. 2. Normalized variance versus frequency. The dots represent experiments, the solid lines represent (20).

which can be expressed as (17), shown at the bottom of the page. The solution of (17) leads to the following equation:

$$E[\mu_n^2] = A^2 + \frac{B^2}{2n} + \frac{B^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \times \cos\left(2\pi k f \left(T_{A/D} + \frac{T_S}{2}\right)\right) \cdot \sin^2(k f T_S). \quad (18)$$

Therefore, the variance of the estimation can be expressed as

$$\Gamma_\mu^2 = \frac{B^2}{2n} + \frac{B^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \times \cos\left(2\pi k f \left(T_{A/D} + \frac{T_S}{2}\right)\right) \cdot \sin^2(k f T_S). \quad (19)$$

Equation (19) indicates that the variance depends on the amplitude B , the number of samples in the MA filter, the frequency of the sinusoidal disturbance, and the value of the time periods $T_{A/D}$ and T_S .

The variance in (19) is normalized in relation to the disturbance variance $B^2/2$

$$\Gamma_\mu^2 = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \times \cos\left(2\pi k f \left(T_{A/D} + \frac{T_S}{2}\right)\right) \cdot \sin^2(k f T_S). \quad (20)$$

Fig. 2 plots the normalized variance Γ_μ^2 given by (20) as a function of the frequency f (represented by solid lines). The normalized variance of (20) presents a minimum at approximately $1/[2(T_S + 2T_{A/D})]$.

It is interesting to point out that the variance of the estimation approaches a constant value as the frequency increases. This

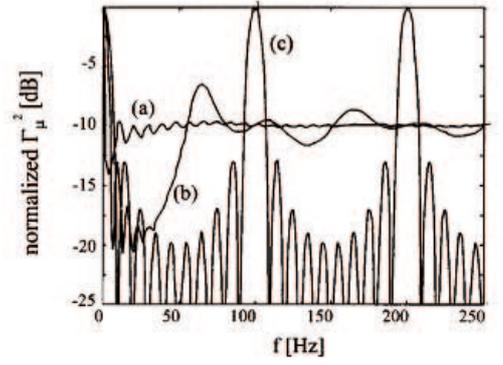


Fig. 3. Normalized variance, (20), versus frequency, for $n = 10$: (a) $T_S/T_{A/D} = 10$; (b) $T_S/T_{A/D} = 1$; and (c) $T_S/T_{A/D} = 0$.

value is equal to the disturbance variance divided by the number of samples, as it is also the case in the uniform sampled Gaussian white noise [9]. Moreover, the function represented by (20) does not show the typical peaks of the spectral overlapping at any frequency. Consequently, it is possible to estimate the value of the dc because the disturbance is properly reduced for all the frequencies.

An uncertain interval can be set from the value of the variance. The pdf of the estimation can be considered as a Gaussian distribution. Therefore, it is possible to establish, with a probability of 95%, that the error margins will be $\pm 2\Gamma(\mu)$ [10]. This uncertain interval can be made small as it is required increasing the number of samples n .

A correlation between the disturbance and the sampling function still exists in this random sampling proposal and it depends on the ratio $T_S/T_{A/D}$. The smaller this ratio is, the closer to the uniform sampling case. This is illustrated by Fig. 3. It shows normalized variance [dB] as a function of frequency for $n = 10$ and $T_{A/D} = 10$ ms, for three cases: (a) $T_S/T_{A/D} = 10$, (b) $T_S/T_{A/D} = 1$, and (c) $T_S/T_{A/D} = 0$. For $T_S/T_{A/D} = 0$, (uniform sampling) the variance peaks at frequencies that are multiple of the sampling frequency. Moreover, it can be observed that the normalized variance is significantly smaller in the uniform sampling than in the random one except for the regions around frequencies which are multiple of the sampling frequency. In these regions, the effect of the disturbing signal is very important and its elimination is the aim of the method that is proposed in this paper.

III. NUMERICAL VERIFICATIONS

Numerical verifications were done to validate the theoretical results. Numerical experiments were carried out using MATLAB. Each experiment consisted of a set of μ_{ni} , where

$$E[\mu_n^2] = \frac{1}{n^2 2\pi T_S^n} \int_0^{T_S} \int_0^{T_S} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \left(nA + B \sum_{k=1}^n \cos\left(2\pi f \sum_{i=1}^k (T_{A/D} + \tau_i) + \phi\right) \right)^2 d\phi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (17)$$

$i = 1, 2, \dots, 100$, being μ_{ni} the output of the MA filter. The MA filter input was a sinusoidal signal of constant frequency f and random phase ϕ_i . This signal was sampled ten times ($n = 10$) in a random way, with sampling intervals given by (3), $T_{A/D} = 10$ ms, and $T_S = 100$ ms. Each μ_{ni} was obtained by (5), where x_k is the sampled value of the input at t_k .

The variance of μ_n along the set of 100 μ_{ni} is given by

$$\hat{\Gamma}_\mu^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\mu_{ni} - E[\mu_n])^2 \quad (21)$$

where $E[\mu_n]$ is the mean value of the μ_{ni} .

Three hundred experiments were done, for $n = 10$, sweeping the frequency from 0 to 150 Hz in steps of 1/2 Hz, and another 300 were done for $n = 100$. Fig. 2 shows the results of these experiments. The normalized variance versus frequency is represented by dots while the theoretical result from (20) is represented by the solid line. It can be seen that the numerical and theoretical results are very close. The worst case is the experiment carried out around 35 Hz with a deviation of -4 dB from the analytical expression. According to the analytical expression, the simulations show a valley between 1 and 3 Hz, which is approximately the value $1/[2(T_S + 2T_{A/D})]$ deduced from (20).

An important characteristic of the variance can be seen in Fig. 2. The variance decreases and reaches a saturation value, which is sensitive to the number of samples n . The higher the number of samples, the lower the saturation value.

Results of Fig. 2 indicate that a dc signal, immersed in a sinusoidal noise of a frequency higher than the maximum acquisition frequency, can be easily measured by using random sampling and MA filters. The attenuation of the ac disturbing signal is proportional to the inverse of the number of samples in the MA filter. For $n = 10$, the variance of the remaining disturbing signal is 10% of the input ac signal variance. In terms of power, the attenuation is 10 dB for $n = 10$ and 20 dB for $n = 100$. If uniform sampling is used, the attenuation is 0 dB at frequencies multiple of sampling frequency (see Fig. 3).

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

A DSP-based acquisition board without antialiasing filter was used to verify the theoretical and numerical results. The system was configured to $T_{A/D} = 10$ ms and $T_S = 100$ ms. An input signal which is composed by a dc signal of 2 V plus an ac signal of 101 Hz and 2 V peak was acquired. The input signal was processed by an DSP-implemented MA filter. The output values were converted to analog in order to view them using an oscilloscope. Fig. 4 shows the output of the MA filter when the input signal is acquired using uniform sampling. A sinusoidal signal of 1 Hz and 2 V peak appears added to the correct value of dc. Fig. 5 shows the data acquired with random sampling plus an MA filter of $n = 10$. The figure presents a 2 V dc plus a random noise whose power is 0.2441 V^2 , which is much lower than in uniform sampling. Fig. 5 also shows that only 5% of the samples are out of the range $\pm 2\Gamma(\mu)$, ($\Gamma(\mu)^2 = 0.2441$ and then $\pm 2\Gamma(\mu) = \pm 2(0.2441)^{1/2} = \pm 0.9881$). Fig. 6 illustrates random sampling but with an MA of 100 samples. The noise power is 0.0228 V^2 , that is, it is still better than that showed in Fig. 5. Values out of the range $\pm 2\Gamma(\mu)$ are 5% of the total,

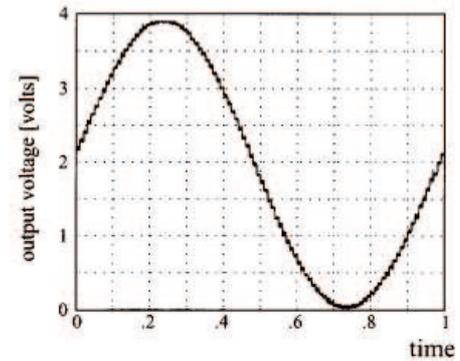


Fig. 4. Oscilloscope view of the data acquired by uniform sampling, $T_{A/D} = 10$ ms. Signal acquired is a dc of 2 V plus a sinusoidal of 101 Hz and 2 V peak.

