



UNIVERSIDAD NACIONAL
DE MAR DEL PLATA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE MAR DEL PLATA

Facultad de Ingeniería

Modelado de la Respuesta en Compresión de Poliuretano Biomédico^(*)

por Martín Machado

Director

Dra. Patricia Frontini

^(*) Trabajo Final para optar al título de Ingeniero en Materiales

República Argentina

2011



RINFI se desarrolla en forma conjunta entre el INTEMA y la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-
NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Tabla de Contenido

1. Motivación	7
2. Resumen	9
3. Fundamentos teóricos	11
<i>3.1. Disco Intervertebral</i>	<i>11</i>
3.1.1. Anatomía.....	11
3.1.2. Biomecánica.....	12
3.1.3. Implantes de núcleo pulposo	13
<i>3.1. Poliuretanos</i>	<i>13</i>
3.1.1. Formulación química	13
3.1.2. Poliuretanos como materiales biomédicos.....	14
<i>3.2. Modelado por Elementos Finitos para Análisis Tensional</i>	<i>15</i>
3.2.1. El Método de Elementos Finitos.....	15
3.2.1.1. Elementos y Nodos	16
3.2.2. Elementos Finitos de un continuo elástico. Método de los desplazamientos.....	17
3.2.2.1. La función de desplazamientos	17
3.2.2.2. Deformaciones	19
3.2.2.3. Tensiones	19
3.2.2.4. Fuerzas nodales equivalentes.....	20
<i>3.3. Modelos constitutivos para elastómeros</i>	<i>22</i>
3.3.1. Mooney-Rivlin.....	23
3.3.2. Yeoh.....	23
3.3.3. Ogden	23
3.3.4. Ogden-Storakers (Hyperfoam)	24
<i>3.4. Método inverso. Optimización numérica</i>	<i>25</i>
3.4.1. Introducción.....	25
3.4.2. Formulación matemática	26
3.4.3. Optimización restringida y no restringida	26
3.4.4. Algoritmos de Optimización	27
3.4.4.1. Métodos de Región de Confianza (Trust Region Methods)	28

3.4.4.1.1. Generalidades	28
3.4.4.1.2. Modelos para Métodos de la Región de Confianza	29
3.4.4.1.3. Comentarios sobre el algoritmo	30
4. Materiales	32
5. Métodos.....	33
5.1. <i>Caracterización Mecánica</i>	33
5.1.1. Compresión Uniaxial	33
5.1.2. Compresión Confinada.....	34
5.1.2.1. Dispositivo de confinamiento.....	34
5.1.2.2. Condiciones del ensayo	34
5.2. <i>Modelado por Elementos Finitos</i>	35
5.2.1. Software de cálculo	35
5.2.2. Simulación de Ensayos Mecánicos	36
5.2.1.1. Construcción del Modelo	36
5.2.1.2. Propiedades de los materiales	37
5.2.1.3. Obtención de Resultados	37
5.2.3. Simulación del Disco Intervertebral en Servicio	38
5.2.3.1. Construcción del Modelo	38
5.2.3.2. Propiedades de los Materiales	40
5.3. <i>Método Inverso y Optimización Numérica</i>	41
5.3.1. Desarrollo del Programa Inverso	42
5.3.2. Estructura del Programa.....	42
5.3.3. Obtención de Parámetros Constitutivos.....	44
6. Resultados y Discusión.....	45
6.1. <i>Caracterización Mecánica</i>	45
6.1.1. Resultados	45
6.1.1.1. Compresión Uniaxial	45
6.1.1.2. Compresión Confinada.....	45
6.1.2. Discusión.....	46
6.1.2.1. Compresión Uniaxial	46
6.1.2.2. Compresión Confinada.....	48

6.2. Modelado Inverso	49
6.2.1. Validación del Programa Inverso	49
6.2.2. Calibración del Modelo Hyperfoam por Modelado Inverso.....	50
6.2.2.1. Resultados.....	50
6.2.2.1.1. Método “Uniax”	50
6.2.2.1.2. Método “Conf”	51
6.2.2.1.3. Método “Uniax + Conf”.....	52
6.2.2.2. Discusión	53
6.2.2.1. Método “Uniax”	53
6.2.2.2. Método “Conf”	53
6.2.2.3. Método “Uniax + Conf”.....	54
6.2.2.4. Comparación entre métodos.....	54
6.3. Modelado por Elementos Finitos del Disco Intervertebral	56
6.3.1. Resultados	56
6.3.2. Discusión.....	58
7. Conclusiones	60
8. Referencias	62
9. Trabajos Futuros.....	65
ANEXO I Compensación de Ensayos de Compresión Uniaxial.....	66
ANEXO II Código del Programa de Modelado Inverso	68

Listado de Figuras

Figura 1. Anatomía de una vértebra y el disco intervertebral. Vista superior (izq.) y lateral (der.).....	11
Figura 2. Mecanismos de transferencia de carga para un disco sano (arriba) y degenerado (abajo).	12
Figura 3. Estructura química de un grupo uretano	13
Figura 4. Malla gruesa. Modelo 2D de un diente de engranaje[14].....	16
Figura 5. Región sometida a tensión plana dividida en elementos finitos[13].....	18
Figura 6. Interpolación lineal en un elemento triangular[13].	19
Figura 7. Pasos para los métodos de la región de confianza y búsqueda de línea[24].	28
Figura 8. Molde utilizado para preparar muestras mediante inyección (izquierda) y muestra obtenida[25].	32
Figura 9. Film lubricante de teflón empleado en los ensayos de compresión uniaxial.33	
Figura 10. Equipamiento empleado para los ensayos de compresión confinada[25]..	34
Figura 11. Modelo mallado de la probeta. Obsérvese el eje de simetría.	36
Figura 12. Condiciones de contorno para los casos de compresión uniaxial (izquierda) y confinada (derecha).	37
Figura 13. Modelo de elementos finitos del conjunto vertebral.	39
Figura 14. Diagrama de Flujo del modelado inverso utilizado para obtener los parámetros de la espuma a partir de curvas de ensayos de compresión uniaxial y confinada.	41
Figura 15. Representación esquemática de la sintaxis del Programa Inverso.	42
Figura 16. Programa de modelado inverso.	43
Figura 17. Compresión uniaxial. Datos sin compensar.....	45
Figura 18. Curva tensión-deformación nominales. Datos compensados.	45
Figura 19. Curvas tensión-deformación para los ensayos de compresión confinada..	46
Figura 20. Monitoreo visual de ensayo de compresión. (Izq.) Probeta sin abarrillar, ensayo todavía válido. (Der.) Se indica el abarrilamiento en la probeta, la tensión en la probeta deja de ser exclusivamente uniaxial.....	47
Figura 21. Efecto de la lubricación en ensayos de compresión uniaxial[42].	47
Figura 22. Curva típica de compresión uniaxial para espumas elastoméricas[46].	48
Figura 23. Evolución de los parámetros durante el modelado inverso. Se muestra la convergencia a los parámetros objetivo.	49
Figura 24. Ajuste de los datos de compresión uniaxial empleando los parámetros de la Tabla 3.....	50

Figura 25. Predicción de la respuesta en compresión confinada a partir de los parámetros obtenidos en compresión uniaxial.	51
Figura 26. Ajuste de los datos de compresión confinada.	51
Figura 27. Predicción de la respuesta en compresión uniaxial a partir de los parámetros obtenidos en compresión confinada.....	52
Figura 28. Ajuste utilizando los parámetros de la Tabla 5.	53
Figura 29. Error relativo de las distintas estrategias de calibración. El método empleado se indica entre comillas (“) y a su lado se indica el ensayo modelado.....	55
Figura 30. Suma del cuadrado de los valores residuales para las tres estrategias de calibración.	56
Figura 31. Distribución de tensiones de Von Mises para un modelo (A) intacto, (B) denucleado e (C) implantado. Todos los valores en MPa.	57
Figura 32. Distribución de desplazamientos radiales para un modelo (A) intacto, (B) denucleado e (C) implantado. Todos los valores en mm.....	58
Figura 33. Desplazamientos radiales de los modelos intacto, denucleado e implantado.	58
Figura 34. Configuración deformada del anillo fibroso para los modelos (A) intacto, (B) denucleado e (C) implantado.	59
Figura 35. Material con región Hookeana.....	66
Figura 36. Material sin región Hookeana.....	66
Figura 37. Extrapolación lineal de los datos de compresión uniaxial.	67

Listado de Tablas

Tabla 1. Propiedades elásticas utilizadas en el FEM.	40
Tabla 2. Parámetros empleados para la validación del Programa Inverso.....	49
Tabla 3. Parámetros obtenidos utilizando datos experimentales de compresión uniaxial.	50
Tabla 4. Parámetros obtenidos utilizando datos experimentales de compresión confinada.....	51
Tabla 5. Parámetros obtenidos utilizando datos de compresión uniaxial y confinada.	52
Tabla 6. Ajuste lineal para corrección de datos experimentales.	67

1. Motivación

El presente trabajo surge como una continuación del Trabajo Final llevado a cabo por la Ing. Luciana Sachetti bajo la dirección de la Dra. Patricia Frontini y la codirección del Dr. Gustavo Abraham en la División Polímeros del Intema. Durante su desarrollo, se diseñó una espuma elastomérica para su aplicación en la artroplastía de columna vertebral como reemplazo de núcleo pulposo de disco intervertebral.

La columna vertebral se encuentra sometida a estados de tensión principalmente compresivos. Por lo tanto, los ensayos de compresión son los más utilizados para caracterizar el comportamiento mecánico del disco. El núcleo pulposo soporta la mayor parte de la carga a la que se ve sometido el disco intervertebral, trabajando bajo un estado de compresión restringida dentro del mismo. Su expansión lateral se encuentra limitada por un anillo fibroso elástico lo que genera un estado multiaxial de tensiones. Por lo tanto, para capturar el comportamiento del material del implante en este estado “parcialmente” confinado es necesario realizar ensayos mecánicos en las condiciones correspondientes a los dos extremos de confinamiento: compresión uniaxial (restricción lateral nula) y compresión confinada (restricción lateral infinitamente rígida). A partir de tales casos, si se logra calibrar una ecuación constitutiva para el material se podría predecir la respuesta del material en un estado de compresión intermedio, correspondiente a un confinamiento elástico similar al del núcleo pulposo.

Un modelo tradicional de comportamiento mecánico de elastómeros, como el de Mooney-Rivlin, sólo permite ajustar valores experimentales frente a modos de sollicitación uniaxiales. Este modelo no resulta adecuado para representar el comportamiento del material en compresión confinada debido a la presencia de estados tensionales principalmente hidrostáticos ya que asume la incompresibilidad absoluta del modelo. El modelo matemático elegido debe ser capaz de capturar en forma global la respuesta mecánica observada describiendo simultáneamente el comportamiento en compresión uniaxial y confinada.

El dolor de espalda por el deterioro de discos intervertebrales es uno de los problemas médicos más comunes. Si se conoce la ecuación constitutiva adecuada y además se logra, calibrar los parámetros a partir de las curvas medidas tensión deformación del material poliuretánico sería posible efectuar experimentos mediante elementos finitos para estudiar la mecánica del disco y analizar la influencia del implante propuesto en la redistribución de cargas de un disco lesionado. De esta manera se puede generar conocimiento científico-tecnológico útil en el área y

determinar el efecto del implante propuesto en el retraso del deterioro del disco, y por lo tanto en la mejora de la calidad de vida del paciente.

2. Resumen

El dolor en la parte baja de la espalda es un problema médico recurrente y en el 80% de los casos se observa una degeneración de los discos intervertebrales lumbares. Los tratamientos basados en el reemplazo del núcleo pulposo son una buena alternativa a los procedimientos quirúrgicos actuales debido a que son menos invasivos y pueden restaurar las funciones biomecánicas normales. En el presente trabajo se estudió el comportamiento mecánico en compresión uniaxial y confinada de espumas elastoméricas poliuretánicas especialmente formulados para su aplicación como implantes de núcleo pulposo.

El modelo constitutivo adoptado fue el de Ogden-Storakers, modelo fenomenológico especialmente concebido para elastómeros altamente compresibles. Estudios anteriores realizados sobre este sistema poliuretánico revelaron que debía trabajarse con un modelo capaz de describir la respuesta del material en distintos modos de sollicitación simultáneamente. El núcleo pulposo se encuentra naturalmente rodeado por un anillo fibroso. Al aplicarse una fuerza compresiva sobre el disco, el núcleo es comprimido, y ejerce una presión en la cara interna del anillo transfiriéndole parte de la carga. Para describir la respuesta del implante en esta configuración de confinamiento elástico la respuesta del material se estudió en los dos casos extremos de confinamiento, compresión uniaxial y confinada. Mediante los ensayos de compresión uniaxial se apreció un comportamiento lineal en los rangos de deformación analizados ($< 20\%$). En cambio, en compresión confinada el material presentó una respuesta no lineal con una marcada etapa de densificación a deformaciones elevadas ($> 35\%$).

Los parámetros del modelo constitutivo podrían en principio obtenerse por ajuste de las curvas experimentales de sólo uno de los tipos de ensayos de compresión realizados. Sin embargo, en el ensayo de compresión uniaxial la manifestación de la no linealidad del comportamiento es casi imperceptible. Por lo tanto fue necesario ajustar simultáneamente dos estados tensionales distintos para obtener una forma funcional representativa del estado confinado. En este caso el problema matemático es de tipo inverso por lo que se vuelve obligatoria la implementación computacional de la solución.

Se desarrolló en Matlab un programa inverso que mediante sucesivas simulaciones de Abaqus (software comercial de cálculo por elementos finitos) ajusta los parámetros del modelo empleando un algoritmo del tipo región de confianza. Para la calibración del modelo se emplearon datos de compresión uniaxial, compresión

confinada y la combinación de ambos. La pertinencia de cada uno de estos tres métodos fue discutida. El modelado inverso a partir de los datos de sólo una configuración de ensayo no fue satisfactorio. Al calibrar con datos de compresión uniaxial, el modelo predice cargas menores a las obtenidas experimentalmente en compresión confinada. En el caso de introducir datos de compresión confinada, las cargas calculadas para el caso uniaxial son mucho mayores al registro experimental. Calibrando con datos experimentales de ambas configuraciones de ensayo se obtiene un juego de parámetros capaz de capturar con un error aceptable la respuesta del material para ambos estados tensionales.

