

Diseño de dispositivo ortésico para miembro inferior

Trabajo presentado por

Matias Vernengo

para optar al grado de
Ingeniero Mecánico

Director

Dr. Ing. Gustavo Carr

2022



RINFI se desarrolla en forma conjunta entre el INTEMA y la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Diseño de dispositivo ortésico para miembro inferior

Trabajo presentado por

Matias Vernengo

para optar al grado de
Ingeniero Mecánico

Director

Dr. Ing. Gustavo Carr

2022

Gracias:

Principalmente a mi madre, Maria Soledad Vernengo, a mi padre, Nicolas Lotartaro, y a mi tío, Rodolfo Martin Vernengo, quienes estuvieron presentes aconsejandome, guiandome y bancandome durante estos largos años para poder terminar la carrera.

Al resto de mi familia, abuelos y tios.

A todos mis compañeros y amigos que fui conociendo a lo largo de estos 7 años me ayudaron a superar las adversidades y a cumplir con mis metas.

Al Dr. Ing. Gustavo Carr por aceptar ser mi director de tesis y por guiarme y ayudarme en todo momento.

Agradecimientos:

A la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

A quienes colaboraron para poder llevar a cabo este proyecto final:

Dr. Ing. Mirco Chapetti.

Dr. Ing. Adrián Cisilino.

Dr. Enrique Pardo.

Dr. Ing. Sebastián Jaureguizar.

Índice general

Índice general	III
Resumen	1
I Diseño de dispositivo ortésico para miembro inferior	3
1. Introducción y objetivos	4
1.1. Introducción	4
1.2. Objetivos específicos	8
1.3. Revisión bibliográfica	8
2. Planteo inicial del problema	13
2.1. Analogía entre el trote y el salto por impulso	14
2.2. Ensayos para determinar las aceleraciones máximas que soporta el paciente.	16
2.2.1. Caída libre para diferentes alturas con un mismo calzado	17
2.2.2. Caída libre para diferentes calzados a una misma altura	19
2.2.3. Caminata en el lugar	20
3. Modelos teóricos de materiales para el calzado.	22
3.0.1. Modelo de Maxwell	23
3.0.2. Modelo de Kelvin-Voigt	25
3.0.3. Modelo de 3 parámetros: Modelo de Zener.	26
3.1. Determinación de las constantes del modelo de Zener	29
3.1.1. Determinación del tiempo de relajación	32
3.2. Materiales a evaluar	34
4. Modelo de Zener.	35
4.1. Solución exacta de la ecuación diferencial sin excitación.	35

4.2.	Resolución numérica de la ecuación diferencial con condiciones iniciales y de contorno.	40
4.2.1.	Consideraciones de linealidad	40
4.2.2.	Condiciones iniciales y de contorno	41
4.2.3.	Determinación de las áreas de apoyo	43
4.2.4.	Determinación preliminar de los espesores	44
4.2.5.	Selección preliminar de materiales	44
4.3.	Simulación de casos para materiales no descartados	50
4.3.1.	Análisis para suelas de 20 mm de espesor.	51
4.3.2.	Análisis para suelas de 40 mm de espesor.	53
4.4.	Discusión acerca de soluciones alternativas	55
5.	Modelo de Zener: Características no lineales.	58
5.1.	Resolución con elementos no lineales y con área de pisada cons- tante	59
5.2.	Resolución con elementos no lineales con área de pisada varia- ble en el tiempo.	61
5.3.	Comparación de las tres resoluciones	63
6.	Conclusiones y trabajos futuros	68
6.1.	Conclusiones	68
6.2.	Trabajos futuros	69
II	Apéndices	70
A.	Elementos Viscoelásticos	71
A.1.	Introducción	71
A.2.	Viscoelasticidad lineal	72
A.3.	Relajación y retardo	73
A.3.1.	1. Modelo de Maxwell	74
A.3.2.	2. Modelo de Kelvin-Voigt	78
A.3.3.	3. Modelo de 3 parámetros	81
A.4.	Propiedades viscoelásticas dinámicas	84
A.4.1.	Relajación de los segmentos de la cadena	84
A.4.2.	Efecto de la temperatura	85
A.4.3.	Propiedades dinámicas	85
A.5.	Diseño de sistemas de polímeros para amortiguación de vibra- ciones	97
A.5.1.	Introducción	97
A.5.2.	Transición vítrea de los polímeros	99

B. Análisis de marcha	101
B.1. Estudio de la marcha normal (Caminata)	101
B.1.1. Tiempos de marcha	101
B.1.2. Fases de apoyo plantar durante caminata	102
B.1.3. Dinámica de la marcha normal	103
B.2. Estudio de la marcha durante la carrera	106
B.2.1. Mecánica de las pisadas de aterrizaje	108
B.2.2. Dinámica de la carrera	109
C. Presentación de ensayos realizados	111
C.0.1. Medición de la aceleración con un acelerómetro	111
C.1. Ensayo 1: Caída libre desde distintas alturas, con un mismo calzado.	115
C.2. Ensayo 2: Caída libre desde la misma altura, con diferentes calzados.	118
C.3. Ensayo 3: Caminata en el lugar, sin calzado.	121
D. Materiales a evaluar	123
D.1. Sorbothane	123
D.2. Caucho de cloropreno (CR)	123
D.3. Caucho de nitrilo (NBR)	125
D.4. Poliuretano	125
D.5. Silicona	127
D.6. Caucho butílico	128
D.7. Poly (ethyl acrylate) (PEA)	128
D.8. Mezcla de CR y NBR	131
E. Desarrollo del modelo de Zener para RK4	132
F. Plano de la entresuela	134
	136
Bibliografía	136

Resumen

Este proyecto final de grado se realizó con el objetivo de diseñar un dispositivo, no invasivo, que permita amortiguar el impacto durante la actividad física para un paciente con una lesión osteocondral en el tobillo.

Se comenzó por realizar una revisión bibliográfica, encontrando que no hay trabajos específicos en este caso, aunque se determinó que el tipo de material a utilizar eran los elastómeros.

Luego se implementaron y resolvieron modelos de comportamiento del sistema masa-elemento viscoelástico (suelas) con condiciones iniciales no nulas (caída libre desde alturas determinadas). Se encontró que los modelos conocidos durante la formación académica no lograron representar matemáticamente el comportamiento real de un elastómero, por lo que se utilizó el modelo de Zener que describe la ecuación constitutiva de un elastómero vulcanizado a partir de una ecuación diferencial con tres parámetros, 2 resortes y un amortiguador.

Se realizaron ensayos con acelerómetros que permitieron encontrar límites de aceleración que no inducen dolor en el paciente.

Se realizó una nueva revisión bibliográfica para encontrar datos de ensayos de distintos polímeros comerciales que puedan servir para esta aplicación con los que se determinaron los valores de los elementos del modelo.

Por último, se resolvió la ecuación diferencial del modelo numéricamente teniendo en cuenta que los elementos del modelo pueden ser lineales o no lineales, considerando las posibilidades de subestimación y sobreestimación de los resultados.

Se concluyó que el diseño de un dispositivo de estas características es posible. Para el material sorbothane 30 se llegó a 52 milímetros de espesor de suela.

Finalmente, se plantearon posibles trabajos a futuro.

Parte I

Diseño de dispositivo ortésico para miembro inferior

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Introducción

La locomoción bípeda es una de las características del hombre que lo diferencia del resto del reino animal. La marcha es un proceso que cada persona aprende y no es de extrañar que cada una muestre en su desarrollo características propias. Por ello se puede reconocer a distancia a una persona por su manera de caminar. Estas características personales vienen dadas por múltiples factores: de una persona a la otra pueden diferir la longitud de los segmentos del cuerpo o la masa de cada uno de ellos; por otro lado estos segmentos deben ser puestos en movimiento por fibras musculares que también pueden ser de diferente longitud o grosor.

Cuando se estudia la marcha de diferentes individuos se puede ver que desaparecen las características personales y aparecen elementos comunes. Estos incluyen los tiempos de marcha, las fases de apoyo plantar y las fuerzas actuantes. Durante la locomoción se pueden identificar 4 fuerzas importantes:

- Fuerza de reacción vertical.
- Fuerza de reacción longitudinal.
- Fuerza de reacción lateral.
- Fuerza de torsión.

Un factor importante en el análisis del movimiento humano en el deporte, especialmente durante la carrera, es la fuerza de reacción vertical (VGRF). Es más del doble del peso corporal de una persona y mucho mayor que las fuerzas de reacción horizontal y lateral del suelo. El exceso de VGRF se ha

relacionado también con el riesgo de lesiones relacionadas con la carrera. Se cree que las fuerzas de impacto excesivas y/o la tasa de carga y el movimiento anormal de la articulación del tobillo desempeñan un papel importante en las lesiones al correr. Entre las más comunes se encuentran la periostitis tibial, la fascitis plantar, esguinces, tendinopatías en rodilla y tendón de Aquiles, entre otras.

Este Trabajo Final de la carrera de Ingeniería Mecánica busca de encontrar una solución ingenieril mediante el diseño de un dispositivo ortésico para un paciente el cual presenta una lesión osteocondral ubicada en el sector lateral de la superficie articular distal de la tibia con el astrágalo.

El proyecto no se centrará en las lesiones generadas durante la actividad física sino en contribuir a evitar las causas del dolor producido por una lesión existente en la articulación tibio-peroneo-astragalina.

El término “lesión osteocondral” hace referencia a lesiones delimitadas en el cartílago de las grandes articulaciones, rodeadas de tejido sano. La lesión osteocondral penetra el cartílago hasta afectar al hueso subyacente. Las lesiones osteocondrales pueden ser asintomáticas y detectarse tras la realización de una prueba de imagen por otro motivo, o durante una artroscopia. Cuando son sintomáticas, producen dolor en la articulación afectada, limitación de la movilidad y, en ocasiones, inflamación de la articulación con el sobreuso.

El cartílago es un tejido especial, sin riego sanguíneo, adaptado para soportar la carga y la fricción a que se ven sometidas las articulaciones; las lesiones del cartílago, que ocurren hasta en el 12 % de la población, exponen el hueso con el roce directo producido por el movimiento articular. Cuando falta el cartílago, desencadena dolor y limita el movimiento de las articulaciones afectadas.

Las lesiones osteocondrales requieren un tratamiento cuando producen muchos síntomas, o cuando por su extensión amenazan con producir artrosis secundaria que lleve a necesitar una prótesis posterior. Las terapias clásicas buscan inducir una reparación del cartílago por mecanismos naturales de regeneración (desbridamiento, abrasión, microfracturas) o trasplantando partes de cartílago de zonas de poca carga a la zona lesionada (mosaicoplastias). Sin embargo, el cartílago tiene una capacidad regenerativa limitada, y estas técnicas suelen fallar en lesiones de gran tamaño y en lesiones sobre las que ya se han realizado intervenciones previas, reproduciéndose los síntomas al cabo del tiempo.

En la figura 1.1 se muestran las vistas laterales y frontales de resonancias y tomografías realizadas en el paciente de este caso de estudio. En la figura 1.1(a), se observa la primera imagen de la lesión. Se dificulta su observación por la presencia de edema óseo. A medida que pasó el tiempo, el edema desapareció pero la lesión quedó, como se puede ver en las imágenes a través del tiempo. El tamaño inicial de la lesión era de 15 mm de diámetro transverso.

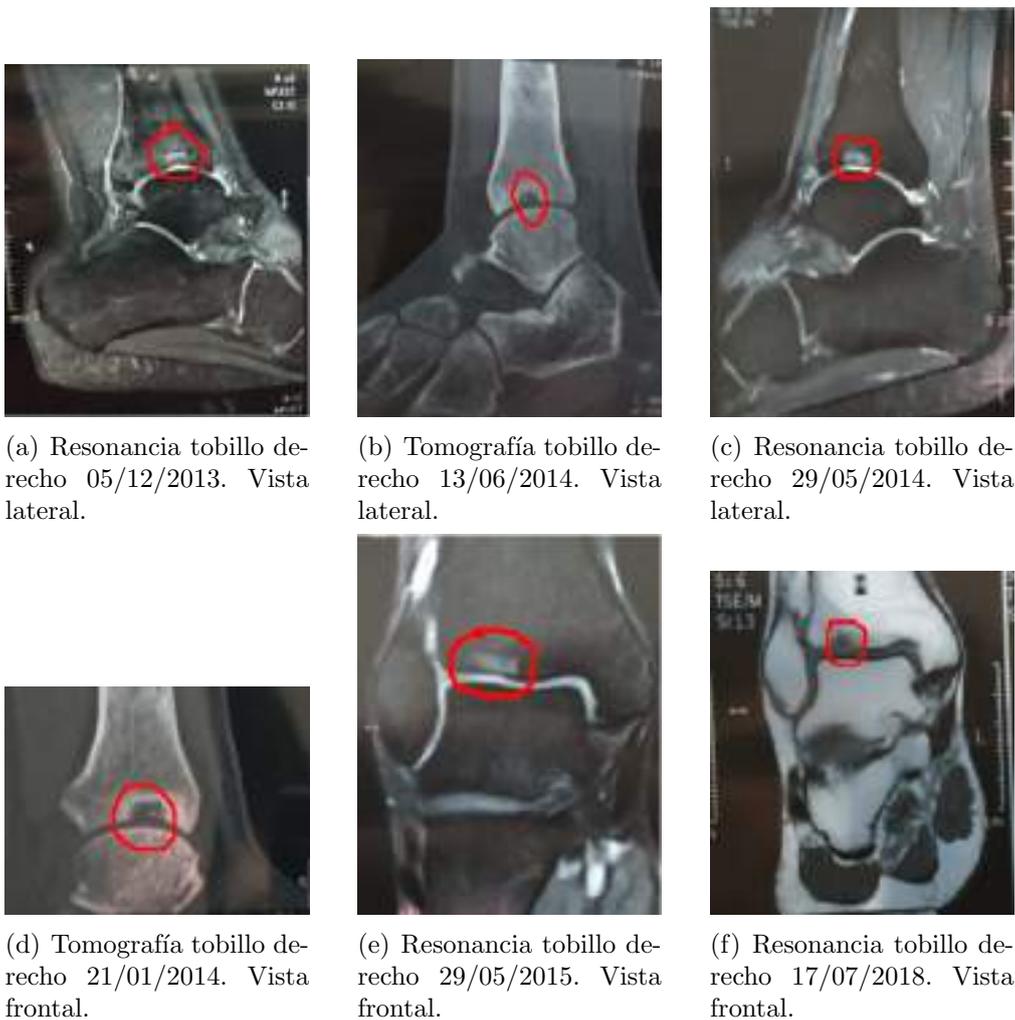


Figura 1.1: Vistas laterales y frontales de resonancias y tomografías realizadas al paciente.

Los traumatólogos especializados abordaron el problema de la manera tradicional, a través de tratamientos.

El primer tratamiento propuesto por los médicos consistió en dejar de

apoyar el pie derecho durante 6 semanas para reducir el edema óseo, lo que se logró con éxito. Sin embargo, la lesión osteocondral ya estaba causada y seguía generando dolor al caminar y sobre todo al correr. Para las lesiones de este tamaño, el tratamiento adecuado es realizar un implante de hueso para rellenar el hueco. En este caso, el mayor impedimento para realizar esto es la ubicación de la lesión, la articulación tibio-peroneo-astragalina es de difícil acceso para realizar una operación de este estilo.

Los traumatólogos decidieron realizar una artroscopia de tobillo, una cirugía que utiliza una pequeña cámara e instrumentos quirúrgicos para examinar o reparar los tejidos dentro o alrededor del tobillo, como se puede ver en la figura 1.2. La cámara se llama artroscopio. El procedimiento le permite al médico detectar problemas y hacer reparaciones sin realizar grandes cortes en la piel y el tejido. Esto significa que se puede tener menos dolor y una recuperación más rápida que con una cirugía abierta.



Figura 1.2: Esquemmatización de artroscopia de tobillo.

El resultado que se obtuvo en el paciente luego de la intervención quirúrgica se puede ver en la figura 1.1 f. Se puede ver que la lesión redujo su tamaño a unos 10 mm de diámetro transversal. Esto fue un gran éxito, se logró reducir la cavidad en un 30%. Para reducirla aún más se requiere seguir haciendo artroscopias, lo cual tampoco asegura que se vaya a reducir. Actualmente, ante cualquier impacto, ya sea correr o saltar, esta zona produce dolor y molestias (además del deterioro del cartílago que podría producir una artrosis temprana). A su vez, posterior a la cirugía, era necesario inyectar corticoides para ayudar a aliviar el dolor y la inflamación.

Un estudio hecho por Zadpoor en 2007 [1], muestra que se puede suponer

que no hay un elemento activo en la articulación y que el esfuerzo recibido por el hueso no depende del paciente sino de la fuerza aplicada por el impacto. La cual no es posible controlarla activamente mediante actividad muscular sino que debe ser disminuida mediante órtesis.

Es por esto que nació la motivación de hacer un dispositivo ortésico, no invasivo, que permita que el paciente pueda seguir haciendo deporte sin dolor ni riesgo de empeorar la lesión en un futuro.

1.2. Objetivos específicos

- Elaborar un modelo analítico que permita conocer las variables intervinientes y sus valores.
- Determinar los materiales cuyas características mecánicas sean las más cercanas a los valores que requerimos.
- Calcular las dimensiones del dispositivo a diseñar.

Para un planteo inicial se realizará un análisis de marcha durante la caminata y durante la actividad física. Se buscará un valor de impacto para el cual el paciente no siente dolor en su tobillo.

Luego, se realizará un planteo dinámico mediante ecuaciones diferenciales para encontrar un sistema de amortiguamiento que permita cumplir con los objetivos. Es necesario seleccionar el o los materiales, y calcular sus respectivas dimensiones, para poder obtener las propiedades dinámicas deseadas.

Se espera conseguir el conjunto de materiales y dimensiones adecuados para el diseño de un prototipo virtual representativo de un modelo utilizable en el mundo real. De obtenerse un modelo exitoso, se llevarán a cabo croquis del dispositivo, con un listado de materiales, listado de piezas y lo necesario para su posible fabricación.

1.3. Revisión bibliográfica

Como primera medida se realizó una revisión bibliográfica con el fin de poder realizar un correcto planteo del problema.

El conocimiento de la fuerza que se aplica a la planta del pie al momento de correr es uno de los puntos principales a tener en cuenta para este proyecto.

En un artículo publicado por Jie-Han [2], se obtienen datos de la fuerza de reacción vertical y de la aceleración del pie usando un acelerómetro en la zapatilla y lo comparan con el registro del impacto en celdas de carga en una máquina de correr. Utilizan una red neuronal para ajustar los parámetros leídos de los datos del acelerómetro uniaxial con los registros triaxiales de las celdas de carga. Los resultados que obtuvieron se pueden ver en la figura 1.3. Como se puede ver, para un trote a una velocidad de 10 km/h el máximo de la fuerza es aproximadamente 2.3 veces el peso de la persona. Además, por la forma obtenida en este trabajo, la VGRF se puede aproximar a una función seno de media onda, figura 1.4.

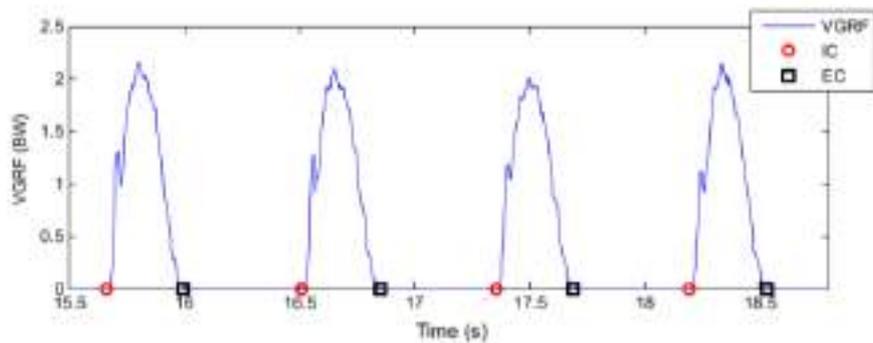


Figura 1.3: Fuerza de reacción vertical medida a través de una cinta de correr equipada con celdas de carga [2]

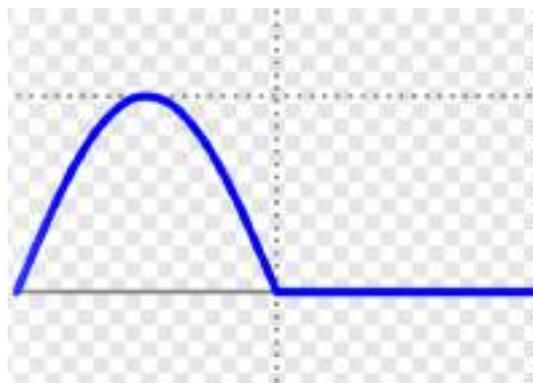


Figura 1.4: Esquema de un seno de media onda.

Si bien se puede conocer cuál es la fuerza aplicada a la planta del pie durante la actividad física, es importante saber cual es el esfuerzo aplicado

directamente en la articulación. Según McLaughlin [3]: " El tipo de calzado que usan las personas con artropatía de tobillo tiene un efecto significativo sobre la cantidad de fuerza que actúa en la superficie de la articulación. Los zapatos deportivos, al brindar mayor comodidad y soporte para los pies, pueden facilitar una mayor actividad muscular alrededor del tobillo y, por lo tanto, una mejor estabilidad dinámica de las articulaciones, lo que explica por qué algunos pacientes con artropatía de tobillo informaron menos dolor. Aún no está claro qué efecto puede tener una mala geometría articular sobre las fuerzas intraarticulares del tobillo y, de hecho, la transmisión real de la fuerza a través de la superficie del astrágalo".

McLaughlin estudia en ese trabajo el efecto de la suela del calzado en las fuerzas aplicadas a articulaciones de pacientes con hemofilia. Lo importante es que no está claro todavía cuál es el efecto de la absorción de fuerzas. Hay un aumento cuando se utilizan zapatillas neutras comparadas con suelas más duras. McLaughlin no pudo determinar cuál es el valor de fuerza aceptable para una articulación. Es por esto que para este proyecto final se fijará el límite de fuerza en función del dolor del paciente.

En el paciente, la lesión no genera dolor en la caminata bajo ninguna circunstancia. Es decir, puede caminar con cualquier calzado, o sin él, durante tiempos prolongados (al menos 4 horas) y no sentir dolor. Esta misma persona, si realiza una actividad moderada de trote durante media hora, con calzado apto, ya empieza a sentir dolor. Para este caso, fijar como límite máximo permisible a la fuerza que involucra la caminata pareciera ser lo más adecuado. Cómo se desarrollará después en el capítulo 2, esto se va a determinar en el presente proyecto mediante acelerometría.

Según Milani [4], el sistema nervioso central actúa activamente en la forma de correr de manera de minimizar el impacto. De acá surge otra incógnita: ¿Será posible que la actividad cerebral reemplace a la ortesis? Si bien esto ocurre, Milani propuso tres conceptos para la prevención de cargas excesivas y lesiones relacionadas: amortiguación, soporte y guía. Estos objetivos se pueden lograr alterando las propiedades del material o las características de construcción de los zapatos. Aun con la acción del cerebro, es necesario soportar, amortiguar y guiar la pisada al correr mediante alteraciones en el material de la zapatilla, con lo cual no es posible descartar la necesidad de una ortesis.

Zadpoor [1], por otra parte, dice: "Los amortiguadores pasivos incluyen

líquido sinovial, hueso, talonera y cartílago articular.”. Este artículo muestra que se puede suponer que no hay un elemento activo en la articulación y que el esfuerzo recibido por el hueso no depende del atleta/paciente sino de la fuerza aplicada por el impacto. Además, citando a otros autores: “De hecho, los bio feedbacks no son lo suficientemente rápidos ([5]), y el tiempo de duración de una fuerza de impacto es más corto que el tiempo requerido para que un músculo reaccione a la señal sensorial generada durante el impacto.” ([6], [7]). Nuevamente se vuelve a encontrar con que no es posible controlar activamente la fuerza del impacto mediante actividad muscular. Debe ser disminuida mediante órtesis.

Hasta ahora solo se analizó el problema bajo condiciones normales. Pero, ¿Este mismo análisis será válido luego de un tiempo prolongado de actividad física? ¿Cambia la forma de correr con la fatiga muscular a lo largo de la sesión de trote? Según Christina [8], en un estudio donde se examinaron los efectos de la fatiga muscular localizada sobre la fuerza de reacción vertical del suelo, se observó que las magnitudes máximas del impacto no se vieron afectadas. Es decir, se puede suponer que los resultados de nuestro análisis no variarán para la persona en relación con cuánto tiempo dure la actividad.

Además, un artículo publicado por Becker [9] dice que las propiedades del calzado influyen en la actividad muscular de los corredores. Hay una respuesta particular de cada persona al correr con calzados diferentes, o bien para mantener las mismas aceleraciones de los miembros o para mantener la misma trayectoria de los miembros al correr. No hay conclusiones definitivas en este tema. De este artículo se puede concluir de que no hay una influencia en particular que impida fabricar un calzado con 50 mm de espesor, o más.

Por otro lado, en cuanto a la forma de la suela, hay estudios acerca del esfuerzo aplicado al tendón de Aquiles. Sobhani et. al. [10] estudiaron zapatillas con una ”suela corta”, o sea un punto de apoyo más cercano al centro del pie para minimizar el esfuerzo sobre el tendón de Aquiles al disminuir el momento respecto de la articulación del tobillo. Ese trabajo no menciona que haya una relación entre la tensión del tendón y la fuerza sobre la lesión osteocondral.

En conclusión, se puede observar que este es un problema que se ha abordado desde diferentes enfoques. Desde fuerzas involucradas, esfuerzos aplicados al tobillo, como cambia la mecánica con la fatiga muscular, entre otras. Todo esto indica que es posible llevar a cabo una plantilla o zapatilla

para minimizar el impacto durante la actividad física. A lo largo de este proyecto final se tratará de encontrar una solución a este problema.

Capítulo 2

Planteo inicial del problema

Durante la actividad física, se generan esfuerzos dinámicos sobre el tobillo debido al impacto. En este capítulo se intenta averiguar cuales son las aceleraciones máximas que puede soportar el paciente antes de que aparezca el dolor luego de la actividad física. Es decir, el objetivo de la experimentación es averiguar los valores de esas aceleraciones para luego compararlas con los resultados de modelar numéricamente la misma actividad mediante un modelo matemático adecuado, a fin de obtener los materiales y dimensiones adecuadas del calzado.

Como estuvimos viendo anteriormente, la fuerza de reacción vertical del suelo es la principal fuerza que interviene durante la actividad física. Al llevar a cabo una resolución matemática se puede definir la forma de la fuerza que interviene. Se puede observar que, según Jie-Han [2] la VGRF tiene la forma de la figura 1.3, que se puede aproximar a un seno de media onda. La amplitud va a depender de la velocidad a la que se realice la marcha, en este caso de 10 km/h.

Para el desarrollo de este proyecto final, se dispone de dos acelerómetros uniaxiales. Se fijarán en el tobillo del paciente a 90 grados para poder medir la variación de aceleración. Una situación de trote normal involucra aceleraciones horizontales y verticales. A su vez el tobillo, a medida que avanza en la marcha, va rotando respecto de la rodilla, por lo que cambiaría el sentido de las mediciones. Para obtener resultados más precisos, y por las limitaciones que estos instrumentos ofrecen, se optó por realizar los ensayos en una dimensión. Es decir, medir solo la aceleración en un eje, el vertical. Esta situación no se asemeja a un trote, sino que es similar a un salto.

Para lograr una equivalencia entre el trote y el salto que se va a ensayar, se

buscó que ambos generen el mismo impulso sobre la planta del pie. A partir de esto se puede obtener una altura equivalente que permita relacionar el trote, estimado por las mediciones registradas por celdas de presión de la publicación de Jie-Han [2], a un salto.

2.1. Analogía entre el trote y el salto por impulso

Se sabe que el impulso de una fuerza se puede calcular como la integral en un ciclo de dicha fuerza. En este caso, si se aproxima la VGRF a un seno de media onda como la figura 1.4, la fuerza se puede descomponer en 2 intervalos:

- $F(t) = F_o \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right)$ si $0 < t < T/2$
- $F(t) = 0$ si $T/2 < t < T$

Donde T es el periodo y t es el tiempo, ambos en segundos.

Para un trote, y basándose en la figura 1.3, se observa que $T=0.6$ segundos y la amplitud, $F_o = 2,3 \cdot m \cdot g$.

El impulso que realiza esta VGRF sobre el piso en un ciclo, será:

$$I_{trote} = \int_0^T F(t) dt = \int_0^{0,3} 2,3 \cdot m \cdot g \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt \quad (2.1)$$

Entonces, el impulso generado durante el trote a 10 km/h será:

$$I_{trote} = 2,3 \cdot m \cdot g \cdot 0,19099 \quad (2.2)$$

Para aproximar un ciclo de trote a una caída libre, hay que calcular una altura equivalente que genere el mismo impulso sobre el piso en el choque. Cuando una persona trota, la altura de caída inicial y final llegan al mismo punto. Para el cálculo se supondrá que la persona sufre una caída libre, rebota y llega nuevamente al punto de inicio, como se muestra en la figura 2.1. Si bien no es un choque elástico ya que en la realidad está la impulsión del otro pie, se expresa esto como una hipótesis máxima, sobreestimativa.

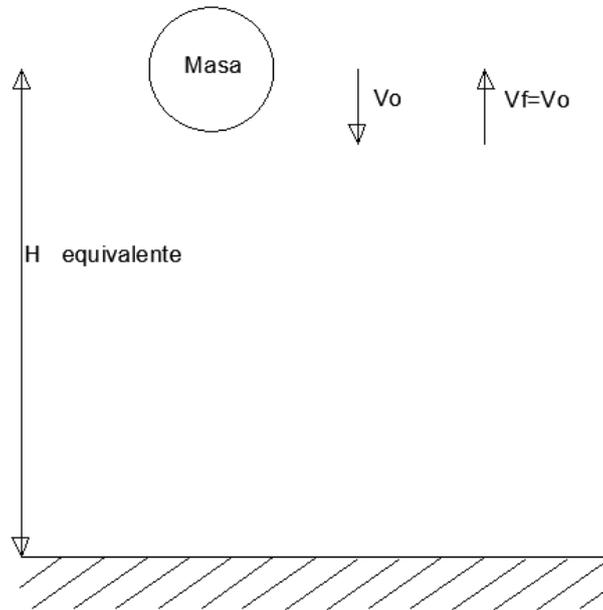


Figura 2.1: Esquematización del planteo de masa en caída libre y colisión perfectamente elástica.

Para este caso, el impulso se calcula como la diferencia de cantidad de movimiento, es decir:

$$I_{choque} = \Delta P = m \cdot \Delta V = m \cdot (V_o - (-V_o)) = 2 \cdot m \cdot V_o \quad (2.3)$$

Donde V_o , al ser una caída libre, será:

$$V_o = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{eq}} \quad (2.4)$$

Como se intenta determinar la altura para que el impulso sea el mismo, se iguala 2.2 y 2.3 y se despeja la altura equivalente, H_{eq} :

$$H_{eq} = \frac{(2,3 \cdot g \cdot 0,19099)^2}{8 \cdot g} = 0,237m \quad (2.5)$$

Entonces se obtiene que la altura equivalente, la cual no depende de la masa.

La altura equivalente es la altura de la que una persona tiene que caer, para producir sobre el suelo el mismo impulso que genera cuando trota,



Figura 2.2: Disposición de los acelerómetros axiales para realizar las mediciones.

suponiendo un choque elástico. Este concepto es muy importante ya que se va a estar utilizando para ensayos experimentales y para la resolución de las ecuaciones diferenciales de los modelos.

2.2. Ensayos para determinar las aceleraciones máximas que soporta el paciente.

En esta sección se presentan los ensayos que se realizaron para obtener las aceleraciones involucradas durante la actividad física. El desarrollo completo se podrá ver en el apéndice C.

El primer ensayo consiste en medir la variación de aceleración del tobillo durante una caída libre mediante la fijación de dos acelerómetro axiales, dispuestos a 90 grados. La caída libre permite evitar perturbaciones que se dan en los demás ejes durante el movimiento de marcha para poder analizar el problema uniaxialmente. Con los mismos instrumentos se realizó un segundo ensayo para medir la variación de aceleración durante la caminata del paciente.

Los ensayos que se van a desarrollar se podrían resumir 3 condiciones diferentes:

- Caída libre para diferentes alturas con un mismo calzado.



Figura 2.3: Paciente con el equipo instalado para realizar los ensayos 1 y 2.

- Caída libre para diferentes calzados a una misma altura.
- Caminata en el lugar.

2.2.1. Caída libre para diferentes alturas con un mismo calzado

Este ensayo se realizó para diferentes alturas: 13, 18, 30, 43 y 62 cm. En la figura 2.4 se puede ver como va aumentando el pico de aceleración a medida que aumenta la altura. El mismo se realizó con zapatillas especiales para hacer deporte y con plantillas ortopédicas. En la tabla 2.1 se puede ver

el promedio del pico de aceleración obtenido para cada altura analizada.

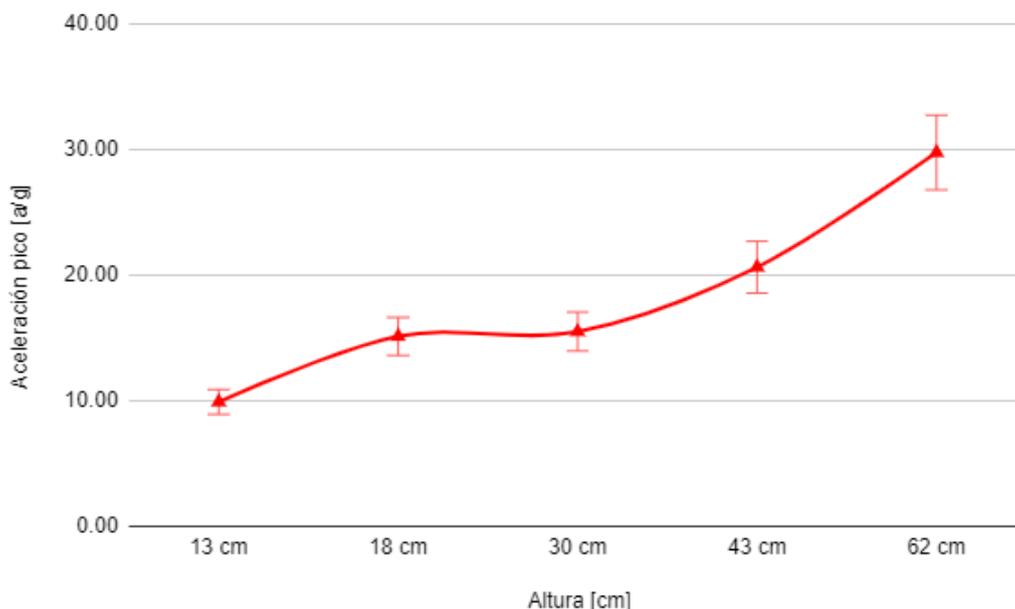


Figura 2.4: Variación de aceleración en el tobillo, a partir de una caída libre a distintas alturas, con zapatillas especiales para hacer deporte y con plantillas ortopédicas.