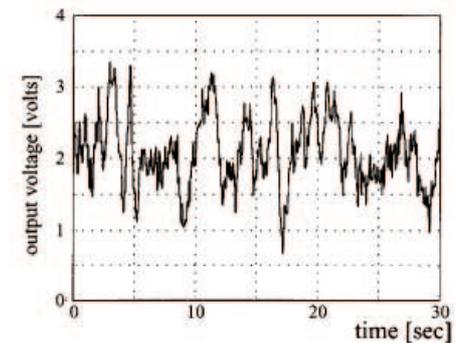


Fig. 5. Oscilloscope view of the data acquired using random sampling and MA of ten samples, $T_{A/D} = 10$ ms, $T_S/T_{A/D} = 10$. Signal acquired is a dc of 2 V plus a sinusoidal of 101 Hz and 2 V peak.

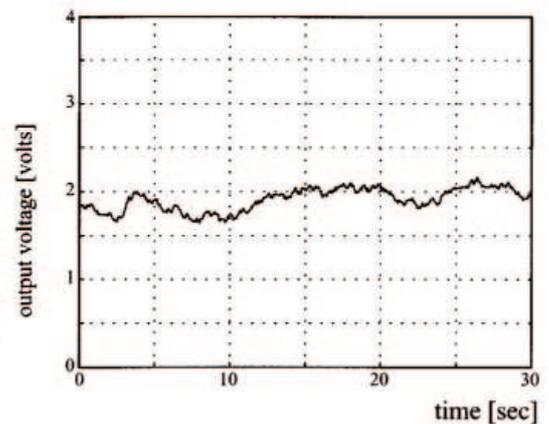


Fig. 6. Oscilloscope view of the data acquired using random sampling and MA of 100 samples, $T_{A/D} = 10$ ms, $T_S/T_{A/D} = 10$. Signal acquired is a dc of 2 V plus a sinusoidal of 101 Hz and 2 V peak.

($\pm 2\Gamma(\mu) = \pm 2(0.0228)^{1/2} = \pm 0.302$). The experimental results showed a better performance as n is incremented and they are according to the theory.

V. CONCLUSIONS

The paper introduces the use of random sampling as a technique to avoid aliasing problems in acquisition systems. The use of an MA filter and random sampling is effective in acquiring a dc signal immersed in an impulsive noise. Antialiasing filters, which are strongly recommended if uniform sampling is used, can be avoided when the proposed method is used, even if the disturbance frequencies are higher than the maximum available sampling frequency.

The proposal is mathematically and experimentally demonstrated. The results show a reduction of the disturbing effect of the impulsive noise. The reduction depends on the number of samples included in the MA filter. The results also show that the performance of the method depends on the degree of correlation between the sampling function and the perturbation. The greater the correlation, the greater the risk of aliasing problems.

REFERENCES

- [1] K. Steiglitz, "The equivalence of analog and digital signal processing," *Inform. Contr.*, vol. 8, pp. 455–467, Oct. 1965.
- [2] A. V. Oppenheim and D. H. Johnson, "Discrete representation of signals," *Proc. IEEE*, vol. 60, pp. 681–691, June 1972.
- [3] F. Filicori, G. Iuculano, A. Menchetti, and D. Mirri, "Random asynchronous sampling strategy for measurement instruments based on non-linear signal conversion," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 136, pp. 141–150, May 1989.
- [4] D. Mirri, "A broad-band harmonic vector voltmeter based on a random sampling strategy," in *Proc. IMTC*, 1994, pp. 1012–1015.
- [5] K. C. Lo and A. Purvis, "A new approach for estimating spectra from randomly sampled sequences," *Circuits Syst. Signal Process.*, vol. 16, no. 3, pp. 375–386, 1997.
- [6] E. P. F. Kan and J. K. Aggarwal, "Randomly sampled digital filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-20, pp. 52–57, Mar. 1972.
- [7] P. R. Frey and C. L. Phillips, "The effects of random sampling in a digital control system," in *Proc. IEEE Southeastcon '78 Region 3 Conf.*, 1978, pp. 507–510.
- [8] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [9] M. Schwartz and L. Shaw, *Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection, and Estimation*. New York: McGraw-Hill, 1975.
- [10] W. Mendelhall and T. Sincich, *Statistics for Engineering and Computer Sciences*: Della, 1984.

Daniel Carrica (S'85–M'95–SM'98) photograph and biography not available at the time of publication.

Mario Benedetti photograph and biography not available at the time of publication.

Roberto Petrocelli photograph and biography not available at the time of publication.

XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de septiembre de 2005

A Comparison Between Additive Asynchronous And Jitter Random Sampling

D. O. Carrica[†], Sergio González^{†,‡} and Rogelio Garcia^{†*}

[†]*L.I.C., Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata,
Juan B. Justo 4302, B7608FDQ, Mar del Plata, Argentina.*

[‡]*CIC
e-mail: sagonzal@ieee.org*

Abstract— This work presents a comparison between the two most well used random sampling techniques, the random additive asynchronous sampling *raa* and jitter random sampling *jrs*. The comparison of this two sampling methods is oriented to the acquisition of low frequency signals immerse noise when no anti-aliasing filters are used.

The frequency responses of two different filters using the random sampling techniques are compared. The comparisons are performed using theoretical expressions and simulations which are contrasted with real experimentation.

Keywords— Random Sampling, Acquisition, Aliasing .

I INTRODUCTION

The conventional solution to measure a low frequency signal immersed in high frequency noise requires sampling and digital filtering. In order to avoid the spectrum overlapping produced by uniform sampling, the sampling frequency have to be at least twice the bandwidth (Theorem of Shannon). However, there are technological limits such as the maximum sampling frequency determined by the AD acquisition time. In these cases it is necessary to constrain the input bandwidth by using anti-aliasing filters. In the case of a large number of multiplexed channels acquired for just one ADC, it is necessary one anti-aliasing filter for each channel. These filters can be bulky and expensive if the cut-off frequency is low. The use of a single filter after the signal multiplexer results in unacceptable delay due to filter settling times. The lack of anti-aliasing filters may produce serious spectrum distortions due to the aliasing produced by uniform sampling. Once

the spectrum is distorted, it is not possible to recover the low frequency signal.

When anti-aliasing filters can not be used, the usage of non-uniform sampling and a digital post filtering is a solution to the problem. Non-uniform sampling was dealt with by several authors like (Beutler, 1970; Bilinskis and Mikelsons, 1992). Another authors such as (Balakrishnan, 1962), (Tarczynski, 2001), (Mirri *et al.*, 1998) and (DaDalt *et al.*, 2002), have analyzed perturbations produced by random jitter in system that requires uniform sampling. (Kan and Aggarwal, 1972) dealt with randomly sampled filters.

According to the sampling function, the literature sets two basic types of random sampling: random additive asynchronous sampling, *raa*, and jitter random sampling, *jrs*. In the former, sampling times are added and results in an asynchronous scheme (Shapiro and Silverman, 1960), the sampling function becomes:

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \quad (1)$$

where τ_k is a random variable. In *jrs*, there is a synchronous frame and a random time is added to it (Bland and Tarczynski, 1997). For this case, the sampling function is:

$$t_k = kT + \tau_k \quad (2)$$

This work performs a comparison of this two sampling methods in order to draw conclusions when they are used for filtering low frequency signals immerse in high frequency noise and no anti-aliasing filters are used.