Por último, utilizando simplificaciones aceptadas en bibliografía y con el modelo constitutivo calibrado se realizó un modelo sencillo de elementos finitos de un disco intervertebral. Los valores de tensión de Von Mises en la condición intacta son restaurados por la presencia del implante. En la condición denucleada los perfiles de tensión en el anillo son ligeramente distintos a los observados en los discos sano e implantado. Se comprobó que la presencia del implante restaura en un grado considerable los desplazamientos radiales del anillo fibroso correspondientes a un disco sano. Dada la similitud en la respuesta mecánica observada, el reemplazo de núcleo pulposo por un implante del material estudiado sería viable.

3. Fundamentos teóricos

3.1. Disco Intervertebral

3.1.1. Anatomía

El disco intervertebral es el tejido avascular más grande del cuerpo humano. Cada uno forma un amortiguamiento cartilaginoso que permite ligeros movimientos de las vértebras y actúa como ligamento que las mantiene juntas (Figura 1). El disco está principalmente constituido por tres tejidos diferentes[1]: una parte central con aspecto gelatinoso llamado núcleo pulposo, rodeado exteriormente por una estructura laminar y fibrosa denominada anillo fibroso, y por último, las mesetas vertebrales, finas mesetas cartilagosas con perforaciones múltiples y se encuentran entre el disco y la vértebra.

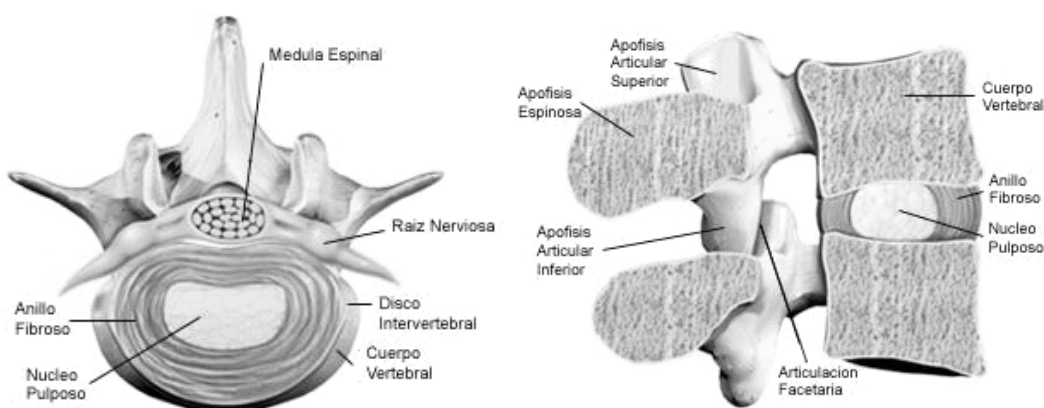


Figura 1. Anatomía de una vértebra y el disco intervertebral. Vista superior (izq.) y lateral (der.).

El núcleo pulposo comprende la mitad del disco intervertebral sano y es esencialmente agua en una matriz proteínica[2]. El contenido de agua del núcleo es muy alto al nacer (90% o más) pero luego decrece con los años hasta un 70 % o a veces menos[3]. Cuando se ejerce una presión importante sobre el eje de la columna, el agua que contiene la sustancia cartilaginosa del núcleo pasa a través de los orificios de la meseta vertebral hacia el centro de los cuerpos vertebrales.

El anillo fibroso está conformado por una sucesión de 15 a 20 capas fibrosas concéntricas de colágeno, cuya oblicuidad esta cruzada cuando se pasa de una capa a la contigua, estas fibras son verticales en la periferia y, cuanto más se aproximan al centro, mas oblicuas son. Las fibras de colágeno se insertan en los cuerpos vertebrales superior e inferior[4]. En el individuo joven este anillo evita cualquier pérdida de la sustancia del núcleo.

Las mesetas vertebrales consisten en un gel de moléculas glicoproteicas reforzada por fibras de colágeno[5]. Las mesetas actúan como membranas semipermeables que facilitan la difusión de solutos desde la vértebra al disco mientras que también posicionan el núcleo pulposo y absorben parte de la presión hidrostática generada por la carga mecánica de la columna.

3.1.2. Biomecánica

La unidad funcional de la columna consiste en un disco intervertebral entre las vértebras adyacentes, además de las uniones facetadas y posteriores. Los modos fundamentales de carga actuantes sobre la columna son compresión axial, flexión (lateral o frontal) y torsión. La columna vertebral se encuentra siempre en compresión. La relación entre las cargas actuantes en el disco y las tensiones generadas en él no es trivial y por lo tanto merece ser descripta.

Si se aplica una fuerza de compresión axial el disco se aplasta y ensancha. El núcleo acompaña esta deformación incrementando su presión interna, convirtiendo la carga vertical en fuerzas laterales y tensionando las fibras del anillo[6]. La carga es transferida de una meseta vertebral a la otra aproximadamente en un 75% por el núcleo pulposo y el 25% restante, por el anillo fibroso.

Con la edad el núcleo va perdiendo sus propiedades hidrófilas por lo que su presión interna disminuye. Además, el deterioro del anillo fibroso puede causar pérdida de la sustancia del núcleo. Estos factores que marcan la degeneración del disco intervertebral modifican el mecanismo de transferencia de carga original tal como se ilustra en la Figura 2.

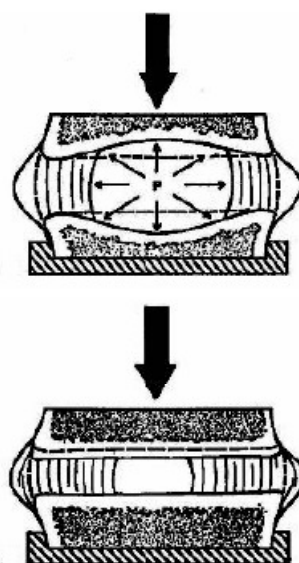


Figura 2. Mecanismos de transferencia de carga para un disco sano (arriba) y degenerado (abajo).

3.1.3. Implantes de núcleo pulposo

El dolor en la parte baja de la espalda es un problema médico recurrente y en el 80% de los casos se observa una degeneración de los discos intervertebrales lumbares[7]. El daño o la deshidratación del núcleo pulposo conllevan a esfuerzos compresivos anormales en el disco que eventualmente pueden producir roturas o desgarros en el tejido anular por fatiga. En estas condiciones el fluido atraviesa el anillo fibroso y presiona las terminales nerviosas produciendo dolor.

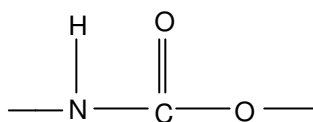
Los tratamientos basados en el reemplazo del núcleo pulposo, incluidos los implantes poliuretánicos, son una alternativa ideal a los procedimientos quirúrgicos actuales, como la fusión de columna o el reemplazo completo de disco, debido a su menor naturaleza invasiva y su capacidad para restaurar las funciones biomecánicas normales, así como también la posibilidad de intervenir en una etapa más temprana del deterioro[8].

3.1. Poliuretanos

Los poliuretanos son materiales poliméricos muy útiles debido a sus propiedades físicas, y la versatilidad de sus aplicaciones es notable. Pueden ser lo suficientemente rígidos como para ser utilizados como elementos estructurales o ser blandos y ser empleados como esponjas. Pueden emplearse en la fabricación de ruedas de skate o en almohadones para muebles. En estas aplicaciones y cientos de otras, la química de estos se puede resumir como una combinación de segmentos duros y blandos con diversos grados de entrecruzamiento[9]. De esta manera, los cambios en un número limitado de componentes permiten obtener una amplia variedad de productos.

3.1.1. Formulación química

Los poliuretanos constituyen una amplia familia de polímeros que presentan un grupo uretano como elemento estructural característico (Figura 3). Este grupo puede considerarse como una éster-amida del ácido carbónico, resultante en general de la reacción de un isocianato y un alcohol.



GRUPO URETANO

Figura 3. Estructura química de un grupo uretano

Un poliuretano se forma por reacción de un poliéter con terminales hidroxilo o un poliéster con un isocianato. Desde hace ya más de 25 años el empleo de poliéteres es

más común debido a su menor precio y una mejor separación de fase en aplicaciones elastoméricas. Un ejemplo en la práctica comercial es la reacción de diisocianato de tolueno y el polipropilenglicol (PPG) para producir una de las formas más comunes de poliuretano[10].

En la síntesis de poliuretanos se emplean por lo general un mínimo de tres monómeros. Los tres elementos fundamentales en la síntesis de poliuretanos, base de su enorme versatilidad, son:

- isocianato ($-N=C=O$) di o polifuncional;
- macrodiol ($HO-R-OH$) monómero de cadena larga y flexible que a temperatura ambiente se encuentra por encima de su temperatura de transición vítrea (T_g);
- extendedor de cadena, monómero de cadena corta difuncional, o entrecruzante si la funcionalidad es mayor a 2.

Dependiendo de la elección de estos tres componentes básicos, se obtiene un variado número de estructuras y propiedades.

3.1.2. Poliuretanos como materiales biomédicos

Los poliuretanos son ampliamente utilizados en el campo de la medicina debido a su biocompatibilidad, y la fabricación de implantes no es la excepción. En el presente trabajo se intentará describir el comportamiento mecánico de poliuretanos especialmente formulados para el reemplazo del núcleo de discos intervertebrales.

El principal beneficio del uso de materiales como las espumas de poliuretano en implantes de núcleo es su similitud mecánica con los discos naturales. Con un módulo de elasticidad bajo, es más fácil, en el corto plazo, replicar la dinámica del disco. Las dificultades, sin embargo, surgen cuando se intenta desarrollar un componente de larga duración que cuenta con una interfaz estable entre la estructura y las vértebras; además de la menor resistencia a la fatiga de estos materiales respecto a los metálicos[11].

Cuando se trata de dispositivos implantados en el cuerpo humano es de esperar que los requisitos de calidad sean más que exigentes. El implante, además de cumplir con los requerimientos básicos como biocompatibilidad y resistencia a la fatiga, debe restaurar la distribución normal de la carga, tener suficiente estabilidad dimensional, también debe evitar un excesivo desgaste en la interfaz meseta vertebral – implante con una superficie de baja fricción y buena conformabilidad con la cavidad nuclear[11].

La evaluación de la biocompatibilidad de los dispositivos de uso tópico suele limitarse a determinar si el material provoca o no sensibilización alguna. Se ha convertido en costumbre para iniciar los estudios de biocompatibilidad de actualidad mediante la determinación de si el material es citotóxico. En lo que a la experiencia

respecta, los poliuretanos han demostrado ser seguros para las aplicaciones tópicas e implantes[11].

La biocompatibilidad de los dispositivos implantados es un aspecto mucho más delicado que la de aquellos dispositivos de uso tópico. El rechazo de un dispositivo de este último tipo no es un tema mayor, pero representa una dificultad principal a superar para un dispositivo que ingresa al cuerpo.

3.2. Modelado por Elementos Finitos para Análisis Tensional.

3.2.1. El Método de Elementos Finitos.

Una forma general de proceder de ingenieros y científicos en general consiste en subdividir el sistema a analizar en sus componentes individuales o “elementos”, cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, para luego reconstruir el sistema original complejo y estudiarlo a partir de dichos componentes[13]. En sus principios el método de elementos finitos (FEM) se utilizó para análisis tensionales y desde entonces se ha aplicado a diversos problemas continuos (transferencia de calor, electromagnetismo, etc.). En todos los casos lo que el analista busca es obtener el valor de un determinado campo, en el caso de análisis tensionales, es el campo de desplazamientos o tensiones; en un análisis térmico, las temperaturas o el flujo de calor; y así pueden citarse varios ejemplos. El FEM es una manera de obtener la solución numérica de un problema específico, no produce una fórmula como resultado ni resuelve una familia de problemas. Por lo tanto la solución es aproximada a menos que el problema sea extremadamente sencillo, caso para el cual se dispone generalmente de una fórmula exacta.

El FEM ha sido desarrollado quizás más por ingenieros utilizando una visión física que por matemáticos a través de métodos abstractos. Los mencionados elementos se reconectan en los denominados “nodos”, que actúan como clavos que mantienen los elementos unidos (Figura 4). Este proceso resulta en la generación de un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas. En un análisis tensional, tales ecuaciones serán las de equilibrio de cada nodo. Dependiendo del tamaño del modelo puede haber varios cientos, incluso miles, de ecuaciones por lo que se vuelve necesaria la implementación computacional.

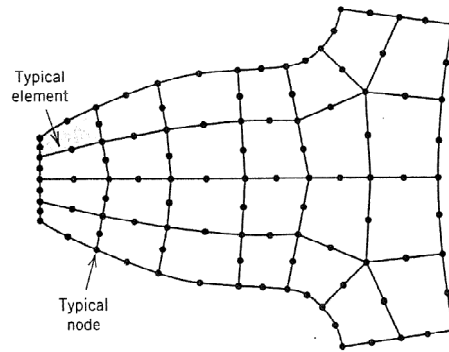


Figura 4. Malla gruesa. Modelo 2D de un diente de engranaje[14].

Una descripción más sofisticada del método sería considerar la solución como tramos de interpolación polinomial. En cada elemento un campo incógnita, como el desplazamiento, es interpolado entre los valores nodales. Conectando los elementos, tal campo es interpolado a lo largo de toda la estructura modelada. Los “mejores” valores nodales del campo a calcular son aquellos que minimizan cierta función como por ejemplo la energía total[14]. El proceso de minimización genera un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas para los valores del campo incógnita en los nodos.

3.2.1.1. Elementos y Nodos

Los nodos aparecen en los bordes de los elementos (aunque también podría haber en el interior de los elementos en formulaciones más complejas) y sirven como conectores que mantienen los elementos unidos. En la Figura 4 los elementos aparecen como áreas encerradas por cuadriláteros mientras que los nodos son indicados como puntos. Las líneas representan los bordes de elementos.