El cambio de pendiente en 30 cm que se puede ver en la figura 2.4, se puede atribuir a la manera de caer. A partir de los 30 cm, por las alturas involucradas, cambió la forma de caer y se empezó a utilizar los dos pies para el apoyo. Se descartan a la hora de tratarlos de asemejar a un trote. Entre los 18 y los 30 cm se encuentra el rango de valores que se puede tomar como válido como para hacer una comparación con el trote; similar a los resultados obtenidos en la sección anterior. Se puede ver que en este intervalo el pico de aceleración que se midió experimentalmente se encuentra en el mismo valor, 15 a/g. Teniendo en cuenta la experiencia del paciente, el salto realizado desde 18 cm de altura fue el más cercano al trote, por lo que será utilizado como referencia para el cálculo utilizando modelos matemáticos.

Altura [cm]	Pico de aceleración [a/g]	$\pm\Delta Ac$ [a/g]
13	9.90	1.30
18	15.13	2.63
30	15.51	0.80
43	20.64	3.06
62	29.77	1.15

Cuadro 2.1: Media y dispersión de las mediciones realizadas durante el ensayo.

2.2.2. Caída libre para diferentes calzados a una misma altura

Se realizó este mismo ensayo para una altura de 18 cm, con diferentes calzados. Los casos analizados son:

- Zapatilla para correr con plantilla ortopédica.
- Alpargatas.
- Crocs.
- Sin calzado.

En la figura 2.5 se puede ver una comparación de los datos obtenidos. En la tabla 2.2 se puede ver el promedio del pico de aceleración obtenido para cada calzado.

Tipo de calzado	Pico de aceleración [a/g]	$\pm\Delta Ac$ [a/g]
Zapatilla para correr con plantilla ortopédica.	14.79	0.51
Alpargatas.	17.01	0.41
Crocs.	16.64	0.31
Sin calzado.	19.65	0.63

Cuadro 2.2: Media y dispersión de las mediciones realizadas durante el ensayo.

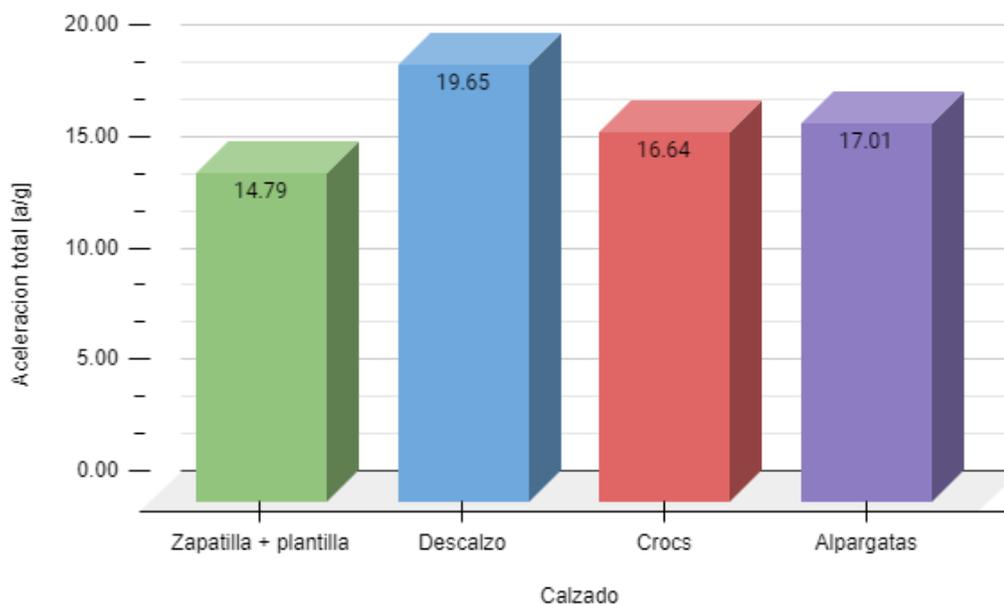


Figura 2.5: Variación de aceleración en el tobillo, a partir de una caída libre a 18 cm, con distintos calzados.

Se puede ver que con unas zapatillas para correr y plantilla ortopédica se logra reducir el impacto un 25 % respecto a realizar la misma acción sin calzado. Con esto se observa la importancia de un calzado para las actividades de impacto, más cuando hay lesiones.

2.2.3. Caminata en el lugar

Sabiendo que una caminata, con cualquier calzado, no genera dolor en el paciente, se realizó este ensayo con el fin de poder conocer la máxima aceleración tolerable en el tobillo. El mismo consiste en fijar los dos acelerómetros axiales, a 90 grados, al tobillo y caminar en el lugar. Se intenta que la aceleración a medir sea unidireccional para poder compararlo con las magnitudes medidas anteriormente.

La misma se realizó sin amortiguación externa, es decir, sin calzado, para poder medir la máxima aceleración que se puede generar en el momento de impacto durante la caminata sin que se vea atenuada por algún dispositivo. Debido a que la dinámica de la caminata podría implicar aceleraciones mayores, y la dificultad para medirla con las herramientas disponibles, se

considera que el límite permisible que no genera dolor es un 30 % mayor al pico que se midió en estas condiciones.

En la tabla 2.3 se puede ver el promedio del pico de aceleración obtenido.

Tipo de calzado	Pico de aceleración [a/g]	$\pm\Delta A_c$ [a/g]
Sin calzado.	6.33	0.68

Cuadro 2.3: Media y dispersión de las mediciones realizadas durante el ensayo.

Esto sirve para obtener un valor experimental, empírico, de hasta cuánto se debería disminuir esa variación de aceleración durante el trote en el tobillo para evitar dolor y molestias. En conclusión, el valor que se utilizará como referencia experimental de aceleración será de **10 a/g**.

Capítulo 3

Modelos teóricos de materiales para el calzado.

Un calzado deportivo consta de cuatro partes importantes:

- **Entresuela:** Se ubica entre la suela y la plantilla, y sirve como amortiguador de choque.
- **Suela externa:** Están en contacto con el suelo. Estan fabricadas de goma reforzada con negro de carbon. Deben ser flexibles y antiderrapantes en varios tipos de superficies, húmedas o secas.
- **Tela superior del calzado:** Recubre el pie. Está hecha de una tela sintética, ligera y ventilada, que permite la salida del calor que se genera en el pie.
- **Plantilla:** Tienen la misión de mejorar los apoyos plantares, minimizando cualquier momento en la pisada que provoque tensiones musculares y articulares, y optimizando el despegue y, en definitiva, el rendimiento deportivo.

Lo más importante, y donde se va a enfocar el análisis durante este proyecto final, es el material del calzado; en particular el de la entresuela o plantilla (depende de las dimensiones obtenidas). Los materiales más utilizados para un calzado son elastómeros, que tienen, entre otras características, un comportamiento viscoelástico que permite amortiguar el impacto, facilidad para la fabricación, son relativamente livianos, entre otras. Un material relativamente rígido podría hacer que el impacto sobre la planta del pie sea



Figura 3.1: Esquematación de las partes que componen un calzado deportivo.

excesivo. Un material muy blando, ante una acción que duplica el peso como es un trote, no aportaría la estabilidad necesaria para poder realizar la actividad sin dificultades. En el medio se posee un abanico de posibilidades que pueden llegar a ser beneficiosas, o no, para lo que se está buscando.

Para modelar el comportamiento viscoelástico de los materiales, y para expresar matemáticamente la naturaleza del comportamiento, se conciben dos configuraciones básicas que utilizan combinaciones de tensión elástica y tasa de deformación viscosa. El comportamiento tiene componentes elásticos y viscosos modelados como combinaciones de resortes y amortiguadores, respectivamente, y se presumen con características viscoelásticas lineales, lo que significa que el módulo elástico es independiente de la deformación. Esto puede suponerse para deformaciones pequeñas de los cuerpos viscoelásticos. Además, el líquido en el amortiguador ideal, se supone que tiene un comportamiento newtoniano (la viscosidad es independiente de la velocidad de deformación). Cada modelo difiere en la disposición y cantidad de estos elementos. Estas ecuaciones constitutivas se analizan a continuación con el fin de poder obtener el modelo más adecuado para este proyecto.

3.0.1. Modelo de Maxwell

En este modelo, el material viscoelástico se representa como una combinación en serie de un resorte y un amortiguador. Bajo una fuerza externa, se sumarán las deformaciones individuales de los elementos elásticos y de los viscosos en esta disposición, mientras que en ambos elementos se experimenta la misma tensión.

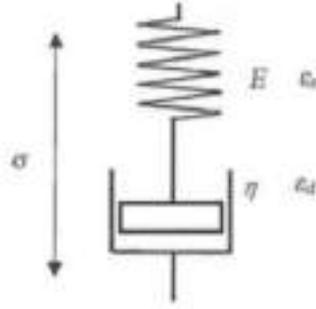


Figura 3.2: Esquemmatización del modelo de Maxwell.[11]

La ecuación constitutiva del modelo de maxwell es:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (3.1)$$

Para analizar el comportamiento de este modelo, la ecuación 3.1 se puede resolver para diferentes sollicitaciones. Por ejemplo, si se aplica una velocidad de deformación constante en $t = 0$, la tensión variará con el tiempo como:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.2)$$

Donde $\tau = \frac{\eta}{E}$, es llamado *tiempo de relajación*.

Se observa que a una velocidad de deformación constante($\dot{\epsilon}$) la tensión y la deformación aumentan con el tiempo para el cuerpo viscoelástico de Maxwell. En un tiempo infinito, el factor en el paréntesis de la ecuación tiende a uno y la expresión se convierte en la de un fluido newtoniano. **Por lo tanto, el cuerpo viscoelástico de Maxwell es un fluido.**

Si después de un tiempo determinado, la deformación se mantiene en un valor constante, la tasa de deformación es $\dot{\epsilon} = 0$. Por lo tanto:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

Integrando respecto del tiempo y asignando un valor inicial de tensión como 0, se puede obtener la expresión de la relajación de tensión:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_M}} \quad (3.4)$$

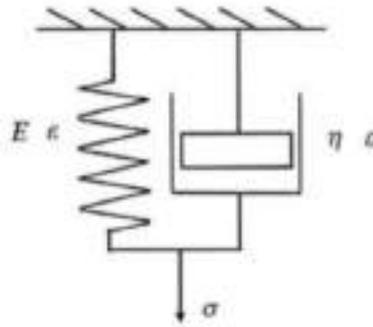


Figura 3.3: Esquematzación del modelo de Kelvin-Voigt.[11]

Esta expresión sugiere que la tensión se relaja a cero a tiempo infinito, como en un fluido newtoniano, si la tensión se mantiene constante.

Por lo tanto, este modelo no se puede asemejar al comportamiento de un elastómero.

3.0.2. Modelo de Kelvin-Voigt

A diferencia del modelo físico de Maxwell, en este el resorte y el amortiguador están en paralelo. El modelo físico de Kelvin-Voigt se puede ver en la figura 3.3. Se observa que las tensiones en el amortiguador y en el resorte se dividen y la deformación en cada brazo es la misma para la condición de equilibrio. La ecuación constitutiva de este modelo es:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{E}{\eta} \left(\frac{\sigma}{E} - \epsilon \right) \quad (3.5)$$

Para este modelo se resolverá la ecuación 3.5 para 2 sollicitaciones: Creep y relajación de tensión.

- Creep:

El cambio en la deformación con el tiempo a una tensión constante puede derivarse matemáticamente de la ecuación constitutiva anterior integrando y tomando la condición inicial ($t = 0$). El comportamiento de creep queda:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (3.6)$$

Donde $\lambda = \frac{\eta}{E}$ es el tiempo de retardo de un cuerpo viscoelástico.

Después de un tiempo suficientemente largo, el término exponencial del paréntesis tiende a cero y, por tanto, la deformación alcanza un valor constante (σ/E), que es la deformación para un sólido con módulo de elasticidad E . Por tanto, *el modelo Kelvin se comporta como un sólido a tiempos largos.*

- Relajación de la tensión:

Refiriéndose nuevamente a la ecuación constitutiva 3.5

Si la tensión instantánea es σ_0 y la deformación es constante en ε_0 en ese punto, la tensión en el cuerpo disminuirá lentamente debido al reordenamiento de las moléculas.

La velocidad de deformación es, por tanto, cero. Por lo tanto:

$$\sigma_0 = E.\varepsilon_0 \quad (3.7)$$

Por lo tanto, **un elemento de Kelvin-Voigt no muestra ninguna relajación y se comporta como un cuerpo elástico de Hooke.**

Ninguno de estos dos modelos representa a los sólidos viscoelásticos reales, como los polímeros. Se puede ver que los modelos más simplificados, que involucran solo 2 elementos, no son adecuados para analizar el comportamiento viscoelástico de los elastómeros. Por lo tanto se va a tener que pasar a un modelo más complejo, con 3 elementos.

3.0.3. Modelo de 3 parámetros: Modelo de Zener.

Para modelar el comportamiento viscoelástico real que se observa en los polímeros en general, hay muchas posibilidades de combinar estos dos modelos básicos para incorporar las características de la fluencia y la relajación de tal manera que se tengan valores finitos de la tensión de relajación a tiempo infinito y un valor finito de la deformación de fluencia a tiempo infinito. En la figura 3.4 se muestran varias combinaciones posibles de tres parámetros, ya sea dos resortes con un amortiguador o un resorte con dos amortiguadores. Los modelos A y B representan sólidos viscoelásticos. Para un elastómero vulcanizado, el modelo más utilizado es el modelo Zener (A).

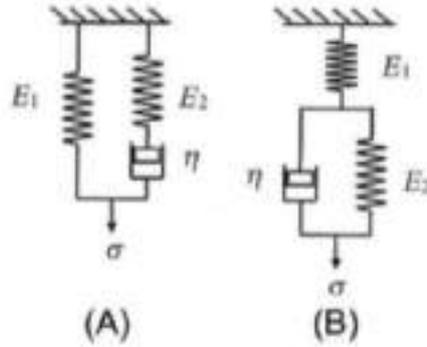


Figura 3.4: Esquematización del modelo de 3 parámetros.[11]

Las ecuaciones constitutivas del modelo de la figura 3.4A es la siguiente:

$$\eta \frac{d\sigma}{dt} + E_2\sigma = \eta(E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1E_2\varepsilon \quad (3.8)$$

Corresponde a ecuación diferencial de primer orden. A continuación se resuelve la ecuación constitutiva 3.8 para 3 solicitaciones: Relajación de tensiones, Creep y Recuperación.

- Relajación de tensiones:

Sea aplicada una tensión instantánea σ_l y sea la tensión instantánea ε_l y por lo tanto la derivada de la misma es cero. La ecuación queda:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{E_2}{\eta} = \frac{E_1E_2}{\eta} \varepsilon_l \quad (3.9)$$

Integrando e introduciendo la condición inicial: en $t = 0$, $\sigma_l = \varepsilon_l(E_1 + E_2)$. Se obtiene:

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_l}{E_1 + E_2} \right) \left[E_1 + E_2 \exp \left(-\frac{E_2}{\eta} t \right) \right] \quad (3.10)$$

El término E_2 es la inversa del tiempo de relajación, del brazo de Maxwell. A un tiempo muy largo, $t = \infty$, el término exponencial en el

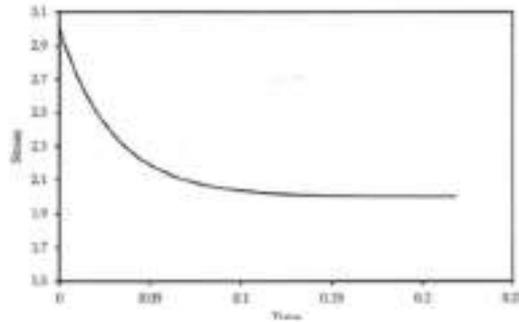


Figura 3.5: Curva de relajación para un cuerpo viscoelástico de Zener.[11]

paréntesis de la Ec.3.10 tiende a cero, y la tensión relajada tiene un valor límite:

$$\sigma_R = \frac{\sigma_1 E_1}{E_1 + E_2} \quad (3.11)$$

La figura 3.5 muestra la naturaleza de la curva de relajación de tensiones para un cuerpo viscoelástico de Zener.

- Creep:

Si se supone que la tensión se aplica instantáneamente y se mantiene constante en σ_0 , y la deformación instantánea es ε_0 . La deformación del cuerpo viscoelástico cambiará con el tiempo. La expresión de la fluencia para el modelo de Zener se deriva de la ecuación constitutiva básica, tomando la derivada de la tensión como cero.

Integrando y aplicando la condición inicial en $t = 0$, $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2}$

Se obtiene:

$$\varepsilon = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{E_1(E_1 + E_2)} \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t\right) \right] \quad (3.12)$$

La expresión anterior para la deformación por creep muestra que la deformación después de un tiempo prolongado es σ_0/E_1 .

- Recuperación:

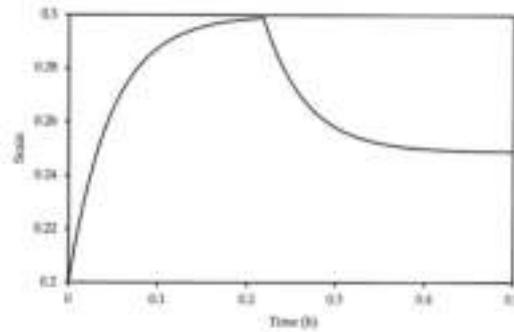


Figura 3.6: Curva de creep y recuperación para un cuerpo viscoelástico de Zener.[11]

Al retirar la tensión constante durante el creep, la deformación se recuperará parcialmente. Por lo tanto, la deformación se obtiene:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_R - \frac{\sigma_R}{E_1 + E_2} \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t\right) \quad (3.13)$$

La Figura 3.6 muestra el creep típico y la recuperación de la deformación de un cuerpo viscoelástico de Zener. Tanto la deformación de fluencia como la recuperación tienen valores límite para este modelo.

En este proyecto final el comportamiento viscoelástico de un elastómero se analizará con el modelo de Zener, figura 3.4 (A).

En el apéndice A se desarrolla el tema viscoelasticidad y el comportamiento de estos 3 modelos con mayor detalle.

3.1. Determinación de las constantes del modelo de Zener

Para el dimensionamiento del dispositivo, si bien existe una limitación por reglamentación en el alto máximo de suela para calzados para correr maratón [12], no hay otra restricción de máximo espesor.

Los polímeros se presentan con tres constantes dinámicas: el módulo de almacenamiento, E' ; el módulo de pérdida, E'' ; y el factor de pérdida, $\tan \delta$ y no en valores de K y C para modelarlos. Es por eso que se tienen que calcular estos elementos a partir de E_1 , E_2 y η .

A partir del desarrollo del libro Polymers for Vibration Damping Applications [11] se puede ver que las constantes E_1 , E_2 y η , que son las que se necesitan para poder simular este modelo (figura 3.4 (A)), se pueden obtener a partir de ensayos mecánicos dinámicos (DMA, por sus siglas en inglés). Un ensayo DMA es un análisis utilizado en estudios de procesos de relajación, para estudiar y caracterizar el comportamiento de materiales viscoelásticos y sus respuestas ante impulsos, estrés, deformación en tiempo y frecuencia. De este ensayo se pueden obtener 3 parámetros: el módulo de almacenamiento, E' ; el módulo de pérdida, E'' ; y el factor de pérdida, $\tan \delta$. Para este modelo, tienen la forma:

$$E' = \frac{E_1 + \omega^2 \tau^2 E_2}{1 + \tau^2 \omega^2}; E'' = \frac{\tau \omega (E_2 - E_1)}{1 + \tau^2 \omega^2}; \tan \delta = \frac{E''}{E'} = \frac{\tau \omega (E_2 - E_1)}{E_1 + \omega^2 \tau^2 E_2}$$

Donde: E' es el módulo de almacenamiento ; E'' es el módulo de pérdida; $\tan \delta$ es el factor de pérdida; τ es el tiempo de relajación; ω es la frecuencia a la que se realizó el ensayo.

Para simular el modelo, se debe obtener E_1 , E_2 y η en función de E' , E'' y δ . Desarrollando, se obtiene:

$$E_1 = E' - E'' \tau \omega \quad (3.14)$$

$$E_2 = E' + \frac{E''}{\tau \omega} \quad (3.15)$$

$$\eta = \tau E_2 \quad (3.16)$$

De esta manera, a partir del ensayo DMA se puede obtener E_1 , E_2 y η . Es muy importante destacar que se debe fijar tanto una temperatura como una frecuencia para poder obtener estas constantes. En cuanto a la frecuencia se va a evaluar a 1 hz (frecuencia razonable para simular una actividad de trote). La temperatura va a tener una mayor variabilidad pero se va a fijar a temperatura ambiente, aproximadamente 25 grados.

Una vez que se obtienen las constantes del polímero, es necesario tener en cuenta la geometría del calzado, es decir, el área y el espesor. Para esto hay que calcular una constante, K , del resorte y una constante, C , del amortiguador, que están relacionadas con E_1 , E_2 y η . Si bien en la realidad

tanto el K como el C no son lineales, como primera medida se tomará como hipótesis que el elemento se comporta como lineal. Se considerará un límite de compresión de 40% para mantener una linealidad los K y C.

Para obtener el K, se parte de la ley de elasticidad de Hooke para una dimensión:

$$\sigma = \frac{F_0}{A} \quad (3.17)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta_0}{h} = \frac{\sigma}{E} \quad (3.18)$$

Donde F_0 es la fuerza aplicada, δ_0 es el delta estático, A es el área transversal y h es el espesor.

Por otro lado, la ley de Hooke para resortes:

$$F_0 = K \cdot \delta_0 \quad (3.19)$$

Reemplazando δ_0 de 3.18 en 3.19:

$$K = \frac{F_0}{\delta_0} = \frac{F_0}{h \cdot \frac{\sigma}{E}} = \frac{F_0 \cdot E}{\sigma \cdot h}$$

Finalmente, usando 3.17, se obtiene:

$$K = \frac{F_0 \cdot E}{\sigma \cdot h} = \frac{F_0 \cdot E}{\frac{F_0}{A} \cdot h} = \frac{E \cdot A}{h} \quad (3.20)$$

Análogamente se puede hacer la deducción para obtener la constante C del amortiguador.

Finalmente, las constantes K1, K2 y C se obtienen de la siguiente manera:

$$K_i = \frac{E_i \cdot A}{h} \quad (3.21)$$

$$C_i = \frac{\eta_i \cdot A}{h} \quad (3.22)$$

Donde A es el área transversal de la plantilla/zapatilla, h es el espesor, η_i es la viscosidad del amortiguador en el elemento de zener, y E_i son los valores de los módulos elásticos para el modelo de Zener.

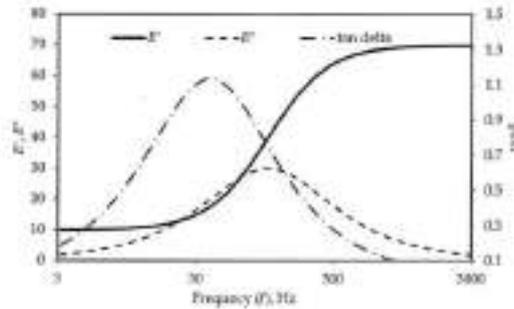


Figura 3.7: Propiedades viscoelásticas dinámicas en la escala de frecuencia para un cuerpo viscoelástico Zener.[11]

3.1.1. Determinación del tiempo de relajación

El tiempo de relajación es el tiempo requerido por un cuerpo viscoelástico para relajar la tensión a $(1/e)$ de la tensión inicial cuando la tensión se mantiene constante. Se puede ver en las ecuaciones 3.14, 3.15 y 3.16 que es necesario para poder determinar las constantes del modelo.

La figura 3.7 muestra la naturaleza de la dependencia de la frecuencia de las propiedades dinámicas. Los valores arbitrarios asignados a los parámetros del modelo son solo a modo de ejemplo. Sin embargo, la naturaleza de la curvas es similar al comportamiento real de los polímeros. Según Charkraborty [11], el módulo de pérdida (E'') tiene el valor máximo en la siguiente condición:

$$w\tau = 1 ; \tau = \frac{1}{\omega}$$

Esta última ecuación implica que el tiempo de relajación es inverso a la frecuencia angular en el pico de E'' . Esto significa que a una temperatura determinada, cuando el tiempo de relajación coincide exactamente con el período de tiempo de la tensión oscilante, la pérdida de energía en el cuerpo viscoelástico es máxima. La frecuencia correspondiente se denomina α -Frecuencia de relajación y la temperatura correspondiente se denomina α -Temperatura de relajación.

La α -relajación está relacionada con el movimiento cooperativo de los segmentos del polímero y no de toda la cadena como tal. A esta temperatura, el polímero se transforma del estado duro y vítreo a un estado blando y

gomoso y el tiempo de relajación disminuye rápidamente en las proximidades de esta transición.

La temperatura a la que aparece el pico de pérdida depende mucho de la frecuencia de la medición. A una frecuencia baja, la transición tiene lugar a una temperatura más baja y se desplaza gradualmente a una temperatura más alta, si las frecuencias sucesivas elegidas son más altas. A una frecuencia muy baja, la exploración de la temperatura para una medición dinámica coincidiría aproximadamente con la temperatura de transición vítrea (T_g) medida por calorimetría (DSC).

A su vez, conociendo el tiempo de relajación a una temperatura determinada, se puede trasladarla hacia otra temperatura a partir de la ecuación de Williams–Landel–Ferry (WLF). La misma describe la dependencia con respecto a la temperatura de la relajación α y la transición de fluido. Tiene la forma:

$$\log(a_T) = \log\left(\frac{\tau}{\tau_r}\right) = \frac{C_1 \cdot (T - T_r)}{C_2 + (T - T_r)} \quad (3.23)$$

Donde T_r es una temperatura de referencia; C_1 y C_2 son constantes empíricas para ajustar la ecuación; y a_T es el factor de desplazamiento.

Si $T_r = T_g$, C_1 y C_2 tienen valores universales, los cuales son -17.44 y 51.6 respectivamente. Si $T_r = T_g + 50$, los valores de C_1 y C_2 son -8.86 y 101.6. Estos últimos son válidos hasta $T_r = T_g + 100$.

Según la expresión de Arrhenius, el tiempo de relajación tiene la forma:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right) \quad (3.24)$$

Donde E_a es la energía de activación; R es una constante universal y T es la temperatura.

Este parámetro se puede aproximar por el ensayo DMA ya que según la ecuación 3.24 el tiempo de relajación solo varía con la temperatura. Entonces, conociendo el tiempo de relajación a partir del pico del módulo de pérdida, E'' , obtenido en el ensayo, se puede calcular el tiempo de relajación a otra temperatura mediante la ecuación 3.23.

Esto se puede ver con más detalle en el ensayo de la figura 3.7. El mismo se realizó variando la frecuencia y fijando una temperatura específica. Observando el máximo de (E'') se va a poder obtener el tiempo de relajación.

¿A qué temperatura? A la que se realizó el ensayo DMA. Como el tiempo de relajación solo varía con la temperatura, si se quiere obtener τ a otra temperatura, utilizando la ecuación WLF (3.23) se va a poder obtener. Solo se debe conocer la temperatura de transición vítrea (T_g) del elastómero que se está analizando para que las constantes C_1 y C_2 sean las universales.

3.2. Materiales a evaluar

Después de una extensa revisión bibliográfica, se encontraron ensayos DMA de nueve elastómeros. Por lo tanto, los materiales a evaluar en este proyecto final son los siguientes:

- Sorbothane 30
- Sorbothane 70
- Caucho de cloropreno (CR)
- Caucho de nitrilo (NBR)
- Poliuretano (PUR)
- Silicona
- Caucho butílico (IRR)
- Poly (ethyl acrylate) (PEA)
- Mezcla de CR y NBR

En el apéndice D se especifican los ensayos DMA para cada uno de los materiales.

Capítulo 4

Resolución del comportamiento dinámico mediante el modelo de Zener.

En este proyecto final se intentará resolver el modelo de Zener para el caso lineal (donde K y C serán constantes) y para casos no lineales (donde los elementos asociados varían en función del espesor instantáneo). La naturaleza del sistema y su comportamiento dependerá de los elementos elástico y amortiguador. En principio estos dependen del material y de las dimensiones.

Si los elementos son representados por constantes se puede obtener la solución exacta de la ecuación diferencial. Por otra parte, la solución se complejiza mucho para los casos no lineales. En estas situaciones conviene resolver la ecuación diferencial del sistema numéricamente, mediante software, con un paso de tiempo lo suficientemente pequeño para que el error no sea grande. A continuación se desarrollará la deducción de la solución exacta del modelo de Zener y se realizará un análisis de convergencia de la solución computacional.

4.1. Solución exacta de la ecuación diferencial sin excitación.

Haciendo el balance de fuerzas de la figura 4.1 se obtienen las ecuaciones 4.1 y 4.2:

$$m \cdot \ddot{x} = -k_1(x - x_2) - c(\dot{x} - \dot{x}_1) \quad (4.1)$$

$$c(\dot{x} - \dot{x}_1) = N \cdot k_1(x_1 - x_2) \quad (4.2)$$

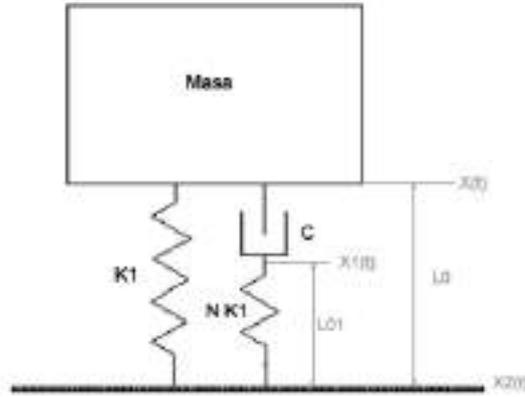


Figura 4.1: Modelo de Zener.

Sustituyendo el segundo término a la derecha de 4.1 usando 4.2, derivando y despejando queda:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{N \cdot k_1} [m \cdot \ddot{x} + k_1 \cdot (x - x_2)] + \dot{x}_2 \quad (4.3)$$

Reemplazando en 4.1 se obtiene:

$$m \cdot \ddot{x} = -k_1 \cdot (x - x_2) - c \cdot \dot{x} - \frac{c}{N \cdot k_1} [m \cdot \ddot{x} + k_1 \cdot (x - x_2)] + c \cdot \dot{x}_2 \quad (4.4)$$

$$\frac{c \cdot m}{N \cdot k_1} \ddot{x} + m \cdot \ddot{x} + c \cdot \frac{N + 1}{N} (\dot{x} - \dot{x}_2) + k \cdot (x - x_2) = 0 \quad (4.5)$$

Dividiendo por m:

$$\frac{c}{N \cdot k_1} \ddot{x} + \ddot{x} + \frac{c}{m} \frac{N + 1}{N} (\dot{x} - \dot{x}_2) + p^2 \cdot (x - x_2) = 0 \quad (4.6)$$

Donde $p^2 = \frac{k_1}{m}$

Cuando la oscilación es libre: $\dot{x}_2 = \ddot{x}_2 = \ddot{\dot{x}}_2 = 0$.

Tomando $y = (x - x_2)$ se obtiene:

$$\frac{c}{N \cdot k_1} \ddot{y} + \ddot{y} + \frac{c}{m} \frac{N+1}{N} \cdot \dot{y} + p^2 \cdot y = 0 \quad (4.7)$$

Abreviando: $A \ddot{y} + \ddot{y} + B \dot{y} + p^2 y = 0$

Donde $A = \frac{c}{N \cdot k_1}$ y $B = \frac{c}{m} \frac{N+1}{N}$

Antes de hallar la solución conviene poner unidades:

Llamando $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}}$ se tiene:

$$A = \frac{2\zeta}{N} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_1}} = \frac{2\zeta}{N} \frac{1}{p} \quad (4.8)$$

$$B = \frac{c}{m} \frac{N+1}{N} = 2\zeta \frac{N+1}{N} p \quad (4.9)$$

Donde ζ es el coeficiente de amortiguamiento del sistema.

De manera que la ecuación original 4.7 queda:

$$\frac{2\zeta}{N} \frac{1}{p} \ddot{y} + \ddot{y} + 2\zeta \frac{N+1}{N} p \dot{y} + p^2 \cdot y = 0 \quad (4.10)$$

Esta es la solución homogénea a resolver. Se propone como solución $y = Y_0 e^{\lambda t}$ donde se deben hallar las raíces $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ que satisfacen

$$\frac{2\zeta}{N} \frac{1}{p} \lambda^3 + \lambda^2 + 2\zeta \frac{N+1}{N} p \lambda + p^2 = 0 \quad (4.11)$$

La solución del problema es entonces:

$$y(t) = Y_1 e^{\lambda_1 t} + Y_2 e^{\lambda_2 t} + Y_3 e^{\lambda_3 t} \quad (4.12)$$

Donde las constantes (Y_1, Y_2, Y_3) se calculan con las condiciones iniciales $y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0)$. El tipo de solución depende de la naturaleza de las raíces $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ del polinomio cúbico asociado, cuyo discriminante, Δ , es:

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 \quad (4.13)$$

Si el discriminante es nulo existen raíces múltiples. Físicamente esto corresponde al amortiguamiento crítico. Cuando el discriminante es positivo las raíces son reales, esto corresponde al sistema sobreamortiguado. Si el discriminante es negativo hay una raíz real y dos complejas conjugadas. Esto último se trata de un sistema subamortiguado, o sea que hay oscilaciones.