In section II, a comparative analysis is developed. In section III the experimental results are shown and in section IV the conclusions are detailed. Next, in the appendix, section V, the theoretical expression of the output power are derived for any reconstruction FIR filter with the *jrs* technique. In the case of the *raa*, the equations used were developed in reference (Carrica D., 2001).

This work was supported by the Universidad Nacional de Mar del Plata (ING-15/G064) and the Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (BID 1201/OC-AR 2000). D. Carrica is with the CONICET, S.A.González is with the C.I.C., Argentina. (e-mail: sagonzal@ieee.org)

XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de septiembre de 2005

II COMPARISON OF THE RANDOM SAMPLING TECHNIQUES

In order to compare the frequency response of both sampling-methods, the relationship between the output and the input powers was computed.

The comparisons between the two non-uniform sampling methods are carried out under the following conditions:

1. Probability Density Function (PDF) of the random variable τ_k is uniform. For *raa* the τ_k domain is $[T_{AD}, T_S + T_{AD}]$. For *jrs* the τ_k domain is $[0, T_S]$.
2. T/T_{AD} ratio is $10 < T/T_{AD} < 2$, where $T = T_S + T_{AD}$.
3. The FIR taps number, n , is set as 10, 100, 1000 and the T_s and T_{AD} are kept fixed in order to show the most common case, in which is possible to change the buffer length but not the sampling period.
4. FIR filters chosen are the Moving Average (MA) and FIR1 type.

In the case of the *raa*, there exist a compact formulation for the output power when the reconstruction filter is a MA of n values (Carrica D., 2001). The expression is:

$$E[\mu_i^2] = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos\left(k\omega\left(T_{AD} + \frac{T_S}{2}\right)\right) \text{sinc}^k(fT_S) \quad (3)$$

The output power general equation for a *FIR* reconstruction filter with the *jrs*, is (see section V):

$$E[\mu_i^2] = \sum_{k=0}^n h_{n-k}^2 + 2 \text{sinc}^2(fT_S) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \cos[\omega T(k-j)] \quad (4)$$

where $h_0 \dots h_n$ are the filter coefficients.

For a MA filter, $h_i = \frac{1}{n}$, Equation (4), turns to be:

$$E[\mu_i^2] = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \text{sinc}^2(fT_S) \sum_{k=1}^n (n-k+1) \cos(\omega T k) \quad (5)$$

A. *raa* vs. *jrs* with MA

Next, the theoretical expression defined in (3) for the *raa* and in (5) for the *jrs* will be evaluated for different n values. The results are shown in Figs. 1(a), 1(b) and 1(c).

Table 1: Resulting f_c for the MA filter

n	f_c [Hz]	
	<i>jrs</i>	<i>raa</i>
10	40	73.704
100	0.4	0.73704
1000	0.04	0.073704

Both processes show identical responses at low and high frequencies but differ at medium frequencies. At high frequencies, their values corresponds to $\|h\|_2^2$. For both methods, this value is $E[\mu_i^2]_{f \rightarrow \infty} = \frac{1}{n}$ since a MA FIR was utilized. At medium frequencies attenuation decreases until reaching a minimum, then it increases up to the high frequency value.

As can be seen in Table 1, the f_c in *jrs* is always lower than that of *raa*, while *jrs* has a greater attenuation in this band, which is an advantage since perturbations in this band can be further attenuated.

An equivalent uniform sampling filter, is shown in figure 1(d). It can be noticed that there exist a different behavior in middle and high frequencies. The corresponding spectrum of the uniform sampling has a strong discrete content, peaks, produced at multiples of the Nyquist frequency. The constant high frequency response of the random sampling, seems at first, to be deteriorated. However, this effect attenuates the peaks of the uniform sampling filter. The uniform sampling filter, without an antialiasing filter, can not attenuate the peaks at all multiples of the Nyquist frequency, but the random sampling filter can assure attenuation in the whole high frequency band.

B. *raa* vs. *jrs* with FIR1

For this set of comparisons, the filter used was designed using the MATLAB FIR1 function, which implements the classical method of windowed linear-phase FIR digital filter design (IEEE DSP Committee, 1979). In order to perform this comparisons, simulations of both random sampling methods were produced since the *raa* does not have an expression for the output power, when the filter is not an MA. The simulations performed are expressed via the Power Spectrum Density (PSD) with 500 times averaging.

Figures 2(a), 2(b) and 2(c) show the simulations results for each case. As can be seen, this figures show a behavior similar to that of the MA filter since both processes have identical responses at low and high frequencies but differ at medium frequencies.

When comparing figure 2(d) with figures 2(a), 2(b) and 2(c) it can be depicted how the random sampling eliminates the ripple that the FIR1 filter presents at medium frequencies. This is an advantage since existing perturbations in this band are further attenuated. At high frequencies, the filter response

XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de septiembre de 2005

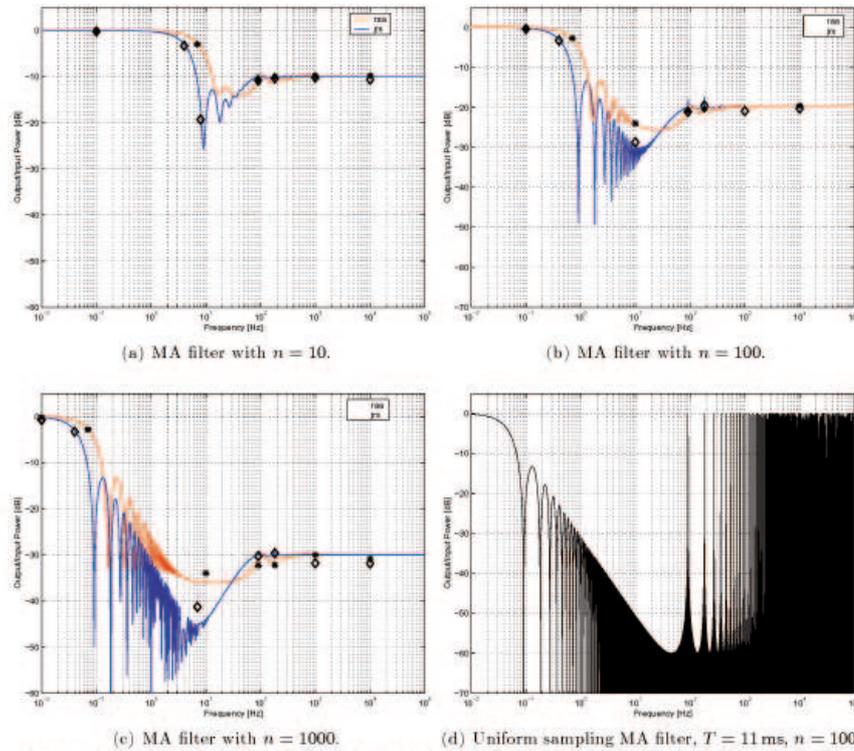


Figure 1: *raa* vs. *jrs*, with $T_{AD} = 1$ ms and $T_S = 10$ ms. Experimental results are indicated by \diamond and $*$.

Table 2: Resulting f_c for the FIR1 filter

n	f_c [Hz]	
	<i>jrs</i>	<i>raa</i>
10	6	10
100	0.65	1.13
1000	0.42	0.74

is constant without presenting the uniform sampling peaks.

III EXPERIMENTAL RESULTS

The experiments consisted of randomly sampling a sinusoidal signal and latter processing with a digital filter. Since this application deals with the acquisition of analog signals, a DSP with embedded A/D was chosen. The experimental test system was based on the Analog Devices ADMC-401 DSP. The ADMC-401 is based on a 26 MIPS, 16-bit fixed-point digital signal processor core, the ADSP-2171. The integrated acquisition system embedded into the DSP is 12-bits wide and the acquisition time T_{AD} was fixed to be 1 ms and the $T_s = 10$ ms. The filtered signal was then introduced in a 16-bits DAC, in order to output an analog signal for measuring the input-output power. This test was repeated at different

frequencies, in order to validate both the theoretical curves and the simulations.