A simple vista, pareciera que un modelo de elementos finitos pudiera ser obtenido trozando la estructura a analizar y volviéndola a unir mediante los nodos. Evidentemente, esta situación no sería representativa debido a la concentración de la deformación en los nodos, deslizamiento relativo de los elementos e incluso la aparición de gaps entre los elementos. Para evitar este tipo de inconvenientes y permitir la convergencia al resultado exacto a medida que se emplean más elementos en el modelo (mallado más fino) cada elemento es restringido en su modo de deformación, por lo que de cada tipo de elemento se espera un tipo de comportamiento dado básicamente por el grado del polinomio con el que se interpola el campo incógnita.

3.2.2. Elementos Finitos de un continuo elástico. Método de los desplazamientos.

En muchas situaciones de la ingeniería se requiere determinar la distribución de tensiones y deformaciones en un continuo elástico. Los casos particulares pueden variar desde problemas bidimensionales de tensión o deformación plana hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales. El así llamado método de los desplazamientos puede resumirse de la siguiente manera[13]:

1. Se divide el continuo en un número de elementos finitos.
2. Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, llamados nodos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema.
3. Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
4. Se define, a partir de las funciones de desplazamientos, el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definirán el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.
5. Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualquier carga repartida, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos.

Este procedimiento se justifica intuitivamente, pero de hecho lo que se ha sugerido es equivalente a la minimización de la energía potencial total del sistema, siendo esta función de un campo de desplazamientos impuesto. Si este campo de desplazamientos se define adecuadamente, deberá producirse una convergencia hacia la solución correcta.

3.2.2.1. La función de desplazamientos

Un elemento finito típico e se define por sus nodos i, j, k , etc., y por su contorno formado por líneas rectas. Aproximemos los desplazamientos u de cualquier punto del elemento mediante un vector columna, \hat{u} :

$$u \approx \hat{u} = \sum N_i \cdot a_i^e = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ \vdots \end{Bmatrix}^e = N a^e$$

Ecuación 1

Donde las componentes de N son en general funciones de posición dadas y a^e es un vector formado por los desplazamientos nodales del elemento considerado.

Para el caso particular de tensión plana el vector u representa los movimientos horizontal y vertical de un punto cualquiera del elemento y a_i los correspondientes desplazamientos de un nodo i (Figura 5).

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad a = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

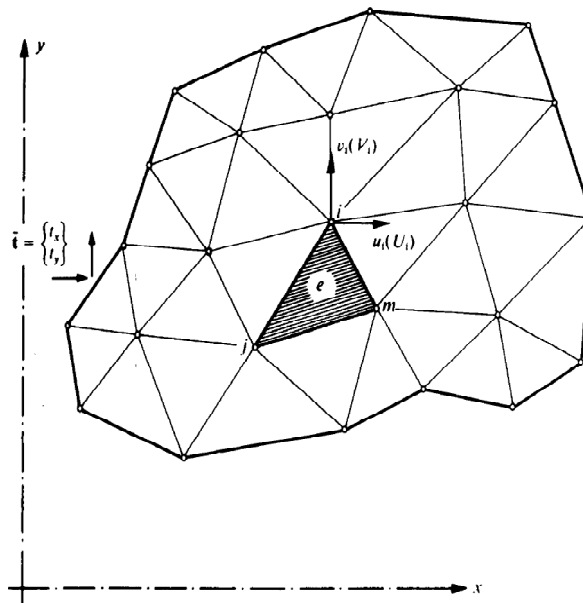


Figura 5. Región sometida a tensión plana dividida en elementos finitos[13].

Las funciones N_i, N_j, N_k han de escogerse de tal manera que al sustituir las coordenadas de los nodos en la Ecuación 1 se obtengan los correspondientes desplazamientos nodales por lo que se cumplen las siguientes condiciones:

$$N_i(x_i, y_i) = I \text{ (matriz unidad)}$$

$$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_k, y_k) = 0$$

Si las dos componentes de desplazamiento se interpolan de la misma manera nos queda $N_i = N_i I$ donde N_i se obtiene de la Ecuación 1, teniendo en cuenta que $N_i = 1$ para x_i e y_i y cero en los otros vértices. Para elementos triangulares la interpolación lineal más evidente es la correspondiente a la Figura 6.

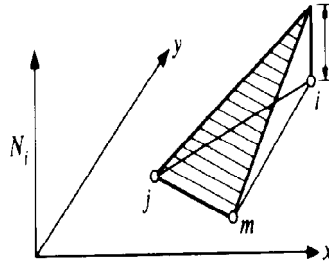


Figura 6. Interpolación lineal en un elemento triangular[13].

Las funciones de prueba \mathbf{N} se conocen como funciones de forma y juegan un papel decisivo en el análisis por elementos finitos.

3.2.2.2. Deformaciones

Una vez conocidos los desplazamientos para todos los puntos del elemento, pueden determinarse las deformaciones en cualquier punto. Estas darán por resultado una relación que podrá escribirse según la Ecuación 2.

$$\varepsilon = Su$$

Ecuación 2

Donde S es un operador lineal adecuado. A partir de la Ecuación 1 la relación anterior puede expresarse según dicta la Ecuación 3.

$$\varepsilon = Ba$$

Ecuación 3

Con $B = SN$.

En el caso de tensión plana, las deformaciones más importantes son las que se producen el plano y se expresan en función de los desplazamientos mediante las conocidas relaciones que definen el operador S :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Una vez determinadas las funciones de forma N_i , N_j y N_k , es fácil obtener la matriz B . Si adoptamos una expresión lineal para tales funciones, las deformaciones serán constantes en todo el elemento.

3.2.2.3. Tensiones

En el caso más general, el material contenido en el elemento puede estar sometido a deformaciones iniciales (ε_0) y tensiones residuales iniciales (σ_0) por lo que considerando estos factores y admitiendo un modelo constitutivo dado por la matriz D , las tensiones estarán dadas según la Ecuación 4.

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$$

Ecuación 4

Para el caso particular de tensión plana, las tres componentes de tensión que se corresponden con las deformaciones anteriormente definidas son:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Y la matriz D se obtendrá de la relación dada por el modelo constitutivo entre tensiones y deformaciones. Considerando un medio isótropo y un material que siga la Ley de Hooke:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y \\ \gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}$$

Resolviendo queda D igual a:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{Bmatrix}$$

3.2.2.4. Fuerzas nodales equivalentes

Se definen las fuerzas que actúan en los nodos como q^e , siendo estas estáticamente equivalentes a las tensiones en el contorno y a las fuerzas distribuidas que actúan sobre el elemento. Cada una de las fuerzas q_i^e debe tener el mismo número de componentes que el desplazamiento a_i correspondiente y ordenarse en las direcciones apropiadas.

$$q^e = \begin{Bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas distribuidas b son por definición las que actúan por unidad de volumen en direcciones correspondientes a las de los desplazamientos u de ese punto. En el caso particular de tensión plana, las fuerzas nodales y la carga repartida están dadas por:

$$q_i^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$

Donde U y V son las componentes de las fuerzas nodales en las direcciones correspondientes y b_x y b_y , las componentes de la fuerza másica.

El procedimiento más sencillo para establecer una equivalencia estática entre las fuerzas nodales y las tensiones actuantes en el contorno y las fuerzas distribuidas es imponer un desplazamiento arbitrario (virtual) e igualar el trabajo realizado por las fuerzas nodales al realizado por las tensiones y fuerzas distribuidas durante dicho desplazamiento.

Si δa^e es un desplazamiento virtual de los nodos, este origina según las Ecuaciones 1 y 2, desplazamientos y deformaciones dadas por:

$$\delta u = N\delta a^e \quad \delta \varepsilon = B\delta a^e$$

El trabajo de las fuerzas nodales estará dado por el producto de las fuerzas nodales y los correspondientes desplazamientos:

$$\delta a^{eT} q^e$$

Análogamente el trabajo interno por unidad de volumen realizado por las tensiones y fuerzas distribuidas será:

$$\delta \varepsilon^T \sigma - \delta u^T b = \delta a^{eT} (B^T \sigma - N^T b)$$

Igualando el trabajo externo con el trabajo interno total obtenido al integrar sobre el volumen del elemento, V^e , se obtiene:

$$\delta a^{eT} q^e = \delta a^{eT} \left(\int_{V^e} B^T \sigma \, dvol - \int_{V^e} N^T b \, dvol \right)$$

Como esta relación es válida para cualquiera sean los desplazamientos δa , es posible asegurar que:

$$q^e = \int_{V^e} B^T \sigma \, dvol - \int_{V^e} N^T b \, dvol$$

Ecuación 5

Esta expresión es válida y de carácter general **independientemente de la relación funcional entre tensiones y deformaciones**. En el caso de adoptar una ley lineal como la de la Ecuación 4, se puede expresar la Ecuación 5 como:

$$q^e = K^e a^e + f^e$$

Donde,

$$K^e = \int_{V^e} B^T D B \, dvol$$

$$f^e = - \int_{V^e} N^T b \, dvol - \int_{V^e} B^T D \varepsilon_0 \, dvol - \int_{V^e} B^T \sigma_0 \, dvol$$

En la última expresión los tres términos representan respectivamente las fuerzas debidas a las fuerzas másicas, las deformaciones iniciales y las tensiones iniciales.

3.3. Modelos constitutivos para elastómeros

Los elastómeros presentan un comportamiento hiperelástico, es decir, no experimentan deformaciones remanentes al retirar la carga aplicada (son elásticos) pero la respuesta tensión-deformación no es lineal. Otra característica distintiva es que la mayoría de los elastómeros son incompresibles, es decir que su volumen se mantiene constante durante el proceso de deformación. Para estos casos el módulo de Poisson es igual a 0.5.

La deformación de elastómeros involucra grandes deformaciones por lo que es conveniente, a la hora de abordar matemáticamente el problema, emplear elongaciones en lugar de las deformaciones infinitesimales mencionadas en el punto anterior. La elongación (λ_i) en una dirección particular se define como la longitud deformada en esa dirección de un elemento de material dividido la longitud original.

Las teorías originales dentro de los modelos fenomenológicos inspirados en invariantes se han centrado en lograr una expresión de la respuesta de la deformación de la red en términos de las elongaciones. Este enfoque debería llevar a una expresión para la energía elástica de deformación dictada por la mecánica del continuo referida, en un principio, a sólidos isotrópicos, incompresibles e hiperelásticos. La expresión general para la energía de deformación sería:

$$W = \widehat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Ecuación 6

Donde λ_i son las elongaciones principales. Las siguientes funciones de las elongaciones, las cuales son constantes ante cualquier transformación ortogonal y describen completamente el sistema, son llamadas invariantes.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad \text{Ecuación 7}$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad \text{Ecuación 8}$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad \text{Ecuación 9}$$

En caso de materiales incompresibles I_3 es igual a 1 por lo que para esos casos la expresión general de la energía de deformación puede ser escrita como:

$$W = \widehat{W}(I_1, I_2)$$

Ecuación 10

A continuación se hace una breve reseña de algunos de los modelos más prominentes para este tipo de materiales, la mayoría basados en la hipótesis de incompresibilidad.

3.3.1. Mooney-Rivlin

Un análisis realizado por Rivlin[15], basado en los postulados de la mecánica del continuo manifestó que el resultado alcanzado previamente por Mooney[16] era en realidad la expresión más general de primer orden para la energía de deformación según lo prescrito por la Ecuación 10. Del tratamiento aplicado por Rivlin a los resultados de Mooney se obtiene:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$

Ecuación 11

Donde C_1 y C_2 son las constantes del modelo. Un ensayo de deformación donde un invariante es mantenido constante mientras el otro es variado sistemáticamente permitiría obtener los valores de C_1 y C_2 si es que estos son en realidad constantes como fueron formuladas originalmente en el modelo Mooney-Rivlin.

3.3.2. Yeoh

El modelo hiperelástico de Yeoh[17] es un modelo fenomenológico para la deformación de materiales elásticos no lineales prácticamente incompresibles. El modelo también está basado en la observación de Rivlin de que las propiedades elásticas de los elastómeros pueden describirse usando una función de densidad de energía de deformación, una serie de potencias en los invariantes de deformación I_1 , I_2 e I_3 . El modelo de Yeoh para un elastómero incompresible es función solamente de I_1 . Para elastómeros compresibles se agrega la dependencia con I_3 .

Actualmente la función densidad de energía de deformación de Yeoh para elastómeros incompresibles está dada por la Ecuación 12[18].

$$W = \sum_{i=1}^n C_i (I_1 - 3)^i$$

Ecuación 12

Para el caso de materiales ligeramente compresibles se agrega la dependencia de $I_3 = J^2$ y la función densidad de energía puede ser escrita según lo dicta la Ecuación 13.

$$W = \sum_{i=1}^n C_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{k=1}^n C_{k1} (J - 3)^{2k}$$

Ecuación 13

Donde $\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1$ y C_{i0} , C_{k1} son constantes del material.

3.3.3. Ogden

El modelo de Ogden[19] propone la siguiente forma para la energía de deformación:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3)$$

Ecuación 14

Donde μ_i y α_i son constantes del material. El grado de la suma puede ser elevado si el ajuste de los datos experimentales así lo requiere. Nótese que para el caso incompresible, la energía de deformación es función solo de las elongaciones principales λ_i .

3.3.4. Ogden-Storakers (Hyperfoam)

El modelo de Ogden-Storakers[20], también conocido como Hyperfoam, se diferencia sustancialmente de los descritos anteriormente. Mientras los primeros están dirigidos a materiales incompresibles o levemente compresibles, el Hyperfoam está diseñado para describir elastómeros altamente compresibles, como es el caso de las espumas poliuretánicas analizadas en este trabajo. La densidad de energía de deformación es una forma modificada del potencial de Hill y tiene la siguiente forma:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[\hat{\lambda}_1^{\alpha_i} + \hat{\lambda}_2^{\alpha_i} + \hat{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3 + \frac{1}{\beta_i} (J_{el}^{-\alpha_i \beta_i} - 1) \right]$$

Ecuación 15

Con $\hat{\lambda}_i = (J^{th})^{-1} \lambda_i$ y $\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 = (J^{th})^{-1} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (J^{th})^{-1} J = J^{el}$. Donde J^{el} , J^{th} y J son las relaciones de volumen elástica, térmica y total respectivamente.