Para analizar la convergencia de la resolución numérica se va a comparar la solución exacta, resolviendo las raíces de la ecuación 4.11, con la solución que se obtiene con el método de Runge Kutta de cuarto orden.

La comparación se realiza para una plantilla de Sorbothane 30, de 40 mm de espesor y un área de apoyo neutra. Las constantes se muestran en la tabla 4.1.

Masa [kg]	95
k_1 [N/m]	140371.7
c [kg/seg]	12933.5
N	40.52

Cuadro 4.1: Constantes para la resolución del modelo de zener utilizando Sorbothane 30 de 40 mm de espesor y área de apoyo neutra.

Especializando en la ecuación 4.11 se obtiene:

$$0,00227 \cdot \lambda^3 + \lambda^2 + 139,5 \cdot \lambda + 1477,6 = 0 \quad (4.14)$$

Donde el discriminante queda:

$$\Delta = -136485,92 \text{ (Sistema subamortiguado. Hay oscilaciones).}$$

El polinomio 4.14 va a tener una raíz real y dos complejas conjugadas ($z \pm \omega j$).

Resolviendo, estas son:

$$\lambda_1 = -11,52$$

$$\lambda_{2/3} = -214,13 \pm 102,79j.$$

La solución exacta para este caso será:

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + e^{z \cdot t} \cdot (B \cdot \cos(\omega t) + C \cdot \sin(\omega t)) \quad (4.15)$$

Donde A, B, C, son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

Para este caso:

- $y_0 = \delta_{est}$. Donde $\delta_{est} = \frac{m \cdot g}{k_1}$.

- $\dot{y}_0 = -\sqrt{2 \cdot g \cdot h_{eq}}$. Donde $h_{eq} = 18$ cm.
- $\ddot{y}_0 = -g$

Finalmente, la solución exacta para este caso se obtiene:

$$y_{exacta}(t) = -0,0076 \cdot e^{-11,52t} + e^{-214,13t} \cdot (0,0143 \cos(102,79t) + 0,0116 \sin(102,79t)) \quad (4.16)$$

En la figura 4.2 se puede ver la comparación entre la solución exacta (ec. 4.16) y la solución mediante Runge Kutta de cuarto orden. Se puede ver que si el paso del tiempo es lo suficientemente pequeño, las curvas son coincidentes. El error porcentual máximo entre la solución exacta y la numérica para este caso se obtiene un 0.32 %. Esto indica que la solución numérica es convergente y que con un paso de tiempo muy pequeño el error es despreciable.

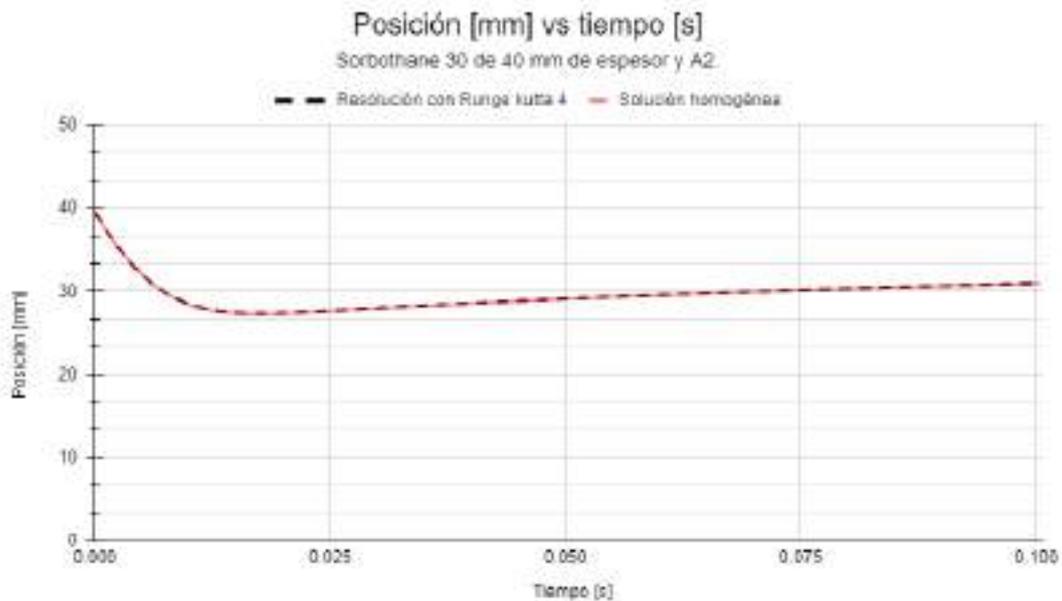


Figura 4.2: Comparación de la solución exacta y la numérica para el Sorbothane 30 de 40 mm y A2.

4.2. Resolución numérica de la ecuación diferencial con condiciones iniciales y de contorno.

En este apartado se mostrarán los resultados obtenidos cuando se resuelve el modelo de zener con runge kutta de cuarto orden mediante software.

Del desarrollo del apéndice E y basándose en la figura 4.1 se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \ddot{x} \cdot \frac{N \cdot k_1}{c} + \dot{x} \cdot (N + 1) \cdot \frac{k_1}{m} + x \cdot \frac{k_1^2 \cdot N}{c \cdot m} + (m \cdot g - k_1 \cdot L_0) \frac{k_1 \cdot N}{c \cdot m} = 0 \quad (4.17)$$

Como primera medida se evaluará que materiales de los que se presentaron en la sección anterior sirven para esta aplicación. A su vez, se debe determinar que áreas y que espesores se van a tener en cuenta.

4.2.1. Consideraciones de linealidad

Como se puede ver en las ecuaciones 3.21 y 3.22, las constantes K y C pueden variar con el material, el área y el espesor definidos. Estas deducciones son para pequeñas deformaciones, por lo que se considera que las constantes K y C son lineales y no varían con la compresión. En esta aplicación las compresiones son altas por lo que hay que tener en cuenta que los K y C no van a ser lineales.

Cuando el material se comprime, se produce un efecto de abarrilamiento que se debe principalmente a fuerzas de fricción en las interfases de contacto, que se oponen al deslizamiento de los materiales hacia afuera en esas regiones, figura 4.4. Este comportamiento dificulta la estimación de la variación de las constantes. Una manera sobreestimativa de contemplarla es tener en cuenta que el volumen se mantiene constante y que no hay abarrilamiento (fig. 4.4(c)), las constantes K y C varían de la siguiente manera con la compresión:

$$K_i(x, t) = \frac{E_i \cdot Vol}{(L_0 - x)^2} \quad (4.18)$$

$$C_i(x, t) = \frac{\mu_i \cdot Vol}{(L_0 - x)^2} \quad (4.19)$$

En la figura 4.3, en azul, se puede ver cómo se comporta el K a medida que el porcentaje de compresión aumenta según la ecuación 5.1. Este es el caso más conservativo ya que considera volumen constante, por lo que el área aumenta en proporción a la reducción de espesor y no tiene en cuenta el abarrilamiento.

Como primera medida se calcularán los K y el C equivalentes, para poder suponerlos lineales. Se considerará que son constantes con la reducción de espesor pero teniendo un valor más alto que los valores de la geometría inicial (según ecuación 3.21) por el efecto de abarrilamiento. Estos valores significan igual energía elástica generada para un 40% de compresión respecto al inicial. Esto lo se puede ver en la figura 4.3. Se observa que el K equivalente (línea amarilla) es mayor al K inicial (línea roja) que tiene en cuenta solo la geometría inicial de la zapatilla. Esto le aportará una mayor rigidez al material y será un cálculo más conservativo que tomando el espesor original (la amortiguación será menor). A su vez, se puede ver que el área bajo la curva del K equivalente (línea amarilla) y el K variable a volumen constante (línea azul), almacenan la misma energía elástica (área bajo la curva) hasta un 40% de compresión.

De esta manera, se obtienen dos formas de estimar los valores de K_i y C que darán un límite superior e inferior para valores de aceleración estimados.

4.2.2. Condiciones iniciales y de contorno

Para resolver una ecuación diferencial por Runge Kutta es necesario establecer condiciones iniciales. Para este problema en particular, como se discutió en el capítulo anterior, la condición inicial consiste en una caída libre desde una altura equivalente, h_{eq} . Entonces las condiciones iniciales serán:

- $x_0 = L_0$. Donde L_0 es el espesor de la suela.
- $\dot{x}_0 = -\sqrt{2 \cdot g \cdot h_{eq}}$. Donde $h_{eq} = 18$ cm.
- $\ddot{x}_0 = -g$

Las condiciones de contorno del problema son:

- superficie inferior está fija al suelo.

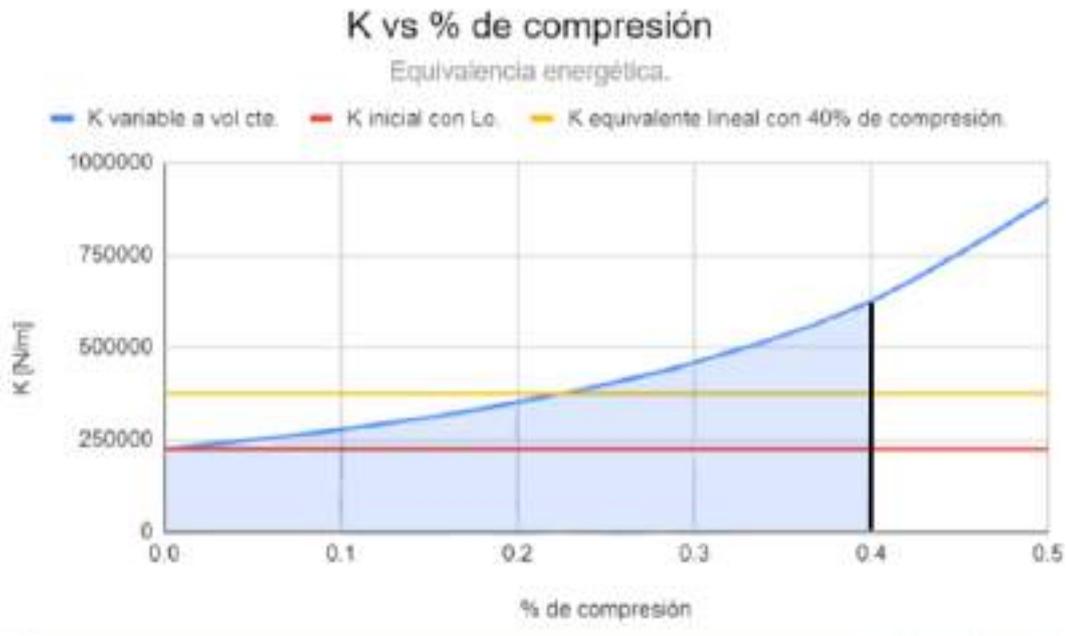


Figura 4.3: Comparación de la constante elástica K vs % de compresión teniendo en cuenta la equivalencia energética. Se realizó a partir de un sorbothane 30 de 40 mm de espesor.

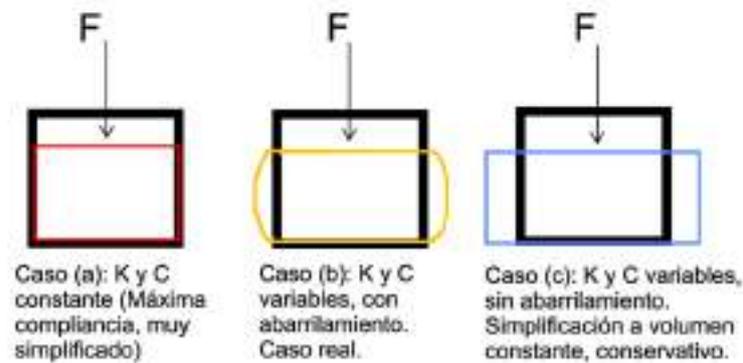


Figura 4.4: Casos considerados cuando se aplica una fuerza a un elemento viscoelástico.

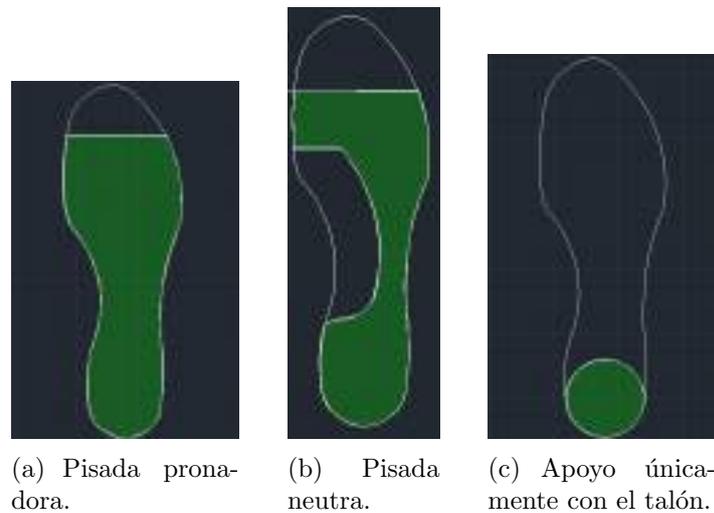


Figura 4.5: Áreas posibles de pisada que se pueden suponer durante la actividad física.

- superficie superior está fija a la masa.

Esto significa que si en algún momento la posición vertical de la masa fuera mayor al espesor, el pie estaría perdiendo contacto con la suela y por lo tanto no representaría la experiencia correctamente.

4.2.3. Determinación de las áreas de apoyo

Se realizó un análisis de las áreas de apoyo posibles a tener en cuenta, según la bibliografía, para el cálculo. Estas áreas se obtuvieron a partir de análisis de marcha de distintos autores. Según Farrow [13], la pisada correcta para correr es la pisada neutra, figura 4.5 (b). Con este apoyo, la presión se distribuye de manera uniforme a través de la planta el pie y los cinco dedos sirven como impulsores.

No hay que perder de vista que un paciente, ya sea por pie plano o por mala técnica, podría apoyar con una pisada pronadora, figura 4.5 (a). Además, teniendo en cuenta que el área de apoyo rigidiza el material, se puede intentar alargar las zancadas para que el contacto inicial sea con el talón.

Tipo de apoyo	Área transversal [m^2]
Pisada pronadora (a)	0.0169
Pisada neutra (b)	0.0119
Apoyo con el talon (c)	0.0028

Cuadro 4.2: Valores de área transversal para los distintos apoyos de la figura 4.5. Los valores numéricos se obtuvieron a partir de un modelo real de una plantilla de talla 45.

4.2.4. Determinación preliminar de los espesores

Los espesores se definieron teniendo en cuenta la bibliografía. El espesor mínimo será el de una plantilla, es decir, unos 3 mm. Para el espesor máximo se tuvo en cuenta un estudio realizado por Palmer [12], que menciona que hay un límite máximo de 40 mm de espesor para las zapatillas para maratón. Se evaluarán las constantes para este intervalo de valores. Los espesores que se pueden resumir en la tabla 4.3.

Tipo de dispositivo	Espesor [mm]
Plantilla	3
Suela fina	20
Suela gruesa	40

Cuadro 4.3: Valores de espesores para el dispositivo ortésico que se tendrán en cuenta para el diseño.

4.2.5. Selección preliminar de materiales

El material será apropiado si cumple con las siguientes condiciones:

- Una variación de espesor final menor al 40 % de L_0 (Para cumplir con la hipótesis de linealidad).
- Un pico de aceleración igual o menor a 10 a/g.

Si se analizan las ecuaciones 3.21 y 3.22 que definen las constantes C y K, se puede ver que la geometría influye sobre estas. ¿De qué manera? A medida que el área de apoyo aumenta, las constantes K y C aumentan. Y a medida que el espesor disminuye, las constantes también aumentan. Para evaluar qué materiales son útiles para este proyecto, se va a resolver la ecuación diferencial 4.17 para los casos extremos, para cada material:

- **Caso más rígido:** una plantilla de 3 mm con el área de apoyo más grande (0.0169 m^2).

- **Caso menos rígido:** una suela gruesa de 40 mm con el área de apoyo más pequeña (0.0028 m^2).

Si el material en todo el rango de valores no resulta brindar el comportamiento buscado, quiere decir que no es apropiado para esta aplicación. Los materiales a evaluar son los presentados en el apartado 3.3.

Caso de mayor rigidez

Las constantes para el modelo de Zener obtenidas para cada material se pueden observar en las tablas 4.4.

Material	C [kN s/m]	K1 [kN/m]	K2 [kN/m]
Sorbothane 30	244.9	2658.0	107714.1
Sorbothane 70	311.4	5006.4	107610.0
NBR	2210.7	27383.4	524490.2
PUR	32944.0	1290902.2	610493127.6
CR	6277.7	140729.2	151164044.1
PEA	24096.4	375083.6	48189991.9
Silicona	271.7	22908.9	267810369.0
Caucho butílico	59784.2	375476.1	1775907820.6
Mezcla de NBR y CR	7899.2	225320.4	190209858.4

Cuadro 4.4: Constantes obtenidas para distintos materiales de una plantilla de 3 mm y el área A(a) (Caso Rígido).

En las figuras 4.6, 4.7 y 4.8 se puede ver los resultados obtenidos para los distintos materiales.

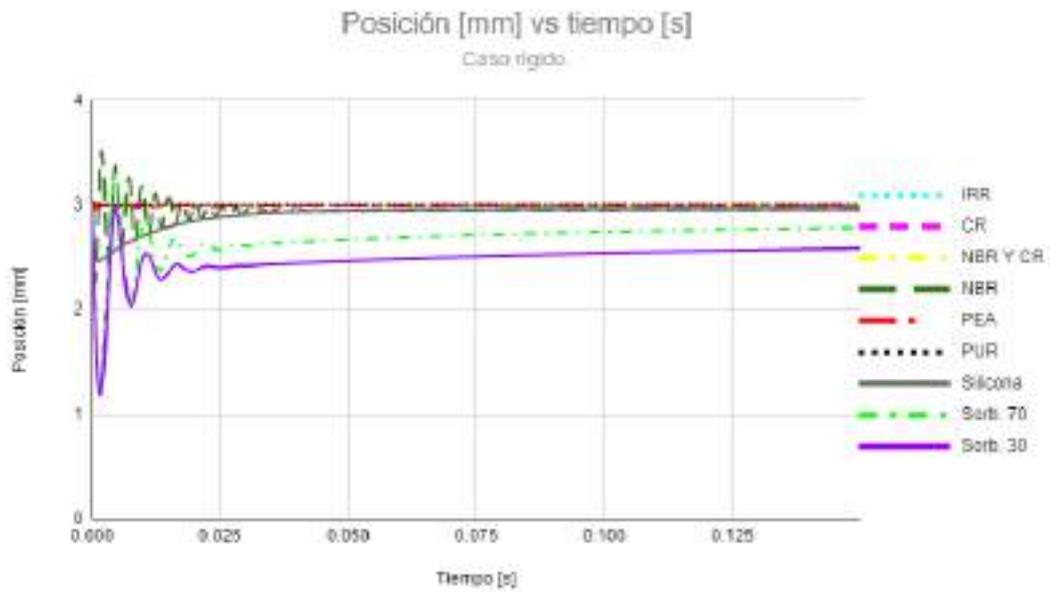


Figura 4.6: Posición[mm] vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17.

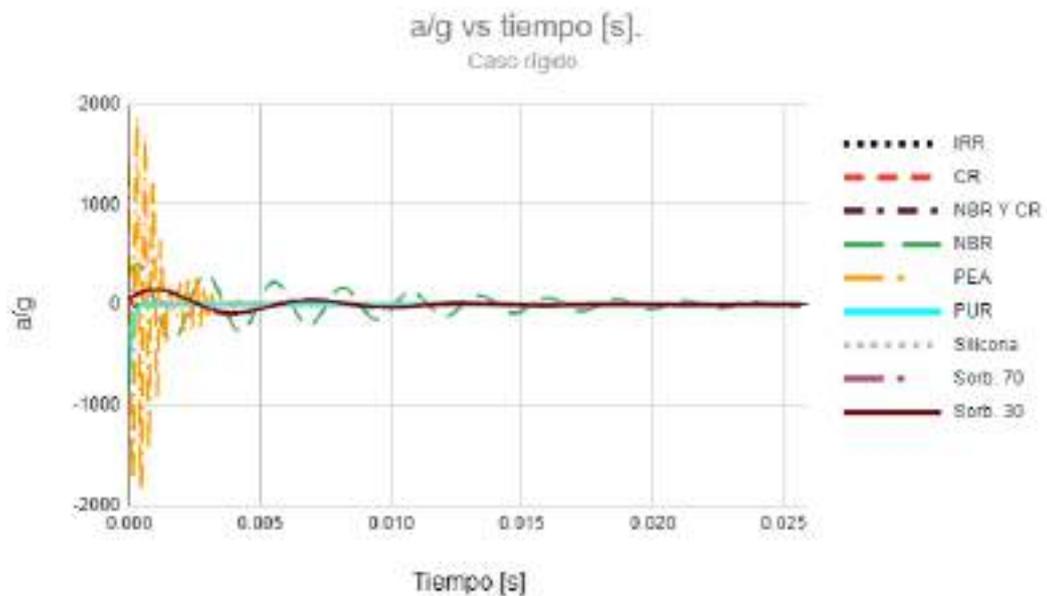


Figura 4.7: Aceleración A/g vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17.

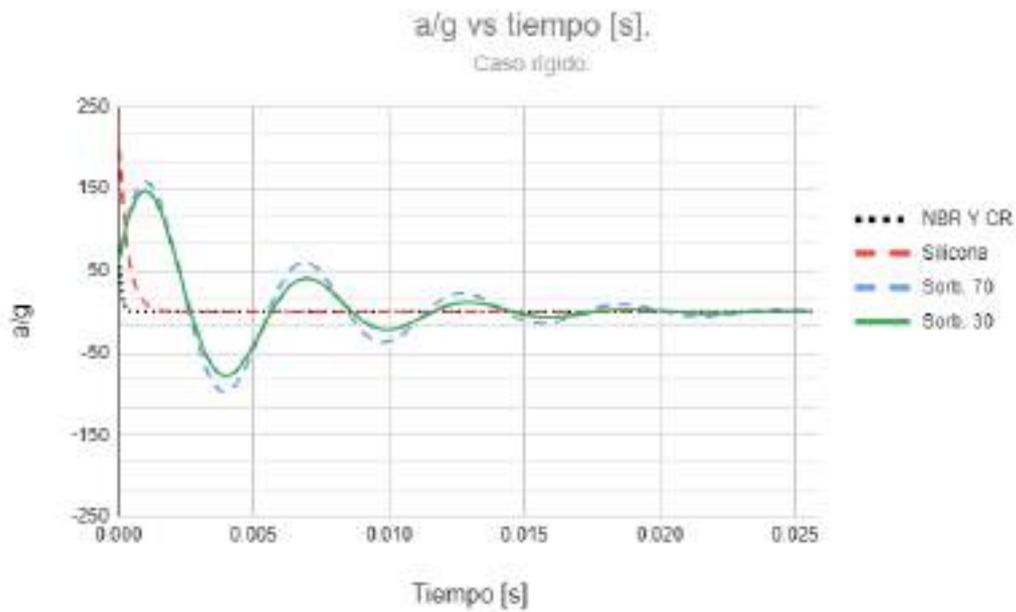


Figura 4.8: Aceleración A/g vs tiempo[s] de la figura 4.7, mostrando solamente los casos con menores amplitudes.

Para todos los materiales se puede ver que en los casos más rígidos las aceleraciones llegan a picos muy superiores que los que se están buscando, figuras 4.7 y 4.8.

Caso de menor rigidez

Las constantes para el modelo de Zener obtenidas para cada material se pueden observar en las tablas 4.5.

Material	C [kN s/m]	K1 [kN/m]	K2 [kN/m]
Sorbothane 30	3.0	33.0	1338.5
Sorbothane 70	3.9	62.2	1337.2
NBR	27.5	340.3	6517.3
PUR	409.4	16040.8	7586009.3
CR	78.0	1748.7	1878369.8
PEA	299.4	4660.8	598810.6
Silicona	3.6	284.7	3327821.2
Caucho butílico	792.9	4665.7	22067493.6
Mezcla de NBR y CR	98.2	2799.8	2363554.5

Cuadro 4.5: Constantes obtenidas para distintos materiales de una suela de 40 mm y el área A(c) (Caso menos Rígido).

En las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 se puede ver los resultados obtenidos para los distintos materiales.

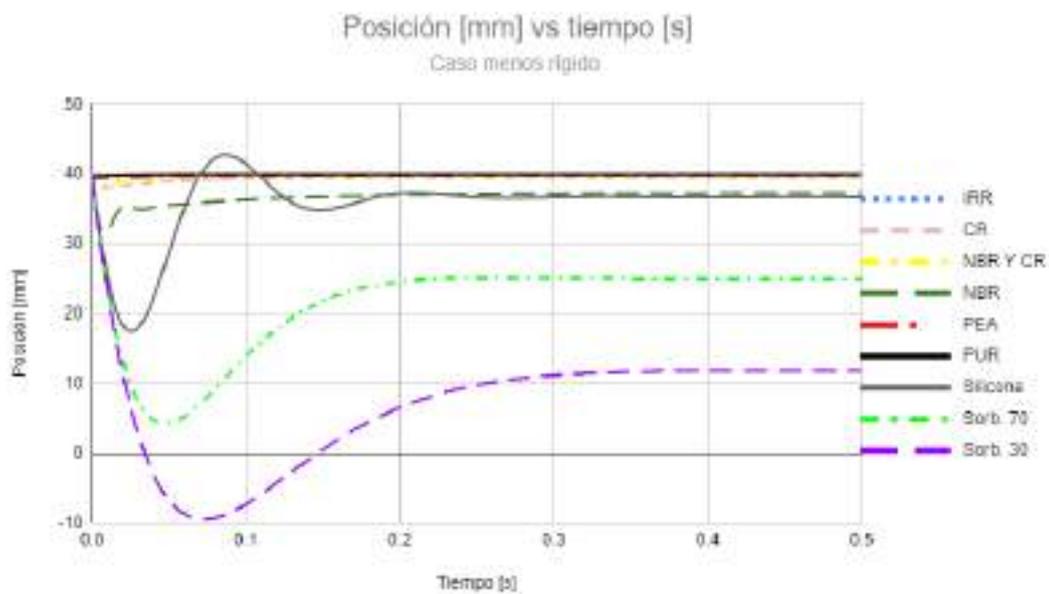


Figura 4.9: Posición[mm] vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17.

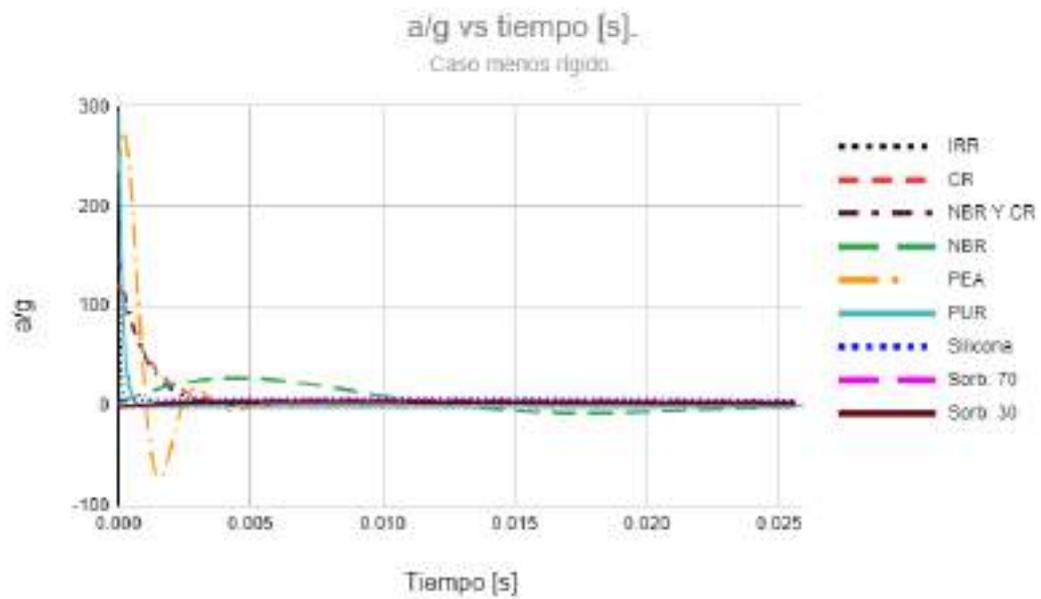


Figura 4.10: Aceleración A/g vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17.

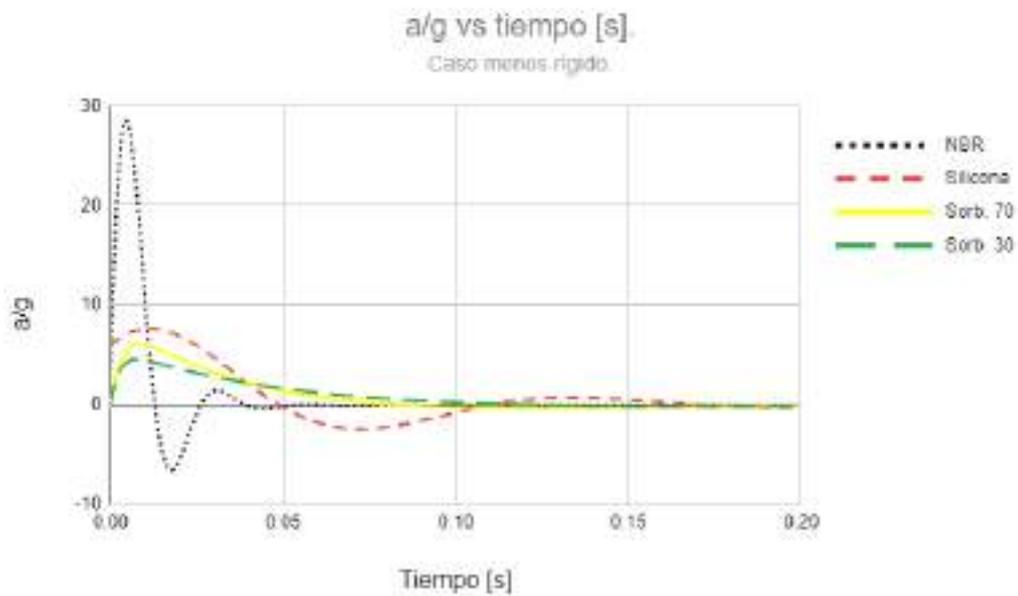


Figura 4.11: Aceleración A/g vs tiempo[s] de la figura 4.10, mostrando solamente los casos con menores amplitudes.

En el caso de los Sorbothanes, si bien los picos de aceleraciones cumplen ampliamente con lo que se están buscando, se puede ver que la posición en función del tiempo sobrepasa el cero y, por lo tanto, no se asemeja a la realidad, además de que ya no cumple la hipótesis de linealidad. Entre estos 2 intervalos planteados, el de mayor y menor rigidez, es muy probable de que se pueda encontrar una geometría que permita cumplir con las expectativas.

Observando el NBR, se puede ver que la hipótesis de linealidad se sigue cumpliendo. En cuanto al pico de aceleración, se puede ver que, si bien no llega a los valores requeridos, la amortiguación se encuentra dentro de los órdenes de magnitud de los calzados. Esto quiere decir que se obtiene un material que puede llegar a ser adecuado para este tipo de utilidades.

En cuanto a la silicona, si bien este material es otro de los que podría servir si se selecciona la geometría adecuada, se puede ver que tiene sobrepico, figura 4.9. A la hora del apoyo estaría aportando inestabilidad y no permitiría usar el pie de apoyo para impulsarse para seguir la marcha. Se descarta.

El resto de los materiales, como se puede ver en la figura 4.10, se descartan ya que su comportamiento no sirve para estas aplicaciones. Esto se debe a que los picos de aceleración, en el caso de menor rigidez, se encuentran al menos un orden de magnitud por encima de lo buscado.

4.3. Simulación de casos para materiales no descartados

Como se determinó en la sección anterior, los polímeros que se analizarán en el proyecto final serán los siguientes:

- Sorbothane 30
- Sorbothane 70
- NBR

En esta sección se mostrarán los resultados más favorables que se consiguieron. Para todos los casos se obtuvo que una plantilla de 3 mm no es suficiente para amortiguar el impacto con ninguno de estos materiales ni áreas de apoyo supuestas.

A continuación se analizan los casos particulares. El análisis se realizará en partes. Por un lado se evaluarán los 3 materiales, con las áreas más favorables, para un espesor de 20 mm y luego para el de 40 mm.

4.3.1. Análisis para suelas de 20 mm de espesor.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el NBR, Sorbothane 30 y 70 con suelas de 20 mm de espesor (figuras 4.12, 4.13 y 4.14). Para los Sorbothanes se descartó el área 3 debido a que la rigidez del material no es suficiente. Para el caso del NBR, se descartó el área 1 porque el pico de aceleración es muy alto.

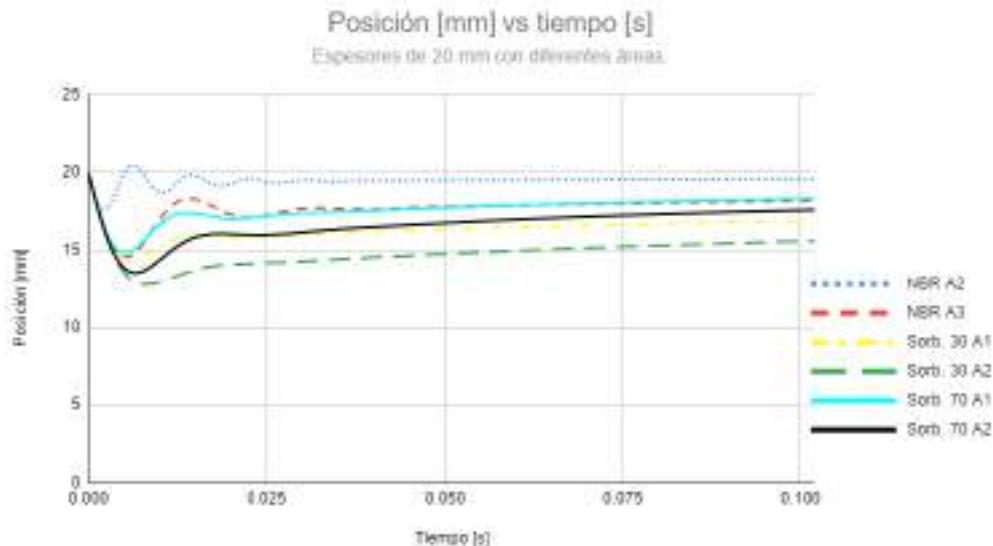


Figura 4.12: Posición [mm] vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17 con una suela de 20 mm de espesor.