Regarding the performance aspects of the implementation, some issues must be taken into account:

- For implementing the algorithm a Linear Congruence Uniform Random Number Generator was used. The values of the constants required for this algorithm were chosen according to the rules in (Knuth, 1969).
- In order to implement the algorithm, care was exercised regarding the numerical format chosen. A fixed-point manipulation of the algorithm could lead to erroneous results since the algorithm deals with both small and full rails signals. Therefore, a custom floating point arithmetic consisting of one word (16 bits) for the exponent and one for the fraction was preferred to a fixed-point math. Signed two's-complement notation was assumed for both the fraction and the exponent. The two-word format is tailored for the ADSP-2100 family of processors, taking advantage of ADSP-2100 instructions by making calculations fast and simple.
- The FIR filter implementation was flexible

XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de septiembre de 2005

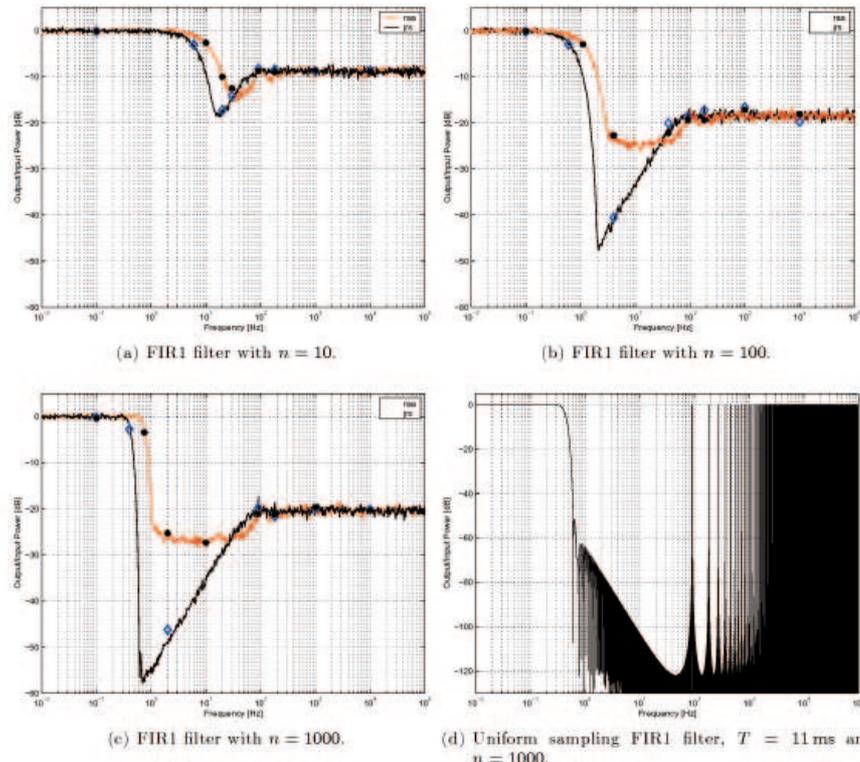


Figure 2: *raa* vs. *jrs*, with $T_{AD} = 1$ ms and $T_S = 10$ ms. Experimental results are indicated by \diamond and $*$.

enough to hold a large filter order, n . Since the signals to recover are of very low frequency, it was possible to hold an large n . In the current DSP implementation n was chosen to be 1024.

Taking the previous items into consideration, both algorithms were quite similar to implement since both require taking the decision of acquiring a new sample once per T period, this produce a very similar data flow for the algorithms.

The experimental results for the MA filter can be seen in Figs. 1(a), 1(b) and 1(c). It can be noticed how they match the whole frequency range which probes that the theoretical expression obtained is accurate.

Regarding the experimental evaluation of the FIR1 filter, it can be noticed in Figures 2(a), 2(b) and 2(c) how the experimental results coincide with the simulations, in the whole frequency range which probes that the simulations obtained are accurate.

IV CONCLUSIONS

A comparative study between both techniques, *raa* and *jrs*, was performed. The experimental results corroborated the predicted theoretical expressions, showing that both methods behave similarly regarding the elimination of the aliasing effect and the

peaks produced at high frequencies by the uniform sampling. An advantage of the random sampling filtering is that high frequency response is constant, characteristic that makes unnecessary the antialiasing filters.

Considering aspects related to the design, it can be remarked that the *jrs* possesses a compact theoretical formulation which is valid for any kind of reconstruction filter. The implementation of the *jrs* and the *raa* algorithm is quite straightforward, meaning that it could be implemented into a microcontroller.

Regarding the filters used in the comparisons, the following conclusions can be obtained:

- Despite the better performance of MA filters at high frequencies, other filters have greater selectivity. This can be used in applications in which a smaller gap between pass and rejection bands is required.
- In term of implementation complexity, MA filters are simpler to implement than other filters because they can be implemented using a recursive algorithm. This allows to reduce computation times.

V APPENDIX

The aim of this section is to obtain the Power Spectral Density PSD of a FIR filtered and randomly sampled signal. By means of mathematical analysis it is then possible to choose the most appropriated filter for a given application. This analysis covers a general FIR filter H with jitter random sampling.

Being $x(t)$ a sinusoidal input signal given by the following equation:

$$x(t) = \cos(\omega t + \phi) \quad (6)$$

where ω is the angular frequency and ϕ the initial phase. The latter is a random variable with a uniform probability density function (p.d.f.) on the interval $[-\pi, \pi]$.

$$f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad [-\pi, \pi] \quad (7)$$

The proposed sampling is *j.r.s.* type where the sampling times are given by:

$$t_k = kT + \tau_k \quad (8)$$

where T is the synchronic part of the sampling and τ_k is the random one. The random variable τ_k has a uniform p.d.f. on the interval $[0, T_s]$.

$$f_{\tau_k}(\tau_k) = \frac{1}{T_s} \quad [0, T_s]. \quad (9)$$

where $T_s \leq T$.

After *j.s.r.*, the samples are:

$$x_k = \cos[\omega(kT + \tau_k) + \phi] \quad (10)$$

The samples are filtered by a FIR filter and the output μ_i is given by:

$$\mu_i = \sum_{k=0}^{n-1} h_k x_{i-k} = \sum_{k=1}^n h_{n-k} x_{i-n+k} = \sum_{k=1}^n h_{n-k} x'_k \quad (11)$$

where h_k are the filter coefficients, n is the filter order and variable x'_k is expressed by the following equations:

$$\begin{aligned} x'_k &= x_{i-n+k} = \cos[\omega((i-n+k)T + \tau_{i-n+k}) + \phi] \\ &= \cos[\omega(kT + \tau_k) + \omega(i-n)T + \phi] \\ &= \cos[\omega(kT + \tau_k) + \varphi_i] \end{aligned} \quad (12)$$

where:

$$\varphi_i = \omega(i-n)T + \phi \quad (13)$$

In order to characterize the process under analysis, mean value and variance of μ_i are obtained. Since the system is ergodic, the mean value of μ_i is the d.c. component of the output signal and the variance is the a.c. power of the signal after the filtering process. The mean value is given by:

$$E[\mu_i] = E\left[\sum_{k=1}^n h_{n-k} x'_k\right] = \sum_{k=1}^n h_{n-k} E[x'_k] \quad (14)$$

The mean value of x'_k is:

$$E[x'_k] = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \varphi_i} \cos[\omega(kT + \tau_k) + \varphi_i] d\varphi_i d\tau_k \quad (15)$$

where $f_{\tau_k, \varphi}$ is the joined PDF of variables τ_k and φ . As they are independent,

$$f_{\tau_k, \varphi} = f_{\tau_k} \cdot f_{\varphi} = \frac{1}{2\pi T_s} \quad (16)$$

Consequently, the mean value of x'_k is:

$$E[x'_k] = \frac{1}{2\pi T_s} \int_0^{T_s} \int_0^{2\pi} \cos[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] d\varphi d\tau_k = 0 \quad (17)$$

Therefore, taking into account (14), $E[\mu_i] = 0$.