Si consideramos el primer término de la energía de deformación y dejamos de lado los efectos térmicos se obtiene la Ecuación 16.

$$W = \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[\hat{\lambda}_1^\alpha + \hat{\lambda}_2^\alpha + \hat{\lambda}_3^\alpha - 3 + \frac{1}{\beta} (J_{el}^{-\alpha \beta} - 1) \right]$$

Ecuación 16

Donde μ , α y β son los parámetros del material que representan el comportamiento del material compresible. β se encuentra relacionado con el módulo de Poisson efectivo (ν) por la Ecuación 17[21].

$$\beta = \frac{\nu}{1 - 2\nu}$$

Ecuación 17

La relación tensión-deformación se obtiene derivando la densidad de energía de deformación (Ecuación 15) respecto a la elongación correspondiente como sigue a continuación[21].

$$T_j = \frac{\partial U}{\partial \lambda_j} = \frac{2}{\lambda_j} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_j^{\alpha_i} - J^{-\alpha_i \beta_i})$$

Ecuación 18

Donde T_j es la tensión nominal.

La elección de este modelo constitutivo para simular la respuesta de la espuma poliuretánica se basó principalmente en tres motivos. En primer lugar, la disponibilidad de este modelo en paquetes comerciales de cálculo por elementos finitos, por lo que no fue necesaria su implementación en tales códigos. Otro factor fue el hecho de que se trata de un modelo hiperelástico especialmente diseñado para materiales altamente compresibles. Por último, existen antecedentes satisfactorios en bibliografía del empleo de este modelo para simular la respuesta mecánica tanto de poliuretanos[22] como de otras espumas similares[23].

3.4. Método inverso. Optimización numérica.

3.4.1. Introducción

El proceso de identificación de objetivos, variables y restricciones para un problema dado que se conoce como modelado. La construcción de un modelo adecuado es el primer paso, muchas veces el más importante, en el proceso de optimización. Si el modelo es demasiado simple, no dará información útil sobre el problema práctico, pero si es demasiado complejo, puede llegar a ser demasiado difícil de resolver.

Una vez que el modelo se ha formulado, se emplea un algoritmo de optimización para encontrar su solución. Por lo general, el algoritmo y el modelo son lo suficientemente complejos como para que la implementación computacional se vuelva necesaria. No existe ningún algoritmo de optimización universal. Por el contrario, existen numerosos algoritmos, cada uno de los cuales se adapta a un determinado tipo de problema de optimización. Es responsabilidad del usuario elegir un algoritmo que sea apropiada para su aplicación específica.

Una vez aplicado el algoritmo de optimización al modelo, es necesario reconocer si ha tenido éxito en su tarea de encontrar una solución. En muchos casos, existen elegantes expresiones matemáticas, conocidas como condiciones de optimalidad, para comprobar que el conjunto actual de variables es de hecho la solución del problema.

3.4.2. Formulación matemática

Matemáticamente hablando, la optimización es la minimización o la maximización de una función sujeta a restricciones en sus variables. Utilizamos la siguiente notación:

x es el vector de las variables, también llamadas incógnitas o parámetros;

f es la función objetivo, una función de x que queremos maximizar o minimizar;

c es el vector de las limitaciones que las incógnitas deben satisfacer. Esta es una función del vector de las variables x .

El número de componentes de c es el número de restricciones individuales que colocamos en las variables.

El problema de optimización se puede escribir como:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{sujeto a} \begin{cases} c_i(x) = 0, & i \in E, \\ c_i(x) \geq 0, & i \in I \end{cases}$$

Donde f y c_i son funciones de la variable x , y E, I son conjuntos de índices.

3.4.3. Optimización restringida y no restringida

Los problemas pueden ser clasificados de acuerdo a la naturaleza de la función objetivo y las restricciones (lineales, no lineales), el número de variables (grande o pequeño), la suavidad de las funciones (diferenciable o no diferenciable), y así sucesivamente. Sin embargo, posiblemente la diferencia más importante es entre los problemas que tienen restricciones en las variables y los que no.

Los problemas de optimización no restringida surgen directamente en muchas aplicaciones prácticas. Cuando existen limitaciones naturales sobre las variables, a menudo es seguro no tenerlas en cuenta y asumir que no tienen ningún efecto sobre la solución óptima. Problemas no restringidos surgen también como reformulaciones de problemas restringidos, en los que las limitaciones se sustituyen por términos penalización en la función objetivo.

Por otro lado, los problemas de optimización restringida se derivan de modelos que incluyen restricciones explícitas sobre las variables. Estas restricciones pueden ser simples tales como límites explícitos ($0 \leq x_i \leq 100$) o desigualdades que representan relaciones complejas entre las variables.

Si tanto la función objetivo como las restricciones son funciones lineales de x , el problema es de programación lineal. Ciencias de la gestión y la investigación de operaciones hacen un amplio uso de modelos lineales. Problemas no lineales de programación, en los que al menos algunas de las limitaciones o el objetivo son funciones no lineales, tienden a surgir de forma natural en las ciencias físicas e ingeniería, tal es el caso del presente trabajo.

3.4.4. Algoritmos de Optimización

Todos los algoritmos de minimización requieren que el usuario proporcione un punto de partida o valor semilla (x_0). Si el usuario tiene conocimientos suficientes sobre la aplicación y el conjunto de datos puede realizar una buena estimación de x_0 . De lo contrario, el punto de partida debe ser elegido de alguna otra manera arbitraria.

A partir de x_0 , los algoritmos de optimización generan una secuencia de iteraciones $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ que terminan cuando no se pueden realizar ningún progreso o se considere que se ha aproximado la solución con suficiente precisión. Al decidir cómo pasar de una iteración x_k a la siguiente, los algoritmos utilizan información acerca de la función f en x_k , y posiblemente también de iteraciones anteriores.

Existen dos estrategias fundamentales para pasar del punto actual x_k a la nueva iteración x_{k+1} [24]. La mayoría de los algoritmos de optimización se basan en una de estas dos: búsqueda de línea (*line search*) y región de confianza (*trust region*).

En la estrategia de búsqueda de línea, el algoritmo elige una dirección p_k y busca a lo largo de esta dirección, desde la iteración actual x_k , una nueva iteración con un menor valor de f . La distancia a moverse a lo largo de p_k puede ser aproximada resolviendo el siguiente problema de minimización unidimensional para encontrar longitud del paso α :

$$\min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha p_k)$$

Ecuación 19

Al resolver la Ecuación 19 exactamente, se obtendría el máximo beneficio de la dirección p_k , pero sería un proceso computacionalmente caro e innecesario. En su lugar, el algoritmo de búsqueda de línea genera un número limitado de longitudes de paso de prueba hasta que encuentra uno que ligeramente se aproxima al mínimo de la Ecuación 19. En el nuevo punto, se calculan una nueva dirección de búsqueda y longitud de paso y el proceso es repetido.

En la segunda estrategia, conocida como región de confianza, la información recopilada acerca de f se utiliza para construir una función modelo m_k cuyo comportamiento cerca del punto actual x_k es similar al de la función objetivo f . Debido a que el modelo m_k puede no ser una buena aproximación de f cuando x está lejos de x_k , la búsqueda de un mínimo de m_k es restringida a un entorno cercano a x_k . En otras palabras, se encuentra el paso candidato p resolviendo aproximadamente el siguiente subproblema:

$$\min_p m_k(x_k + p)$$

Ecuación 20

Donde $x_k + p$ se encuentra dentro de la región de confianza.

Si la solución candidato no produce un decrecimiento suficiente en f , se concluye que la región de confianza es muy grande. Por lo tanto, se la reduce de tamaño y se resuelve nuevamente la Ecuación 20. Por lo general, la región de confianza es una esfera definida por $\|p\|_2 < \Delta$, donde el escalar $\Delta > 0$ es llamado radio de la región de confianza. Regiones confianza elípticas y en forma de caja también pueden ser utilizadas.

La Figura 7 ilustra el ajuste del método de la región de confianza de una función f de dos variables. El punto actual se encuentra en un extremo de un valle, mientras que el minimizador x^* se encuentra en el otro extremo. El modelo cuadrático m_k , cuyos contornos elípticos se muestran como líneas discontinuas, se basa en la función y la información de las derivadas en x_k y posiblemente también en la información acumulada de las iteraciones y pasos anteriores. Un método de búsqueda de línea en este modelo buscaría el minimizador de m_k a lo largo del correspondiente paso (mostrado en la figura); esta dirección permite sólo una pequeña reducción en f , a pesar de tomar un paso óptimo. En cambio, un método de región de confianza, avanza hacia el minimizador m_k dentro del círculo punteado, lo que implica una reducción más significativa en f .

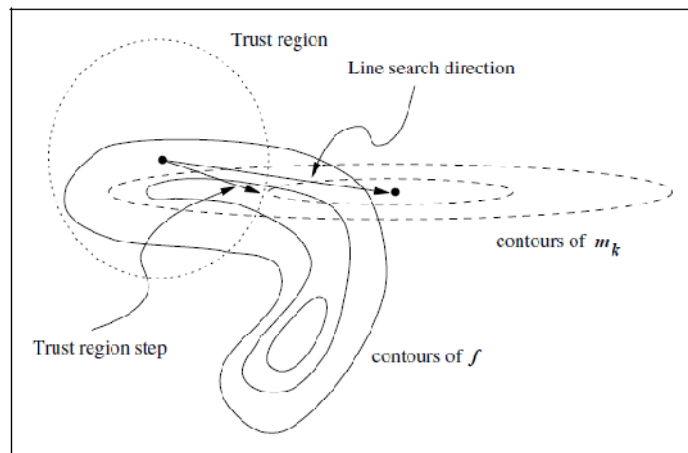


Figura 7. Pasos para los métodos de la región de confianza y búsqueda de línea[24].

A continuación se profundiza algo más en el funcionamiento de los métodos basados en una región de confianza por ser uno de estos el algoritmo de optimización empleado en el presente trabajo.

3.4.4.1. Métodos de Región de Confianza (Trust Region Methods)

3.4.4.1.1. Generalidades

El modelo m_k de la Ecuación 20 es definido usualmente como una función cuadrática de la forma:

$$m_k(x_k + p) = f_k + p^T \nabla f_k + \frac{1}{2} p^T B_k p$$

Ecuación 21

Donde f_k , ∇f_k , y B_k son, respectivamente, un escalar, un vector, y una matriz. Como la notación indica, f_k y ∇f_k son los valores correspondientes al punto x_k . La matriz B_k es el Hessiano ($\nabla^2 f_k$) o alguna aproximación del mismo.

Si asumimos que los primeros dos términos de las funciones modelo m_k (Ecuación 21) en cada iteración x_k son idénticos a los dos primeros términos de la serie de Taylor de f alrededor de x_k , entonces tendremos:

$$m_k(p) = f_k + \nabla f_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p$$

Ecuación 22

$$f(x_k + p) = f_k + p^T \nabla f_k + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k + tp) p$$

Ecuación 23

Para un escalar $t \in (0,1)$ y como $m_k(p) = f_k + \nabla f_k^T p + O(\|p\|^2)$ la diferencia entre $m_k(p)$ y $f(x_k + p)$ es $O(\|p\|^2)$, por lo que el error de aproximación es menor cuanto menor sea p .

Cuando $B_k = \nabla^2 f_k$ (Método de Newton), la función modelo coincide con la serie de Taylor hasta el tercer término. El error de aproximación para ese caso es $O(\|p\|^3)$ por lo que el modelo es especialmente preciso cuando p es pequeño.

Para obtener cada paso, se resuelve el siguiente subproblema

$$\min_{p \in \mathbb{R}^n} m_k(p) = f_k + \nabla f_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad \|p\| < \Delta_k$$

Ecuación 24

La solución p_k^* de la Ecuación 24 es el minimizador m_k en la esfera de radio Δ_k . El enfoque de la región de confianza requiere la resolución de una secuencia de subproblemas (Ecuación 24) en los que tanto la función objetivo y la restricción ($p^T p \leq \Delta_k^2$) son cuadráticas. La solución de la Ecuación 24 es fácil de identificar en algunos casos particulares (B_k positivamente definida y $\|B_k^{-1} \nabla f_k\| < \Delta_k$) y no es tan obvia en otros, aunque puede ser aproximada sin mayores dificultades.

3.4.4.1.2. Modelos para Métodos de la Región de Confianza

Si fijamos $B_k = 0$ en la Ecuación 21 y definimos la región de la confianza utilizando la norma Euclidiana, el subproblema de la Ecuación 20 se convierte en:

$$p_k = - \frac{\Delta_k \nabla f_k}{\|\nabla f_k\|}$$

Ecuación 25

La Ecuación 25 representa el paso que implica el descenso más rápido. La longitud del paso es determinada por el radio de la región de confianza. El método de la región de confianza y el de búsqueda de línea son esencialmente el mismo en este caso.

Se obtiene un algoritmo más interesante eligiendo $B_k = \nabla^2 f_k$ en el modelo cuadrático de la Ecuación 21. Debido a la restricción $\|p\|_2 < \Delta_k$ no hay necesidad de hacer nada especial cuando $\nabla^2 f_k$ no es definida positivamente. Este método, conocido como método de la región de confianza de Newton ha demostrado ser altamente eficaz en la práctica[24].

Por último, si la matriz B_k se define por medio de una aproximación por el método de cuasi-Newton en el modelo m_k dado por la Ecuación 21, se obtiene la variante cuasi-newtoniana del método de la región de confianza.

3.4.4.1.3. Comentarios sobre el algoritmo

La primer cuestión que surge es la estrategia para la elección del radio Δ_k . Esta elección se basa en la coincidencia entre la función modelo m_k y la función objetivo f en las iteraciones previas. Dado un paso p_k se define la relación ρ_k según la Ecuación 26.