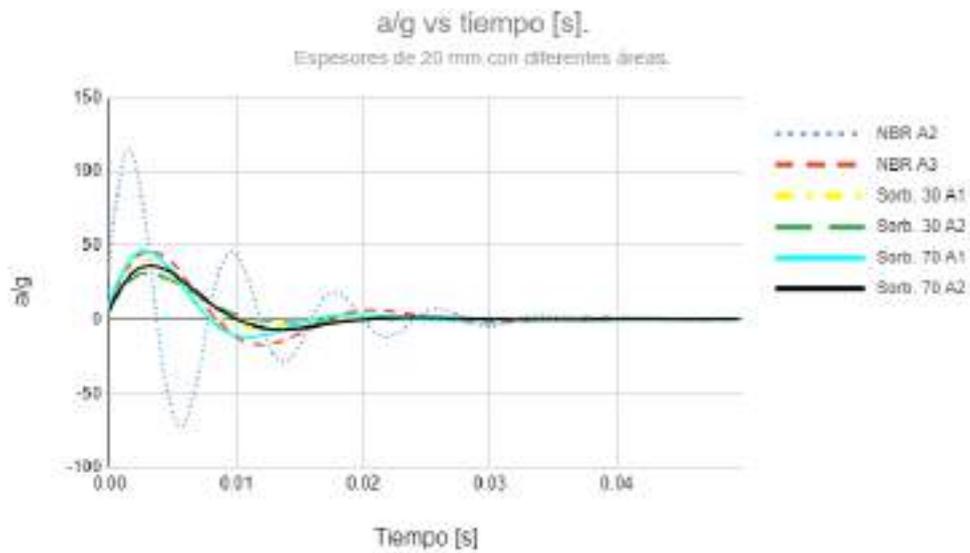


Figura 4.13: Aceleración A/g vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17 con una suela de 20 mm de espesor.

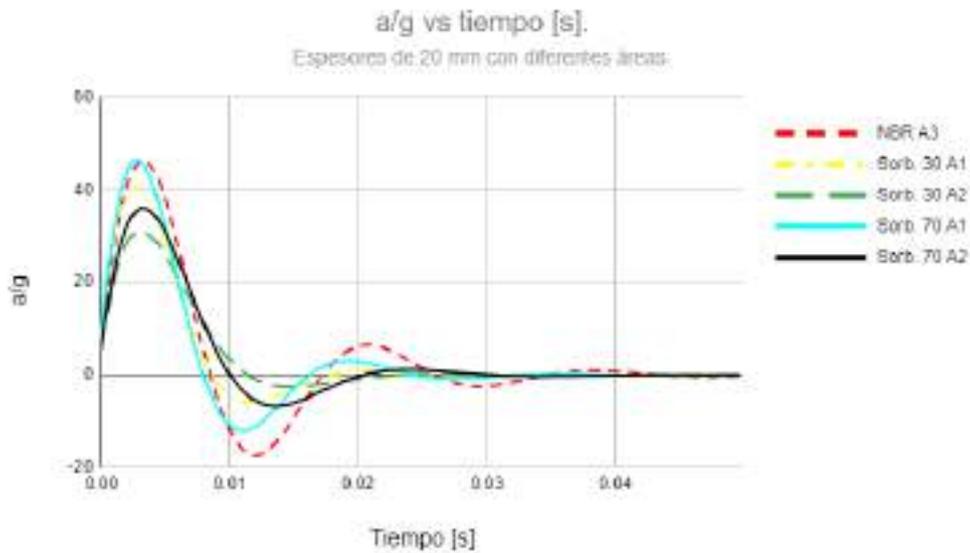


Figura 4.14: Aceleración A/g vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17 con una suela de 20 mm de espesor. Casos resaltados de la figura 4.13.

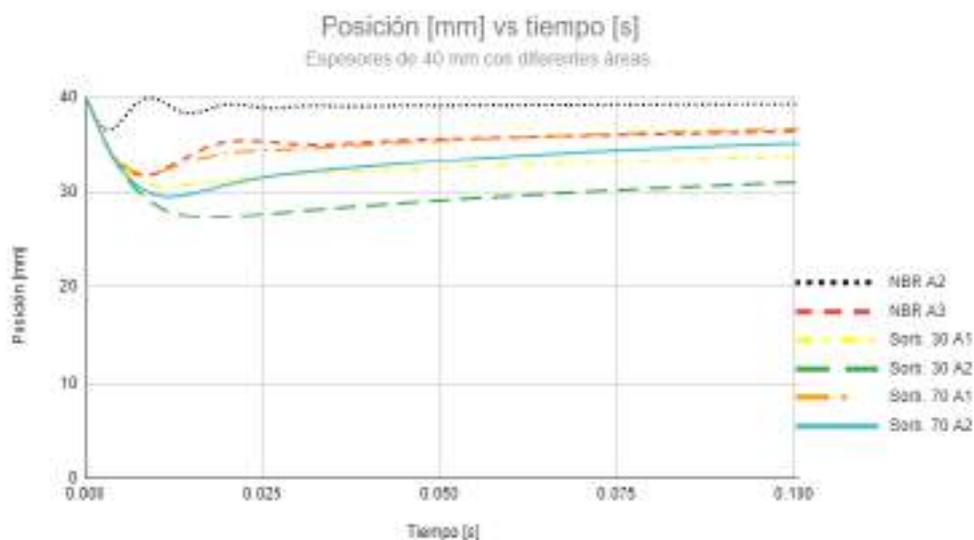


Figura 4.15: Posición [mm] vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17 con una suela de 40 mm de espesor.

Material	Área de apoyo	$\Delta\delta_{max}$ [%]	A_{max} [a/g]
NBR	A_2	12.5	120
NBR	A_3	25	45
Sorbothane 30	A_1	27.5	40
Sorbothane 30	A_2	35	30
Sorbothane 70	A_1	25	45
Sorbothane 70	A_2	30	38

Cuadro 4.6: Resumen de los resultados obtenidos para distintos sistemas dinámicos con suelas de 20 mm de espesor.

En el cuadro 4.6 se resumen los resultados. Se puede concluir que un espesor de suela de 20 mm no es suficiente para cumplir con el objetivo buscado con ninguno de los materiales que se están analizando.

4.3.2. Análisis para suelas de 40 mm de espesor.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el NBR, Sorbothane 30 y 70 con suelas de 40 mm de espesor (figuras 4.15, 4.16 y 4.17). Las áreas de apoyo para los distintos materiales se seleccionaron bajo los mismos criterios que la sección anterior.

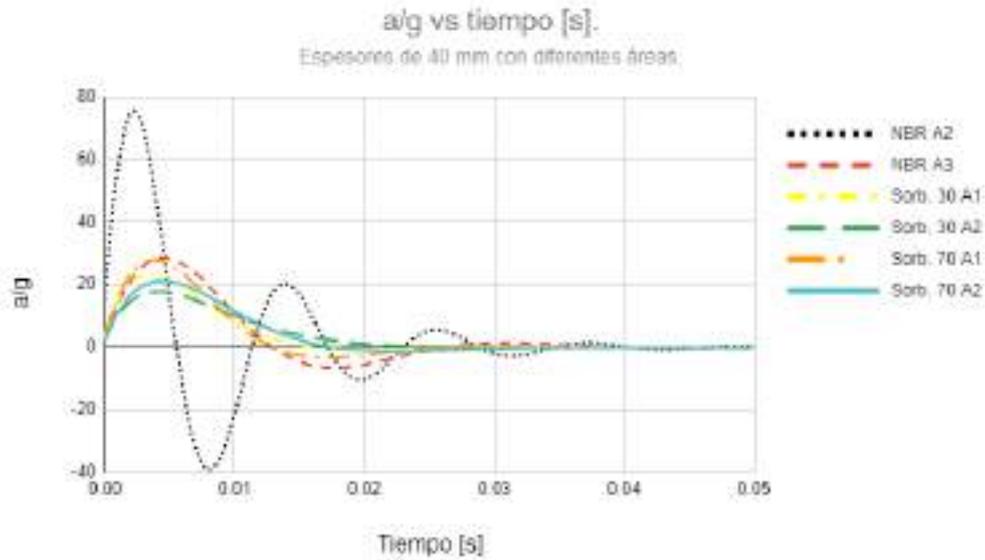


Figura 4.16: Aceleración A/g vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17 con una suela de 40 mm de espesor.

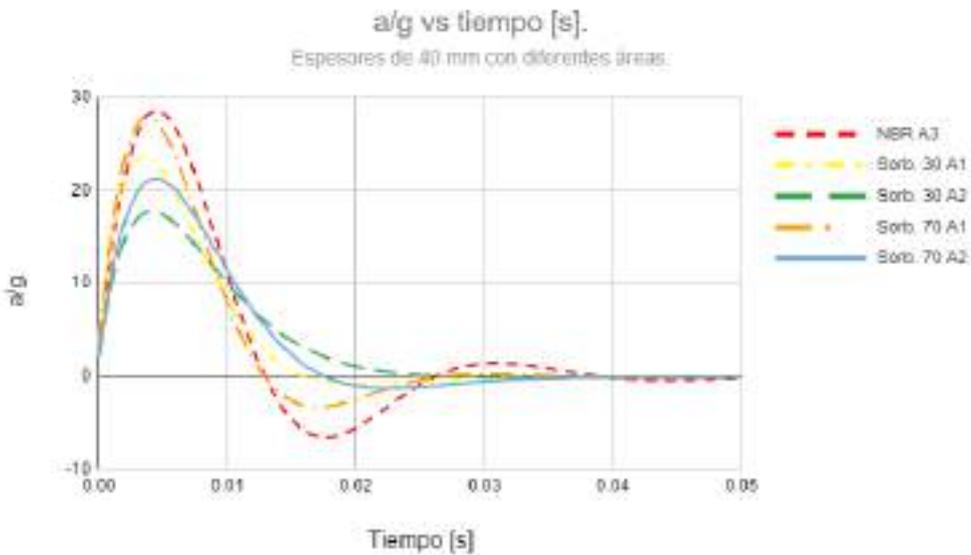


Figura 4.17: Aceleración A/g vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17 con una suela de 40 mm de espesor. Casos resaltados de la figura 4.16.

Material	Área de apoyo	$\Delta\delta_{max}$ [%]	A_{max} [a/g]
NBR	A_2	6.25	75
NBR	A_3	18.75	28
Sorbothane 30	A_1	25	23
Sorbothane 30	A_2	32.5	17
Sorbothane 70	A_1	18.75	27
Sorbothane 70	A_2	25	22

Cuadro 4.7: Resumen de los resultados obtenidos para distintos sistemas dinámicos con suelas de 40 mm de espesor.

En el cuadro 4.7 se resumen los resultados. Nuevamente se puede concluir que un espesor de 40 mm de suela de estos materiales no es suficiente para cumplir con los objetivos planteados. Pero se puede ver que los picos de aceleraciones, comparando con las suelas de 20 mm, tienden a disminuir. Esto indica que con un espesor de suela de mayor tamaño se podrían cumplir con las expectativas.

4.4. Discusión acerca de soluciones alternativas

Si bien ningún material cumple con los requisitos con estas geometrías propuestas, algunos se encuentran bastante cerca de hacerlo. Con el fin de poder llegar al objetivo se variarán los espesores para encontrar las dimensiones óptimas para cada uno de los casos. El único requisito que impide hacer un espesor mayor a 40 mm es el expuesto por Palmer en [12], que dice que el límite de la suela para correr en maratones es de 40 mm. Se intentará aumentar el espesor en los casos de mayor rigidez con el fin de cumplir con los requisitos. En los casos contrarios, en donde la rigidez es menor a la deseada, se intentará reducir el espesor con el fin de encontrar el balance que permita obtener una solución lineal simplificada.

Los resultados obtenidos para estos casos muestran que para cada área supuesta, hay una geometría que llega a cumplir con los objetivos. Para el área (2), se pudieron obtener 2 espesores aptos. Para el Sorbothane 70 se obtuvo una suela de 100 mm y para el Sorbothane 30 se obtuvo una suela de 75 mm. Por último, el NBR no pudo alcanzar a cumplir con los requisitos ni con 120 mm de espesor. Estos resultados los se pueden ver en las figuras 4.18 y 4.19.

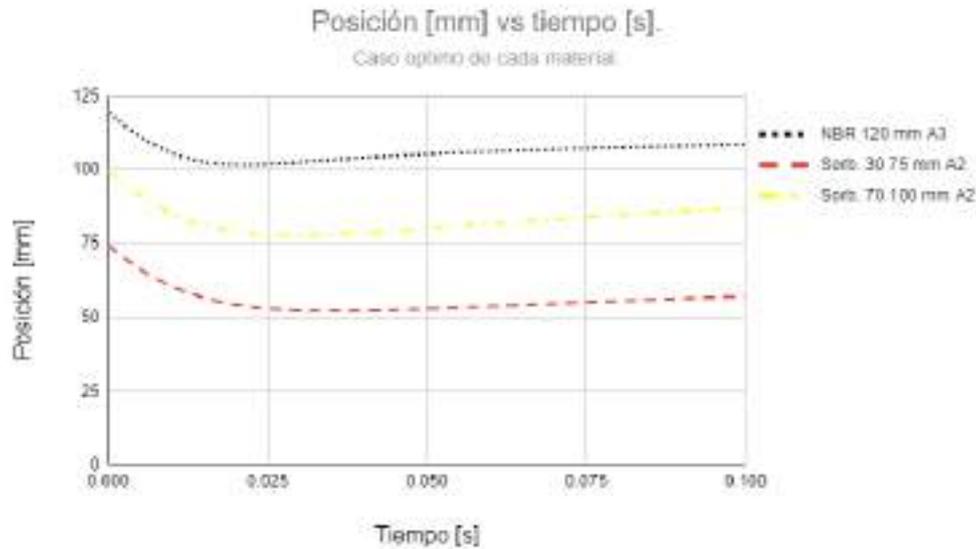


Figura 4.18: Posición [mm] vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17. Soluciones alternativas.

Para los Sorbothanes, la compresión resulta ser menor a un 40 % en todos los casos y el pico de aceleración es de 10 a/g. Este comportamiento dinámico indica que todas estas geometrías son posibles soluciones. El principal problema de estas es que, una suela de tales dimensiones no es una solución óptima ya que la altura duplica cualquier zapatilla normal.

Debido a esto en el próximo capítulo se realizará un planteo teniendo en cuenta el comportamiento no lineal de las constantes para evaluar si es posible llegar al comportamiento dinámico deseado con una suela de menor espesor.

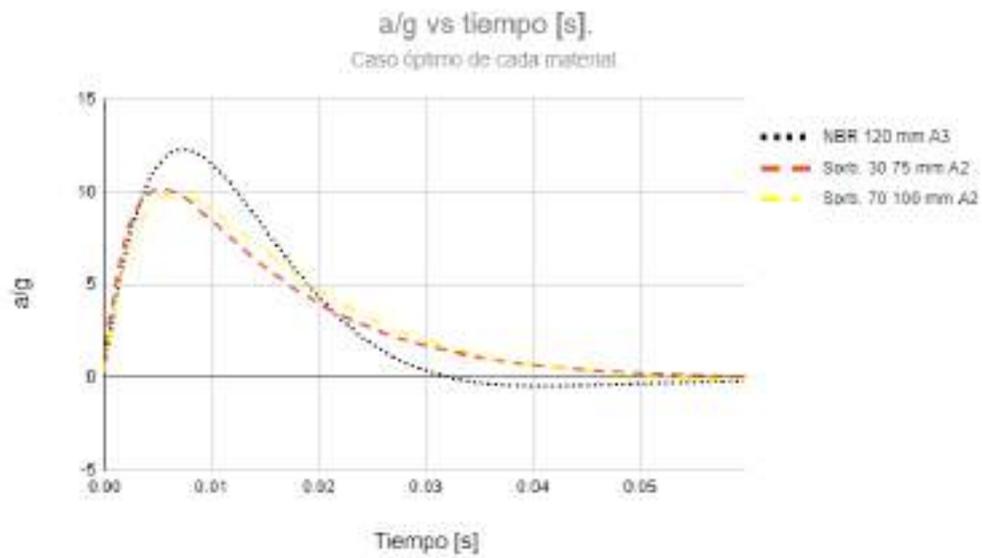


Figura 4.19: Aceleración A/g vs tiempo[s] para los distintos materiales a partir de la resolución de la ecuación diferencial 4.17. Soluciones alternativas.

Capítulo 5

Resolución del comportamiento dinámico mediante el modelo de Zener con elementos no lineales.

En este capítulo se resolverá nuevamente la ecuación diferencial planteada 4.17 pero ahora teniendo en cuenta que los elementos K y C no son lineales; línea azul de la figura 4.3. No se tendrá en cuenta el abarrilamiento, figura 4.4, con lo cual los resultados obtenidos serán más conservativos.

El análisis se dividirá en 2: el primer caso teniendo en cuenta el área de apoyo neutra, figura 4.5 (b). En el segundo caso se va a suponer que el área de pisada es variable con el tiempo. Este último caso supondrá que el apoyo del pie comienza con el talón, figura 4.5 (c), hasta que gradualmente llega al área de pisada neutra. Para esta sección se descartó el análisis con el área de pisada pronadora, figura 4.5 (a), ya que la técnica no es la indicada y al estar analizando los K y C variables deja de aportar datos relevantes en comparación con los otros 2 casos.

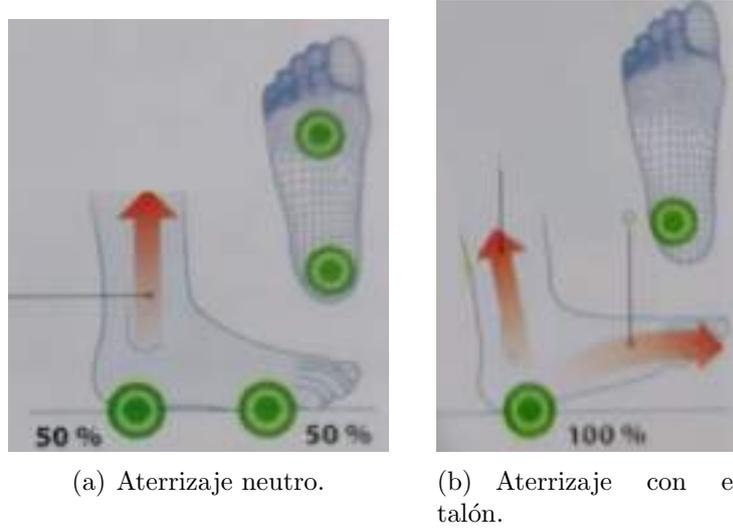


Figura 5.1: Mecánica de las pisadas de aterrizaje.[13]

5.1. Resolución con elementos no lineales y con área de pisada constante

Los resultados de todos los casos que se tuvieron en cuenta se presentan a continuación en las figuras 5.2 y 5.3. Si se recuerda que K y C van a variar según las ecuaciones 5.1 y 5.2:

$$K_i(x, t) = \frac{E_i \cdot Vol}{(L_0 - x)^2} \quad (5.1)$$

$$C_i(x, t) = \frac{\mu_i \cdot Vol}{(L_0 - x)^2} \quad (5.2)$$

Es decir, bajo la hipótesis de volumen constante y que no hay abarrilamiento. A medida que aumenta la compresión, las variables K y C se hacen más rígidas debido a que el espesor disminuye y el área aumenta.

Para el caso del Sorbothane 30 se fue aumentando el espesor hasta llegar a un pico de aceleraciones tolerable. Se puede ver que se llega a cumplir con 65 mm de espesor de suela.

Para el caso del Sorbothane 70, al ser más duro que el anterior, se requiere un mayor espesor para cumplir con el requisito de aceleración. Recién se logra cumplir con 80 mm de espesor.

Los espesores siguen siendo altos pero respecto al resultado final obtenido con el método lineal. Se puede ver que se redujo el espesor 10 mm y 20 mm para el Sorbothane 30 y 70 respectivamente. Esto indica que asumir un K constante teniendo en cuenta una energía elástica equivalente cuando la compresión es del 40 % es muy conservativo.

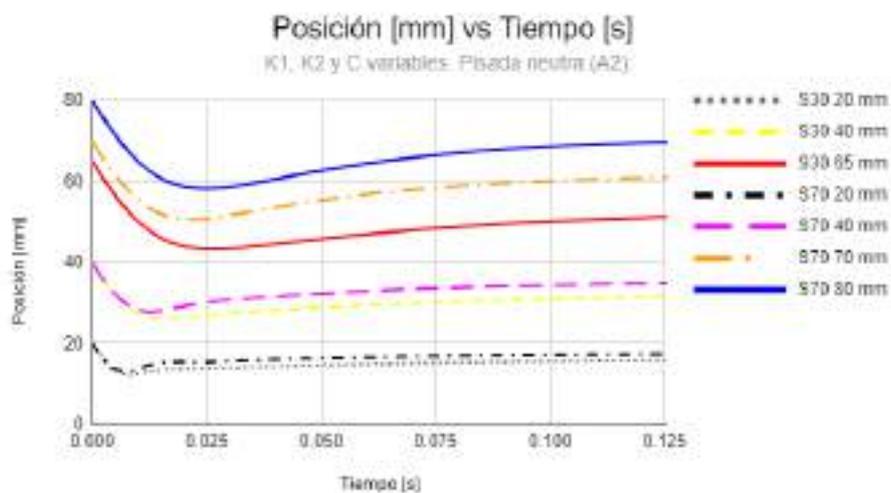


Figura 5.2: Posición [mm] vs Tiempo [s] de los distintos materiales con K1, K2 y C variables y pisada neutra (A2).

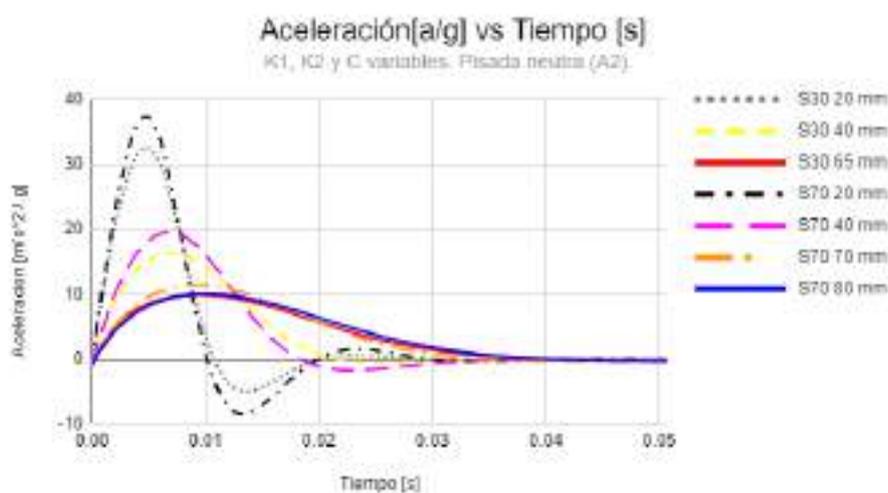


Figura 5.3: Aceleración/gravedad [a/g] vs Tiempo [s] de los distintos materiales con K1, K2 y C variables y pisada neutra (A2).

5.2. Resolución con elementos no lineales con área de pisada variable en el tiempo.

Para este caso se supone que el primer contacto con el suelo se da con el talón y luego, gradualmente, con el resto de la planta hasta llegar al área de pisada neutra. En la figura 5.4 se puede ver como varía el área relativa de pisada. Este caso será menos conservativo ya que, al caer inicialmente con el talón, el área de apoyo es muy chica y las constantes iniciales tendrán una menor rigidez. Esto va a hacer que el material se comprima con mayor rapidez si se compara con los casos anteriores. A su vez, una mayor compresión lleva a un aumento de las constantes debido a la no linealidad, ecuaciones 5.1 y 5.2. Paralelamente las constantes aumentarán con mayor aceleración debido a que el área de apoyo sigue aumentando.

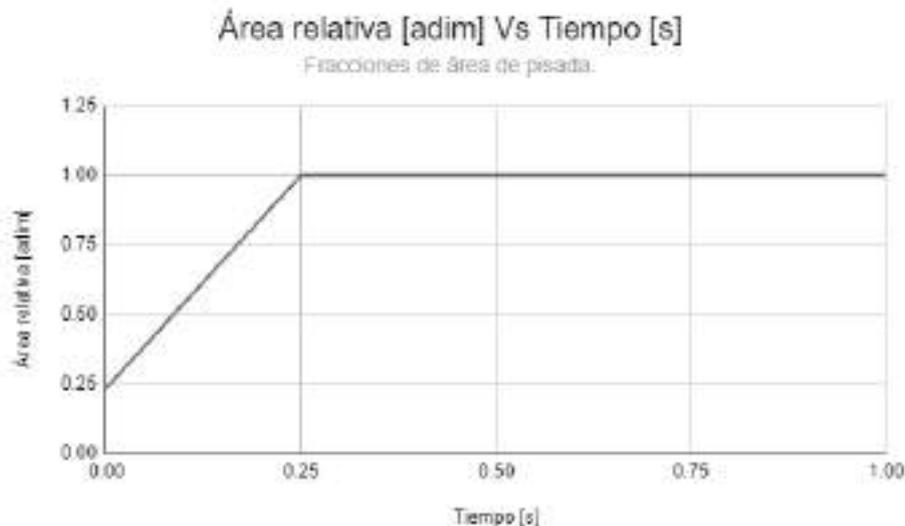


Figura 5.4: Variación del área de pisada en función del tiempo. Se parte del área de apoyo del talón y termina en un apoyo neutro.

En las figuras 5.5 y 5.6 se puede ver los resultados de los mismos casos que se plantearon anteriormente. Se puede observar que los picos de aceleración son menores que en la sección anterior y que la compresión máxima es mayor.

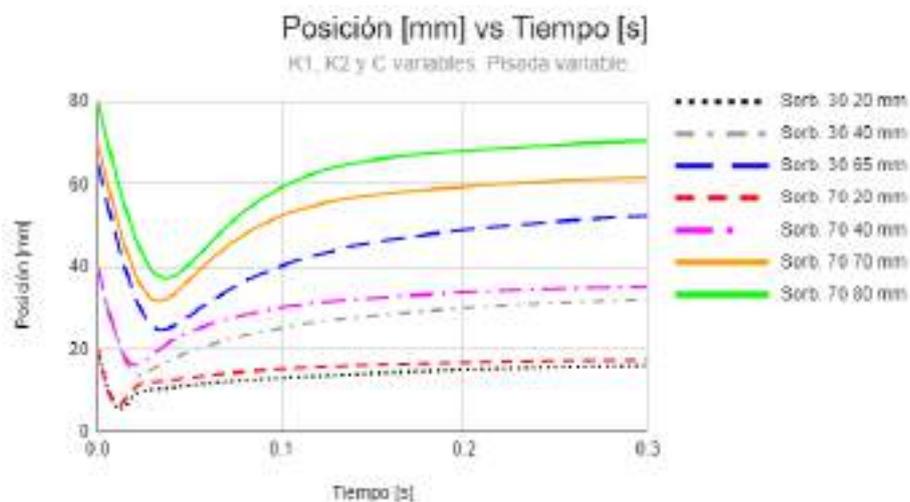


Figura 5.5: Posición [mm] vs Tiempo [s] de los distintos materiales con K1, K2 y C variables y con el área de pisada variable.

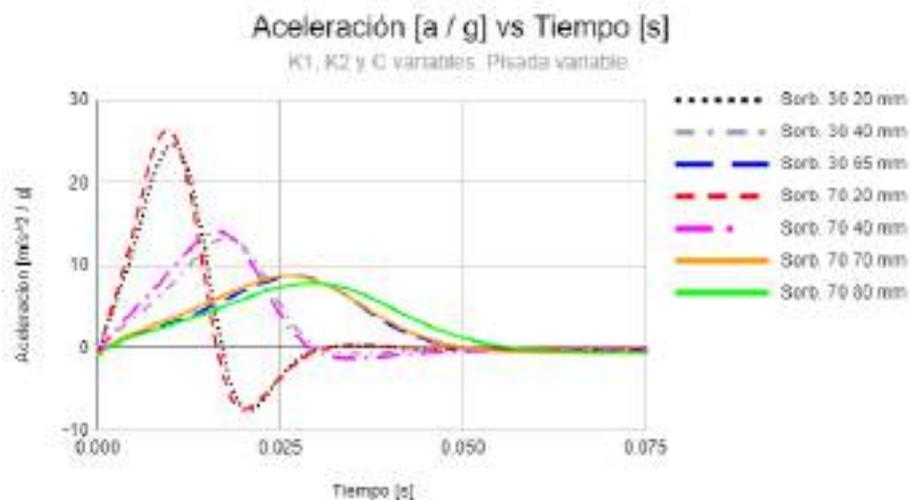


Figura 5.6: Aceleración/gravedad [a/g] vs Tiempo [s] de los distintos materiales con K1, K2 y C variables y con el área de pisada variable.

Con los espesores de 65 mm y 80 mm para el Sorbothane 30 y 70 respectivamente, en este caso se observa que el pico de aceleración es menor que 10 en ambos casos. Si se busca el espesor óptimo para los 2 materiales, para poder obtener una suela de menor espesor, se puede ver que se obtienen de 52 mm para el Sorbothane 30 y de 55 mm para el Sorbothane 70, figuras 5.7

y 5.8.

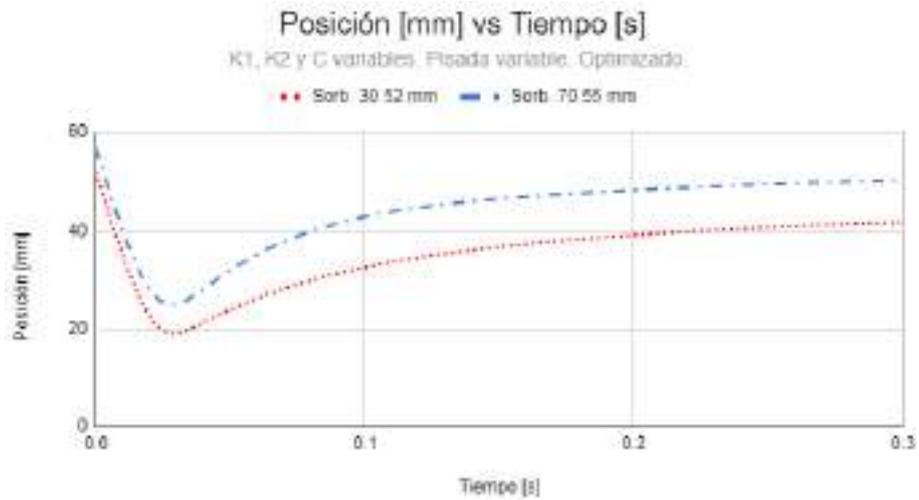


Figura 5.7: Posición [mm] vs Tiempo [s] del Sorbothane 30 y 70 con K1, K2 y C variables y con el área de pisada variable. Caso optimizado.

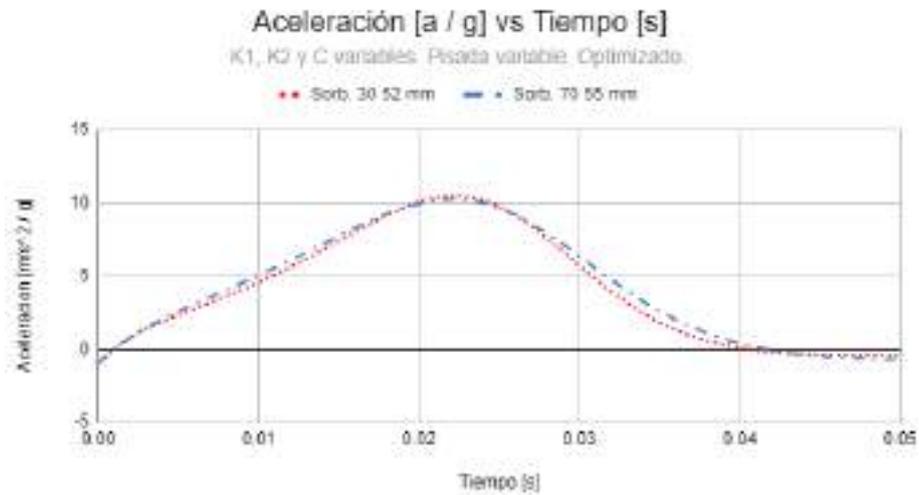


Figura 5.8: Aceleración/gravedad [a/g] vs Tiempo [s] del Sorbothane 30 y 70 con K1, K2 y C variables y con el área de pisada variable. Caso optimizado.

5.3. Comparación de las tres resoluciones

En este proyecto final se analizaron 3 métodos para la resolución del sistema dinámico. Los mismos se pueden resumir en:

- Resolución con elementos lineales: Para este caso se tuvo en cuenta que las constantes aumentaban con la compresión (No linealidad). Para tenerlo en cuenta se estableció una equivalencia de energía elástica para una variación no lineal a volumen constante de hasta un 40% de L_0 .
- Resolución con elementos no lineales y un área de apoyo constante, e igual al área de apoyo neutra: Esta es la técnica correcta para correr, el impacto se tiene que dar en una sola fase y con el área de pisada neutra según Farrow [13].
- Resolución con elementos no lineales y un área de apoyo variable: Esta es una alternativa que permite que el espesor de la plantilla se reduzca ya que el impacto se va dando de manera gradual. Implica otra técnica de correr.

En las figuras 5.9 y 5.10 se puede ver la comparación de los 3 casos para el Sorbothane 70. A su vez, en las figuras 5.11 y 5.12 se puede ver la comparación de los 3 casos para el Sorbothane 30.

En ambos casos, si se analiza la posición en función del tiempo, se ve que el tercer método implica una mayor compresión del material debido a la baja rigidez que posee en el momento del impacto en comparación con los otros 2 casos. En cuanto a la resolución con elementos lineales y no lineales, a igual área, el comportamiento es similar, aunque el segundo método implica una mayor compresión debido a que las constantes iniciales son de menor rigidez. Si se observa la aceleración, se puede ver que el apoyo variable implica un aumento gradual del máximo.