On the other hand the variance of μ_i is:

$$E[\mu_i^2] = E\left[\left(\sum_{k=1}^n h_{n-k} x'_k\right)^2\right] \quad (18)$$

It can be verified that:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n a_k a_j. \quad (19)$$

Equation (18) yields to:

$$E[\mu_i^2] = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 E[x_k'^2] + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} E[x_k' x_j'] \quad (20)$$

The expected value $E[x_k'^2]$ in Eq. (20) can be expressed as:

$$\begin{aligned} E[x_k'^2] &= \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \varphi} \cos^2[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] d\varphi d\tau_k \\ &= \frac{1}{2\pi T_s} \int_0^{T_s} \int_0^{2\pi} \cos^2[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] d\varphi d\tau_k = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Besides, the expected value $E[x_k' x_j']$ in Eq. (20) can be calculated as:

$$\begin{aligned} E[x_k' x_j'] &= E[\cos(\omega(kT + \tau_k) + \varphi)] \cdot E[\cos(\omega(jT + \tau_j) + \varphi)] \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \tau_j, \varphi} \cos(\omega(kT + \tau_k) + \varphi) \cos(\omega(jT + \tau_j) + \varphi) d\varphi d\tau_k d\tau_j \\ &= \frac{1}{2\pi T_s^2} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \int_0^{2\pi} \cos(\omega(kT + \tau_k) + \varphi) \cos(\omega(jT + \tau_j) + \varphi) d\varphi d\tau_k d\tau_j \\ &= \frac{1}{2} \text{sinc}^2(fT_s) \cos[\omega T(k-j)] \end{aligned} \quad (22)$$

XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de septiembre de 2005

Therefore, Equation (20) results in:

$$E[\mu_i^2] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 + \text{sinc}^2(fT_S) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \cos[\omega T(k-j)] \quad (24)$$

Equation 24 can be rewritten as following:

$$E[\mu_i^2] = \frac{1}{2} \|h\|_2^2 + \text{sinc}^2(fT_S) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos[\omega Tq] \quad (25)$$

where: $\|h\|_2^2 = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2$ is the norm 2 of h and $h_k^\#$ is a vector formed by elements of the original filter vector h . $h_k^\#$ can be seen as a transformation, expressed in the following expression:

$$\sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos[\omega Tq] = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \cos[\omega T(k-j)] \quad (26)$$

This last equation can be better interpreted in matrix form, thus:

$$h^\# = A.h \quad (27)$$

where:

$$h^\# = \begin{bmatrix} h_0^\# \\ h_1^\# \\ \dots \\ h_{n-1}^\# \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \dots \\ h_{n-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & h_0 \\ 0 & \dots & \dots & h_0 & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h_0 & \dots & h_{n-3} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A is the matrix that performs the aforementioned transformation. The construction of A is direct, as can be seen in Eq. (28). From a formal standpoint, let C be a Toeplitz¹ matrix, being its first column the h vector, and $c_{i,j} = 0 \forall i < j$. Then a B matrix, which is obtained by permuting the C columns, thus $b_{i,j} = c_{i,n-j}$. Finally, the A matrix is equal to the B matrix but nullifying the n -row components.

REFERENCES

Balakrishnan, A. (1962). On the problem of time jitter in sampling. *IEEE Transactions on Information Theory* **8**(3), 226–236.

Beutler, F. (1970). Alias-free randomly timed sampling of stochastic processes. *IEEE Transactions on Information Theory* **IT-16**(2), 147–152.

¹A Toeplitz matrix is any squared matrix with values constant along each (top-left to lower-right) diagonal.

Bilinskis, I. and A. Mikelsons (1992). *Randomized Signal Processing*. Prentice Hall.

Bland, D.M. and A. Tarczynski (1997). The effect of sampling jitter in a digitized signal. In: *1997 IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS '97*. Vol. 4. pp. 2685–2688.

Carrica D., M. Benedetti, R. Petrocelli (2001). Random sampling applied to the measurement of a DC signal immersed in noise. *IEEE Tr. on Instrumentation and Measurement* **50**(5), 1319–1323.

DaDalt, N., M. Harteneck, C. Sandner and A. Wiesbauer (2002). On the jitter requirements of the sampling clock for analog-to-digital converters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part 1 Fundamental Theory and Applications* **49**(9), 1354–1359.

IEEE DSP Committee, Ed.) (1979). *Programs for Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, New York. Algorithm 5.2.

Kan, E. and J. Aggarwal (1972). Randomly sampled digital filters. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-20**, 52–57.

Knuth, Donald E. (1969). *The Art of Computer Programming, Volume II: Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley.

Mirri, D., G. Iuculano, G. Pasini and F. Filicori (1998). The effect of time-jitter in equispaced sampling wattmeters. *Ieee transactions on instrumentation and measure* **47**(3), 720–727.

Shapiro, Harold S. and Richard A. Silverman (1960). Alias-free sampling of random noise. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **8**(2), 225–248.

Tarczynski, A. (2001). FIR filters for systems with input clock jitter. In: *2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, IS-CAS 2001*. Vol. 2. pp. 617–620.

Acquisition of Low Frequency Signals Immersed in Noise by Random Sampling and FIR Filters

Daniel O. Carrica,^{1,2,*} Mario Benedetti,^{1,2,*} and Roberto Petrocelli^{2,†}

¹CONICET

²Laboratorio de Instrumentación y Control

Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Mar del Plata.

J. B. Justo 4302 B7608FDG - Mar del Plata - Argentina

Abstract

This paper presents the acquisition of low frequency signals immersed in periodical noise by using random sampling and FIR filters. This acquisition is not possible by uniform sampling if sampling frequency is lower than twice the maximum noise frequency. The proposed technique is mathematically analyzed for any FIR filter and experimental validated for three of the most used FIR filters. In order to evaluate this technique, ratios called Power Frequency Response and Jitter Random Sampling Distortion are introduced.

PACS numbers: 07.50.Qx

Keywords: Random Sampling, Acquisition, FIR Filters

*This work was supported by the Universidad Nacional de Mar del Plata, CONICET and the Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (Programa de Modernización Tecnológica, Contrato de Préstamo BID 802/OC-AR), Argentina.

†Electronic address: rpetroce@fi.mdp.edu.ar

I. INTRODUCTION

Uniform sampling followed by digital filtering is a standard technique to acquire low frequency signals immersed in noise. In order to avoid spectrum aliasing, the sampling frequency should be -at least- twice the bandwidth of the input signal (Shannon's Theorem). However, high sampling frequencies can be difficult to obtain due to technological limitations such as the *AD* conversion time. If spectrum aliasing occurs, the measured signal is definitively distorted and errors are produced in the acquisition. This paper proposes random instead of uniform sampling in order to reduce the aliasing effect in acquisition systems. The basic principle is to reduce the correlation between input signal and sampling function by deliberately adding jitter.

The topic of random sampling was addressed by several authors like Beutler *et al.* and Bilinskis *et al.* [1, 2]. Authors such as Balakrishnan [3], Tarczyuski [4], Mirri *et al.* [5] and DaDalt *et al.* [6] have analyzed perturbations produced by random jitter in systems requiring uniform sampling. Depending on the sampling function, the literature defined two basic types of random sampling: Random Additive Asynchronous Sampling (*RAAS*) and Jitter Random Sampling (*JRS*). In the former, random sampling times are added resulting in an asynchronous scheme [7]. In the latter, there is a synchronous frame to which a random time is added [8]. Carrica *et al.* [9] proposed the measurement of a *dc* immersed in noise by using *RAAS*, but restricted to Moving Average (*MA*) filters. This article deals with the acquisition of low frequency signals immersed in periodic noise by *JRS* and Finite Impulse Response (*FIR*) filters.