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{m_k(0) - m_k(p_k)}$$

Ecuación 26

El numerador es llamado reducción real y el denominador, reducción prevista. Nótese que debido a que el paso p_k es obtenido minimizando m_k sobre un región que incluye al paso $p=0$, la reducción prevista resultará siempre no negativa. Por lo tanto si ρ_k es negativa, el nuevo valor de la función objetivo $f(x_k+p_k)$ es mayor que el valor actual $f(x_k)$ y el paso debe ser rechazado.

Por otro lado, si ρ_k es cercana a 1, el modelo ajusta presenta un buen ajuste de la función objetivo en este paso, por lo que resulta seguro expandir la región de confianza para la próxima iteración. En caso que ρ_k sea positivo pero no cercana a 1, no se altera el tamaño de la región de confianza. Por último, si es está cercana a cero o es negativa, la región de confianza es reducida.

La base del algoritmo de la implementación será la resolución de la Ecuación 24. Existen diversas estrategias para encontrar soluciones aproximadas que alcanzan una reducción de m_k comparables a las logradas con el así llamado punto de Cauchy. La descripción de estas estrategias queda fuera del alcance de este trabajo pues el algoritmo de optimización en sí no fue programado durante su desarrollo. Los conocimientos generales sobre el método de optimización brindados hasta este punto

deberían ser suficientes para continuar la lectura de este escrito sin mayores problemas.

4. Materiales

Las espumas poliuretánicas modeladas fueron especialmente sintetizadas para su utilización como reemplazo del núcleo pulposo de discos intervertebrales.

Tales materiales son sistemas poliuretánicos autocurables formulados a partir de dos componentes. La identidad de los reactivos empleados y la composición de los materiales estudiados tienen carácter confidencial debido a un contrato de confidencialidad firmado en aquel entonces con una compañía nacional que financió el proyecto. En el trabajo original se obtuvieron materiales con una gama de propiedades variando el contenido de entrecruzante en 25, 50 y 75%, denominando a estas muestras P25, P50 y P75. La formulación P50 resultó la más apropiada para esta aplicación en términos de carga resistente, dado que soporta los niveles de carga fisiológica[25].

Las probetas fueron preparadas mediante inyección de las formulaciones reactivas en un molde con dimensiones similares a las dimensiones del núcleo pulposo nativo de vértebras lumbares y se mantuvieron a 37°C durante 24 h. Posteriormente se guardaron en sobres de polietileno cerrados herméticamente.

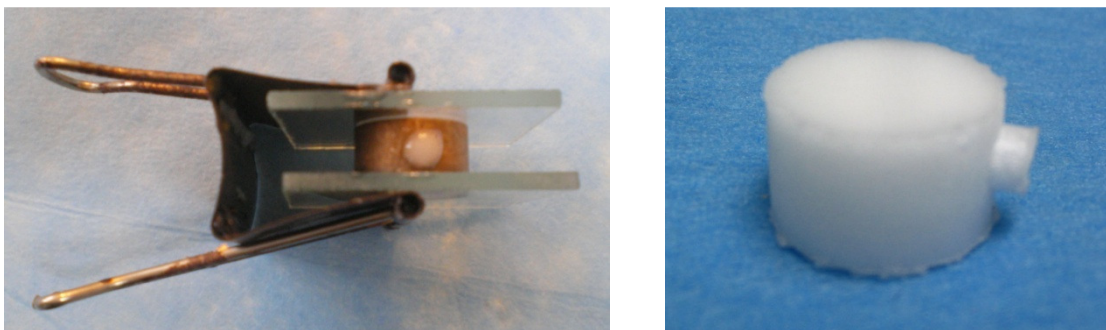


Figura 8. Molde utilizado para preparar muestras mediante inyección (izquierda) y muestra obtenida[25].

La geometría del molde cerrado confina el espumado y genera una morfología de poros más pequeños. Esta metodología permite obtener muestras similares a las obtenidas en la aplicación real, dado que el fluido poliuretánico se inyecta en un espacio confinado.

En el presente estudio se trabajó sobre la formulación P50 por haber resultado, como ya se mencionó anteriormente, la más apta para la aplicación. El principal desafío fue la limitada cantidad de muestras, lo que motivó que la cantidad de ensayos fuera la mínima e indispensable necesaria para poder calibrar el modelo constitutivo elegido con las herramientas desarrolladas.

5. Métodos

5.1. Caracterización Mecánica

Convencionalmente, la determinación de los parámetros del material se encuentra basada en el ensayo de probetas de geometrías estandarizadas, de tal manera que se generan estados particulares de tensión o deformación. Luego, los parámetros desconocidos son obtenidos por ajuste de los datos experimentales. Para las espumas, un amplio rango de ensayos han sido empleados[23][26]. Por lo general, se emplea una combinación de tracción uniaxial, compresión y compresión confinada, aunque también podría sustituirse el primero por un ensayo de corte. Cuando se trata de espumas, es importante realizar algún tipo de ensayo de compresión triaxial.

La elección de los ensayos a realizar se vio restringida a las probetas disponibles. Sin embargo, el implante en servicio se ve sometido a estados principalmente compresivos en un espacio confinado por el anillo fibroso. De esta manera, con ensayos de compresión uniaxial y confinada se captura la respuesta en compresión del material en estados uni y multiaxiales.

5.1.1. Compresión Uniaxial

El ensayo se realizó en una máquina universal de ensayos Instron Modelo 4467 utilizando control por desplazamiento. Se empleó una celda de carga de 500N y velocidad de travesa 1mm/min. Se trabajó probetas cilíndricas de 15.90mm de diámetro y 9.80mm de altura.

Uno de los principales inconvenientes del ensayo de compresión uniaxial es la aparición de fricción entre las caras de la probeta y los platos de la máquina. La restricción de la expansión lateral de la probeta induce tensiones radiales en dirección perpendicular a la carga que incrementan los valores de carga registrados, dejando de ser un ensayo puramente uniaxial. Para solucionar esto se empleó un film de teflón (130 μ m de espesor) como lubricante (Figura 9).



Figura 9. Film lubricante de teflón empleado en los ensayos de compresión uniaxial.

Según la norma ASTM correspondiente[27] es necesario efectuar una corrección a los datos obtenidos para bajos desplazamientos debido a que estos son atribuidos a un asentamiento y alineamiento inicial de la probeta (en este caso del sistema en serie film+probeta+film). Los detalles de esta corrección pueden ser consultados en el Anexo I.

5.1.2. Compresión Confinada

5.1.2.1. Dispositivo de confinamiento

Para los ensayos de compresión confinada se utilizó un dispositivo especialmente diseñado. El mismo consiste en una camisa de bronce, que actúa como cámara de confinamiento(1), de diámetro interior 15.9mm y exterior 44mm abulonada a un plato inferior de acero inoxidable(2). Completan el dispositivo, un plato superior de acero inoxidable(3) y un pistón(4) de diámetro 15.9mm. El conjunto puede observarse en la Figura 10.

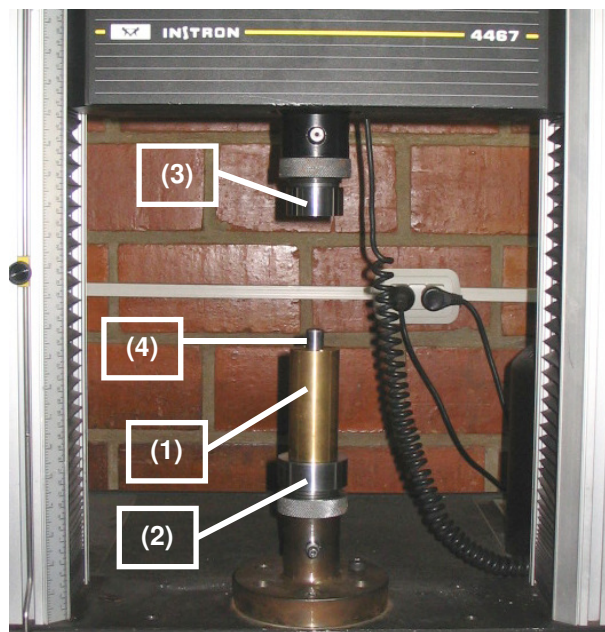


Figura 10. Equipamiento empleado para los ensayos de compresión confinada[25].

La probeta es introducida en la cámara y, al accionar la máquina, el plato superior ejerce una fuerza axial sobre la probeta a través del pistón. Como la cámara de confinamiento está construida de bronce, material cuya rigidez es varios órdenes de magnitud mayor a la de la espuma ensayada, es razonable asumir que la expansión lateral de la probeta es nula.

5.1.2.2. Condiciones del ensayo

El ensayo se realizó en una máquina universal de ensayos Instron Modelo 4467 utilizando control por desplazamiento. Se empleó una celda de carga de 30kN y

velocidad de travesa 1mm/min. Se utilizó la misma geometría de probetas cilíndricas que para compresión uniaxial.

Nótese como la restricción lateral incrementa la carga axial al punto de que la celda de carga de 500N no pudo ser empleada por excederse su carga máxima admisible. El aumento en la fuerza axial por la restricción lateral es el caso extremo de lo que ocurre en un ensayo de compresión uniaxial mal lubricado, como fue explicado anteriormente.

5.2. Modelado por Elementos Finitos

El modelado por elementos finitos es uno de los paradigmas de la ingeniería moderna y una herramienta muy poderosa en lo que ha mecánica de materiales respecta. No sólo permite resolver geometrías complejas sino que además permite la implementación de modelos constitutivos no tradicionales adaptándose al desarrollo de nuevos materiales. Es un recurso muy popular entre investigadores, siendo numerosos los trabajos publicados[22][23][26][28] resolviendo casos de geometría o modelado constitutivo de complejidad elevada; y en algunos casos, con ambas complicaciones.

5.2.1. Software de cálculo

Las distintas simulaciones fueron realizadas empleando Abaqus/CAE 6.9-EF1. Este software es un entorno completo de Abaqus que proporciona una interfaz simple y consistente para la creación, presentación, seguimiento y evaluación de los resultados de los códigos de cálculo por elementos finitos que trae incorporados.

El CAE está dividido en módulos, donde cada módulo define un aspecto lógico del proceso de modelado como la definición de la geometría, la definición de las propiedades del material, y la generación de una malla. Al pasar de un módulo a otro, se va construyendo el modelo y Abaqus/CAE genera un archivo de entrada que es leído por los códigos de cálculo. Estos llevan a cabo el análisis, envían la información nuevamente a Abaqus/CAE, para permitir al usuario supervisar el progreso del trabajo, y generan una base de datos de salida. Por último, el software tiene incorporado un módulo de visualización para leer la base de datos de salida y ver los resultados de su análisis.

5.2.2. Simulación de Ensayos Mecánicos

5.2.1.1. Construcción del Modelo

La geometría del modelo consiste básicamente en la probeta cuyas dimensiones fueron detalladas en el punto (5.1.1.). Aprovechando la simetría de revolución se construyó un modelo axisimétrico. Se activó la opción 'Nlgeom' para no ignorar los efectos no lineales de grandes deformaciones y desplazamientos del problema. Entre las fuentes de no linealidades en cálculo FEM se pueden mencionar: materiales no lineales (ley constitutiva no lineal), no linealidades geométricas (grandes desplazamientos, la configuración de referencia cambia a cada iteración) y problemas de contacto de superficies. En este trabajo, el origen de la no linealidad es el modelo constitutivo adoptado.

Dada la simplicidad de la geometría y el estado tensional se utilizó un mallado estructurado (Figura 11) con elementos de aproximadamente 1mm y de tipo CAX4R (elementos axisimétricos). En ambos casos de carga no tiene sentido utilizar un proceso adaptativo de mallado, obteniendo una distribución de tamaños de elemento para minimizar el error. Para los dos ensayos los campos de tensión son homogéneos, por lo que se espera que los resultados con este sencillo mallado sean aceptables.

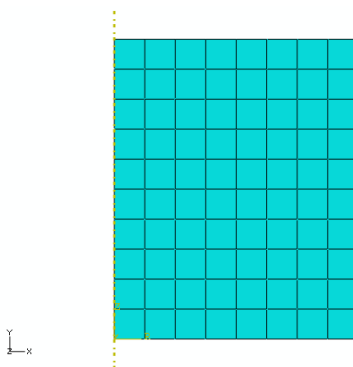


Figura 11. Modelo mallado de la probeta. Obsérvese el eje de simetría.

Las condiciones de borde para el caso uniaxial fueron $U_2=0$ en los nodos inferiores y $U_2=-2$ en los superiores, siendo U_2 el desplazamiento en la dirección y indicada en la figura. Para el caso confinado, como la cámara de confinamiento no permite que se expanda lateralmente el material, es necesario además imponer $U_1=0$ en los nodos laterales. Las condiciones de contorno se resumen para ambos casos en la Figura 12.

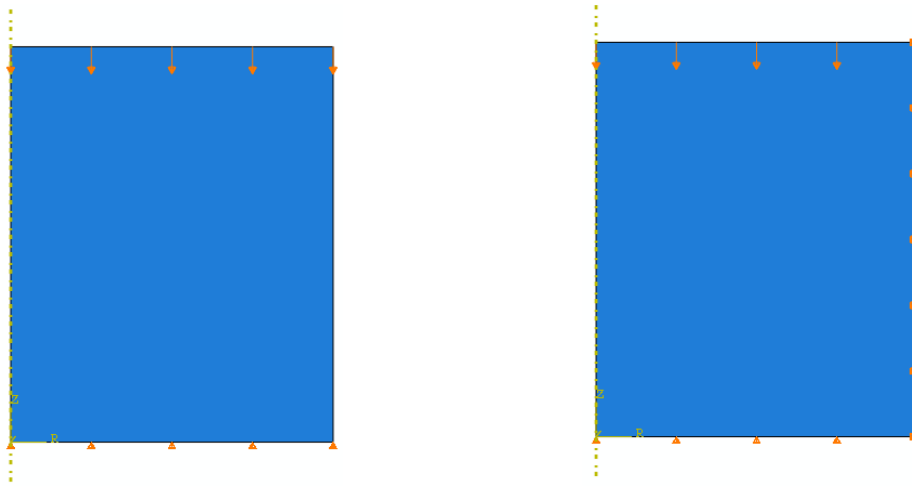


Figura 12. Condiciones de contorno para los casos de compresión uniaxial (izquierda) y confinada (derecha).