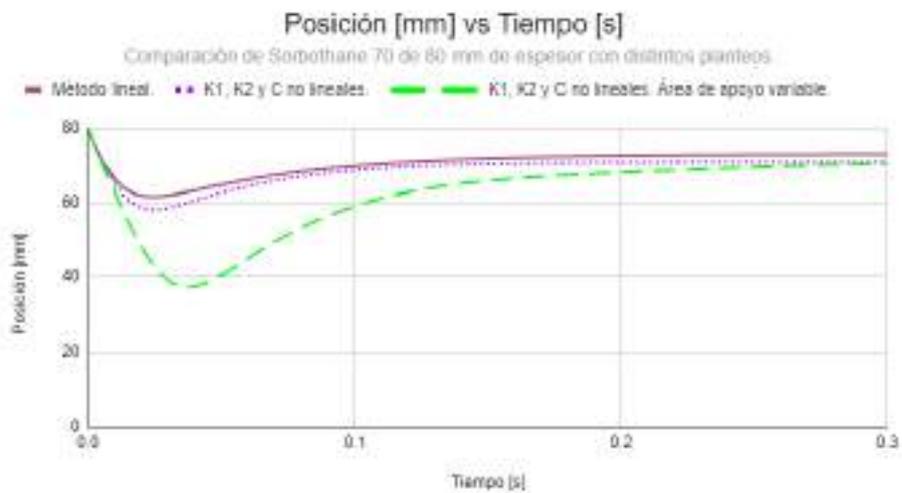


Figura 5.9: Posición [mm] vs Tiempo [s] del Sorbothane 70 comparando los tres casos de resolución planteados.

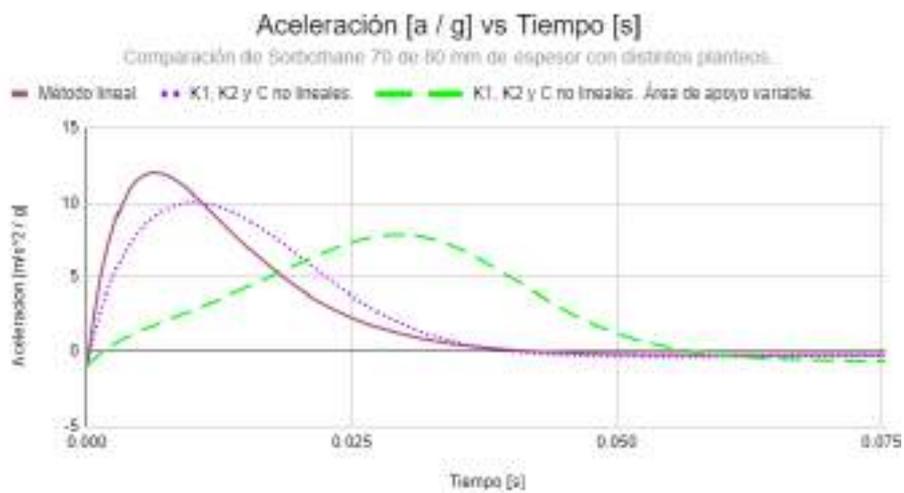


Figura 5.10: Aceleración/gravedad [a/g] vs Tiempo [s] del Sorbothane 70 comparando los tres casos de resolución planteados.

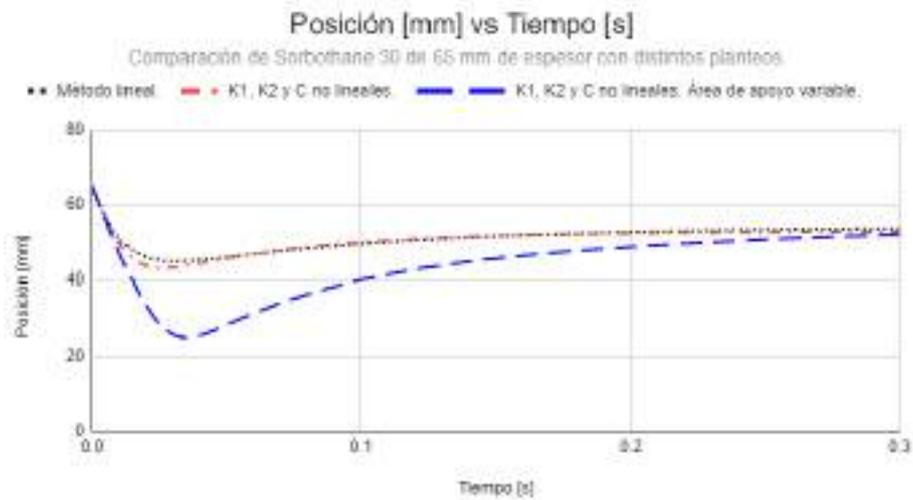


Figura 5.11: Posición [mm] vs Tiempo [s] del Sorbothane 30 comparando los tres casos de resolución planteados.

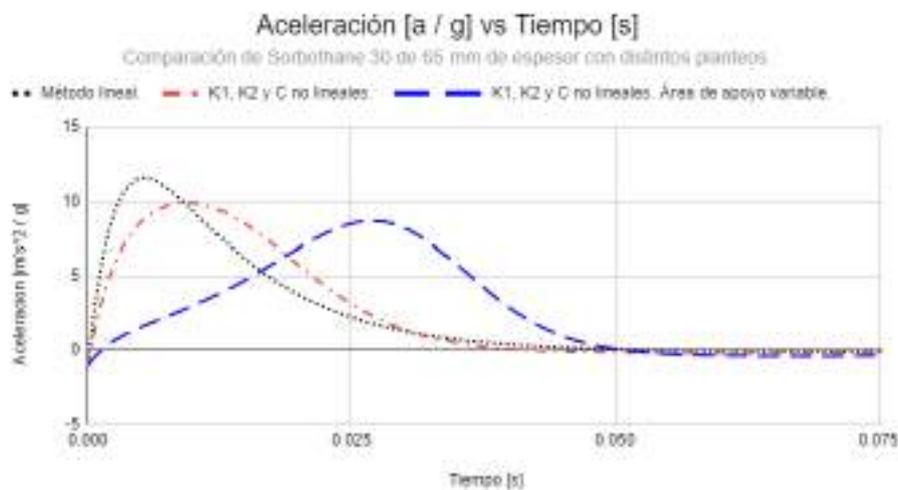


Figura 5.12: Aceleración/gravedad [a/g] vs Tiempo [s] del Sorbothane 30 comparando los tres casos de resolución planteados.

Para finalizar se puede concluir que el mejor material, dentro de los propuestos en este proyecto final, es el Sorbothane 30. Si se utiliza la técnica de correr que implica un apoyo gradual, va a permitir amortiguar el impacto durante la actividad física con un espesor de 52 mm. Comparando con otras ofertas del mercado, y si se tiene en cuenta que es una zapatilla ortopédica,

la geometría se encuentra dentro de lo utilizable.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

6.1. Conclusiones

En este proyecto se alcanzó el objetivo de desarrollar un dispositivo, no invasivo, que permita amortiguar el impacto durante la actividad física. En el proceso se realizaron ensayos con acelerómetros que permitieron encontrar límites de aceleración que no inducen dolor en el paciente. Se experimentaron distintas alternativas, para finalmente seleccionar un material y una geometría que permitiera cumplir con lo buscado.

Se implementaron y resolvieron modelos de comportamiento viscoelástico con condiciones iniciales no nulas. Para representar matemáticamente el comportamiento viscoelástico se utilizó el modelo de zener que describe la ecuación constitutiva de un elastómero vulcanizado a partir de una ecuación diferencial con tres parámetros: 2 resortes y un amortiguador. Las simulaciones fueron resueltas con parámetros lineales y no lineales.

Los resultados de las aceleraciones de las simulaciones se compararon con valores experimentales. Para algunos materiales se encontró un buen acuerdo entre la geometría y los límites de aceleración propuestos. De

Dentro de los elastómeros encontrados, el que permite una entresuela de menor espesor es el Sorbothane 30. Este material logra cumplir con los objetivos con un espesor de 52 milímetros. El plano se detalla en el apéndice F.

Contemplando que la densidad del Sorbothane 30 es $1369.6 \frac{kg}{m^2}$, el peso total de la sobresuela será de 1.2 kg. Si además se tiene en cuenta la suela externa, la tela superior del calzado y la plantilla, más los cordones, la zapatilla va a pesar entre 1.3 y 1.5 kgs. Si bien se obtiene una zapatilla con un

peso de unas 3 o 4 veces superior al de una zapatilla para correr normal, hay que tener en cuenta que el amortiguamiento que se debe obtener es superior al de un calzado normal, con lo cual es esperado que el espesor y el peso sean de mayor tamaño.

De todas maneras esta resolución permite establecer cotas aceptables para una solución aproximada del problema debido a que los modelos utilizados son válidos para pequeñas deformaciones.

Se destaca que al no tener contacto con ninguna empresa de zapatillas ni tener las máquinas disponibles para realizar ensayos DMA, los materiales simulados se obtuvieron a partir de una revisión bibliográfica. Es posible que existan otras formulaciones de polímeros que sean más adecuadas, permitiendo geometrías reducidas y pesos menores.

6.2. Trabajos futuros

El trabajo se puede continuar en dos líneas. Por un lado, se pueden realizar mejoras en la implementación de la herramienta:

- Plantear un modelo de Zener con 2 elastómeros superpuestos, en serie o en paralelo.
- Mejorar el modelo de Zener por otro más preciso, con más elementos.
- Resolver el sistema con un método no lineal que tenga en cuenta el cálculo preciso del abarrilamiento en función del tiempo.

Por otro lado, se pueden realizar ensayos DMA de elastómeros comerciales que se puedan conseguir en Argentina. Esto posibilitará obtener resultados que verdaderamente coincidan con el material con el que se realice el calzado. A su vez, esto podría permitir hacerse de un calzado de menores dimensiones. Esto último ya excede el alcance de este proyecto final pero proporciona los elementos para realizar un diseño de estas características.

Parte II

Apéndices

Apéndice A

Elementos Viscoelásticos

A.1. Introducción

Los cuerpos viscoelásticos son cuerpos que cuyos modelos tienen 2 componentes: Una componente elástica y una componente viscosa.

La componente elástica de un polímero resiste la deformación de forma instantánea y recupera completamente la extensión al revertir la fuerza externa. Así, la elasticidad reversible puede definirse por un módulo elástico o una constante de resorte, una deformación que varía linealmente con la tensión sin ningún desfase temporal y la resistencia del cuerpo contra la fuerza externa que es la tensión elástica. El carácter elástico es el resultado del estiramiento de las cadenas poliméricas y, finalmente, del estiramiento de los enlaces.

La componente viscosa es, sin embargo, dependiente del tiempo, ya que la fuerza externa inducirá un flujo, al que se opondrá la viscosidad o la fricción interna del polímero. Obviamente, la resistencia interna al flujo se debe a los grandes tamaños de las cadenas del polímero que dan lugar a elevadas fuerzas de valencia secundaria y a enredos.

Por el contrario, un polímero reduciría internamente la tensión hasta el límite de la tensión elástica, si la deformación se detuviera, debido al reordenamiento de las cadenas hacia la configuración original, ya que las cadenas pueden fluir.

El estudio de la viscoelasticidad abarca los siguientes regímenes de fenómenos transitorios:

Deformación constante o velocidad de deformación, observando el cambio de tensión. Tensión constante, observando el cambio de la deformación. La

experimentación periódica o dinámica con la deformación o el esfuerzo y la observación de la deformación o el esfuerzo bajo diversas frecuencias de carga dinámica y también con la variación de la temperatura. En este caso, para simplificar la naturaleza dinámica, se considera la tensión o la deformación armónica simple.

A.2. Viscoelasticidad lineal

La deformación se considerará lo suficientemente pequeña como para garantizar que el módulo de Young o el módulo de cizallamiento, también llamado módulo de elasticidad transversal, es independiente de la deformación y, por tanto, la tensión elástica varía linealmente con la deformación. Para la parte viscosa, la tensión es proporcional a la velocidad de deformación y la relación entre la tensión y la velocidad de deformación es constante para la pequeña deformación. Esto significa que la viscoelasticidad se considera lineal.

- Comportamiento con deformación constante:

En un cuerpo viscoelástico, si se desarrolla repentinamente una cierta cantidad de deformación (γ_0) en un cuerpo y se mantiene constante durante un tiempo, la tasa de deformación se vuelve cero, y la tensión sigue cambiando con el tiempo, ya que los grandes segmentos de cadena estirada tratarán de reorganizarse en el cuerpo viscoelástico. El cambio de tensión con el tiempo puede ser rápido o lento, dependiendo de la propiedad del material. Este puede expresarse como sigue:

$$\frac{\sigma(t)}{\gamma_0} = \phi(t) + G_\infty \quad (\text{A.1})$$

Donde $\phi(t)$ es la parte dependiente del tiempo del módulo del material, que se denomina *función de Relajación* y G_∞ es el módulo elástico a tiempo infinito, es decir, el módulo que se debe a la parte recuperable de la tensión. A $\frac{\sigma(t)}{\gamma_0}$ se lo denomina módulo de relajación. La función $\phi(t)$ es una función decreciente con el tiempo y es cero en un tiempo infinito, de modo que el módulo de relajación se convierte en G_∞ . El cuerpo descrito por esta lógica se llama sólido viscoelástico. Si en un cuerpo $G_\infty \rightarrow 0$, entonces el cuerpo es un líquido viscoelástico.

- Comportamiento con tensión constante:

Ahora, si se deja que una tensión σ_0 se aplique repentinamente sobre un cuerpo en un momento $t = 0$, y como resultado, se haya desarrollado una deformación instantánea después de la cual comienza la deformación recuperable e irrecuperable. Es conveniente utilizar la docilidad del material para expresar este fenómeno, también llamado capacitancia:

$$\frac{\gamma(t)}{\sigma_0} = J_0 + \Psi(t) \quad (\text{A.2})$$

J_0 es la docilidad instantánea y $\Psi(t)$ es la función de creep que aumenta con el tiempo, por lo que:

$$\begin{aligned} \Psi(t) + J_0 &= J_\infty \text{ at } t \longrightarrow \infty \\ \text{and } \Psi(0) &= 0 \text{ at } t = 0 \end{aligned}$$

Entonces, $J_\infty \gg J_0$ y $\Psi(t)$ varía entre J_∞ y J_0

La recuperación del creep al retirar la tensión es el retardo de las moléculas que tienden a volver a su configuración original. La naturaleza de la relajación de la tensión y el creep en un cuerpo depende de las funciones dependientes del tiempo $\phi(t)$ y $\Psi(t)$, respectivamente, con valores extremos en $t = 0$ y $t \longrightarrow \infty$.

Para redondear, se puede deducir 2 ecuaciones lineales con las que se obtienen las siguientes conclusiones:

- Si se aplica una deformación constante, la tensión va a ir disminuyendo en función del tiempo. Esto se debe a que el material se va a reacomodar para relajar tensiones.
- Si se aplica una tensión constante, la deformación va a ir aumentando en función del tiempo ya que el material va a fluir para relajar la tensión.

A.3. Relajación y retardo

La relajación es un fenómeno dependiente del tiempo, por lo que el comportamiento del polímero también estaría relacionado con la historia pasada

de la relajación. Esto se debe a que la tensión se relaja hasta un valor mínimo constante en un tiempo infinito; por lo tanto, cualquier nueva tensión adicional en un nuevo marco temporal se superpone a la tensión residual del pasado. Un fenómeno similar es aplicable también al comportamiento de creep. El proceso, por lo tanto, es continuo, tal y como describe el principio de superposición de Boltzmann, con una variación adicional de los tiempos de relajación de los distintos movimientos segmentarios. En consecuencia, el proceso de relajación y retardo no puede expresarse como un único término dependiente del tiempo, sino mediante un espectro de relajación o retardo.

En la práctica, sin embargo, el tiempo de relajación y el tiempo de retardo se determinan experimentalmente mediante mediciones viscoelásticas estáticas o dinámicas. Para expresar el comportamiento viscoelástico de los materiales, y para expresar matemáticamente la naturaleza de la relajación y la fluencia, se conciben dos configuraciones básicas que utilizan combinaciones de tensión elástica y tasa de deformación viscosa. Estas expresiones constitutivas se analizan a continuación.

A.3.1. 1. Modelo de Maxwell

En este modelo, el material viscoelástico se concibe como una combinación en serie de un resorte elástico y un amortiguador que contiene un líquido viscoso y un pistón que se mueve en el líquido.

Bajo una fuerza externa, se sumarán las deformaciones individuales de los elementos elásticos y de los viscosos en esta disposición, mientras que en ambos elementos se experimenta la misma tensión. El elemento de Maxwell se concibe con características viscoelásticas lineales, lo que significa que el módulo elástico es independiente de la deformación. Esto puede suponerse para deformaciones bajas de los cuerpos viscoelásticos. Además, el líquido en el amortiguador, se supone que tiene un comportamiento newtoniano (la viscosidad es independiente de la velocidad de deformación).

La deformación total viene dada por la suma de las deformaciones individuales de los elementos elásticos y viscosos:

$$\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_d \tag{A.3}$$

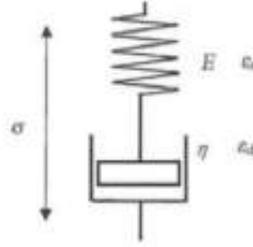


Figura A.1: Esquemmatización del modelo de Maxwell.[11]

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_s}{dt} + \frac{d\epsilon_d}{dt} \quad (\text{A.4})$$

La deformación elástica, $\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$ (Ley de hooke)

Entonces la tasa de deformación elástica será:

$$\frac{d\epsilon_s}{dt} = \frac{1}{E} * \frac{d\sigma_s}{dt} \quad (\text{A.5})$$

Por otro lado, la tasa de deformación viscosa, dada por la ley de viscosidad de newton:

$$\frac{d\epsilon_d}{dt} = \frac{d\sigma_s}{\eta} \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, la ecuación constitutiva del modelo de maxwell queda:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (\text{A.7})$$

- Tasa de deformación constante:

Si se aplica una velocidad de deformación constante en $t = 0$, la tensión variará con el tiempo como:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (\text{A.8})$$

Donde $\tau = \frac{\eta}{E}$, es llamado *tiempo de relajación*. Se observa que a una velocidad de deformación constante ($\dot{\epsilon}$) la tensión y la deformación aumentan con el tiempo para el cuerpo viscoelástico de Maxwell. En un tiempo infinito, el factor en el paréntesis de la ecuación tiende a uno y la expresión se convierte en la de un fluido newtoniano. Por lo tanto, el cuerpo viscoelástico de Maxwell es un fluido.

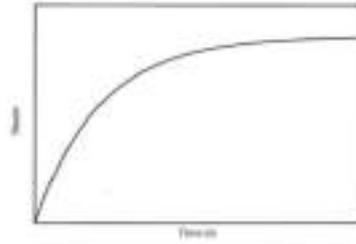


Figura A.2: Deformación en función del tiempo en el cuerpo viscoelástico de Maxwell.[11]

- Relajación de la tensión:

Si después de un tiempo determinado, la deformación se mantiene en un valor constante, la tasa de deformación $\dot{\epsilon} = 0$. Por lo tanto:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Integrando respecto del tiempo y asignando un valor inicial de tensión como 0, se puede obtener la expresión de la relajación de tensión:

$$\sigma = \sigma_0 e^{\frac{-t}{\tau_M}} \quad (\text{A.10})$$

Esta expresión sugiere que la tensión se relaja a cero a tiempo infinito, como en un fluido newtoniano, si la tensión se mantiene constante. El comportamiento de relajación del cuerpo viscoelástico de Maxwell lo se puede ver en la figura A.3.

La definición de tiempo de relajación podría enunciarse como:

El tiempo que necesita un cuerpo viscoelástico para relajar la tensión hasta $(1/e)$ de la tensión inicial cuando la tensión se mantiene constante.

- Creep:

El creep es el cambio de dimensión del cuerpo con el tiempo bajo una carga constante. La relajación de la tensión se produce a una tasa de deformación constante, mientras que el creep de un cuerpo viscoelástico

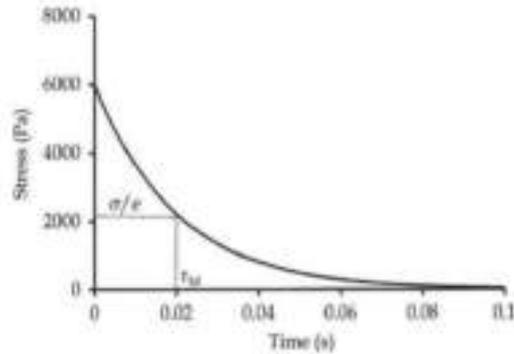


Figura A.3: Comportamiento de relajación del cuerpo viscoelástico de Maxwell.[11]

se produce cuando la tensión se mantiene constante durante un tiempo considerable. Con una tensión constante σ_0 , la deformación aumenta monótonamente para el elemento viscoelástico de Maxwell. Si se impone una tensión instantánea al cuerpo viscoelástico, la deformación instantánea es la deformación elástica. Posteriormente, la deformación viscosa añadida aumenta con el tiempo.

Para la tensión constante, la derivada de la tensión es cero, por lo tanto:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad (\text{A.11})$$

Y la deformación elástica instantánea será: $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$

Trabajando y sustituyendo se obtiene a la expresión del creep:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right] \quad (\text{A.12})$$

La ecuación indica que la fluencia del cuerpo viscoelástico de Maxwell es lineal con el tiempo. Además, al retirar el esfuerzo después del tiempo t_1 desde el inicio, es decir, si $\sigma_0 = 0$ en $t = t_1$, la deformación elástica se recupera, pero la deformación viscosa es la deformación permanente, como en el caso de los líquidos newtonianos. El cambio de la deformación con la tensión y su posterior recuperación se muestra en la figura A.4.

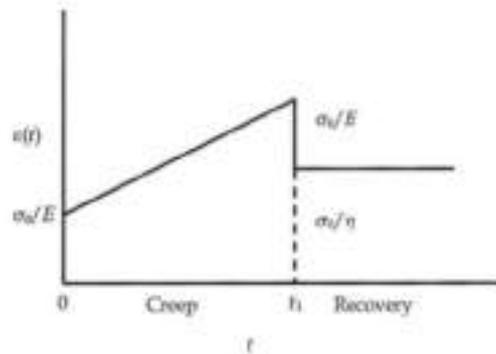


Figura A.4: Cambio de la deformación con la tensión y su posterior recuperación en el cuerpo viscoelástico de Maxwell.[11]

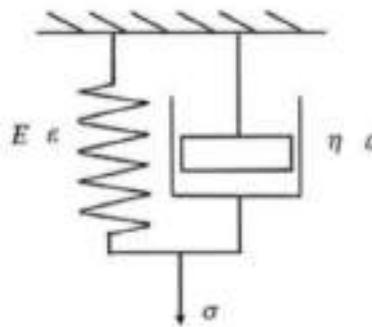


Figura A.5: Esquematización del modelo de Kelvin-Voigt.[11]

A.3.2. 2. Modelo de Kelvin-Voigt

A diferencia del modelo físico de Maxwell, en este el resorte y el amortiguador están en paralelo. El modelo físico de Kelvin-Voigt se puede ver en la siguiente figura. En esta disposición, se observa que las tensiones en el amortiguador y en el resorte se dividen y la deformación en cada brazo es la misma para la condición de equilibrio. Los parámetros del modelo se definen como:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E \cdot \varepsilon \\ \sigma_d &= \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \end{aligned}$$

Las tensiones son aditivas, por lo tanto, la tensión total en el modelo es:

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d = E \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Reordenando y reemplazando queda la ecuación constitutiva de este modelo:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{E}{\eta} \left(\frac{\sigma}{E} - \varepsilon \right) \quad (\text{A.13})$$

Al aplicar instantáneamente una tensión definida y mantenerla constante durante un tiempo infinito, también con una velocidad de deformación constante, la deformación total en el modelo aumentará gradualmente como fenómeno de creep. El módulo también disminuirá con el tiempo.

■ Creep:

El cambio en la deformación con el tiempo a una tensión constante puede derivarse matemáticamente de la ecuación constitutiva anterior integrando y tomando la condición inicial ($t = 0$). El comportamiento de creep queda:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (\text{A.14})$$

Donde $\lambda = \frac{\eta}{E}$ es el tiempo de retardo de un cuerpo viscoelástico.

Después de un tiempo suficientemente largo, el término exponencial del paréntesis tiende a cero y, por tanto, la deformación alcanza un valor constante (σ/E), que es la deformación para un sólido con módulo de elasticidad E . Por tanto, *el modelo Kelvin se comporta como un sólido a tiempos largos.*

■ Recuperación:

Utilizando la ec. constitutiva, se puede encontrar una expresión para la recuperación de la deformación cuando se retira la tensión. En esa ocasión, la tensión $\sigma = 0$ y, por lo tanto:

$$\eta \frac{d\varepsilon}{dt} = -E \cdot \varepsilon \quad (\text{A.15})$$

Integrando, el comportamiento de recuperación queda:

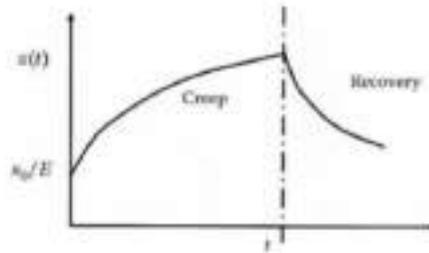


Figura A.6: Creep y recuperación del modelo de Kelvin-Voigt.[11]

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (\text{A.16})$$

La representación de la deformación por creep a una carga constante y la recuperación de la deformación al retirar la carga se muestra en la figura A.6.

- Relajación de la tensión:

Refiriéndose nuevamente a la ecuación constitutiva A.13

Si la tensión instantánea es σ_0 y la deformación es constante en ε_0 en ese punto, la tensión en el cuerpo disminuirá lentamente debido al reordenamiento de las moléculas.

La velocidad de deformación es, por tanto, cero. Por lo tanto:

$$\sigma_0 = E \cdot \varepsilon_0 \quad (\text{A.17})$$

Por lo tanto, **un elemento de Kelvin-Voigt no muestra ninguna relajación y se comporta como un cuerpo elástico de Hooke.** Mientras que el elemento de Maxwell se comporta como un líquido newtoniano y muestra una relajación total de la tensión.

Ninguno de estos dos extremos representa a los sólidos viscoelásticos reales, como los polímeros.

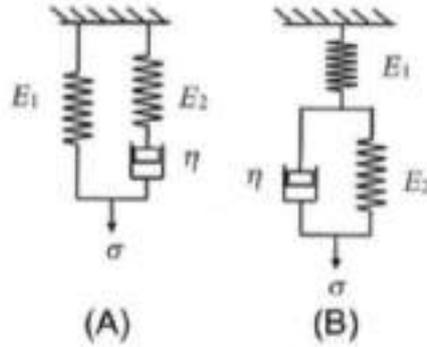


Figura A.7: Esquematización del modelo de 3 parámetros.[11]

A.3.3. 3. Modelo de 3 parámetros

Para modelar el comportamiento viscoelástico real que se observa en los polímeros en general, hay muchas posibilidades de combinar estos dos modelos básicos para incorporar las características de la fluencia y la relajación de tal manera que se tengan valores finitos de la tensión de relajación a tiempo infinito y un valor finito de la deformación de fluencia a tiempo infinito. En la figura A.7 se muestran varias combinaciones posibles de tres parámetros, ya sea dos resortes con un amortiguador o un resorte con dos amortiguadores. Los modelos A y B representan sólidos viscoelásticos. El modelo A tiene una disposición de un resorte y un brazo de Maxwell en paralelo, mientras que el modelo B tiene un resorte y un brazo de Kelvin-Voigt en serie. Para un elastómero vulcanizado, el modelo más utilizado es el modelo Zener (A).

Las ecuaciones constitutivas de estos 2 modelos son las siguientes:

Fig A.7A:

$$\eta \frac{d\sigma}{dt} + E_2 \sigma = \eta(E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1 E_2 \varepsilon \quad (\text{A.18})$$

Fig A.7B:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{A.19})$$

Ambas corresponden a ecuaciones diferenciales de primer orden.

Para hacer los mismos análisis que hicimos con los otros 2 modelos, se va a tomar como ejemplo la ecuación constitutiva del modelo Zener (A). Se podría trabajar análogamente con el modelo B. La ecuación constitutiva corresponde a la Fig A.7A.

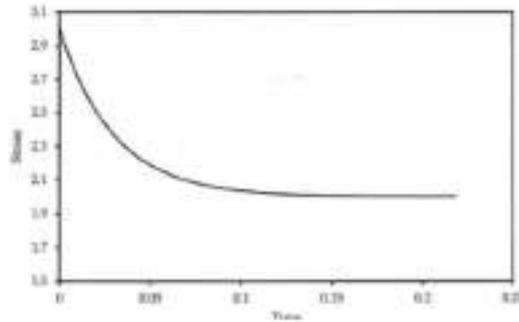


Figura A.8: Curva de relajación para un cuerpo viscoelástico de Zener.[11]

- Relajación de tensiones:

Sea aplicada una tensión instantánea σ_l y sea la tensión instantánea ε_l y por lo tanto la derivada de la misma es cero. La ecuación queda:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{E_2}{\eta} = \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon_l \quad (\text{A.20})$$

Integrando e introduciendo la condición inicial: en $t = 0$, $\sigma_l = \varepsilon_l(E_1 + E_2)$. Se obtiene:

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_l}{E_1 + E_2} \right) \left[E_1 + E_2 \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \right] \quad (\text{A.21})$$

El término E_2 es la inversa del tiempo de relajación, del brazo de Maxwell. A un tiempo muy largo, $t = \infty$, el término exponencial en el paréntesis de la Ec.A.21 tiende a cero, y la tensión relajada tiene un valor límite:

$$\sigma_R = \frac{\sigma_l E_1}{E_1 + E_2} \quad (\text{A.22})$$

La figura A.8 muestra la naturaleza de la curva de relajación de tensiones para un cuerpo viscoelástico de Zener.

- Creep:

Se supone que la tensión se aplica instantáneamente y se mantiene constante en σ_0 , y la deformación instantánea es ε_0 . La deformación del cuerpo viscoelástico cambiará con el tiempo. La expresión de la fluencia para el modelo de Zener se deriva de la ecuación constitutiva básica, tomando la derivada de la tensión como cero.

Integrando y aplicando la condición inicial en $t = 0$, $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2}$

Queda:

$$\varepsilon = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{E_1(E_1 + E_2)} \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t\right) \right] \quad (\text{A.23})$$

La expresión anterior para la deformación por creep muestra que la deformación después de un tiempo prolongado es σ_0/E_1 .

■ Recuperación:

Al retirar la tensión constante durante el creep, la deformación se recuperará parcialmente como se puede derivar de la ecuación constitutiva, teniendo en cuenta que la tensión y su derivada es cero.

Por lo tanto, la ecuación constitutiva puede escribirse como:

$$\eta(E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1 E_2 \varepsilon = 0 \quad (\text{A.24})$$

Integrando y aplicando una condición inicial de que en $t = 0$, el esfuerzo se retira, y la deformación en ese punto es ε_R , la ecuación final de recuperación de la deformación se obtiene como:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_R}{E_1 + E_2} \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t\right) \quad (\text{A.25})$$

Las condiciones iniciales son: $t = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_R = \frac{\sigma_R}{E_1 + E_2}$

Por lo tanto, la deformación queda:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_R - \frac{\sigma_R}{E_1 + E_2} \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t\right) \quad (\text{A.26})$$

La Figura A.9 muestra el creep típico y la recuperación de la deformación de un cuerpo viscoelástico de Zener. Tanto la deformación de fluencia como la recuperación tienen valores límite para este modelo.

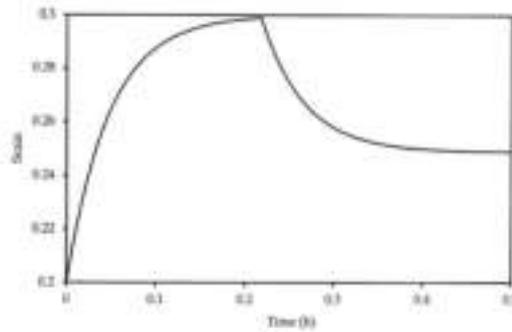


Figura A.9: Curva de creep y recuperación para un cuerpo viscoelástico de Zener.[11]

A.4. Propiedades viscoelásticas dinámicas

Las tensiones que cambian dinámicamente revelan información más importante sobre el comportamiento de los polímeros. Al aplicar la carga en función del tiempo, la respuesta de los segmentos de la cadena del polímero muestra fenómenos claramente dependientes de la temperatura y la frecuencia que se utilizan eficazmente para determinar muchas características importantes de un polímero, de las mezclas y su proceso de relajación.

A.4.1. Relajación de los segmentos de la cadena

Cuando un polímero se somete a una carga cíclica, armónica o no, los segmentos de cadena de diferentes longitudes responden según su escala temporal de movilidad. Durante cada ciclo de tensión, los segmentos sufrirán una deformación y una relajación cíclicas, siempre que la escala de tiempo del ciclo de tensión sea del mismo rango que la escala de tiempo de relajación de ese segmento. La movilidad de los segmentos más pequeños será mucho mayor que la de los segmentos más grandes. En segundo lugar, la movilidad de un segmento será mayor a una temperatura más alta. Estos dos factores llevan a la conclusión de que los segmentos más pequeños tendrán un tiempo de relajación menor que los segmentos más grandes a cualquier temperatura por encima de la cual sean capaces de moverse. En un polímero grande, habrá una distribución de las longitudes de las cadenas y también una distribución de las longitudes de los segmentos en una sola cadena. Más allá de un peso molecular crítico, las cadenas también tendrán enredos. Estos factores son

responsables del inicio y el alcance de la movilidad de los segmentos y la energía de activación de la relajación.