Due to the time varying nature of this process the concept of frequency response is no valid. For this reason, signal attenuation is measured through the Power Frequency Response (*PFR*) which is introduced in Section II. Analytic expressions of the *PFR* are developed for any *JRS* randomly sampled *FIR* filter and contrasted with simulations and experimental results. The distortion introduced by the proposed method is analyzed in Section IID.

II. PROBLEM FORMULATION

The aim of this section is to introduce the concept the Power Frequency Response (*PFR*) which is defined as the ratio between output and input average powers for a single sinusoidal

input. The *PFR* is a function of the input signal frequency ($PFR(f_i)$), and its mathematical expression is developed in section II A. Furthermore, two different cases are analyzed: 1) an input signal which can be expanded into a Fourier series and 2) an input signal composed by a sum of no correlated components. This analysis allows to deal with multi-component signals composed by useful signal and noise. Finally, the distortion generated by the process at low frequencies is analyzed through the *JRS* Distortion.

A. Development of $PFR(f_i)$

The *PFR* of a *JRS* randomly sampled *FIR* is formulated as follows. Let $x(t)$ be a sinusoidal input given by:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

where ω is the angular frequency and ϕ is the initial phase.

The sampling times in *JRS* are given by:

$$t_k = kT + \tau_k \quad (2)$$

where kT and τ_k are the synchronous and random parts of the sampling respectively. The random variable τ_k has an uniform probability density function (*pdf*), Eq. (3).

$$f_{\tau_k}(\tau_k) = \frac{1}{T_s} \quad \left[-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2} \right] \quad (3)$$

being $T_s \leq T$.

The samples obtained by *JRS* are:

$$\hat{x}_k = A \cos [\omega (kT + \tau_k) + \phi]. \quad (4)$$

The samples are filtered by a *FIR* filter and the result is:

$$\mu = \sum_{k=1}^n h_{n-k} \hat{x}_k \quad (5)$$

where $h_0 \dots h_{n-1}$ are the filter coefficients and n is the filter order.

Assuming the process is ergodic, the variance of the output is the average power. The variance of μ is:

$$E[\mu^2] = E \left[\left(\sum_{k=1}^n h_{n-k} \hat{x}_k \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Equations (6) can be rewritten as:

$$E[\mu^2] = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 E[\hat{x}_k^2] + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} E[\hat{x}_k \hat{x}_j]. \quad (7)$$

Since the system is ergodic, it can be demonstrated that ϕ is a random variable with uniform (*pdf*), $f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$ $\phi \in [0, 2\pi]$.

In order to obtain $E[\mu^2]$, the expected values in Eq. (7) are solved. The term $E[\hat{x}_k^2]$ is:

$$\begin{aligned} E[\hat{x}_k^2] &= \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \varphi} A^2 \cos^2[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] d\varphi d\tau_k \\ &= \frac{A^2}{2\pi T_S} \int_{-T_S/2}^{T_S/2} \int_0^{2\pi} \cos^2[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] d\varphi d\tau_k = \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

where the joint *pdf* $f_{\tau_k, \varphi}$ was replaced by $\frac{1}{2\pi T_S}$, because τ_k, φ are independent. Besides, the expected value $E[\hat{x}_k \hat{x}_j]$ can be calculated as:

$$E[\hat{x}_k \hat{x}_j] = A^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \tau_j, \varphi} \cos[\omega(kT + \tau_k) + \varphi] \cos[\omega(jT + \tau_j) + \varphi] d\varphi d\tau_k d\tau_j. \quad (9)$$

Equation (9) yields:

$$E[\hat{x}_k \hat{x}_j] = \frac{A^2}{2} \text{sinc}^2(fT_S) \cos[\omega T(k-j)]. \quad (10)$$

Therefore, Eq. (7) results in:

$$E[\mu^2] = \frac{A^2}{2} \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2 + A^2 \text{sinc}^2(fT_S) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^n h_{n-k} h_{n-j} \cos[\omega T(k-j)] \quad (11)$$

Equation (11) can be rewritten as follows:

$$E[\mu^2] = \frac{A^2}{2} \|\mathbf{h}\|_2^2 + A^2 \text{sinc}^2(fT_S) \sum_{k=1}^n h_{n-k}^\# \cos[\omega T k] \quad (12)$$

where $\|\mathbf{h}\|_2^2 = \sum_{k=1}^n h_{n-k}^2$ is the *norm2* of the *FIR* \mathbf{h} and $\mathbf{h}^\#$ is a vector formed as follows:

$$\mathbf{h}^\# = \mathbf{B} \cdot \mathbf{h} \quad (13)$$

where

$$\mathbf{h}^\# = \begin{bmatrix} h_0^\# \\ h_1^\# \\ \dots \\ \dots \\ h_{n-3}^\# \\ h_{n-2}^\# \\ h_{n-1}^\# \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \dots \\ \dots \\ h_{n-3} \\ h_{n-2} \\ h_{n-1} \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_{n-4} & h_{n-3} \\ 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_{n-4} & h_{n-3} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Finally, Eq. (12) in steady state conditions yields:

$$E[\mu^2]_{ss} = A^2 \frac{\|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + A^2 \text{sinc}^2(fT_S) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega T}} \cos(2\pi fTn + \theta) \quad (15)$$

where $\mathbf{H}^\#(z) = \sum_{k=1}^n h_k^\# . z^{-k}$ and $\theta = \text{Arg}[\mathbf{H}^\#(e^{j\omega T})]$.

Equation (15) is a function of the frequency and represents the average power of the output. Finally,

$$PFR(f) = \frac{E[\mu^2]_{ss}}{A^2/2} = \|\mathbf{h}\|_2^2 + 2 \text{sinc}^2(fT_S) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega T}} \cos(2\pi fTn + \theta). \quad (16)$$

Equation (16) is a general expression, valid for both, random and uniform sampling. It can be seen that the random effects are expressed only by $\text{sinc}^2(fT_S)$ factor. If $fT_S = 0$, Eq. (16) represents an uniformly sampled *FIR* filter response. Consequently, the *JRS* response is close to the uniform one if fT_S is close to zero. If high randomness *JRS* is employed ($T_S \approx T$), any conventional low-pass *FIR* filter maintains its low frequency response for frequencies much lower than $1/T$. For the *JRS* method, high randomness is obtained by $\frac{T_S}{T}$ higher than 0.90. For ratios lower than this value, the frequency response is seriously degraded.

B. Output power for a periodic input signal

The first case of multi-component input is a periodical signal $x(t)$ which can be expanded in a Fourier series as follows.

$$x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} [A_p \sin(p\omega t - p\varphi) + B_p \cos(p\omega t - p\varphi)] \quad (17)$$

where φ is the initial phase.