Cabe destacar que la simulación de ambos ensayos no requiere de aplicación de carga alguna debido a que ambos fueron realizados en una máquina de control por desplazamiento, donde lo que se impone no es una carga sino precisamente un desplazamiento a la cara superior de la probeta. Esto es fácilmente modelado imponiendo como condición de contorno en los nodos superiores un desplazamiento finito.

5.2.1.2. Propiedades de los materiales

Las probetas elastoméricas se modelaron mediante empleando el modelo constitutivo Hyperfoam de primer orden ($n=1$ en la Ecuación 15). Como ya se mencionó en el punto (3.3.4.), este es un modelo de tres parámetros. El pistón, la cámara de confinamiento y los platos de la máquina fueron modelados como condiciones de contorno.

5.2.1.3. Obtención de Resultados

Abaqus consiste en distintos subprogramas que interactúan entre sí, como ya se detalló en el punto (5.2.1.). En la resolución de un determinado trabajo se generan varios tipos de archivos, pero de entre ellos podemos distinguir, por su mayor importancia, los siguientes tres:

- *.cae: contienen toda la información del modelo, geometría, materiales, mallado, etc. Este archivo es leído por el CAE para actuar como interfaz con el usuario durante la construcción y análisis del modelo.

- *.inp: es el archivo que contiene toda la información necesaria para resolver el problema (condiciones de borde, cargas, campos a calcular, etc.) y que el CAE escribe para que el código de cálculo lea y resuelva.

- *.odb: es la base de datos de salida, contiene la solución de los cálculos que se hayan especificado en el *.inp. Este archivo es abierto por el módulo de visualización para que el usuario visualice el campo solución.

El módulo de visualización permite abrir el *.odb y de esta manera el usuario puede visualizar los resultados y postprocesarlos.

Repartida en estos tres archivos se encuentra toda la información necesaria para analizar el modelo, pero se deben destacar los últimos dos por ser ambos manipulados por el programa de modelado inverso desarrollado en este trabajo y descrito en la sección siguiente.

Al correr una simulación en Abaqus, es posible especificar la frecuencia con la que se quiere obtener el valor de campos previamente especificados. Estos datos son tabulados en función de un tiempo relativo (de 0 a 1, siendo 1 el final de proceso de carga) en un archivo de texto *.rep denominado reporte.

En esta sección del modelado se requieren simular curvas carga vs desplazamiento. Para este último, se solicitó $U2$ en uno de los nodos superiores, debido a que la condición de desplazamiento se impuso sobre todos estos nodos y con cualquiera de ellos se puede monitorear el desplazamiento. La obtención de la carga no es tan sencilla debido a que el método de elementos finitos trabaja con cargas nodales, por lo que la fuerza que censa la celda de carga en el ensayo, sería la suma de las fuerzas nodales de reacción en todos nodos superiores. Lamentablemente, no es posible reportar la suma de estas reacciones y por lo tanto debió ser creada una función específica; "ReadRpt", tratada en el punto (5.3.2.); para obtener a partir tales fuerzas nodales la fuerza de reacción total.

5.2.3. Simulación del Disco Intervertebral en Servicio

Una vez calibrada la ley constitutiva correspondiente se empleó un modelo simplificado de disco intervertebral lumbar para discutir algunos aspectos de la mecánica del implante. Empleando los resultados obtenidos y datos de bibliografía se compararon los desplazamientos y tensiones generados para el caso de un disco intacto y uno implantado, así como también se analizó la condición denucleada.

5.2.3.1. Construcción del Modelo

La geometría del modelo se basa en los valores reportados en bibliografía discos intervertebrales humanos. El ancho lateral de todo el disco es aproximadamente $55,38 \pm 2$ mm, y la profundidad, $37,67 \pm$ mm[29]. Las dimensiones laterales del núcleo pulposo encontradas fueron de $36,54 \pm 2$ mm, y $20,8 \pm 0,7$ mm[29] para el anillo fibroso.

A partir de estos valores, el área de todo el disco se estima en aproximadamente 1925mm^2 , mientras que el área del núcleo pulposo sería aproximadamente 598mm^2 (cerca del 30% de la superficie de todo el disco). Para simplificar las consideraciones geométricas del modelo, la forma del disco se aproximó a un cilindro, y la relación de áreas se mantuvo constante para simular mejor las presiones experimentadas debido a la carga del disco[30]. Esta aproximación permitió el empleo de un modelo de geometría axisimétrica. Por lo tanto se obtuvo un radio equivalente de 24,5mm para la totalidad del disco, con 14,0mm para el núcleo pulposo, dejando el anillo fibroso de 10,5mm de espesor.

Respecto a la altura del disco intervertebral (núcleo pulposo y anillo fibroso) un valor promedio encontrado frecuentemente en bibliografía es 10mm[30][31], la misma se consideró uniforme en toda la sección transversal. Basado en la altura del disco, se impuso una deformación en compresión de un 20% en los extremos del conjunto vertebral. Se omitieron las mesetas vertebrales, de aproximadamente 1mm de espesor para simplificar aún más el modelo. La altura de los cuerpos vertebrales se consideró de 29mm. El espesor de la capa de hueso cortical se tomó como 2 mm, y el resto, como hueso trabecular[30]. El modelo empleado se presenta en la Figura 13.

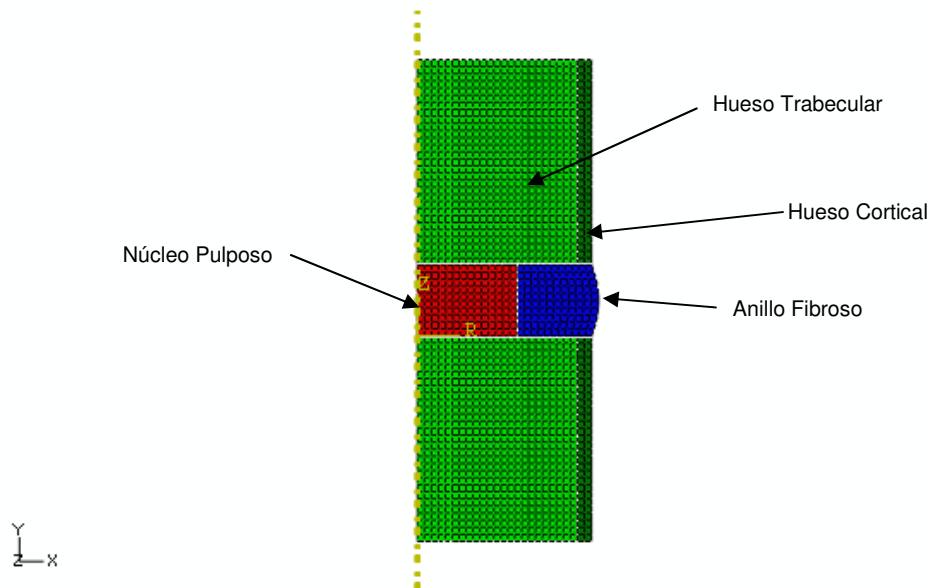


Figura 13. Modelo de elementos finitos del conjunto vertebral.

Dado que las fibras de colágeno se insertan en las vértebras superior e inferior, los nodos lindantes pertenecientes al anillo y las vértebras se consideraron solidarios mientras que se estableció una condición de contacto entre el núcleo pulposo y el anillo a fin de evitar la penetración del implante en este último.

5.2.3.2. Propiedades de los Materiales

Las propiedades mecánicas de los huesos corticales y esponjoso del cuerpo vertebral se encuentran bien establecidas y fueron tomadas de bibliografía[32]. En el caso del anillo fibroso y el núcleo pulposo, en cambio, los valores reportados varían ampliamente[33][34][35][36][37].

El comportamiento no lineal y anisotrópico del anillo fibroso fue simplificado y se modeló este como un sólido elástico Hookeano. La consideración del anillo como isotrópico tiene sentido ya que sólo se estudiarán casos de compresión. La naturaleza anisotrópica del anillo es relevante en otros modos de carga como torsión y flexión. Los módulos de Young y Poisson se obtuvieron de valores reportados en bibliografía para cartílagos porcinos[38].

Con el deterioro propio de la edad, el núcleo pulposo se va pareciendo más a un sólido que a un fluido[39]. Por esta razón se lo modeló como un sólido elástico isotrópico y no como un fluido incompresible como se ha reportado previamente en bibliografía[40]. De todos modos, los núcleos degenerados conservan aún una cierta cantidad de fluido, lo que sugiere que una mejor aproximación sería modelar el núcleo como un sólido elástico con un alto módulo de Poisson. El núcleo natural transfiere las cargas axiales al anillo incrementando la presión en las paredes interiores del anillo y consecuentemente desplazándolas hacia afuera. Para simular este fenómeno de transferencia de carga de manera efectiva, se empleó el mayor módulo de Poisson posible.

Para describir el comportamiento del anillo y el núcleo se ha empleado también la teoría poroelástica[30]. Esto implica un esfuerzo computacional innecesario ya que este enfoque es prescindible en condiciones de carga cuasi estática. La situación es distinta en caso de estudiar, por ejemplo, la respuesta al creep del material.

En cuanto a los huesos cortical y trabecular, existen antecedentes en bibliografía[39] donde son tratados como sólidos isotrópicos Hookeanos.

Los parámetros utilizados en la definición de todos estos materiales se listan en la Tabla 1.

	E [MPa]	ν
Hueso Cortical	12000	0.3
Hueso Trabecular	100	0.2
Núcleo Pulposo	1	0.4999
Anillo Fibroso	0.45	0.46

Tabla 1. Propiedades elásticas utilizadas en el FEM.

Para modelar el implante de núcleo se utilizó el modelo Hyperfoam con los parámetros obtenidos en el punto (6.2.2.3.) listados más adelante en la Tabla 5.

5.3. Método Inverso y Optimización Numérica

Cuando es posible determinar la ecuación que gobierna el problema, la forma y tamaño del dominio, las condiciones iniciales y de contorno, las propiedades del material, y las fuentes internas y fuerzas externas o entradas, entonces el análisis para determinar un campo incógnita se considera matemáticamente bien planteado y puede ser resuelto. Si se desconoce o no se encuentra disponible cualquiera de estos elementos, entonces el problema se vuelve incompletamente definido y es de tipo indirecto o inverso.

El enfoque de modelado inverso a utilizar se resume en la Figura 14 y consiste básicamente en tres partes principales: ensayos experimentales, modelado FEM y programación inversa.

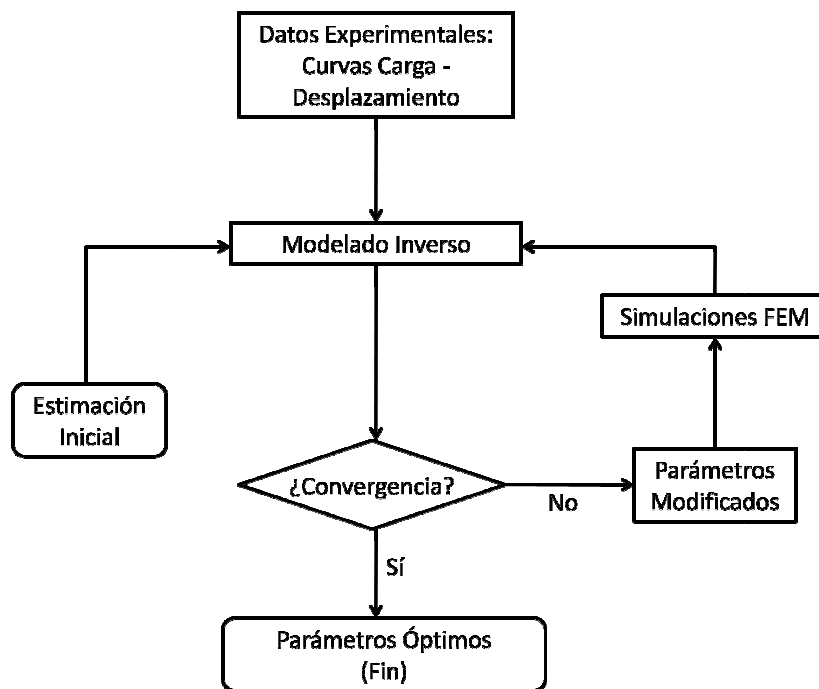


Figura 14. Diagrama de Flujo del modelado inverso utilizado para obtener los parámetros de la espuma a partir de curvas de ensayos de compresión uniaxial y confinada.

A continuación se hace una breve descripción del programa realizado para el modelado inverso de la espuma y su interacción con el software de cálculo FEM. Por último se hace una reseña de los métodos de calibración empleados y se dan las pautas para la comparación de sus resultados.

5.3.1. Desarrollo del Programa Inverso

Para la calibración del modelo Hyperfoam se desarrolló un programa en MATLAB que realiza simulaciones iterativas ajustando los parámetros del modelo constitutivo. MATLAB es un lenguaje de computación técnica de alto nivel y un entorno interactivo para desarrollo de algoritmos, visualización de datos, análisis de datos y cálculo numérico.

En resumidas cuentas, el programa desarrollado realiza las siguientes acciones:

1. Modifica los parámetros del modelo constitutivo en el *.inp,
2. Invoca a Abaqus y simula el ensayo seleccionado,
3. Compara con los datos experimentales previamente cargados,
4. Según el resultado del algoritmo de optimización, modifica los parámetros constitutivos,

Este proceso se realiza iterativamente hasta que se alcanza algunas de las condiciones de terminación especificadas.

Para la validación del funcionamiento del programa, se generaron por FEM curvas carga-desplazamiento en compresión confinada y uniaxial utilizando valores de parámetros arbitrarios. Luego, se corrió el programa verificando la convergencia hacia estos valores nuevamente.

5.3.2. Estructura del Programa

El programa desarrollado consiste de un cuerpo principal que llama a distintas funciones cada una de las cuales desarrolla un parte lógica del proceso de calibración y optimización numérica. El código del programa puede ser consultado en el Anexo II. La Figura 15 representa esquemáticamente la estructura del programa.