A.4.2. Efecto de la temperatura

La medida de la movilidad segmentaria se entiende generalmente por el tiempo de relajación, que es el tiempo necesario para que una especie reduzca su tensión a $(1/e)$ de la tensión instantánea. Esta propiedad es una función de la agitación térmica y la dependencia de la temperatura del tiempo de relajación puede expresarse por la expresión de Arrhenius como:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right) \quad (\text{A.27})$$

Por otro lado, según la ecuación de William-Landel-Ferry (WLF) que describe la dependencia con respecto a la temperatura de la relajación α y la transición de fluido. Tiene la forma:

$$\log(a_T) = \log\left(\frac{\tau}{\tau_r}\right) = \frac{C_1 \cdot (T - T_r)}{C_2 + (T - T_r)} \quad (\text{A.28})$$

Cuando el polímero se enfría por debajo de la transición vítrea, la movilidad se ve obstaculizada por una estrecha aproximación de los segmentos o moléculas vecinas y, por tanto, la ecuación anterior no es válida. En la región de transición vítrea, el tiempo de relajación cambiaría en varias décadas incluso con un grado de temperatura. Para resumir, un polímero se comporta distinto cerca de la región de transición vítrea y lejos de ella. Muy por encima de la T_g (unos 50 grados), tendrá la relajación que expresa la ecuación de arrhenius, mientras que cerca de T_g se utiliza otra expresión.

A.4.3. Propiedades dinámicas

En el cuerpo viscoelástico, una parte de la deformación no es elástica y existe una parte de la deformación dependiente del tiempo debido al flujo viscoso, para el cual la tasa de deformación es proporcional a la tensión. Por lo tanto se representa la deformación y la tensión armónica como se muestra en la figura.

Durante una carga cíclica, una parte de la deformación, que es de naturaleza elástica y se produce instantáneamente con la misma escala de tiempo

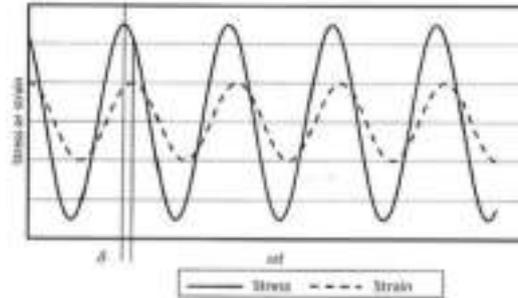


Figura A.10: Tensión y deformación en función del tiempo.[11]

que la tensión, estará en fase con la tensión y se recuperará instantáneamente al retirar la tensión. Sin embargo, una parte de la deformación, que es inelástica, se producirá con un retardo de tiempo, ya que la deformación se desarrolla con el tiempo. Por lo tanto, se observará que la deformación neta va por detrás de la tensión en la escala de tiempo. Además, el proceso de deformación conduce a la pérdida de una parte de la energía mecánica en cada ciclo de carga debido a la disipación viscosa en forma de calor. La acumulación de calor en cada ciclo es una información importante para los elastómeros cuando se utilizan en sistemas críticos.

Si se considera una fuerza dinámica que se aplica a una muestra de polímero. Se supone que la tensión periódica es de naturaleza armónica simple y tiene una periodicidad fija T y una amplitud de oscilación σ_0 y una amplitud de deformación ε_0 . La tensión y la deformación varían en el tiempo se representan por $\sigma(t)$ y $\varepsilon(t)$, respectivamente. Se deja que la carga esté dentro de los límites de la región viscoelástica lineal, de modo que el módulo efectivo sea independiente de la deformación.

Cuando no hay diferencia de tiempo en la aparición de la deformación y la tensión, al igual que un sólido de Hooke, la tensión cíclica y la deformación pueden representarse como:

$$\text{Tensión: } \sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t} \text{ y Deformación: } \varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$\text{Por lo tanto, el módulo elástico es: } E = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

Y va a ser constante para cualquier tiempo y frecuencia.

Para un material viscoelástico como un polímero, la tensión y la deformación cíclicas pueden representarse como:

$$\text{Tensión: } \sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t} \text{ y Deformación: } \varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)}$$

Esto también puede ser representado como:

$$\sigma(t) = \sigma_0(\cos wt + i \sin wt) = \sigma' + i\sigma'' \quad (\text{A.29})$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0[\cos(wt - \delta) + i \sin(wt - \delta)] = \varepsilon' + i\varepsilon'' \quad (\text{A.30})$$

Donde δ es el tiempo o desfase de la deformación respecto a la tensión y tanto la tensión como la deformación tienen partes reales e imaginarias para distinguir entre las componentes de Hooke y viscosa.

Por lo tanto, el módulo dependiente del tiempo se puede calcular como:

$$E^* = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{\sigma_0 e^{iwt}}{\varepsilon_0 e^{i(wt-\delta)}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = E^* \cos \delta + iE^* \sin \delta \quad (\text{A.31})$$

$$E^* = E' + iE''$$

Donde E' es el módulo dinámico o de almacenamiento, E'' es el módulo de pérdida y E^* es el módulo de elasticidad complejo. E' representa la parte elástica y E'' la parte inelástica, que no es recuperable debido a la disipación viscosa de energía. La relación entre E'' y E' es el factor de pérdida, η , que tiene la forma:

$$\eta = \tan \delta = \frac{E''}{E'} = \frac{E^* \sin \delta}{E^* \cos \delta} \quad (\text{A.32})$$

El factor de pérdida, también se puede escribir como:

$$\tan \delta = \eta_s = 2\zeta \quad (\text{A.33})$$

Donde ζ es el coeficiente de amortiguamiento relativo:

$$\zeta = \frac{C}{C_{crit}}$$

La viscoelasticidad dinámica de los polímeros puede modelizarse utilizando el mismo enfoque matemático que los modelos viscoelásticos estáticos descritos anteriormente por Maxwell, Kelvin-Voigt, Zenner, etc. para tener expresiones que relacionen los módulos con la frecuencia y el tiempo de relajación. En este caso, se adoptan modelos de dos parámetros, como el de Maxwell y el de Kelvin-Voigt, y de tres parámetros, como el de Zenner para describir las propiedades viscoelásticas dinámicas.

- Carga dinámica del modelo de Maxwell:

Recordando la ecuación constitutiva del cuerpo viscoelástico de Maxwell:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$$

Introduciendo el tiempo de relajación como: $\tau = \frac{\eta}{E}$:

$$\tau E \frac{d\varepsilon}{dt} = \tau \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \quad (\text{A.34})$$

Diferenciando la deformación y la tensión dinámicas e introduciendo en la ecuación A.34 y trabajando algebraicamente:

$$E' = \frac{\tau^2 \omega^2 E}{1 + \tau^2 \omega^2}, \quad E'' = \frac{\tau \omega E}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

El factor de pérdida η se puede calcular como:

$$\eta = \frac{E''}{E'} = \frac{\frac{\tau \omega E}{1 + \tau^2 \omega^2}}{\frac{\tau^2 \omega^2 E}{1 + \tau^2 \omega^2}} = \frac{1}{\omega \tau} \quad (\text{A.35})$$

La naturaleza de la curva dependiente de la frecuencia de los parámetros viscoelásticos dinámicos módulo de almacenamiento, módulo de pérdida y factor de pérdida se representan en la figura A.11. Se puede ver que el modelo de Maxwell no representa el cuerpo viscoelástico real ya que el módulo de pérdida y los factores de pérdida asumen un valor muy grande a baja frecuencia, y el módulo de almacenamiento es casi cero en el rango de baja frecuencia, pareciéndose a un líquido.

- Carga dinámica del modelo Kelvin-Voigt:

Del mismo modo, se recuerda la ecuación constitutiva de un cuerpo KV y aplicamos las expresiones de tensión y deformación dinámicas:

$$\frac{\eta}{E} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{E} - \varepsilon$$

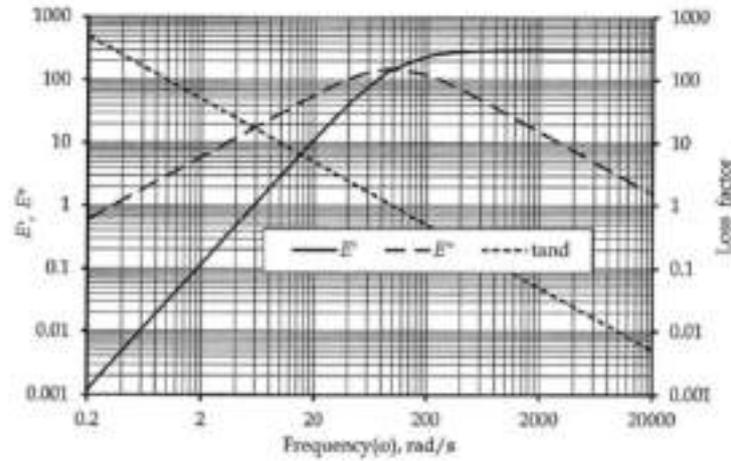


Figura A.11: Módulo de almacenamiento, módulo de pérdida y factor de pérdida del modelo de Maxwell.[11]

Introduciendo el tiempo de relajación como: $\tau = \frac{\eta}{E}$, en la ecuación constitutiva y en las expresiones de tensión-deformación dinámica y tomando la primera diferencial de la deformación dinámica:

$$\varepsilon_0 e^{i\omega t} (1 + i\omega\tau) = \frac{\sigma_0}{E} e^{i\omega t} e^{i\delta}$$

El módulo complejo será: $E^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = E(1 + i\omega\tau)$

El módulo de almacenamiento, el módulo de pérdida y el coeficiente de pérdida están dados por:

$$E' = E, E'' = \omega\tau E$$

$$\eta = \tan\delta = \frac{E''}{E'} = \omega\tau$$

Las expresiones anteriores para E', E'' y el factor de pérdida no se asemejan a ningún polímero real ya que, según este modelo, el módulo de almacenamiento es independiente de la frecuencia, mientras que el factor de pérdida y el módulo de pérdida aumentan linealmente con la frecuencia. Las propiedades representadas en la figura A.12 se muestran la naturaleza de estas propiedades en función de la frecuencia (ω).

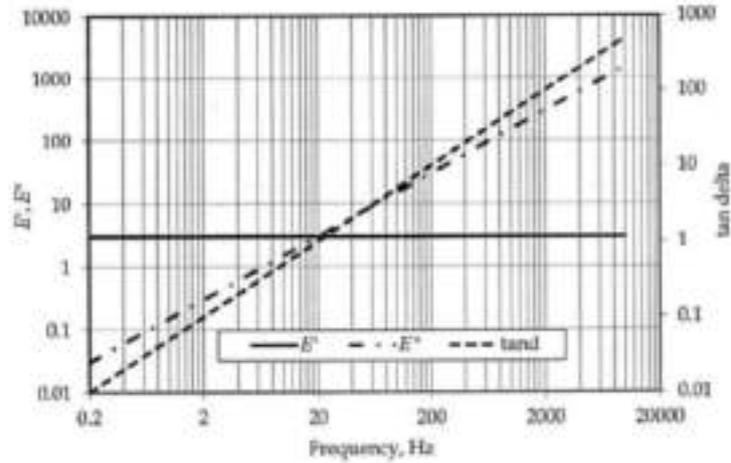


Figura A.12: Módulo de almacenamiento, módulo de pérdida y factor de pérdida del modelo de Kelvin-Voigt.[11]

- Carga dinámica del modelo de Zener:

El modelo viscoelástico de tres parámetros descrito anteriormente puede evaluarse para las propiedades dinámicas utilizando la ecuación constitutiva:

$$\eta \frac{d\sigma}{dt} + E_2\sigma = \eta(E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1E_2\varepsilon$$

Introduciendo la tensión dinámica, la deformación, la tasa de tensión, la tasa de deformación y el tiempo de relajación, τ , en la ecuación anterior, la forma final de las propiedades dinámicas se deriva a continuación:

$$E' = \frac{E_1 + \omega^2\tau^2E_2}{1 + \tau^2\omega^2}, \quad E'' = \frac{\tau\omega(E_2 - E_1)}{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$\eta = \frac{E''}{E'} = \frac{\tau\omega(E_2 - E_1)}{E_1 + \omega^2\tau^2E_2} \quad (\text{A.36})$$

La figura A.13 muestra la naturaleza de la dependencia de la frecuencia de las propiedades dinámicas derivadas anteriormente. Los valores arbitrarios asignados a los parámetros del modelo son sólo a modo de ejemplo. Sin embargo, la naturaleza de las curvas es casi similar al comportamiento real de los polímeros.

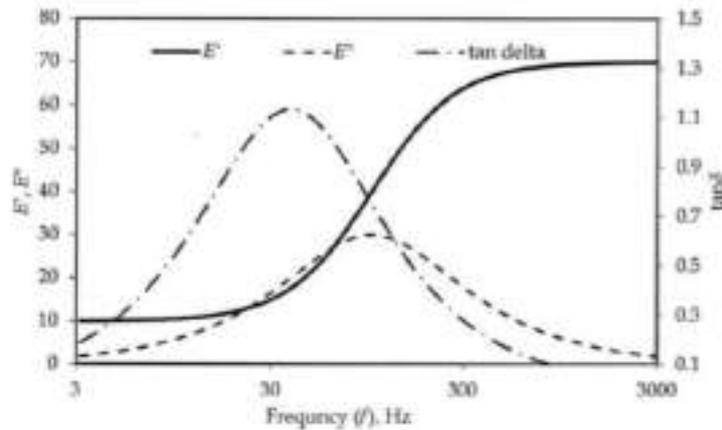


Figura A.13: Módulo de almacenamiento, módulo de pérdida y factor de pérdida del modelo de 3 parámetros.[11]

Se puede observar que E' tiene un valor mínimo y un valor máximo a baja y alta frecuencia, respectivamente. Los valores entre estos dos extremos varían con la frecuencia. Los mínimos (E_0) y máximos (E_∞) pueden definirse a partir de la ecuación anterior en E' y E'' como:

$$E' = \frac{E_0 + \omega^2 \tau^2 E_\infty}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$E'' = \frac{\tau \omega (E_\infty - E_0)}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$\eta = \tan \delta = \frac{(E_\infty - E_0) \tau \omega}{E_0 + E_\infty \omega^2 \tau^2}$$

Donde: $E_1 = E_0$ y $E_2 = E_\infty$.

El módulo de pérdida (E'') tiene el valor máximo en la siguiente condición:

$$\omega \tau = 1 ; \tau = \frac{1}{\omega}$$

Esta última ecuación implica que el tiempo de relajación es inverso a la frecuencia angular en el pico de E'' . Por lo tanto, el pico de E'' es la Tg (DMA) ya que da el tiempo de relajación. Esto significa que a una temperatura determinada, cuando el tiempo de relajación coincide exactamente con el período de tiempo de la tensión oscilante, la pérdida

de energía en el cuerpo viscoelástico es máxima. La frecuencia correspondiente se denomina α -Frecuencia de relajación y la temperatura correspondiente se denomina α -Temperatura de relajación.

La α -relajación está relacionada con el movimiento cooperativo de los segmentos y no de toda la cadena como tal. A esta temperatura, el polímero se transforma del estado duro y vítreo a un estado blando y gomoso y el tiempo de relajación disminuye rápidamente en las proximidades de esta transición. En algunos casos, esta temperatura se denomina erróneamente temperatura de transición vítrea (T_g), pero es diferente de la temperatura de transición medida como un cambio en la capacidad calorífica por calorimetría diferencial de barrido (DSC).

La temperatura a la que aparece el pico de pérdida depende mucho de la frecuencia de la medición. A una frecuencia baja, la transición tiene lugar a una temperatura más baja y se desplaza gradualmente a una temperatura más alta, si las frecuencias sucesivas elegidas son más altas. A una frecuencia muy baja, la exploración de la temperatura para una medición dinámica coincidiría aproximadamente con la temperatura de transición vítrea (T_g) medida por DSC.

Las propiedades mecánicas dinámicas son necesarias para predecir el grado y la frecuencia a la que un polímero absorberá la máxima energía mecánica a las temperaturas aplicables. Dado que el módulo de pérdida es una indicación de la pérdida de energía mecánica, se utiliza para predecir la amortiguación a varias temperaturas de referencia. El pico de frecuencia del módulo de pérdida es agudo para los homopolímeros comunes y los polímeros reticulados o mezclas compatibles, pero podría ser amplio en el caso de mezclas como las redes de polímeros interpenetrados. **Esto último sirve si se quiere que la amortiguación sea máxima entre una velocidad de trote máxima y una velocidad de trote mínima, y no solo a una velocidad determinada.**

Pérdida de energía en la carga dinámica:

La energía mecánica del proceso de deformación se perderá en parte en un cuerpo viscoelástico debido a la componente viscosa de la relación tensión-deformación. En cada ciclo de deformación, la pérdida será constante siempre que la frecuencia cíclica y la temperatura se mantengan iguales. Por lo tanto,

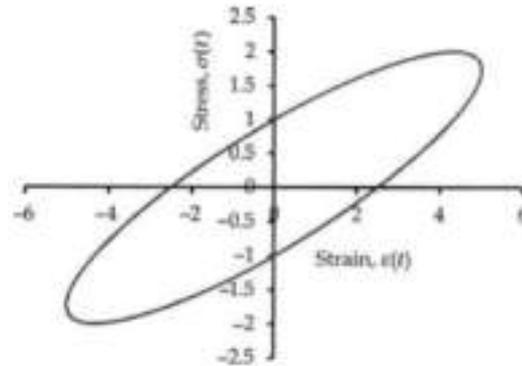


Figura A.14: Relación entre la tensión-deformación cíclica y la histéresis.[11]

la relación tensión-deformación tendrá una pérdida de histéresis para un ciclo de deformación. Esto se puede apreciar mediante una simple aproximación matemática.

Si se designa a la tensión y a la deformación como:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t); \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t - \delta)$$

Trabajando algebraicamente se puede llegar a:

$$\left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0}\right)^2 = \sin^2\delta + 2\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\cos\delta \quad (\text{A.37})$$

La ecuación A.37 corresponde a una elipse. Por lo tanto, el ciclo de tensión-deformación tendrá la forma de una elipse y el área bajo la elipse representa la pérdida de energía de deformación para un ciclo de estiramiento por unidad de volumen de la muestra.

La figura A.14 muestra una típica relación tensión-deformación cíclica y la histéresis. Los datos tomados son valores arbitrarios a modo de ejemplo. La pérdida de energía por ciclo es el área bajo el bucle de la Figura y puede calcularse mediante la siguiente integración de la energía de deformación infinitesimal a lo largo de un ciclo de tiempo $T (=2\pi/\omega)$ como sigue:

$$W = \int_0^T \sigma(t) \frac{d\varepsilon}{dt} dt$$

Trabajando:

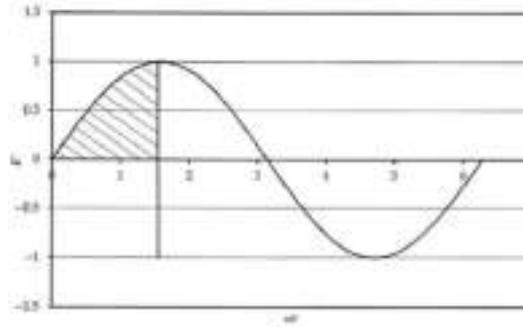


Figura A.15: [11]

$$W = -w\sigma_0\varepsilon_0 \int_0^{2\pi/w} [\cos(wt).\sin(wt).\cos(\delta) - \cos^2(wt).\sin(\delta)] dt$$

Por lo tanto:

$$E_{loss} = \pi E'' \varepsilon_0^2$$

La pérdida de energía es por unidad de volumen de la muestra de polímero por unidad de ciclo. La pérdida por unidad de tiempo se obtiene multiplicando la E_{loss} por la frecuencia f ($=w/2\pi$). Por lo tanto, la pérdida de energía por unidad de tiempo es:

$$E_{loss} = \pi f E'' \varepsilon_0^2$$

El trabajo realizado por la deformación puede obtenerse considerando el proceso de almacenamiento y liberación de energía. Durante el primer cuarto del ciclo ($T/4$, o $\pi/2w$), la energía es ganada continuamente por el cuerpo y durante el siguiente cuarto, es liberada. Por lo tanto, para medio ciclo, la energía elástica debe calcularse sólo para un cuarto. Esto se ilustra en la figura A.15. La energía almacenada en el polímero para medio ciclo por unidad de volumen de la muestra de polímero se obtiene como:

$$W = \int_0^T \sigma(t) \frac{d\varepsilon}{dt} dt = \frac{\sigma_0\varepsilon_0}{2} \cos\delta$$

$$E_s = \frac{\varepsilon_0^2 E'}{2}$$

La energía total por ciclo es el doble de la anterior. Por lo tanto, la energía total almacenada por ciclo por unidad de volumen de muestra, es decir, la parte elástica de la energía es:

$$E_s = \varepsilon_0^2 E' \quad (\text{A.38})$$

Esta es la misma área bajo la curva de tensión-deformación para la deformación elástica.

Dependencia de las propiedades dinámicas de la temperatura:

La dependencia de la frecuencia de las propiedades viscoelásticas dinámicas implica el tiempo de relajación de los segmentos de la cadena. Dado que el tiempo de relajación depende de la temperatura del material, se deduce que las propiedades dinámicas también dependen de la temperatura. El efecto de la temperatura puede evaluarse tomando las expresiones de la relación temperatura-tiempo de relajación. Las dos más comunes son la de Arrhenius y la de WLF.

Las ecuaciones nombradas anteriormente permiten obtener el tiempo de relajación en función de la temperatura. Dado que el tiempo de relajación es inverso a la frecuencia angular, un conjunto de datos de propiedades dinámicas en la escala de temperatura puede desplazarse a otra escala utilizando un factor de desplazamiento de la relación de frecuencias.

Relajación en la viscoelasticidad dinámica:

La capacidad de respuesta de los segmentos a las fuerzas mecánicas dinámicas externas está notablemente influenciado por las condiciones termodinámicas y la frecuencia de vibración en un material viscoelástico. La dependencia de la relajación dinámica de la temperatura y la frecuencia se describe brevemente aquí:

- Dependencia de la temperatura

Las grandes cadenas de un polímero de alto peso molecular tienen segmentos de diferentes tamaños. Su movimiento estará muy restringido a baja temperatura, cuando cese la agitación térmica. En la tensión dinámica, si la frecuencia de la tensión se mantiene constante, toda la muestra de polímero grande se comportaría como un cuerpo rígido por lo que el módulo de almacenamiento sería máximo y la pérdida sería mínima. Esta región de temperatura es la región vítrea. A medida

que la temperatura se incrementa gradualmente, primero los segmentos más pequeños comenzarán a moverse, ya que requieren menos energía en comparación con los grandes. Por lo tanto, bajo una fuerza dinámica, parte de la energía del estiramiento se perdería. Con el aumento de la temperatura, tanto el módulo de pérdida como el factor de pérdida crecerán. Al aumentar la temperatura, cada vez más segmentos de mayor tamaño se unirán al movimiento cooperativo y, a una temperatura determinada, la mayoría de los segmentos oscilarán a la frecuencia de la fuerza impuesta. En este punto, el módulo de almacenamiento caerá bruscamente y el módulo de pérdida experimentará un valor máximo. *Esta temperatura es la temperatura de α -relajación. Además, en este punto, el tiempo de relajación es justo el inverso de la frecuencia angular de la fuerza dinámica.* Aumentando aún más la temperatura, el movimiento de los segmentos será excesivamente más rápido que el período de tiempo impuesto, de modo que tanto el módulo de almacenamiento como la pérdida se reducirían al mínimo. Esta región más allá de la temperatura de transición es la meseta gomosa donde el módulo de almacenamiento y la pérdida son bajos. Más allá de la región gomosa, toda la molécula comenzaría a moverse una junto a la otra, va a fluir.

- Dependencia de la frecuencia

El comportamiento en la escala de frecuencias es justo el contrario. Si la temperatura se mantiene constante, a una frecuencia muy baja, los segmentos más grandes que tienen un gran tiempo de relajación responderían en la misma escala de tiempo que la periodicidad de la tensión, pero los más pequeños serían lo suficientemente rápidos como para que su contribución al módulo de almacenamiento o a la pérdida fuera despreciable. Por lo tanto, tanto el módulo de almacenamiento como la pérdida serían más chicos. Esto se asemeja a la meseta gomosa en el comportamiento dependiente de la temperatura. Con el aumento de la frecuencia, cada vez más segmentos van a coincidir con la escala de tiempo y los movimientos cooperativos darían lugar a un mayor módulo de almacenamiento y a una mayor pérdida también. A una frecuencia determinada, la mayoría de los segmentos se moverían con la misma escala de tiempo de periodicidad, por lo que el módulo de

almacenamiento crecería bruscamente y también la pérdida sería máxima. Esta frecuencia es la frecuencia de relajación α a esa temperatura concreta, y el tiempo de relajación es igual a la inversa de la frecuencia angular. Al aumentar más la frecuencia, los segmentos no podrán reaccionar con la escala de tiempo reducida y se van a comportar como segmentos rígidos, lo que provocará un módulo de almacenamiento más alto y una pérdida menor. Finalmente, a una frecuencia muy alta, todos los segmentos se comportan como elementos rígidos y el módulo de almacenamiento alcanzaría un valor máximo, y la pérdida sería despreciable. Esta región de frecuencia es la región vítrea.

La explicación anterior del comportamiento dinámico sugiere que el efecto de la temperatura es justo el contrario al de la frecuencia. Por ejemplo, el módulo de almacenamiento aumenta con la frecuencia y disminuye con la temperatura. El cambio de cualquier propiedad mecánica dinámica con la temperatura es idéntico al cambio con el logaritmo de la frecuencia. Sin embargo, en ambos casos, el material experimenta cuatro regiones de respuesta viscoelástica: (1) la región vítrea, en la que el módulo de almacenamiento es máximo; (2) la región de transición, en la que se producen cambios rápidos tanto en el módulo de almacenamiento como en la pérdida; (3) la meseta gomosa, en la que tanto el módulo de almacenamiento como la pérdida disminuyen hasta alcanzar el mínimo; y (4) la región de flujo (sólo para los polímeros lineales y no reticulados), en la que el módulo de almacenamiento se reduce hasta alcanzar el mínimo.

A.5. Diseño de sistemas de polímeros para amortiguación de vibraciones

A.5.1. Introducción

Tanto el factor de pérdida como el módulo dinámico están relacionados con el comportamiento de amortiguación de las vibraciones de un polímero. Para absorber al máximo una vibración determinada, el período de la vibración debe ser del mismo orden que el tiempo de relajación del polímero. El tiempo de relajación es el tiempo durante el cual el sistema polimérico se transforma de nuevo al equilibrio termodinámico desde el estado perturbado

provocado por una acción externa. Cuando el periodo de vibración es alto (la frecuencia de vibración es baja), en comparación con el tiempo de relajación de las macromoléculas, la energía de la vibración se distribuirá rápidamente por todo el volumen del polímero. En este caso, las pérdidas mecánicas no son grandes, y el polímero vuelve rápidamente a su estado original.

Cuando la frecuencia de vibración aumenta, una parte de las macromoléculas no tendrá tiempo de transmitir la energía a sus vecinas y la mayor parte de los segmentos serán rígidos. Cuando el periodo de vibración se hace del mismo orden de magnitud con el tiempo de relajación, la tangente de pérdida pasará por un máximo. Al aumentar la frecuencia, las pérdidas mecánicas disminuyen porque los segmentos tienen poco tiempo para transmitir su energía a los vecinos. Así, el amortiguamiento (factor de pérdida) aumenta con el aumento de la frecuencia, alcanza un máximo y disminuye a partir de entonces.

Se ha observado una variación similar cuando la amortiguación se representa en función de la temperatura. Sin embargo, el aumento de la frecuencia de los ciclos de fuerza tiene el efecto contrario al aumento de la temperatura. La temperatura correspondiente al máximo del pico del módulo de pérdida se denomina temperatura de relajación α y suele considerarse como temperatura de transición vítrea (T_g). Si la T_g de un polímero está muy por encima de la temperatura ambiente, se comporta como un sólido vítreo y se denomina "plástico". Cuando la T_g de un polímero es inferior a la temperatura ambiente, es blando y flexible. Estos polímeros se denominan cauchos o elastómeros (ligeramente reticulados). El cambio de propiedades en T_g puede explicarse considerando el movimiento de los segmentos. El volumen libre de un polímero aumenta con el incremento de la temperatura y llega a ser suficiente para el inicio del movimiento segmentario a T_g . Los segmentos del polímero, que están formados por un número de átomos de carbono de entre 8 y 50, se mueven manteniendo inalterada la distancia de extremo a extremo. Debido al movimiento localizado, los segmentos se comportan como un líquido viscoso, mientras que la molécula en su conjunto permanece sólida porque la movilidad está prohibida. Por lo tanto, bajo la influencia de una tensión aplicada, presenta las propiedades de un fluido viscoso así como de un sólido elástico y sufre una deformación viscoelástica. Cuando un polímero se somete a una fuerza periódicamente cambiante aplicada externamente, el segmento intentará reajustarse para reducir la tensión, ya que es capaz de ex-

perimentar un movimiento por encima de la T_g . Este fenómeno se denomina "proceso de relajación de tensiones".

En el caso de los polímeros vítreos (cuya T_g es muy superior a la temperatura de servicio), los segmentos permanecen congelados y la amortiguación es muy baja. Si la T_g está muy por debajo de la temperatura de servicio, la amortiguación es baja porque los segmentos moleculares se mueven libremente y, por tanto, hay poca resistencia al flujo. Sin embargo, *en la región de transición vítrea, la amortiguación es alta debido al inicio del movimiento micro-browniano de los segmentos de la cadena molecular y su relajación de la tensión. Cuando los segmentos comienzan a moverse, los otros segmentos se resisten al mismo y la energía se disipa debido a la fricción interna.*

A.5.2. Transición vítrea de los polímeros

La temperatura de transición vítrea (T_g) es una medida de la flexibilidad de un polímero. La propiedad de amortiguación y la T_g de un termoplástico dependen de la estructura química, la interacción molecular y la cristalinidad del polímero.

Algunos factores que modifican la T_g de un polímero son:

- La T_g aumenta con el incremento de la interacción molecular, que también está controlada por la química del polímero .
- La presencia de grupos colgantes rígidos y voluminosos también aumenta la T_g de un polímero.
- Los polímeros simétricos muestran una T_g más baja en comparación con los polímeros asimétricos.
- La T_g de un polímero tiende a disminuir con el aumento de la longitud de la ramificación
- En el caso de una red termoestable, la T_g depende de la química de la resina y del reticulante, así como de la densidad de los enlaces cruzados.
- Al aumentar las funcionalidades de la resina epoxi, la densidad de los enlaces cruzados puede incrementarse y, por tanto, la T_g puede aumentar considerablemente.

La variación de la funcionalidad y de la longitud de la cadena desempeña, por tanto, un papel muy importante en la adaptación del polímero termoestable a una amplia gama de materiales para su aplicación en la amortiguación de vibraciones. Mientras que una resina epoxi bifuncional de cadena larga puede utilizarse para obtener un epoxi altamente amortiguador, una variedad de cadena más corta puede utilizarse para la aplicación de amortiguación a media y alta temperatura sin comprometer la creep, la deformación permanente o el fallo mecánico.

Apéndice B

Análisis de marcha

En el presente apéndice se introducen los conceptos sobre la cinemática y dinámica de la marcha. Se explica cuales son las fases de apoyo plantar, la cinemática de la marcha en caminata y cuando se realiza actividad física, como correr o saltar.

B.1. Estudio de la marcha normal (Caminata)

La locomoción bípeda es una de las características del hombre que lo diferencia del resto del reino animal. La marcha es un proceso que cada persona aprende y no es de extrañar que cada una muestre en su desarrollo unas características propias. Por ello se puede reconocer a distancia a una persona por su manera de caminar. Estas características personales vienen dadas por múltiples factores: de una persona a la otra pueden diferir la longitud de los segmentos del cuerpo o la masa de cada uno de ellos; por otro lado estos segmentos deben ser puestos en movimiento por fibras musculares que también pueden ser de diferente longitud o grosor. Cuando se estudia la marcha de diferentes individuos se observa que desaparecen las características personales y aparecen elementos comunes.

B.1.1. Tiempos de marcha

Según Viladot [14], durante la caminata se pueden distinguir los siguientes tiempos (fig B.1):

1. Primer doble apoyo: Se caracteriza porque los dos pies contactan con

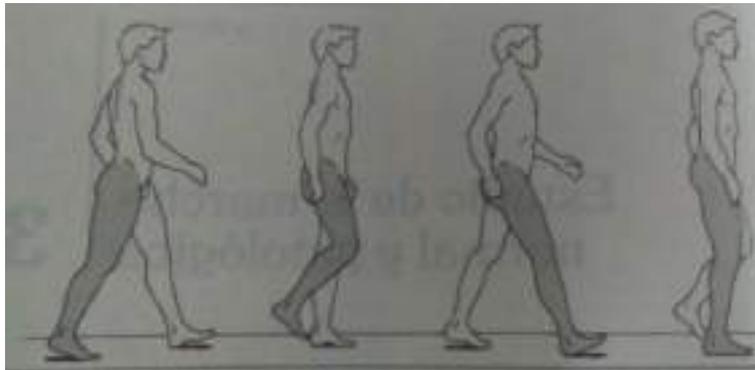


Figura B.1: Esquemática de los tiempos de marcha normales [14]

el suelo. Uno está iniciando el contacto con el talón mientras que el otro, próximo a la fase de despegue, se apoya por la cabeza del primer metatarsiano y el pulpejo del dedo gordo.

2. Primer apoyo unilateral: El peso del cuerpo recae en una sola extremidad.
3. Segundo doble apoyo: Es simétrico al primer doble apoyo, pero aquí el pie que antes despegaba es el que ahora contacta con el talón finalizando su periodo de oscilación.
4. Segundo apoyo unilateral: Es simétrico al segundo tiempo pero con los pies cambiados.

B.1.2. Fases de apoyo plantar durante caminata

Clásicamente se aceptaba que el pie en contacto con el suelo se apoyaba en 4 fases sucesivas que eran las siguientes (Figura B.2):

- a. Choque de talón.
- b. Apoyo talón, borde externo y antepié.
- c. Apoyo de antepié.
- d. Despegue del antepié, finalizando por el dedo gordo.



Figura B.2: Fases de apoyo plantar clásicas [14].



Figura B.3: Fases de apoyo plantar descritos por Lelievre [14]

Si bien esta es la forma más simple, sólo ocurre en el 30 % de los individuos. En el 70 % restante, el desarrollo del paso tiene lugar en la forma descrita por Lelievre (Figura B.3):

- a. Choque de talón.
- b. Apoyo talón y antepié.
- c. Apoyo talón, antepié y apoyo fugaz del borde externo.
- d. Apoyo de antepié.
- e. Despegue del antepié, finalizando por el dedo gordo.