The samples obtained using *JRS* are:

$$\hat{x}_k = \sum_{p=1}^{\infty} [A_p \sin(p\omega kT + p\omega\tau_k - p\varphi) + B_p \cos(p\omega kT + p\omega\tau_k - p\varphi)] \quad (18)$$

which are *FIR* filtered using Eq. (5). In order to obtain the variance $E[\mu^2]$, the expected value $E[\hat{x}_k^2]$ in Eq. (7) can be expressed as:

$$E[\hat{x}_k^2] = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \varphi} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \{A_p \sin[p\omega(kT + \tau_k) - p\varphi] + B_p \cos[p\omega(kT + \tau_k) - p\varphi]\} \right)^2 d\varphi d\tau_k \quad (19)$$

The joint *pdf* $f_{\tau_k, \varphi}$ can be replaced by the product $f_{\tau_k} f_{\varphi}$ because τ_k and φ are independent. The *pdf*'s f_{τ_k} and f_{φ} are identical to the case of one sinusoidal input previously developed. Solving the integrals, Eq. (19) yields:

$$E[\hat{x}_k^2] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m (A_p^2 + B_p^2) \quad (20)$$

Besides, the expected value $E[\hat{x}_k \hat{x}_j]$, with $k \neq j$, in Eq. (7) can be calculated as:

$$E[\hat{x}_k \hat{x}_j] = \iiint_{-\infty}^{\infty} f_{\tau_k, \tau_j, \varphi} \left\{ \sum_{p_1=1}^{\infty} \{A_{p_1} \sin[p_1\omega(kT + \tau_k) - p_1\varphi] + B_{p_1} \cos[p_1\omega(kT + \tau_k) - p_1\varphi]\} \right. \\ \left. \sum_{p_2=1}^{\infty} \{A_{p_2} \sin[p_2\omega(jT + \tau_j) - p_2\varphi] + B_{p_2} \cos[p_2\omega(jT + \tau_j) - p_2\varphi]\} \right\} d\varphi d\tau_k d\tau_j. \quad (21)$$

Since the random variables τ_k, τ_j and φ are independent, the joint *pdf* can be replaced by the product of the three *pdf*. Solving the integrals, Equation (21) yields:

$$E[\hat{x}_k \hat{x}_j] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (A_p^2 + B_p^2) \text{sinc}^2(fpT_S) \cos[p\omega(k-j)T]. \quad (22)$$

Therefore, Eq. (7) yields:

$$E[\mu^2] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} C_p^2 \left\{ \|\mathbf{h}\|_2^2 + 2 \operatorname{sinc}^2(fpT_S) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^{\#} \cos [p\omega T q] \right\} \quad (23)$$

where $C_p^2 = A_p^2 + B_p^2$. Then, Eq. (23) in steady state conditions yields:

$$E[\mu^2]_{ss} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} C_p^2 \left[\|\mathbf{h}\|_2^2 + 2 \operatorname{sinc}^2(fpT_S) |\mathbf{H}^{\#}(z)|_{z=e^{j\omega p T}} \cos (p\omega T n + \theta_1) \right] \quad (24)$$

where $\mathbf{H}^{\#}(z) = \sum_{k=1}^n h_k^{\#} \cdot z^{-k}$, $\theta_1 = \operatorname{Arg} [\mathbf{H}^{\#}(e^{j\omega p T})]$.

Finally, the average output power is:

$$E[\mu^2]_{ss} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_p^2}{2} PFR(p f) \quad (25)$$

C. Output power for several non correlated components

Another case occurs when input signal is composed by several non-correlated components.

Be $x(t)$:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (26)$$

where ω_1 and ω_2 are the angular las frequencies, ϕ_1 and ϕ_2 the initial phases. We will consider ϕ_1 and ϕ_2 as independent random variables with uniform *pdf*, Eq. (27).

$$f_{\phi_1}(\phi_1) = f_{\phi_2}(\phi_2) = \frac{1}{2\pi} \quad [-\pi, \pi] \quad (27)$$

After *JRS/FIR*, the *PFR* is done by:

$$\begin{aligned} E[\mu^2] &= (A_1^2 + A_2^2) \frac{\|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + \frac{A_1^2}{2} \operatorname{sinc}^2(f_1 T_S) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^{\#} \cos [\omega_1 T q] + \\ &+ \frac{A_2^2}{2} \operatorname{sinc}^2(f_2 T_S) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^{\#} \cos [\omega_2 T q] \end{aligned} \quad (28)$$

Finally, Eq. (28) can be expressed as:

$$\begin{aligned} E[\mu^2] &= (A_1^2 + A_2^2) \frac{\|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + \\ &+ A_1^2 \operatorname{sinc}^2(f_1 T_S) |\mathbf{H}^{\#}(z)|_{z=e^{j\omega_1 T}} \cos (2\pi f_1 T n + \theta_1) + \\ &+ A_2^2 \operatorname{sinc}^2(f_2 T_S) |\mathbf{H}^{\#}(z)|_{z=e^{j\omega_2 T}} \cos (2\pi f_2 T n + \theta_2) \end{aligned} \quad (29)$$

where $\mathbf{H}^\#(z) = \sum_{k=1}^n h_k^\# .z^{-k}$, $\theta_1 = \text{Arg} [\mathbf{H}^\#(e^{j\omega_1 T})]$ and $\theta_2 = \text{Arg} [\mathbf{H}^\#(e^{j\omega_2 T})]$.

Equation (29) shows the output power, when the input is composed by two non-correlated signals. Equation (29) can be generalized to q signals, as in Eqs. (30) y (31):

$$E[\mu^2] = \sum_{p=1}^q C_p^2 \left[\frac{\|\mathbf{h}\|_2^2}{2} + \frac{1}{2} \text{sinc}^2(f_p T_s) \sum_{q=1}^n h_{n-q}^\# \cos(\omega_p T q) \right] \quad (30)$$

$$E[\mu^2] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^q C_p^2 \left[\|\mathbf{h}\|_2^2 + 2 \text{sinc}^2(f_p T_s) |\mathbf{H}^\#(z)|_{z=e^{j\omega_p T}} \cos(2\pi f_p T n + \theta_p) \right] \quad (31)$$

The average output power is:

$$E[\mu^2]_{ss} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_p^2}{2} PFR(p f) \quad (32)$$

which is identical to the case of correlated components Eq.(25). Therefore, Eq. (32) represents the output average power for a general case of a series of components, including correlated and no-correlated components. Equation (32) shows that the contribution of each component to the output average power is affected by the $PFR(f)$. For this reason, this paper presents the PFR of randomly sampled filter as a similar concept to the frequency response in uniformly sampled filter. The PFR is defined as a power ratio instead of voltage ratio because the output is composed by different frequency components created by the non-uniform sampling.

The following conclusions are drawn from the previous sections. High frequency components $f_p \rightarrow \infty$ are attenuated by a PFR with a constant value equals to $\|\mathbf{h}\|_2^2$. Low frequency components, $f \ll \frac{1}{T}$, are affected by a PFR which is very close to uniformly sampled filter response if high randomness JRS is employed. The following design hints can be inferred from the previous conclusions: (1) high frequency attenuation is equal to the $norm2$ of the filter, which is $1/n$ in a MA , (2) high randomness should be employed, therefore $T_s/T > 0.9$.

D. JRS Distortion

In order to evaluate the JRS distorting effects at low frequencies, the JRS distortion ($D_{JRS}(\omega)$) is defined as:

$$D_{JRS}(\omega) \triangleq 10 \log_{10} [P_e(\omega)/P_v(\omega)] \text{ dB} \quad (33)$$

where $P_e(\omega)$ is the output power of error which is defined as the error between randomly sampled filter output and a uniform sampled filter output and $P_v(\omega)$ is output signal power using uniform sampling.

Output error power and output signal power are given by the following equations.

$$P_e(\omega) = \frac{(\omega T_S)^4}{576} \frac{A^2}{2} |H(e^{j\omega T})|^2 + \|h\|_2^2 A^2 \left[\frac{(\omega T_S)^2}{24} - \frac{(\omega T_S)^4}{2880} \right] \quad (34)$$

$$P_v(\omega) = \frac{A^2}{2} |H(e^{j\omega T})|^2 \quad (35)$$

Consequently, the JRS distortion $D_{JRS}(\omega)$ is:

$$D_{JRS}(\omega) = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\|h\|_2^2 (\omega T_S)^2}{12 |H(e^{j\omega T})|^2} \right\} dB \quad (36)$$

valid for $f \leq 0.25 \frac{1}{T}$.