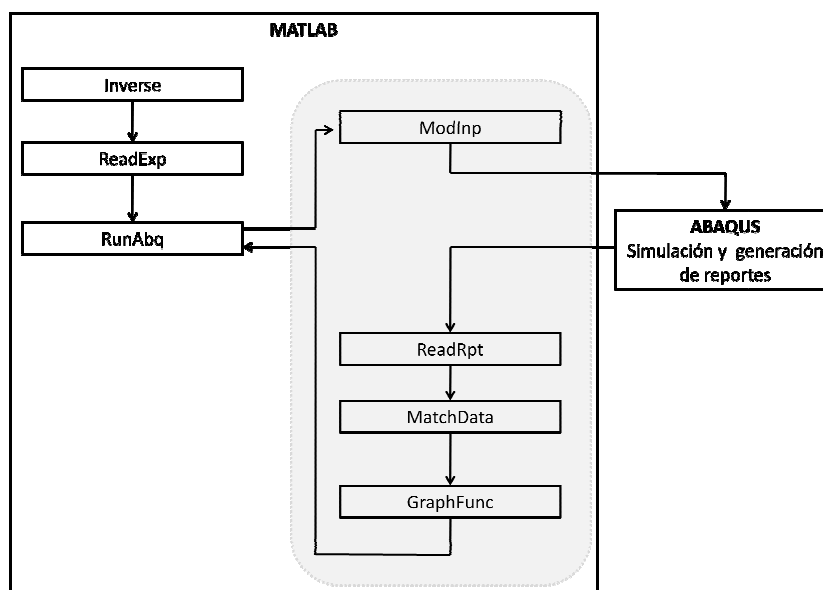


Figura 15. Representación esquemática de la sintaxis del Programa Inverso.

“Inverse” es el cuerpo principal del programa y de él son llamadas las distintas funciones. “ReadExp” es una función que lee los datos experimentales de carga y desplazamiento del archivo de texto tal cual es creado por el software de la máquina de ensayos. Una vez cargados los datos experimentales, el programa lee los valores semilla y comienza el ajuste por mínimos cuadrados de los datos experimentales al invocar la función “RunAbq”.

En este último módulo, se modifica el archivo *.inp (mediante la función “ModInp”) con los nuevos parámetros y se invoca al Abaqus como proceso externo para correr las simulaciones correspondientes y generar los reportes de salida (archivos de texto *.rep que contienen los datos de carga-desplazamiento simulados). La función “ReadRpt” lee estos datos, mientras que “MatchData” realiza la interpolación necesaria para que puedan ser comparados con los datos experimentales. Por último, “GraphFunc” invoca las funciones de graficación de Matlab, presentando en cada iteración las curvas experimentales y las simuladas, para que el usuario pueda visualizar la evolución del ajuste (Figura 16).

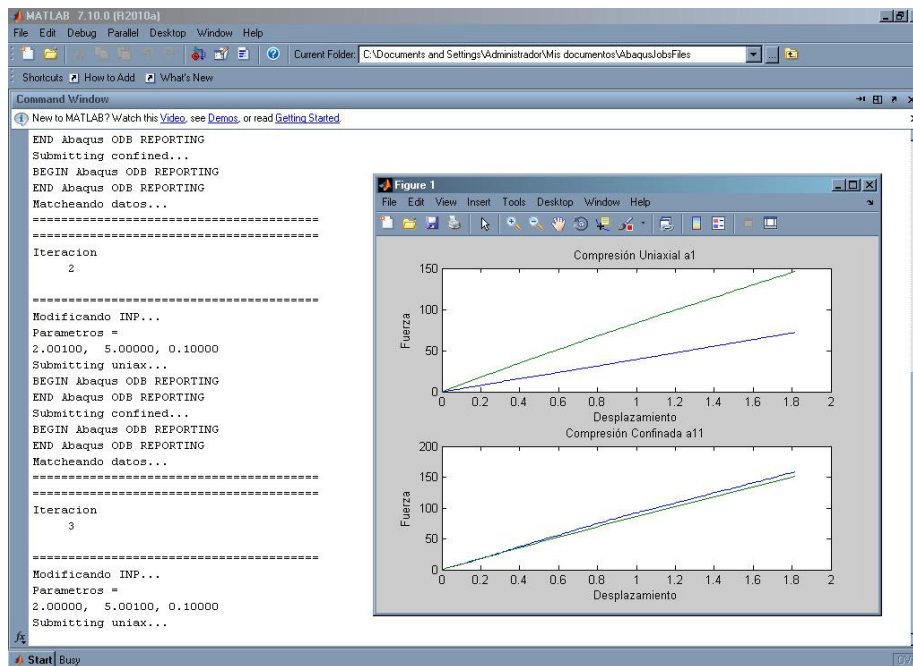


Figura 16. Programa de modelado inverso.

Fue mencionado en el punto (5.2.1.) que Abaqus como cualquier programa de cálculo numérico no genera como solución una función continua sino valores numéricos discretos. Por este motivo es necesaria la utilización de “MatchData”. La función de ajuste de mínimos cuadrados empleada (Isqcurvefit) requiere que tanto los datos experimentales como los simulados correspondan a los mismos valores de abscisas. De esta manera se interpola linealmente la solución FEM para obtener valores de carga a desplazamientos que coincidan con los del registro experimental.

La función `lsqcurvefit`[41], incorporada en Matlab, es la base del programa de modelado inverso. Esta función busca los coeficientes x que resuelvan la Ecuación 27, utilizando por defecto un algoritmo de región de confianza.

$$\min_x \|F(x, xdata) - ydata\|_2^2 = \min_x \sum_i (F(x, xdata_i) - ydata_i)^2$$

Ecuación 27

Donde $xdata$ e $ydata$ son los datos de entrada y salida respectivamente y F es una función de $xdata$ y los parámetros x . En el caso particular de este trabajo, la función “RunAbq” arroja como resultado el vector F , con los valores ya interpolados de carga.

El criterio de terminación de la función `lsqcurvefit` se definió mediante la opción ‘Tolx’, que establece el proceso se detendrá cuando el vector solución varíe menos que una determinada tolerancia a especificar, por defecto este valor es 10^{-6} .

5.3.3. Obtención de Parámetros Constitutivos.

Empleando el Programa Inverso se calibró el modelo constitutivo empleando tres estrategias o métodos distintos. El primer método, denominado “Uniax”, consiste en calibrar los parámetros empleando sólo datos de compresión uniaxial. La segunda estrategia, denominada “Conf”, consistió en utilizar sólo los datos de compresión confinada. Por último, se calibró empleando los datos experimentales de ambos tipos de compresión, método denominado “Uniax + Conf”.

Las distintas estrategias serán comparadas evaluando los valores residuales (Ecuación 28) y la sumatoria del cuadrado de los valores residuales (Ecuación 29).

$$F(x, xdata) - ydata$$

Ecuación 28

$$\sum (F(x, xdata) - ydata)^2$$

Ecuación 29

6. Resultados y Discusión

6.1. Caracterización Mecánica

6.1.1. Resultados

6.1.1.1. Compresión Uniaxial

La Figura 17 representa los datos de carga y desplazamiento registrados durante el ensayo de compresión. Se señala la zona donde se manifiestan los efectos de alineamiento inicial de la probeta descritos en el punto (5.1.1.). Los detalles de la compensación de este error pueden ser consultados en el Anexo I.

A partir de los valores compensados, se calculan las tensiones y deformaciones nominales. Los resultados se presentan en la Figura 18.

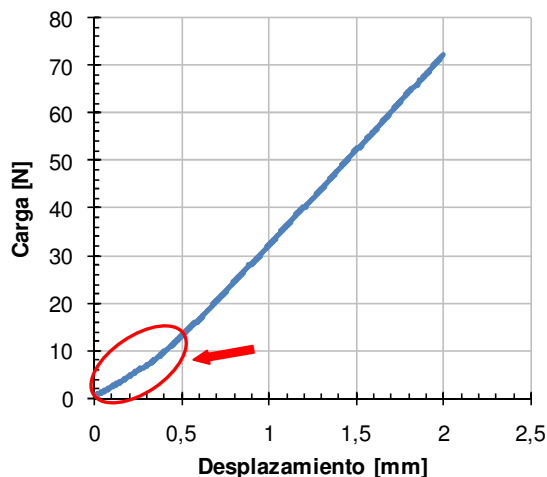


Figura 17. Compresión uniaxial. Datos sin compensar.

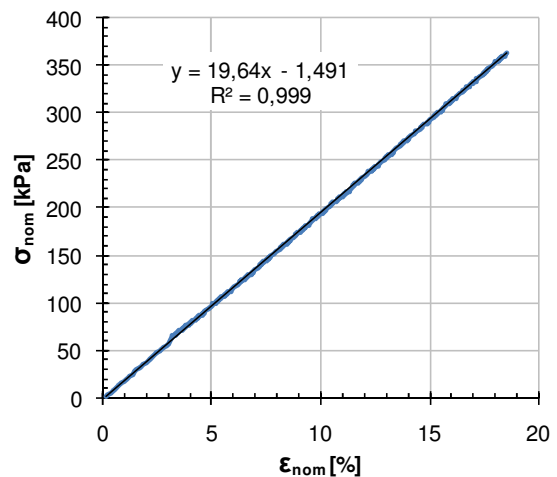


Figura 18. Curva tensión-deformación nominales. Datos compensados.

6.1.1.2. Compresión Confinada

La Figura 19 muestra los resultados de los ensayos de compresión confinada realizados. Puede observarse un aumento repentino de la carga a deformaciones volumétricas superiores al 35% debido al proceso de densificación del material.

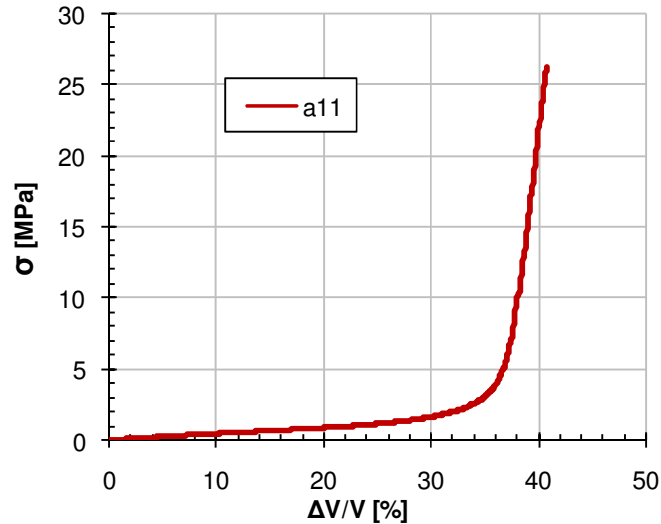


Figura 19. Curvas tensión-deformación para los ensayos de compresión confinada.

6.1.2. Discusión

6.1.2.1. Compresión Uniaxial

De la observación de la curva tensión-deformación de la Figura 18 se podría concluir que es posible modelar esta espuma como un sólido que cumple la Ley de Hooke con un Módulo de Young (E) aproximadamente igual 2MPa. La realidad es que para cálculos en sollicitaciones uniaxiales esto sería totalmente válido. Si bien la Ley de Hooke contempla dos parámetros, el otro es el módulo de Poisson (ν), en casos uniaxiales la relación entre tensiones y deformaciones detallada en el (3.2.2.4.) involucra sólo a E . Sin embargo, este modelo colapsaría al intentar reproducir los resultados obtenidos en compresión confinada, ya que en tal estado de carga, el material exhibe su no linealidad.

A la hora de efectuar ensayos para capturar el comportamiento mecánico de un elastómero es necesario tomar ciertas precauciones ya que en el afán de querer capturar el mayor rango de deformaciones posibles se pueden cometer errores triviales que lleven a la mala interpretación de los datos obtenidos. En los ensayos de compresión uniaxial, la lubricación empleada fue efectiva hasta un cierto nivel de carga, una vez alcanzado se observó cierto abarillamiento en la probeta (Figura 20), señal de que el estado tensional aplicado ya no es puramente uniaxial, invalidando los datos a adquirirse posteriormente. Dos ejemplos del efecto de la lubricación en los datos experimentales de compresión uniaxial se presentan en la Figura 21.

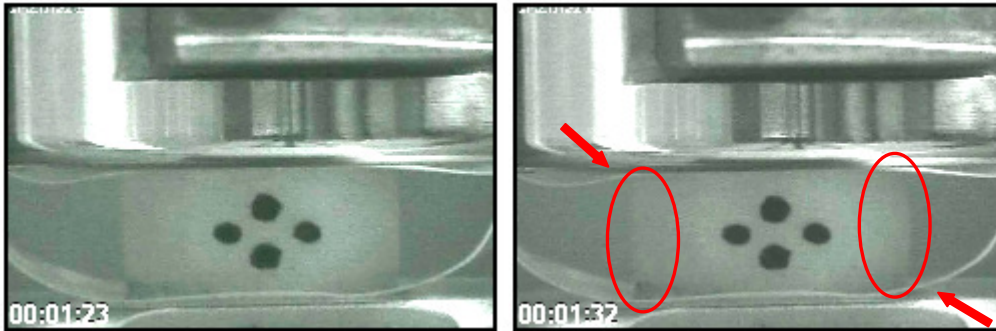


Figura 20. Monitoreo visual de ensayo de compresión. (Izq.) Probeta sin abarrillar, ensayo todavía válido. (Der.) Se indica el abarrillamiento en la probeta, la tensión en la probeta deja de ser exclusivamente uniaxial.

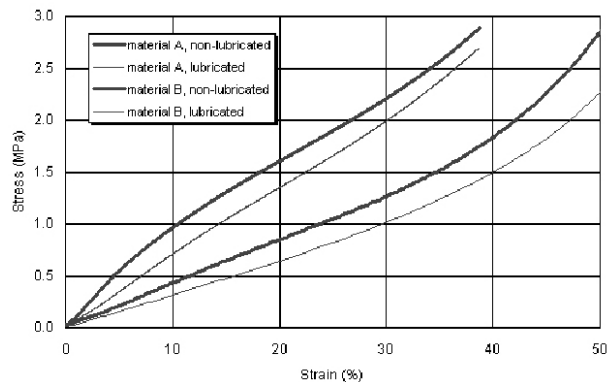


Figura 21. Efecto de la lubricación en ensayos de compresión uniaxial[42].