B.1.3. Dinámica de la marcha normal

Durante la marcha, se necesita un punto fijo externo al cuerpo sobre el que se pueden aplicar las diferentes fuerzas ejercidas. En la locomoción este

punto fijo es el suelo. Viladot [14] identifica 4 fuerzas importantes durante la marcha:

- Fuerza de reacción vertical: Esta fuerza traduce los desplazamientos verticales del centro de gravedad. En el choque de talón cuando el cuerpo es impulsado hacia arriba para pasar por encima de la pierna que apoya, aumenta la fuerza de reacción del suelo. Cuando la extremidad despegar, impulsando el cuerpo hacia arriba y adelante, aparece el segundo pico de la curva, como se puede ver en la figura B.4.

De estos datos se puede deducir que la energía potencial del cuerpo, que es igual al peso del mismo por la altura a la que se encuentra su centro de gravedad, alcanza su valor máximo en el momento de máxima elevación. Al descender el cuerpo esta energía se convierte en cinética que es empleada para acelerar el cuerpo hacia adelante, y a su vez, se convertirá en potencial en la siguiente elevación del cuerpo.

- Fuerza de reacción longitudinal: Traduce las fuerzas de frenado y empuje. En el momento del choque de talón producimos una fuerza de frenado, mientras que en el momento del despegue producimos una fuerza de empuje hacia adelante. Ambas fuerzas son mucho menores que la fuerza vertical. Figura B.5.
- Fuerza de reacción lateral: Esta fuerza, que como se puede ver en la figura B.6 es de muy baja intensidad, traduce los desplazamientos laterales del centro de gravedad.
- Fuerza de torsión: El pie ejerce sobre el suelo una fuerza de torsión que es la traducción del movimiento de rotación de la extremidad inferior durante la marcha. Figura B.7.

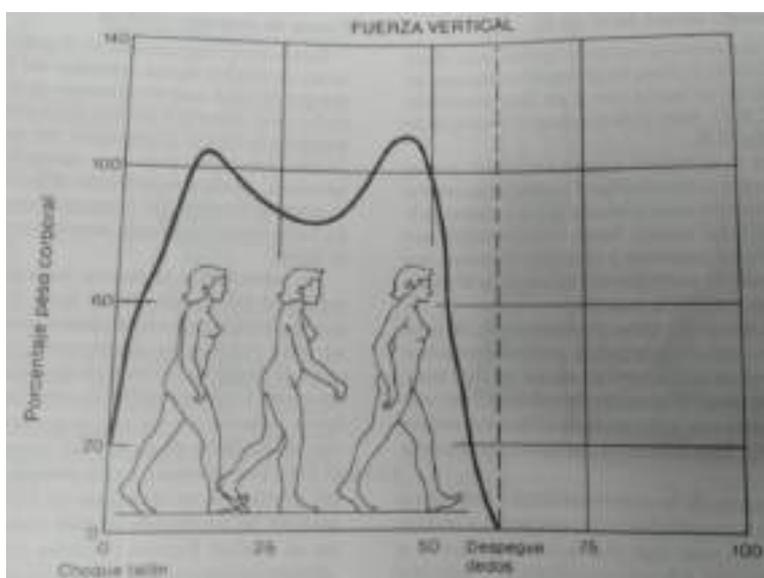


Figura B.4: Fuerza de reacción vertical [14].

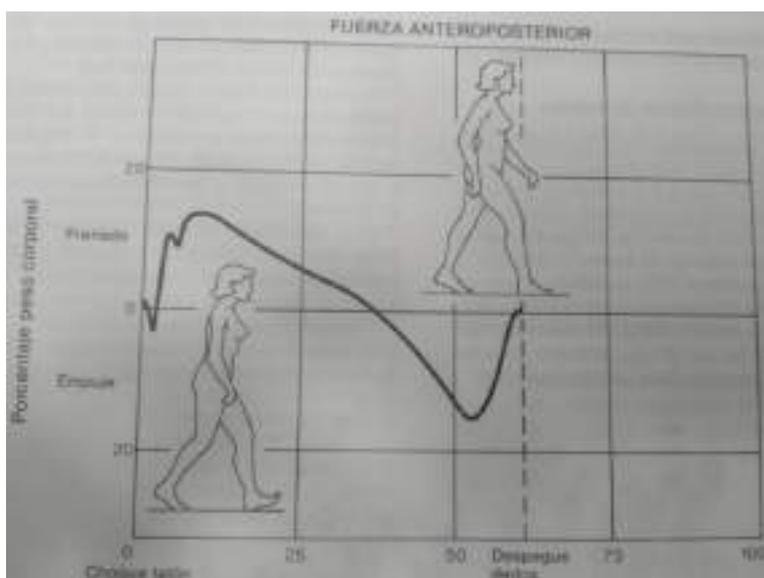


Figura B.5: Fuerza de reacción longitudinal [14]

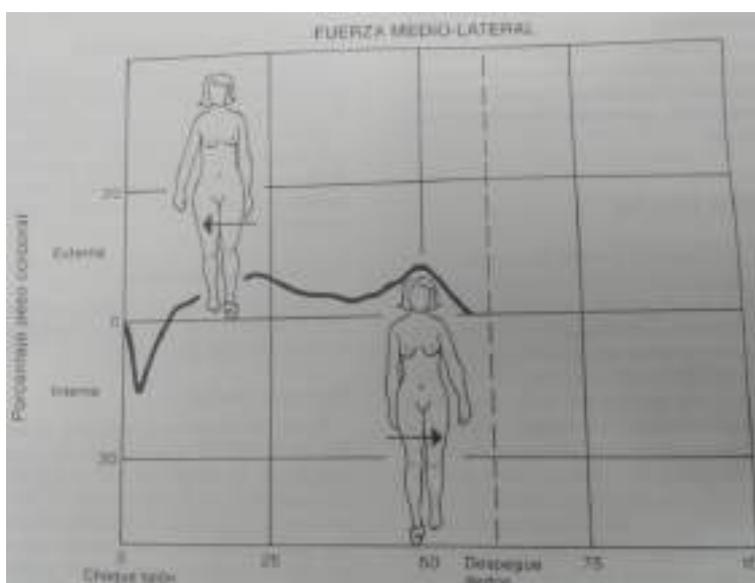


Figura B.6: Fuerza de reacción lateral [14]

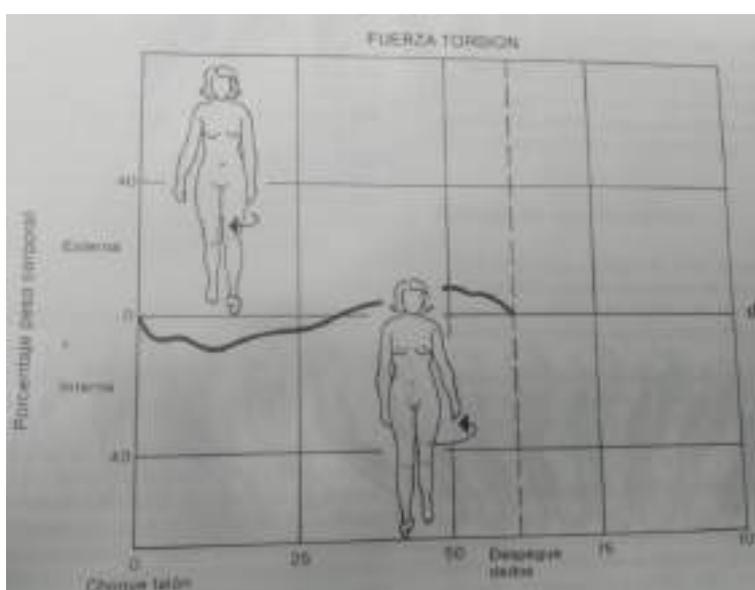
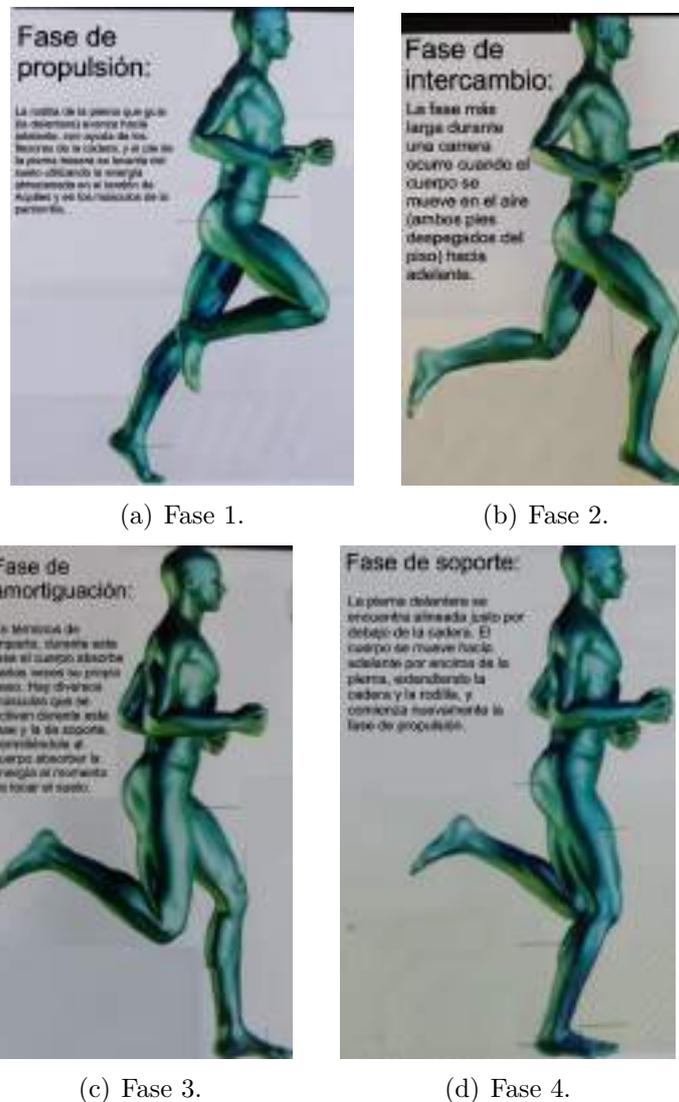


Figura B.7: Fuerza de torsión [14]

B.2. Estudio de la marcha durante la carrera

Según Farrow [13], la acción de correr combina energía cinética con energía potencial. El ciclo de una carrera puede dividirse en dos fases principales: la

fase aérea y la fase de postura, y estas se pueden subdividir, a su vez, en cuatro fases: propulsión, intercambio, amortiguación y soporte. La fase aérea, en la cual ninguno de los pies está en contacto con el piso, es la más larga de todas. Durante la fase de postura, el cuerpo absorbe energía del piso, almacenando en tendones y músculos elásticos para propulsar el cuerpo hacia adelante. En la figura B.8 se ilustran las cuatro fases.



(a) Fase 1.

(b) Fase 2.

(c) Fase 3.

(d) Fase 4.

Figura B.8: Ciclos del movimiento de una carrera.[13]

B.2.1. Mecánica de las pisadas de aterrizaje

Lo que constituye una buena pisada de aterrizaje sigue siendo un tema de mucho debate y poca información. Tanto la velocidad como la distancia influyen en el tipo de pisada. Sin embargo, es importante que el aterrizaje del pie en el suelo sea suave y que la zancada no sea forzada, sin importar el tipo de pisada.

En la figura B.9 se puede ver los 2 tipos de pisada que se analizan en este proyecto final. Estas son:

- Neutra (fig. B.9(a)): En esta pisada de aterrizaje, la fuerza de impacto recae en el centro del metatarso y el talón casi simultáneamente, con el pie aterrizando paralelo al piso. El arco del pie se llena de energía.
- Aterrizaje con el talón (fig. B.9(b)): El pie aterriza primero con la parte externa del talón, después con el arco rota hacia el frente y finalmente los dedos tocan el piso. Este tipo de pisada de aterrizaje tiene dos puntos de impacto: se considera que el primero actúa como una fuerza de ruptura, disminuyendo la velocidad. La mayoría de los corredores de largas distancias a una velocidad baja tienen este tipo de pisada de aterrizaje.



(a) Aterrizaje neutro.



(b) Aterrizaje con el talón.

Figura B.9: Mecánica de las pisadas de aterrizaje.[13]

Una buena pisada aterriza un poco delante del centro de gravedad del cuerpo, con el pie derecho y dirigido hacia el frente. La pisada puede afectar la postura general y la alineación del cuerpo de un corredor, así como el transporte de energía a través de la cadena cinética. Un ligero nivel de pronación (rotación del pie hacia adentro) o de supinación (rotación del pie hacia afuera) es normal.

Si hay sobrepronación (fig. B.10(c)), el pie se inclina hacia adentro del cuerpo, transfiriendo la energía del aterrizaje dentro del pie y al tobillo. Esto puede causar tensión adicional en la sección media de la rodilla. Además, los rotadores de cadera se mueven y desestabilizan el núcleo.

Por otro lado, si hay sobresupinación (fig. B.10(b)), el pie rota hacia fuera, transfiriendo la energía a través de la parte exterior de la rodilla. Debido a la falta de pronación el mecanismo neutral de amortiguación de un corredor se ve comprometido.

La pisada correcta es la pisada neutra, (fig. B.10(a)), donde la presión se distribuye de manera uniforme a través de la planta del pie y los cinco dedos sirven como impulsores. La transferencia de energía es más eficiente y el núcleo del cuerpo y cadera se mantienen alineados.

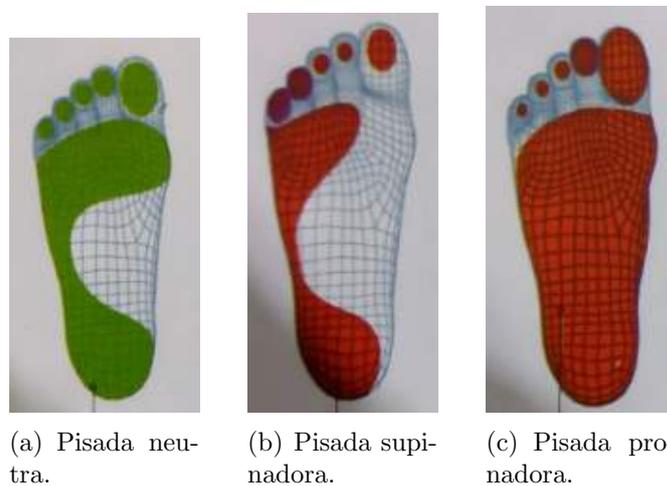


Figura B.10: Tipos de pisadas.[13]

B.2.2. Dinámica de la carrera

La fuerza vertical de reacción al suelo, (VGRF) por sus siglas en inglés, es un factor importante en el análisis del movimiento humano en el deporte,

especialmente durante la carrera. Es más del doble del peso corporal de una persona y mucho mayor que las fuerzas de reacción horizontal y lateral del suelo.

Jie-han [2] realizó un estudio para medir la VGRF indirectamente. El estudio consistió en utilizar a 7 sujetos masculinos sanos (edad: $21,3 \pm 0,5$ años; altura: $174,9 \pm 6,6$ cm; peso: $63 \pm 6,1$ kg) para que corran en una cinta de correr. En primer lugar, los participantes debían caminar a una velocidad de 4 km/h durante un minuto. A continuación, se aumentó la velocidad de la cinta rodante a 8, 9 y 10 km/h durante un minuto cada uno. Por último, los participantes caminaron a 4 km/h durante otro minuto antes de detenerse. El registro del sensor inercial y de la cinta de correr se sincronizó mediante un disparador externo. Luego se utilizaron redes neuronales para ajustar los parámetros leídos de los datos del acelerómetro uniaxial con los registros triaxiales de las celdas de carga. En este estudio sólo se recogió el VGRF del pie derecho. La magnitud del VGRF también se normalizó con respecto al peso corporal del sujeto (BW). Los resultados se pueden ver en la figura B.11.

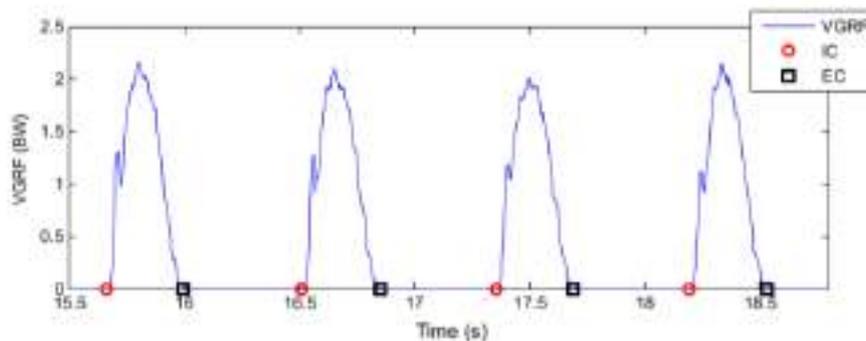


Figura B.11: Fuerza de reacción vertical medida a través de una cinta de correr equipada con placas de fuerza [2].

Apéndice C

Presentación de ensayos realizados

En este apéndice se presentan los ensayos experimentales sobre el paciente durante distintas actividades. Esto sirve para realizar estimaciones sobre la fuerza de impacto que recibe el tobillo durante distintas actividades y poder identificar el límite que permite que el sujeto no sienta dolor.

C.0.1. Medición de la aceleración con un acelerómetro

La aceleración es un cambio de velocidad con respecto al tiempo. Los acelerómetros son transductores que representan la aceleración como una tensión. Se especifican por el rango, la respuesta en frecuencia y la sensibilidad del dispositivo.

Existen dos tipos de acelerómetros axiales. El acelerómetro más común mide la aceleración a lo largo de un solo eje. El segundo tipo es un acelerómetro triaxial, que puede crear un vector de aceleración en 3D.

Ambos tipos de acelerómetros pueden ser sensores pasivos o activos. Para medir la aceleración con un sensor pasivo, el sensor debe estar conectado a un amplificador sensible a la carga. El acelerómetro activo es casi idéntico al pasivo, con la adición de un amplificador sensible a la carga integrado en el acelerómetro.

En este proyecto final se utilizaron dos acelerómetros axiales, dispuestos a 90 grados para medir la variación de aceleración en los dos ejes, figura C.1.



Figura C.1: Disposición de los acelerómetros axiales para realizar las mediciones.

En qué consiste el ensayo

Como solo se dispone de dos acelerómetros axiales, obtener datos precisos de actividades como caminar o trotar, ya sea en una cinta de correr o desplazándose, se dificulta. Esto se debe a que estos instrumentos hay que fijarlos al tobillo del paciente. Cuando se realiza cualquier tipo de marcha, la parte inferior rota respecto de la rodilla y de la cadera, es decir, el sistema de ejes que va a estar midiendo la aceleración va a estar rotando por lo que los resultados no serían correctos. Este problema se resuelve planteando una analogía entre el trote y un salto, igualando el impulso que se realiza en ambas actividades. Para ver este desarrollo se puede ir a la sección 2.1.

Para minimizar el movimiento relativo entre el tobillo y los acelerómetros, mediante cinta adhesiva se fijó el instrumento de medida al pie izquierdo del paciente, como se puede ver en la figura C.2.

Luego se realizaron tres ensayos:

- Ensayo 1: Caída libre desde distintas alturas, con un mismo calzado.
- Ensayo 2: Caída libre desde la misma altura, con diferentes calzados.
- Ensayo 3: Caminata en el lugar, sin calzado.



Figura C.2: Acelerómetros axiales, a 90 grados, fijados mediante cinta adhesiva al pie izquierdo del paciente.

Instrumental y software utilizado

Se utilizó instrumental y software National Instruments provistos por el Laboratorio de Mecánica Experimental (LabMEX) con los cuales se registraron las señales de los acelerómetros prestados por el Grupo Mecánica de Materiales. El software es una plataforma de desarrollo de aplicaciones para la adquisición y procesamiento de datos experimentales en un entorno visual tipo dataflow. Con esta plataforma se utilizó un programa que comanda el módulo de adquisición National Instruments NI-SCXI-1000, fig C.3, el cual gestiona la conexión con el hardware y luego guarda a disco los datos de aceleración registrados por los acelerómetros. En la figura C.5 se puede ver que los datos que se extrajeron se los tuvo que multiplicar por un factor de 9,857 debido a la escala que utiliza. En la figura C.4 se puede ver el diagrama en bloques mediante el cual se obtienen los datos.



Figura C.3: Equipo NI-SCXI-1000 provisto por el Laboratorio de Mecánica Experimental (LabMEX).

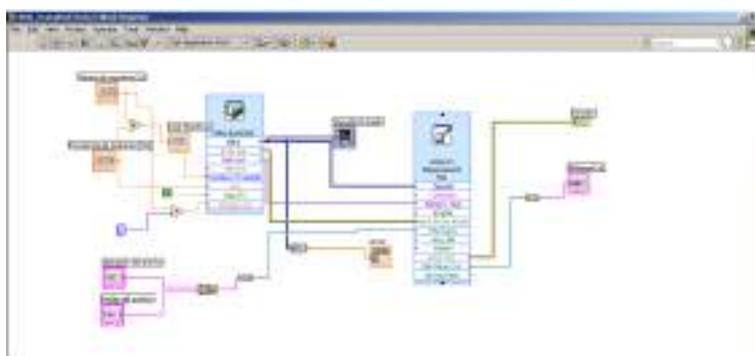


Figura C.4: Diagrama en bloques que utiliza el programa para obtener los resultados.

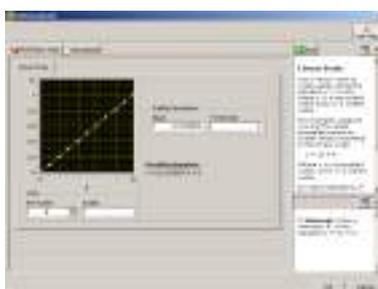


Figura C.5: Escala del programa utilizado.



Figura C.6: Paciente con el equipo instalado para realizar el ensayo 1.

C.1. Ensayo 1: Caída libre desde distintas alturas, con un mismo calzado.

El objetivo de este ensayo es analizar la influencia de la altura sobre el impacto en el tobillo del paciente y para comparar con los resultados obtenidos en la sección 2.1. En esa sección se llega a que la altura equivalente es de aproximadamente 23 cm. Hay que tener en cuenta que se está suponiendo que el choque sería perfectamente elástico, lo cual no es así. Al final de este ensayo se va a poder definir verdaderamente una altura equivalente, experimental, comparable con realizar un trote. En la figura C.6 se observa al paciente durante la realización del ensayo.

En este ensayo se procedió con dejar caer al sujeto desde las alturas de 13, 18, 30, 43 y 62 cm, figura C.7. El mismo se realizó con zapatillas especiales para hacer deporte y con plantillas ortopédicas. Para las primeras 3 alturas, el sujeto cayó seis veces y para las últimas 2, tres. Luego, se obtuvo la media y el error del conjunto de mediciones.



(a) Caída desde 13 cm.



(b) Caída desde 18 cm



(c) Caída desde 30 cm.



(d) Caída desde 43 cm.



(e) Caída desde 62 cm.

Figura C.7: Imágenes durante el ensayo 1.

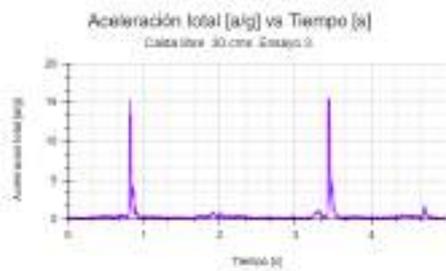
En la figura C.8, se puede ver algunos de los resultados de los ensayos. Para las primeras 3, como las alturas eran menores, permitía al paciente volver a realizar un salto en esa misma prueba.



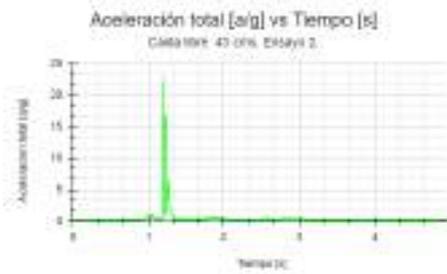
(a) Caída desde 13 cm.



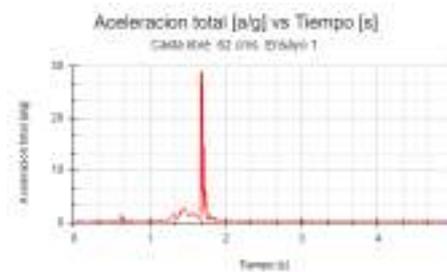
(b) Caída desde 18 cm.



(c) Caída desde 30 cm.



(d) Caída desde 43 cm.



(e) Caída desde 62 cm.

Figura C.8: Resultados de una prueba para cada caso a modo de ejemplo.

Altura [cm]	Pico de aceleración [a/g]	$\pm\Delta Ac$ [a/g]
13	9.90	1.30
18	15.13	2.63
30	15.51	0.80
43	20.64	3.06
62	29.77	1.15

Cuadro C.1: Media y dispersión de las mediciones realizadas durante el ensayo.

En la tabla C.1 se presenta el análisis estadístico realizado para las muestras tomadas. Se obtuvo el promedio del pico de aceleración obtenido para cada altura analizada y el error asociado.

En la figura C.9 se grafica el promedio del pico de aceleración en función de la altura de caída. Se puede ver como va aumentando a medida que aumenta la altura. El cambio de pendiente en 30 cm que se observa se puede atribuir a la manera de caer.

Entre los 18 y los 30 cm se encuentra el rango de valores que se puede tomar como válido como para hacer una comparación con el trote; similar a los resultados obtenidos en la sección anterior. Se puede ver que en este intervalo el pico de aceleración que se midió experimentalmente se encuentra en el mismo valor, 15 a/g. Teniendo en cuenta la experiencia del paciente, el salto realizado desde 18 cm de altura fue el más cercano al trote, por lo que será utilizado como referencia para el cálculo utilizando modelos matemáticos.

C.2. Ensayo 2: Caída libre desde la misma altura, con diferentes calzados.

El objetivo de este ensayo es analizar la influencia del calzado sobre el impacto en el tobillo. Se utilizaron los mismos elementos que en el ensayo anterior. Se realizó para una altura de 18 cm. Los calzados utilizados se pueden ver en la figura C.10.

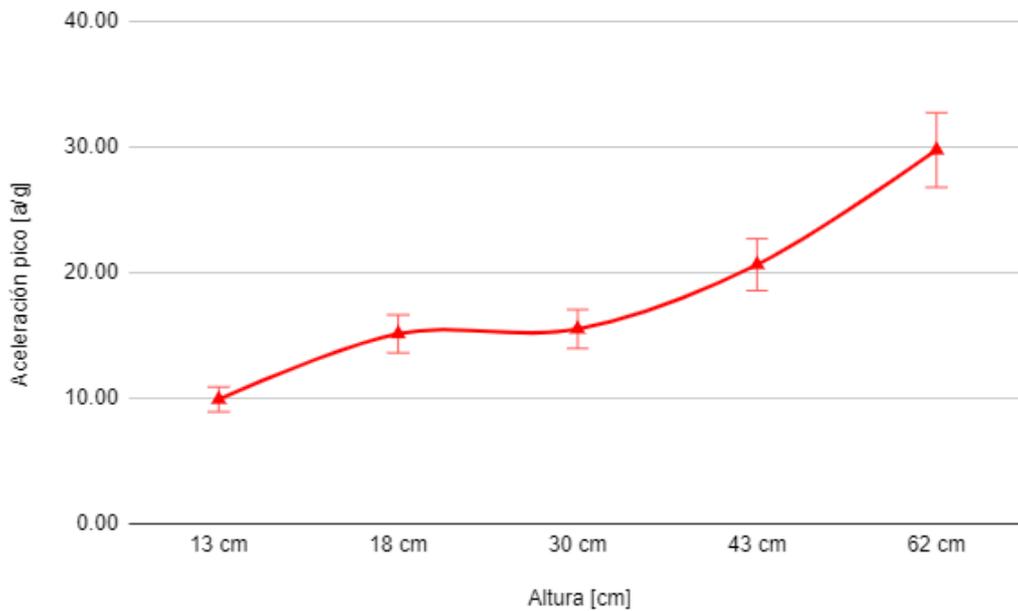


Figura C.9: Variación de aceleración en el tobillo, a partir de una caída libre a distintas alturas, con zapatillas especiales para hacer deporte y con plantillas ortopédicas.



(a) Zapatilla y plantilla ortopédica.



(b) Alpargatas.



(c) Crocs.



(d) Sin calzado.

Figura C.10: Calzados utilizados en el desarrollo del ensayo 2.

En la figura C.11, se pueden ver algunos de los resultados de los ensayos.

En la tabla C.2 se resume el análisis estadístico realizado.

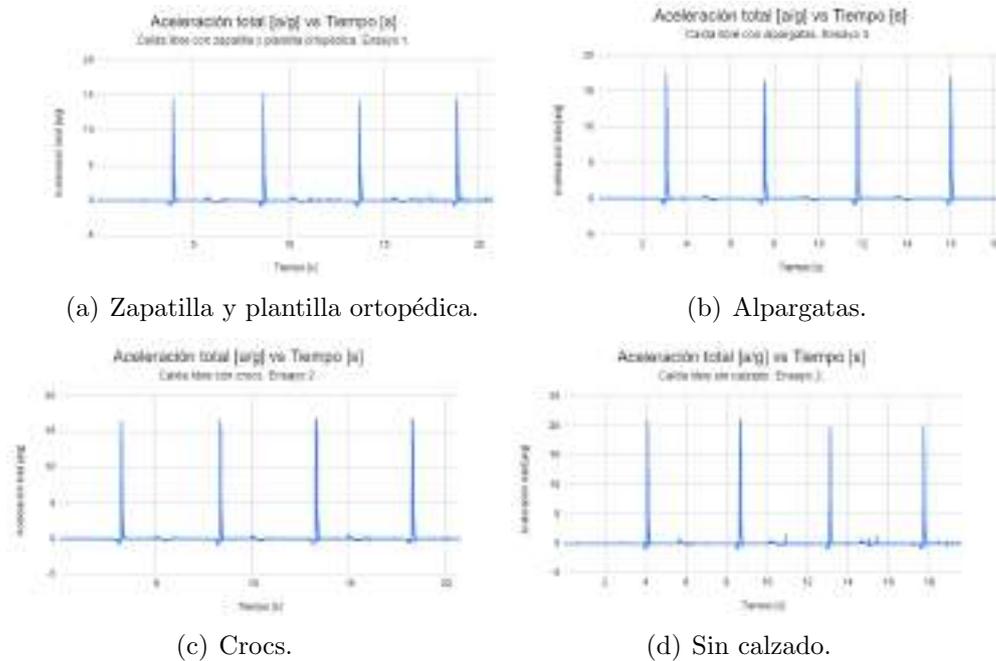


Figura C.11: Resultados de una prueba para cada caso a modo de ejemplo.

Tipo de calzado	Pico de aceleración [a/g]	$\pm\Delta Ac$ [a/g]
Zapatilla para correr con plantilla ortopédica.	14.79	0.51
Alpargatas.	17.01	0.41
Crocs.	16.64	0.31
Sin calzado.	19.65	0.63

Cuadro C.2: Media y dispersión de las mediciones realizadas durante el ensayo.

Haciendo un resumen de los resultados y graficando (figura C.12) se puede ver que con unas zapatillas para correr y plantilla ortopédica se logra reducir el impacto un 25% respecto a realizar la misma acción descalzo. Además se puede concluir que la variación del calzado influye directamente en la variación de aceleración que sufre el tobillo al realizar actividad física.

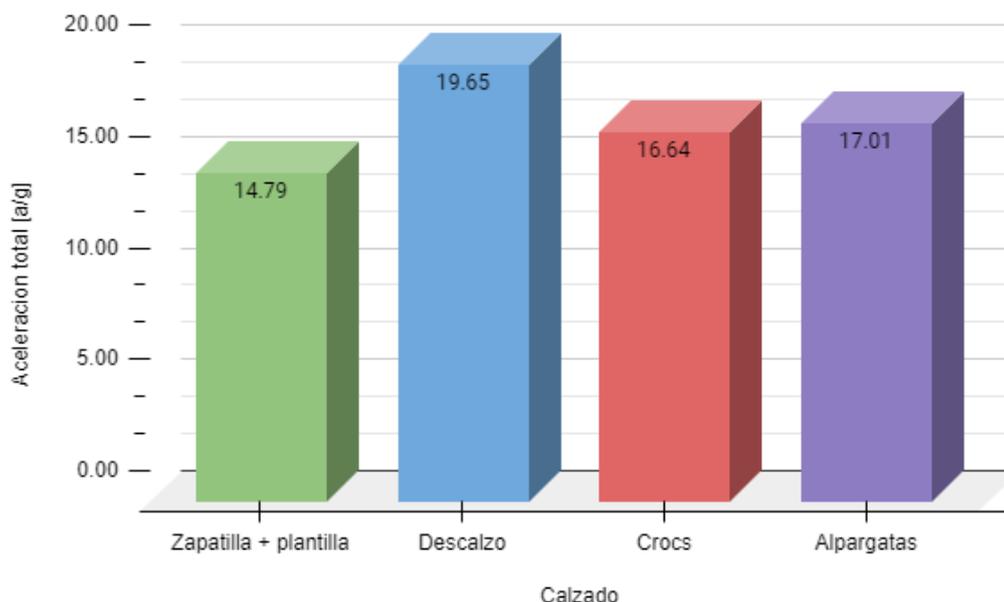


Figura C.12: Variación de aceleración en el tobillo, a partir de una caída libre a 18 cm, con distintos calzados.

C.3. Ensayo 3: Caminata en el lugar, sin calzado.

Este ensayo se realizó con el fin de poder conocer la máxima aceleración tolerable en el tobillo del paciente. Se sabe que una caminata, con calzado o sin él, no genera dolor ni molestias en el sujeto. Este ensayo es el de mayor subjetividad y a la vez el más importante ya que a partir de él se fija la máxima aceleración mediante la cual se va a diseñar el dispositivo ortésico. El mismo consiste en fijar los acelerómetros axiales, a 90 grados, al tobillo del paciente y que este camine en el lugar.