Figure 1 shows the distortion effect for a *MA* filter, with $n = 10$. The figure shows that the $D_{JRS}(\omega)$ obtained in Eq. (36) are less than -30 dB for frequencies in the filter band-pass. This low value proves that differences between uniformly and randomly sampled filters are negligible at low frequencies.

III. SIMULATION RESULTS

Simulations of *JRS/FIR* process were performed in order to validate Eq. 25. Several statistical experiments for different filters were carried out. Each experiment consisted of a set of μ_i , where $i = 1, 2, \dots, 100$, being μ_i the output of the *FIR* filter. The input was a sinusoidal of constant frequency f and random phase φ . The signal was sampled n times using *JRS*, according to the sampling intervals given by Eq. (2), with $T = 11ms$ and $T_S = 10ms$. Each μ_i was obtained by Eq. (5), where x_k is the input sample at t_k . The variance of μ in the set of 100 μ_i is given by Eq. (37):

$$\Gamma_\mu^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\mu_i - E[\mu])^2 \quad (37)$$

where $E[\mu_n]$ is the mean value of μ_i . Figures 2-4 show the results for *MA*, *fir1* (MATLAB) and *fircls1* (MATLAB) filters, with $n = 1000$, sweeping the frequency in a logarithmic scale from 10^{-3} to $10^3 Hz$ in steps of 10^{-3} decades. The MATLAB function *fir1* implements a

windowed linear-phase *FIR* filter and MATLAB function *fircls1* implements a constrained least square *FIR* filter [10]. Figures 2-4 show that the theoretical values obtained in Eq. (16) agree with the simulation ones.

In order to evaluate the *PFR* of a *JRS* sampled *fir1*, it was compared with an uniformly sampled *fir1*. Figure 5 shows the *PFR* of the latter. The responses of the uniformly and randomly sampled filters (Figs. 3 and 5, respectively) are identical at low frequencies but different at medium and high frequencies. In random, at medium frequencies, attenuation decreases until reaching a minimum. Then it increases up to the high frequency value, $\|h\|_2^2$. Although random sampling seems to deteriorate the filter frequency response, it attenuates the peaks produced at multiple of the sampling frequency.

Based on a comparative analysis of the three randomly sampled filters (Figs. 2, 3 and 4), the Moving Average filter (*MA*) is the best option in terms of high frequency attenuation. This is because the norm is minimum when all the elements h_i are equal. Despite the better performance of *MA* filters at high frequencies, other filters offer better selectivity. These can be used in applications requiring a smaller gap between pass and rejection bands.

In terms of implementation complexity, the realization of *MA* filters is simpler, since a recursive algorithm can be employed. This allows a reduction in computation times.

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

This section presents experimental results obtained from a randomly sampled *FIR* filter. The experiments were carried out using an acquisition system based on an *ADMC401 DSP* from Analog Devices. An acquisition time $T_{AD} = 1$ ms and a period $T = 11$ ms were programmed. The samples were processed and results were observed through a *DAC*.

The set of experiments was carried out to verify the *PFR* of the *JRS* process with sinusoidal inputs of $1\hat{V}$ at frequencies of 0.04 Hz, 0.1 Hz, 2 Hz, 90.9 Hz, 181.8 Hz, 1 kHz and 10 kHz. It is important to test frequencies 90.9 Hz and 181.8 Hz because they coincide with $1/T$ and $2/T$. Figures 6, 7 and 8 show input and output signals for 0.1, 2 and 10000 Hz, respectively. Additionally, the output power was calculated for each case, after acquiring the signal through an oscilloscope. The values of power [dB] are listed in Table I and shown in Fig. 9.

Figure 9 shows that experimental results agree with the theoretical, validating Eq. (16).

Therefore, this equation can be used to design a randomly sampled filter for any given application. Experiments show no aliasing effect at the output signal even at input frequencies multiple of the average sampling frequency.

V. CONCLUSIONS

The measurement of low frequency signals can be achieved without significant distortion by randomly sampling and *FIR* filtering, regardless the input signal bandwidth. The Jitter Random Sampling scheme applied to *FIR* filters was analysed and the analytical expression of the *PFR* was developed. The equation was in accordance with the statistical simulations of the process.

From the *PFR* results, the following can be concluded: a) The frequency response of a randomly sampled *FIR* filter at low frequency is practically identical to the uniformly sampled filter response. b) The effect of aliasing gets reduced when random sampling is applied. c) The attenuation at high frequencies depends on $\|\mathbf{h}\|_2$ of the filter vector. Moreover, it is concluded that the Moving Average Filter yields the largest high frequency attenuation because its $\|\mathbf{h}\|_2^2$ is the lowest of all *FIR* filters.

An advantage of this technique is that there is no restriction on the input signal bandwidth. The results obtained would allow to important practical consequences like the elimination of standard antialiasing filters in the acquisition systems.

-
- [1] F. Beutler, *IEEE Transactions on Information Theory* **IT-16**, 147 (1970).
 - [2] I. Bilinskis and A. Mikelsons, *Randomized Signal Processing* (Prentice Hall, 1992).
 - [3] A. Balakrishnan, *IEEE Transactions on Information Theory* **8**, 226 (1962).
 - [4] A. Tarczynski, in *2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2001* (2001), vol. 2, pp. 617–620.
 - [5] D. Mirri, G. Iuculano, G. Pasini, and F. Filicori, *IEEE transactions on instrumentation and measure* **47**, 720 (1998).
 - [6] N. DaDalt, M. Harteneck, C. Sandner, and A. Wiesbauer, *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part 1 Fundamental Theory and Applications* **49**, 1354 (2002).

- [7] H. S. Shapiro and R. A. Silverman, *SIAM J. Appl. Math.* pp. 245–248 (1960).
- [8] D. Bland and A. Tarczynski, in *1997 IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS '97* (1997), vol. 4, pp. 2685–2688.
- [9] D. Carrica, M. Benedetti, and R. Petrocelli, *IEEE Tr. on Instrumentation and Measurement* **50**, 1319 (2001).
- [10] A. Oppenheim and R. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing* (Prentice-Hall, 1989).

List of Captions

1. $D_{JRS}(\omega)$ for MA filter , $n = 10$, $T_s = 10ms$, $T_{AD} = 1ms$.
2. Theoretical vs. Simulation, Jitter Random Sampling, Filter MA , $T_S = 10ms$, $T = 11ms$, $n=1000$.
3. Jitter Random Sampling, filter fir1 (obtained from MATLAB), $T_S = 10ms$, $T = 11ms$, $n=1000$.
4. Jitter Random Sampling, filter fircls1 (obtained from MATLAB), $T_S = 10ms$, $T = 11ms$, $n=1000$.
5. Uniform Sampling, filter fir1 (obtained from MATLAB), $T_S = 10ms$, $T = 11ms$, $n=1000$.
6. Fir1 Jitter Random Sampling: $n=1000$ $T_S = 10ms$, $T_{AD} = 1ms$. Input of $0.1Hz/1\hat{V}$ Sinusoidal. Above: input. Below: output.
7. Fir1 Jitter Random Sampling: $n=1000$ $T_S = 10ms$, $T_{AD} = 1ms$. Input of $2Hz/1\hat{V}$ Sinusoidal. Above: input. Below: output.
8. Output of Fir1 Jitter Random Sampling: $n=1000$, $T_S = 10ms$, $T_{AD} = 1ms$. Input of $1000 Hz/1\hat{V}$ Sinusoidal.
9. Experimental vs. theoretical results. Jitter random sampling, filter fir1, $T_S = 10ms$, $T_{AD} = 1ms$, $n=1000$

TABLE I: Power vs. Frequency

<i>Frequency</i> [Hz.]	<i>Power</i> [dB]
.1	-0.19
.4	-2.75
2	-46.25
90.9	-19.77
181.8	-21.65
1000	-19.97
10000	-20.17