Se realizó sin amortiguación externa, es decir, sin calzado, para poder medir la máxima aceleración que se puede generar en el momento de impacto durante la caminata sin que se vea atenuada por algún dispositivo. En la figura C.13 se pueden observar los intentos realizados. El resumen del análisis estadístico asociado se muestra en la tabla C.3. Se puede ver el promedio del pico de aceleración obtenido.

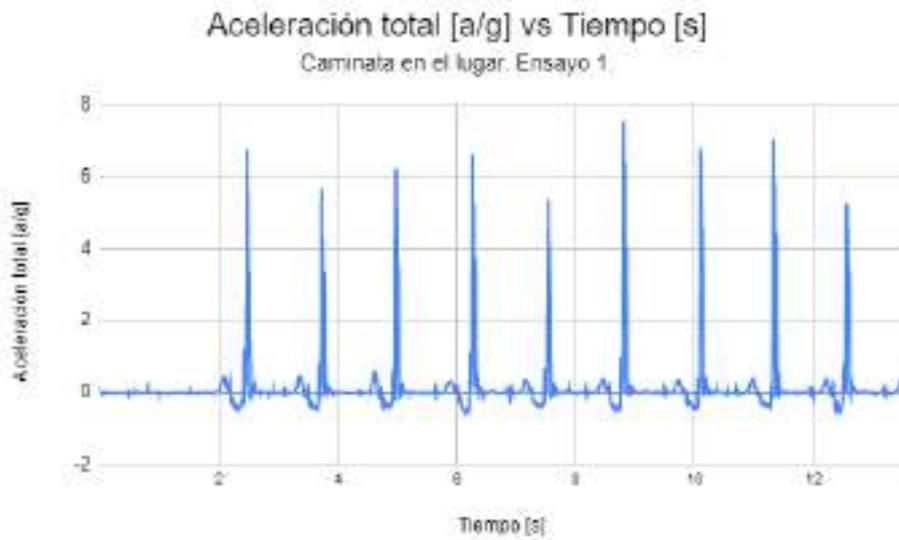


Figura C.13: Resultados de una de las pruebas a modo de ejemplo.

Tipo de calzado	Pico de aceleración [a/g]	$\pm\Delta A_c$ [a/g]
Sin calzado.	6.33	0.68

Cuadro C.3: Media y dispersión de las mediciones realizadas durante el ensayo.

Esto sirve para obtener un valor experimental, empírico, de hasta cuánto se debería disminuir esa variación de aceleración durante el trote en el tobillo para evitar dolor y molestias. Debido a que la dinámica de la caminata podría implicar aceleraciones mayores, y la dificultad para medirla con las herramientas disponibles, se considera que el límite permisible que no genera dolor es un 30% mayor al pico que se midió en estas condiciones, es decir, de **10 a/g**.

Apéndice D

Materiales a evaluar

Se realizó una revisión bibliográfica para obtener ensayos DMA de elastómeros comerciales que posiblemente se adapten a lo que se está buscando. A continuación se muestra cada uno de ellos.

D.1. Sorbothane

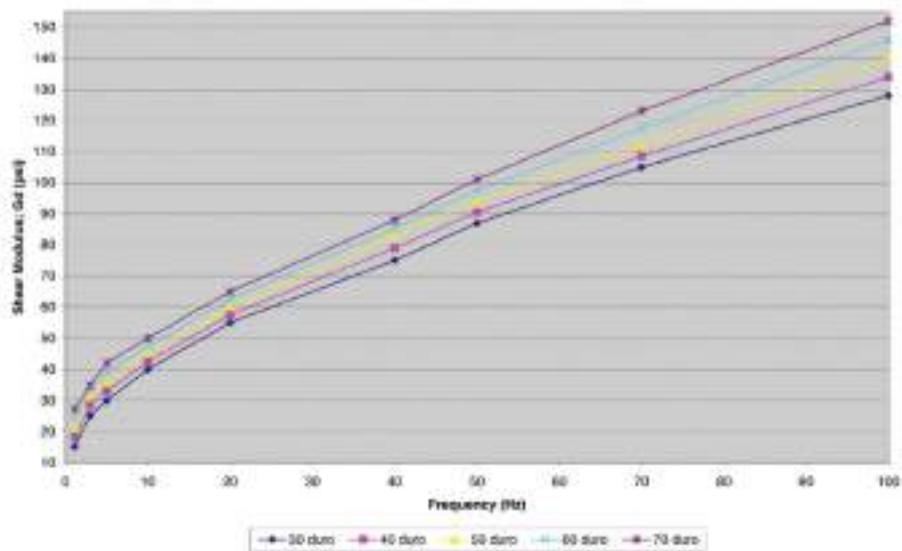
Sorbothane es la marca de un polímero de uretano viscoelástico sintético que se utiliza como amortiguador de impactos y amortiguador de vibraciones. El material combina algunas de las propiedades del caucho, la silicona y otros polímeros elásticos. Se considera un buen material amortiguador de vibraciones, un aislante acústico y muy duradero. Esta marca ofrece el material con distintos grados de dureza.

Los ensayos DMA obtenidos fueron realizados a temperatura ambiente, figura D.1.

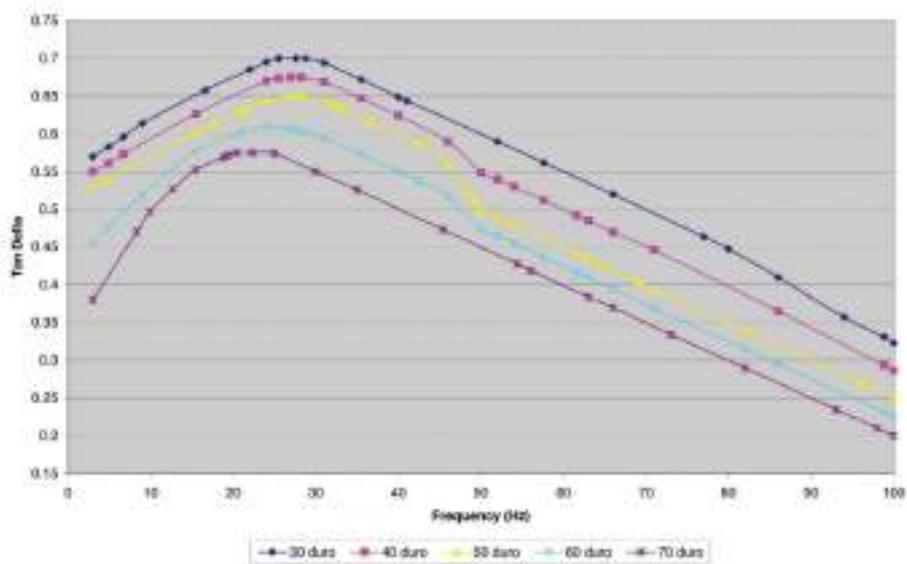
D.2. Caucho de cloropreno (CR)

Posee una amplia variedad de aplicaciones, como aparatos ortopédicos (muñeca, rodilla, etc.), aislamiento eléctrico, líquidos y hojas o membranas elastoméricas, tapajuntas y correas de ventilador del automóvil, entre otras.

El ensayo DMA se realizó en el modo multifrecuencia entre 1 Hz y 10 Hz a una velocidad de calentamiento de 2 K/min. En la figura D.2 se puede ver que se realizó el ensayo para 2 tipos de CR. Cr vulcanizado (curva negra) y sin vulcanizar (curva roja).



(a) Frecuencia vs G.



(b) Frecuencia vs $\tan \delta$.

Figura D.1: Ensayo DMA realizado para el Sorbothane.[15]

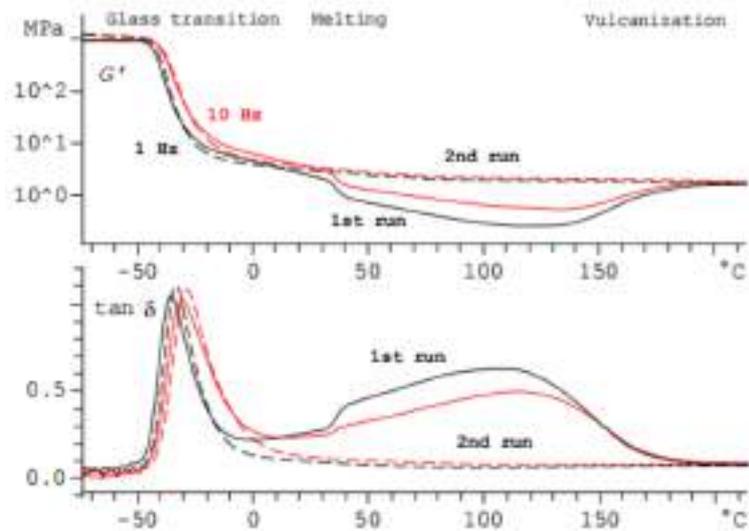


Figura D.2: Ensayo DMA realizado para CR vulcanizado y sin vulcanizar. Módulo de almacenamiento vs T [C] y $\tan \delta$ vs T [C]. [16]

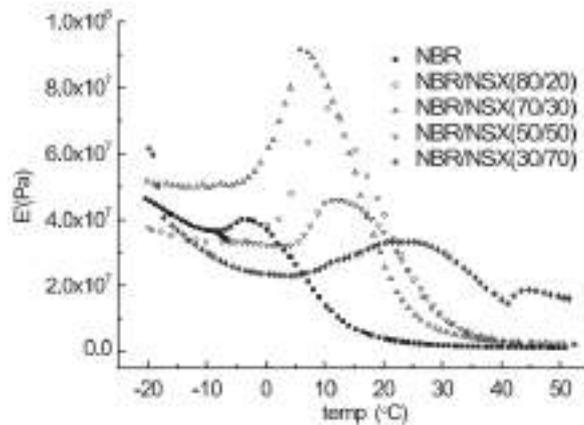
D.3. Caucho de nitrilo (NBR)

Es un copolímero de caucho sintético de acrilonitrilo (ACN) y butadieno. La capacidad del NBR para soportar un rango de temperaturas de -40 a 108 grados Celsius lo convierte en un material ideal para aplicaciones aeronáuticas. El nitrilo butadieno también se utiliza para crear artículos moldeados, calzado, adhesivos, selladores, esponjas, espumas expandidas y alfombras para el suelo.

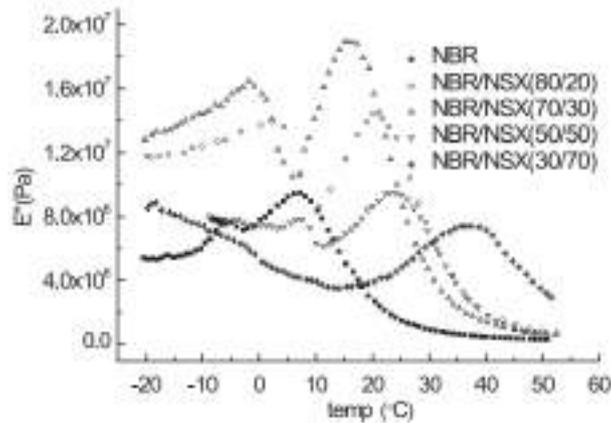
El ensayo DMA que se obtuvo en la bibliografía, figura D.3, se realizó con una frecuencia fija de 1.5 Hz a una velocidad de calentamiento de 3 K/min. Se puede ver que se realizó para distintas mezclas de NBR con Norsorex. Este proyecto final se centrará únicamente en las curvas pertenecientes al NBR.

D.4. Poliuretano

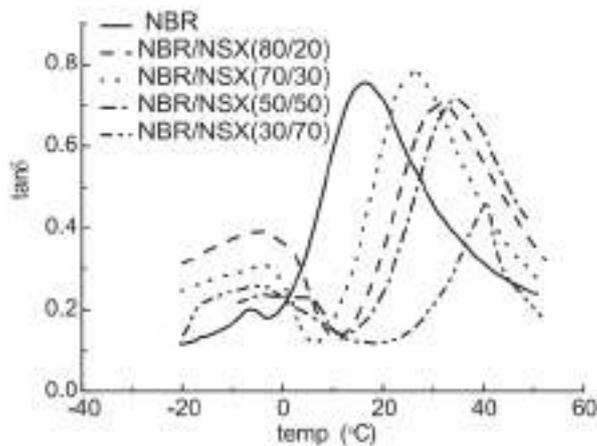
El poliuretano (PUR) es un polímero que se obtiene de bases hidroxílicas combinadas con diisocianatos. Los poliuretanos se clasifican en dos grupos, definidos por su estructura química, diferenciados por su comportamiento frente a la temperatura. De esta manera pueden ser de dos tipos: Poliuretanos termoestables o Poliuretanos termoplásticos. Los poliuretanos termo-



(a) Módulo de almacenamiento, E' , vs Temperatura.



(b) Modulo de pérdida, E'' , vs Temperatura.



(c) $\text{Tan } \delta$ vs Temperatura.

Figura D.3: Ensayo DMA realizado para el caucho de nitrilo (NBR).[17]

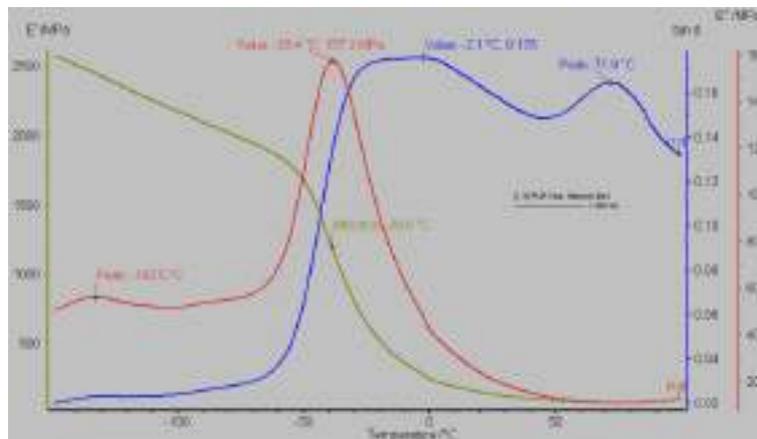


Figura D.4: Ensayo DMA realizado para el PUR.[18]

tables más habituales son espumas, muy utilizadas como aislantes térmicos, y como espumas resilientes. Entre los poliuretanos termoplásticos más habituales se destacan los empleados en elastómeros, adhesivos selladores de alto rendimiento, suelas de calado, pinturas, fibras textiles, sellantes, embalajes, componentes de automóvil, entre otras.

El ensayo DMA de la figura D.4 fue realizado a 1 Hz y a una velocidad de calentamiento de 2 K/min.

D.5. Silicona

La silicona es un polímero inodoro e incoloro hecho principalmente de silicio. Pueden ser elastómeros y aceites lubricantes. Algunas características pueden ser: es resistente a temperaturas extremas (-60 a 250 grados Celsius), resistente a la intemperie, ozono, radiación y humedad, excelentes propiedades eléctricas como aislador, gran resistencia a la deformación por compresión, entre otras.

En la figura D.5 se puede ver el ensayo DMA obtenido para silicona sin vulcanizar. La medición se realizó a 1 Hz y una velocidad de calentamiento de 2 K/min.

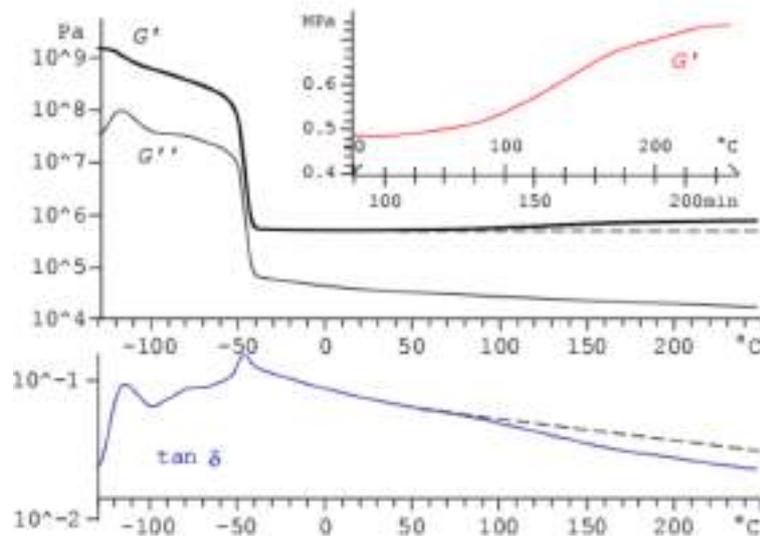


Figura D.5: Ensayo DMA realizado para silicona.[16]

D.6. Caucho butílico

El caucho butílico es impermeable al aire y se utiliza en muchas aplicaciones que requieren una estanqueidad de caucho. Se utiliza en la fabricación de adhesivos, productos químicos agrícolas, compuestos de fibra óptica, cámaras pelota, masillas y selladores, film transparente, los fluidos eléctricos, lubricantes, papel y pulpa, productos de cuidado personal, pigmentos concentrados, modificación de caucho y polímeros, para proteger y sellar ciertos equipos para su uso en áreas donde las agentes químicos están presentes, aditivo para la gasolina y el combustible diésel e incluso en la goma de mascar.

El ensayo DMA obtenido se puede ver en la figura D.6. Se trata de el caucho butílico SOPP, de alta amortiguación. El ensayo fue realizado a 1 Hz y una velocidad de calentamiento de 2 K/min.

D.7. Poly (ethyl acrylate) (PEA)

Para el ensayo DMA que se ve en la figura D.8 fue utilizado el material PEA-co-IP. El mismo fue realizado para distintas frecuencias y una velocidad de calentamiento de 2 K/min.

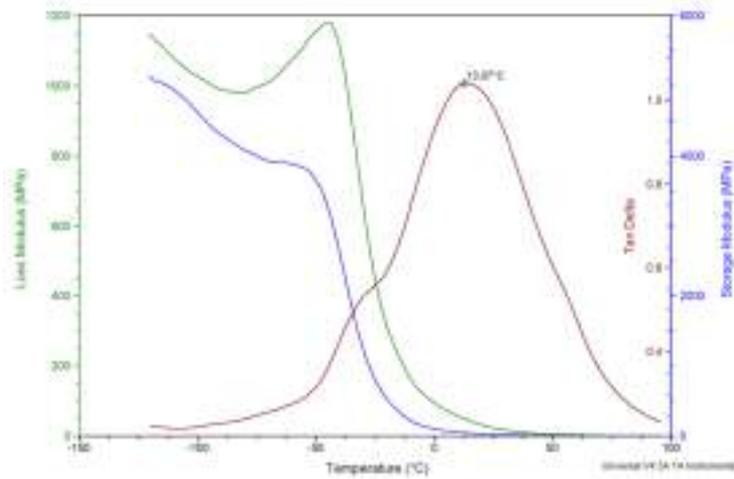


Figura D.6: Ensayo DMA realizado para caucho butílico SBR.[19]

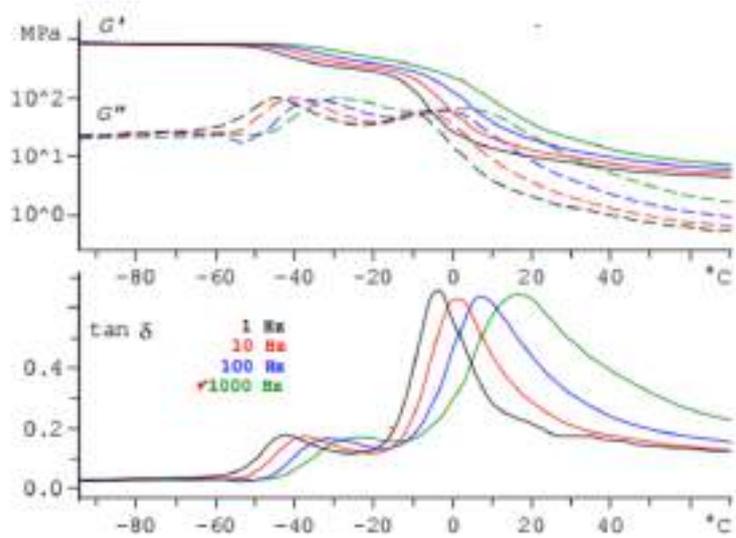
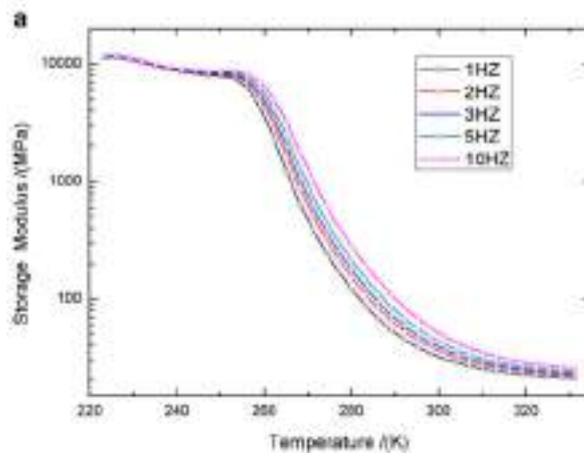
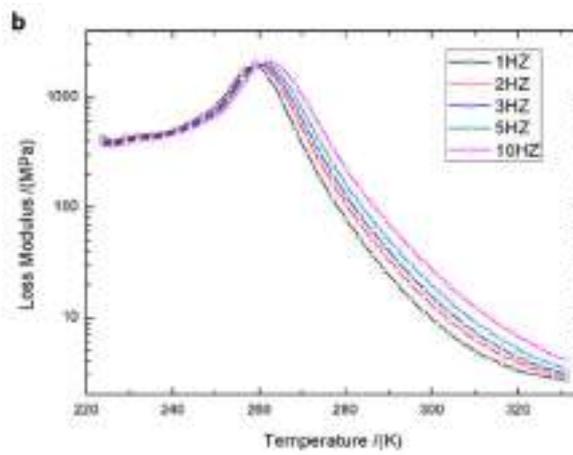


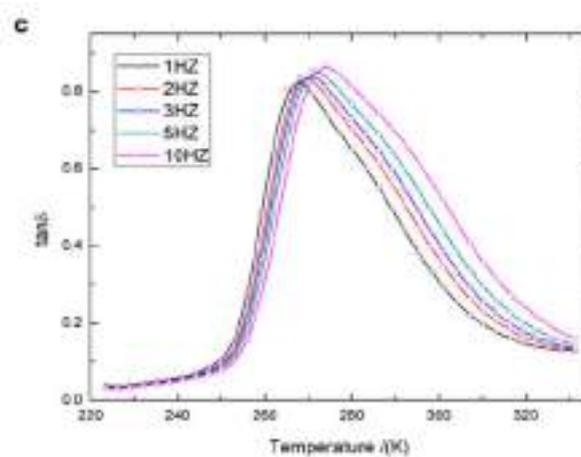
Figura D.7: Ensayo DMA realizado para una mezcla de NBR y CR.[16]



(a) Módulo de almacenamiento, E' , vs Temperatura.



(b) Modulo de pérdida, E'' , vs Temperatura.



(c) $\tan \delta$ vs Temperatura.

Figura D.8: Ensayo DMA realizado para PEA-co-IP. [20]

D.8. Mezcla de CR y NBR

Se trata de una mezcla particular de Caucho de nitrilo (NBR) y Caucho de cloropreno (CR). La composición es 24,4% de NBR, 24,4% de CR, 5,4% de agentes vulcanizantes, 9% de plastificantes y 33,7% de relleno. El ensayo DMA se ve en la figura D.7. Fue realizado para distintas frecuencias y una velocidad de calentamiento de 2 K/min.

Apéndice E

Deducción del desarrollo del modelo de Zener para resolver con Runge kutta 4

Se parte de un modelo de un grado de libertad con la configuración de elementos elásticos y amortiguador como se aprecia en la figura E.1.

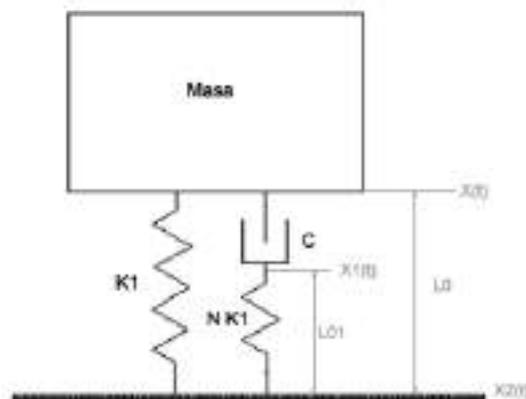


Figura E.1: Modelo de Zener.

Se considera que la constante del resorte k_2 es un múltiplo del resorte k_1 : $k_2 = Nk_1$. Se plantea un sistema de dos ecuaciones diferenciales para analizar su comportamiento, a partir de Haro Silva et.al. [21]:

$$m \cdot \ddot{x} = -k_1(x - x_2 - L_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_1) - m \cdot g \quad (\text{E.1})$$

$$c(\dot{x} - \dot{x}_1) = N \cdot k_1(x_1 - x_2 - L_{01}) \quad (\text{E.2})$$

Se reemplaza la ecuación (E.2) en (E.1) y se obtiene:

$$m \cdot \ddot{x} = -k_1(x - x_2 - L_0) - N \cdot k_1(x_1 - x_2 - L_{01}) - m \cdot g \quad (\text{E.3})$$

Es necesario despejar \dot{x}_1 . Derivando E.3 respecto del tiempo se obtiene:

$$m \cdot \ddot{x} = -k_1(\dot{x} - \dot{x}_2) + N \cdot k_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (\text{E.4})$$

De esta manera se obtiene la expresión de \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = -\frac{(\dot{x} - \dot{x}_2)}{N} - \frac{m}{N \cdot k_1} \cdot \ddot{x} + \dot{x}_2 \quad (\text{E.5})$$

Reemplazando la ecuación (E.5) en (E.1) se obtiene la ecuación diferencial de movimiento del sistema:

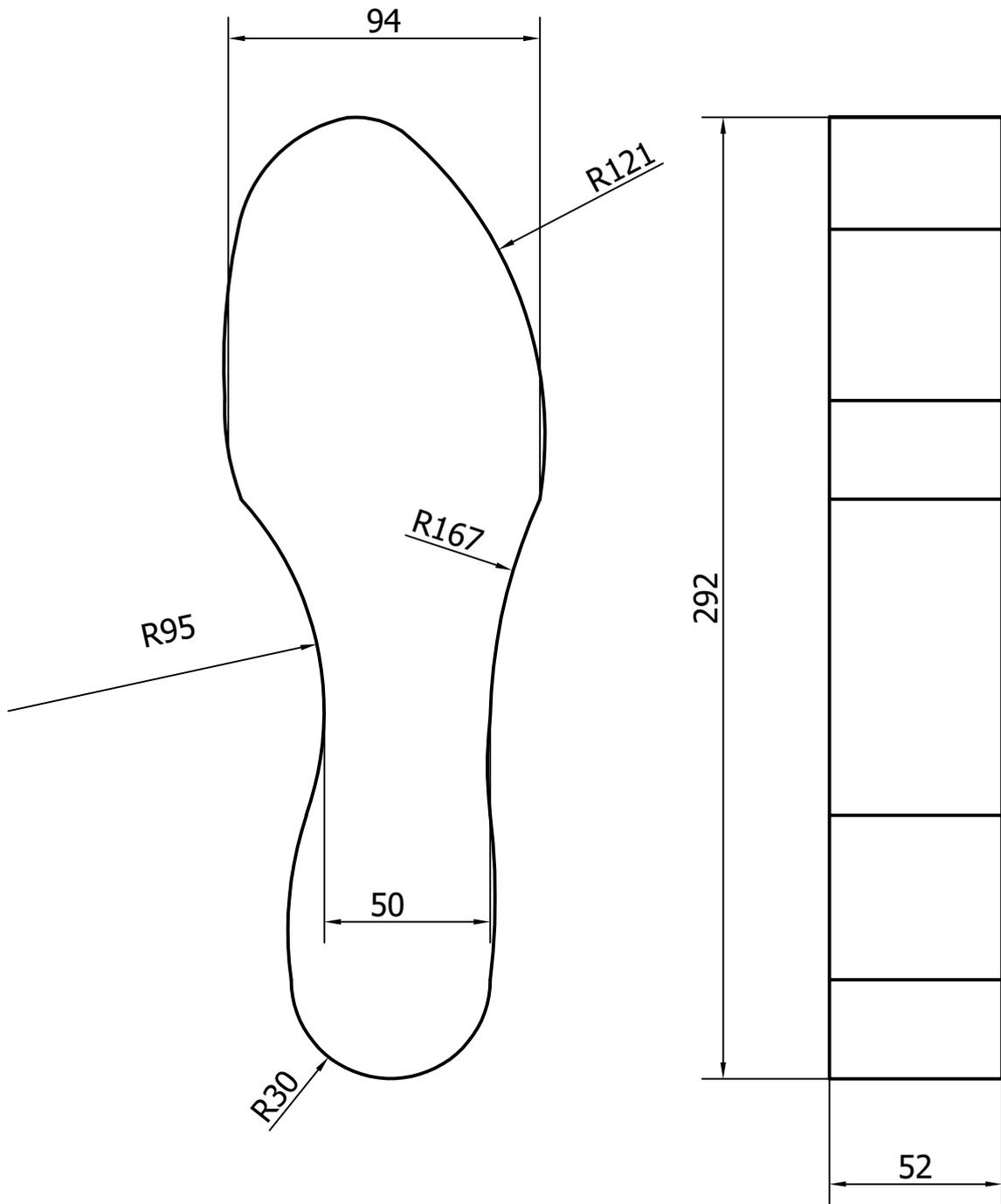
$$\frac{c \cdot m}{N \cdot k_1} \cdot \ddot{\ddot{x}} + m \cdot \ddot{x} + \dot{x} \cdot c \cdot \frac{N+1}{N} + k_1 \cdot x + (m \cdot g - k_1 \cdot L_0) = k_1 \cdot x_2 + \dot{x}_2 \cdot c \cdot \frac{N+1}{N} \quad (\text{E.6})$$

Haciendo $x_2 = 0$, se obtiene la expresión final:

$$\ddot{\ddot{x}} + \ddot{x} \cdot \frac{N \cdot k_1}{c} + \dot{x} \cdot (N+1) \cdot \frac{k_1}{m} + x \cdot \frac{k_1^2 \cdot N}{c \cdot m} + (m \cdot g - k_1 \cdot L_0) \frac{k_1 \cdot N}{c \cdot m} = 0 \quad (\text{E.7})$$

Apéndice F

Plano de la entresuela



Escala 1:1	Entresuela	Diseño de dispositivo ortésico para miembro inferior.
		Vernengo
		Plano N°: 1

Bibliografía

- [1] Ahmad Reza Arshi Amir Abbas Zadpoor, Ali Asadi Nikooyan.
A model-based parametric study of impact force during running.
Journal of Biomechanics, 2006.
- [2] Alpha A. Gopalai Chong Yu Zheng Ngoh Kieron Jie-Han, Darwin Gouwanda.
Estimation of vertical ground reaction force during running using neural network model and uniaxial accelerometer.
Journal of Biomechanics, 2018.
- [3] Roger Woledge Ann McCarthy Ruth Mayagoitia Paul McLaughlin, Pratima Chowdary.
The effect of neutral-cushioned running shoes on the intra-articular force in the haemophilic ankle.
Clinical Biomechanics, 2013.
- [4] Milani, Hennig, and Lafortune.
Perceptual and biomechanical variables for running in identical shoe constructions with midsole hardness.
Clinical Biomechanics, 12:294–300, 1997.
- [5] M. Kawato.
Internal models for motor control and trajectory planning.
Current Opinion in Neurobiology 9, pages 718–727, 1999.
- [6] B.M. Nigg.
Die belastung des menschlichen bewegungsapparates aus der sicht des biomechanikers.
Biomechanische Aspekte zu Sportplatzbelaeagen, pages 11–17, 1978.
- [7] B.M. Nigg.
The effects of muscle stiffness and damping on simulated impact force peaks during running.

- Journal of Biomechanics* 32, pages 849–856, 1999.
- [8] Louise A. Gilchrist Kathryn A. Christina, Scott C. White.
Effect of localized muscle fatigue on vertical ground reaction forces and ankle joint motion during running.
Human Movement Science 20, pages 257–276, 2001.
- [9] Brianne Borgia James Becker.
Kinematics and muscle activity when running in partial minimalist, traditional, and maximalist shoes.
Journal of Electromyography and Kinesiology, 2020.
- [10] Edwin van den Heuvel Johannes Zwerver Rienk Dekker Klaas Postema Sobhan Sobhani, Juha Hijmans.
Biomechanics of slow running and walking with a rocker shoe.
Gait & Posture, 2013.
- [11] Debdatta Ratna Chakraborty.
Polymers for Vibration Damping Applications.
Elsevier Inc., 2020.
- [12] Chris Palmer.
Engineering running shoes to break records.
Engineering, 2020.
- [13] Farrow.
El Gran Libro Clarín del Corredor: Experiencia Running.
Clarín, 2015.
- [14] Viladot, Cohí Riambau, and Paloma Clavell.
Órtesis y prótesis del aparato locomotor. 2.1 Extremidad inferior.
Masson, 2001.
- [15] Sorbothane Inc.
Engineering design guide.
Sorbothane, Inc. 2144 State Route 59, Kent, OH 44240-7142, 2021.
- [16] *Application Handbook Elastomers, Volume 2*.
Mettler toledo, 2018.
- [17] Hao Wang Junhong Xu, Aiqun Li and Yang Shen.
Dynamic mechanical analysis of norsorex/acrylonitrile butadiene rubber blends and their application in vibration control of steel frames.

- Advances in Mechanical Engineering*, 2016.
- [18] S.H. Saidpour M. Razmara and S. Arunchalam.
Dma investigation on polyurethane (pur).
International Conference on Fascinating Advancement in Mechanical Engineering, 2008.
- [19] Ltd Ningbo Suopu Rubber & Plastic Co.
Caucho butílico de alta amortiguación.
- [20] Guangsu Huang Rui Zhang, Xianru He.
Dynamics of poly (butyl acrylate) and poly (ethyl acrylate) with internal double bonds.
Original paper, 2014.
- [21] Paupitz Goncalves P.J. de Haro Silva, L. and D. orcid Wagg.
On the dynamic behavior of the zener model with nonlinear stiffness for harmonic vibration isolation.
Mechanical Systems and Signal Processing, 2018.