Sumado a esta complicación, se encuentra el hecho de que estas espumas de celda cerrada pueden ser vistas como materiales compuestos poliuretano+aire y obviamente la presencia de porosidad y su distribución tendrán efectos sobre las propiedades mecánicas. La introducción de incluso niveles bajos de porosidad altera las propiedades mecánicas del material, en comparación con el elastómero homogéneo. Cuando se introduce porosidad, el módulo elástico se modifica: los módulos de corte y de bulk disminuyen, especialmente este último, y la suposición común de incompresibilidad deja de ser válida[43]. Por lo tanto, además de la fricción en los extremos que fomenta el abarrillamiento, el gradiente de módulos elásticos y el pandeo de las paredes de las celdas generan inestabilidades que contribuirían a la no homogeneidad macroscópica del campo de tensiones aplicado.

La Figura 22 muestra una curva típica tensión-deformación para un ensayo de compresión uniaxial. Típicamente se encuentran tres regiones que reflejan la flexión de las paredes de las celdas, el colapso por pandeo de las mismas y una etapa final de densificación[44][45].

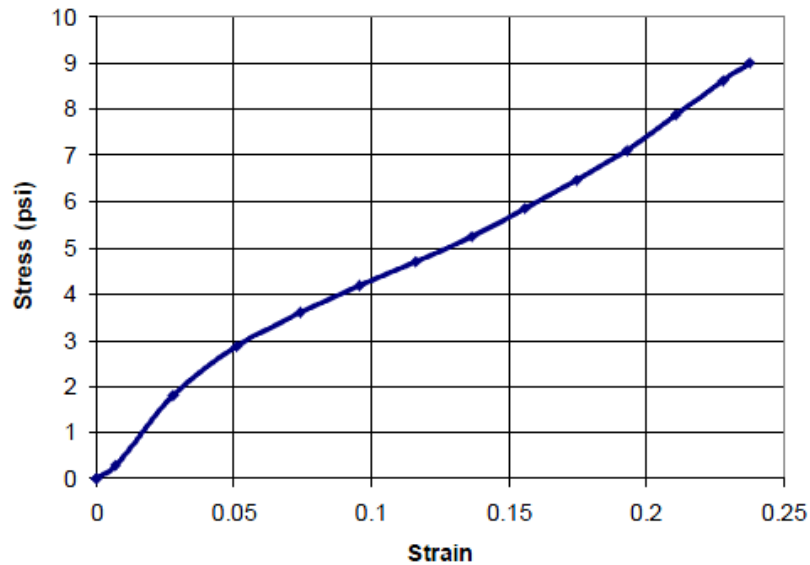


Figura 22. Curva típica de compresión uniaxial para espumas elastoméricas[46].

Como es evidente de la comparación con la Figura 18, para los niveles de deformación alcanzados no se registran estas tres regiones sino que sólo se observa la primera correspondiente a la flexión elástica de las paredes de las celdas. En otros estudios realizados sobre el mismo sistema poliuretánico[25] se observó que luego de esta región prácticamente elástica se aprecia sólo una etapa de densificación abrupta. Este hecho podría sugerir que el colapso de las celdas es seguido casi instantáneamente por la densificación del material por lo que podría no observarse en las curvas de compresión uniaxial.

6.1.2.2. Compresión Confinada

Los modelados de los micromecanismos de las espumas de celda cerrada sugieren que los dos procesos principales de endurecimiento en compresión uniaxial son la compresión elástica del aire atrapado en los poros de la espuma, y la viscoelasticidad no lineal de las paredes de los poros. Similarmente estos mecanismos ocurren en los ensayos de compresión confinada[47].

La caracterización constitutiva de materiales hiperelásticos en grandes deformaciones es típicamente complicada por la aparición de deformaciones no homogéneas[48]; como bandas de corte, acuellamiento y fractura en tracción, o bandas de corte, abarrilamiento y/o pandeo en compresión. La configuración especial del ensayo de compresión confinada elimina la no uniformidad de la deformación.

Una ley constitutiva tradicional, como la Ley de Hooke, no predeciría un incremento súbito en la carga debido a un proceso de densificación. De hecho, existe un entendimiento cualitativo considerable en el comportamiento mecánico de elastómeros porosos, pero se carece en gran medida de una comprensión cuantitativa.

Lamentablemente, la información y modelos disponibles en literatura no son numerosos[43].

6.2. Modelado Inverso

6.2.1. Validación del Programa Inverso

Para validar el funcionamiento del programa desarrollado se empleó un método muy sencillo, pero no por ello menos poderoso. Utilizando Abaqus se generaron falsas curvas experimentales para un ensayo de compresión uniaxial y otro de compresión confinada. Los parámetros del modelo Hyperfoam utilizados para simular los ensayos se listan en la Tabla 2.

μ [MPa]	α	ν
0.55	7	0.3

Tabla 2. Parámetros empleados para la validación del Programa Inverso.

La Figura 23 muestra la convergencia a los valores listados en la Tabla 2 desde unos valores semilla cualquiera (arbitrariamente se los tomó como la mitad de los valores objetivo).

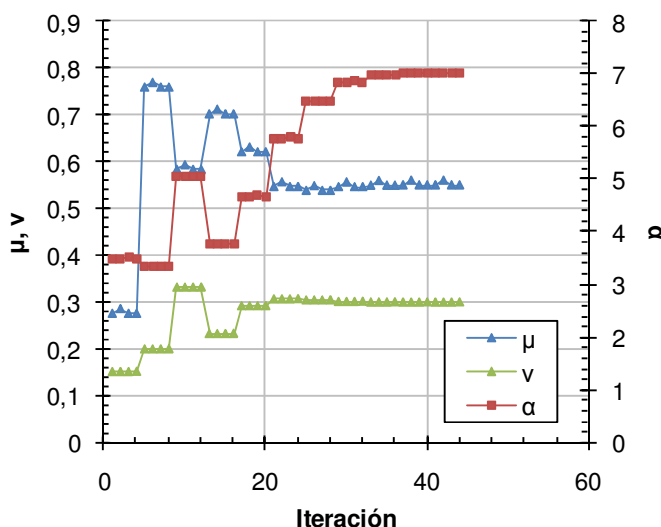


Figura 23. Evolución de los parámetros durante el modelado inverso. Se muestra la convergencia a los parámetros objetivo.

Cabe destacar que debido a que los datos de entrada fueron generados con la misma herramienta de simulación empleada para ajustarlos, la calidad del ajuste es mucho mayor que la esperada al tratar con datos experimentales verdaderos. Además, al tratar con ensayos simulados, se descarta cualquier tipo error experimental ya sea en la medición de magnitudes o en la ejecución del ensayo, y el ruido propio del equipo experimental.

6.2.2. Calibración del Modelo Hyperfoam por Modelado Inverso

6.2.2.1. Resultados

6.2.2.1.1. Método “Uniax”

Una de las estrategias de calibración consistió en emplear los datos obtenidos de un ensayo de compresión uniaxial. Los parámetros obtenidos se listan en la Tabla 3.

μ [MPa]	α	ν
0,87	3.44	0.11

Tabla 3. Parámetros obtenidos utilizando datos experimentales de compresión uniaxial.

El programa de cálculo se detuvo debido que la variación en x (vector de incógnitas) fue menor a la tolerancia especificada (se utilizó la definida por defecto para la función “lsqcurvefit”[41], igual a 10^{-6}).

La Figura 24 presenta el ajuste logrado por el programa de modelado inverso. Como se puede apreciar se logra un ajuste realmente óptimo de los datos experimentales.

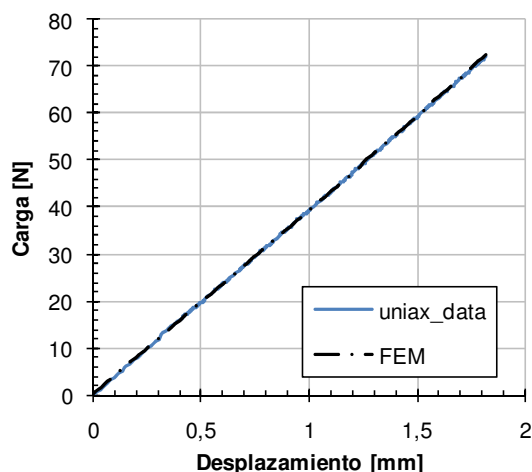


Figura 24. Ajuste de los datos de compresión uniaxial empleando los parámetros de la Tabla 3.

Para que los parámetros listados en la Tabla 3 sean válidos, se debería poder predecir la respuesta del material en otra geometría. En el caso contrario, lo realizado sería sólo un mero ajuste polinomial y no una calibración de un modelo constitutivo capaz de predecir la respuesta del material.

La Figura 25 muestra lo ocurrido al intentar predecir la respuesta en compresión confinada. Los valores de carga predichos por el modelo son aproximadamente un 50% menores a los experimentales y levemente superiores a los ajustados en compresión uniaxial. Evidentemente, el ensayo uniaxial no captura la respuesta volumétrica del material.

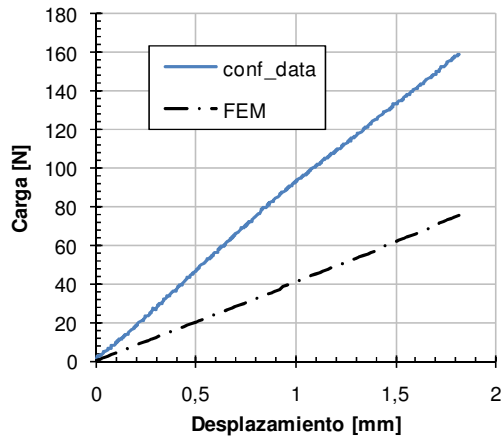


Figura 25. Predicción de la respuesta en compresión confinada a partir de los parámetros obtenidos en compresión uniaxial.

6.2.2.1.2. Método “Conf”

La Figura 26 presenta el ajuste obtenido mediante el modelado inverso de la espuma en compresión confinada. Nuevamente, la optimización paramétrica arroja excelentes resultados para el ajuste de un tipo de ensayo particular. Los parámetros obtenidos se muestran en la Tabla 4.

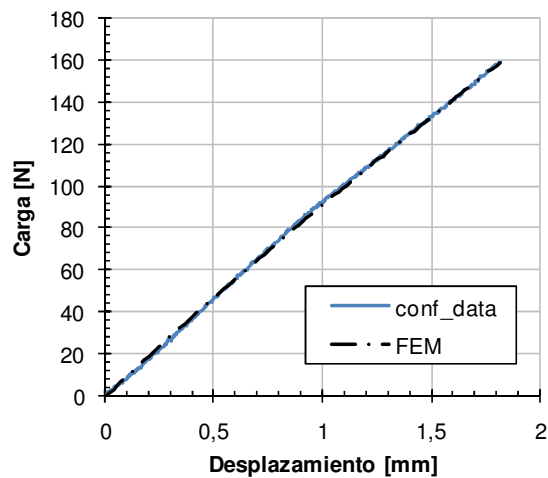


Figura 26. Ajuste de los datos de compresión confinada.

μ [MPa]	α	ν
2.25	4.97	0.06

Tabla 4. Parámetros obtenidos utilizando datos experimentales de compresión confinada.

La predicción de la respuesta en compresión uniaxial se presenta en la Figura 27. En una primera instancia se estaría tentado a decir que un estado de carga triaxial debería predecir el caso uniaxial y esto es cierto para materiales isótropos. Sin embargo esto no fue observado.

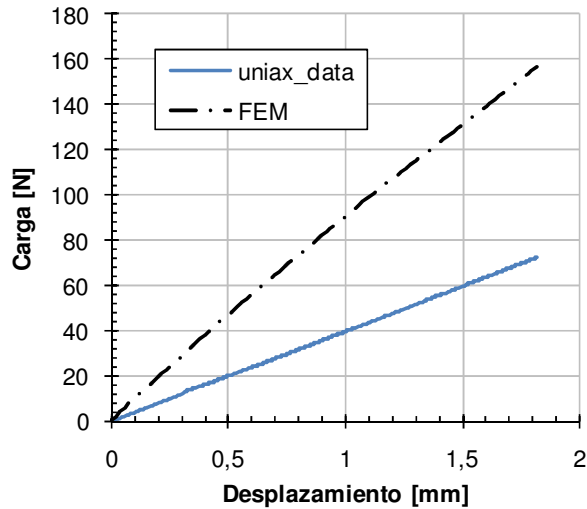


Figura 27. Predicción de la respuesta en compresión uniaxial a partir de los parámetros obtenidos en compresión confinada.

En este caso se observaron inconvenientes con la convergencia del programa. A diferencia del caso uniaxial, las curvas carga-desplazamiento de compresión confinada presentan un cierto ruido, posiblemente debido a una lubricación inadecuada de la cámara de confinamiento[48]. En realidad, lo que se observa no es un problema de convergencia propiamente dicho sino que dado este ruido nunca se satisfacen las condiciones necesarias para que se detenga la optimización y se continúa iterando aunque se aprecie un excelente ajuste de los datos experimentales. Por tal motivo, la tolerancia en el valor de x tuvo que ser llevada a 10^{-2} , valor por demás válido para la mecánica experimental, pero que pueda causar cierto rechazo a especialistas en optimización numérica.

6.2.2.1.3. Método “Uniax + Conf”

El análisis lógico siguiente a los anteriores es emplear ambos ensayos para calibrar el modelo constitutivo. Un ajuste aceptable de los datos experimentales se muestra en la Figura 28. Los parámetros obtenidos por el programa inverso se presentan en la Tabla 5.

μ [MPa]	α	ν
0,60	0,01	0,39

Tabla 5. Parámetros obtenidos utilizando datos de compresión uniaxial y confinada.

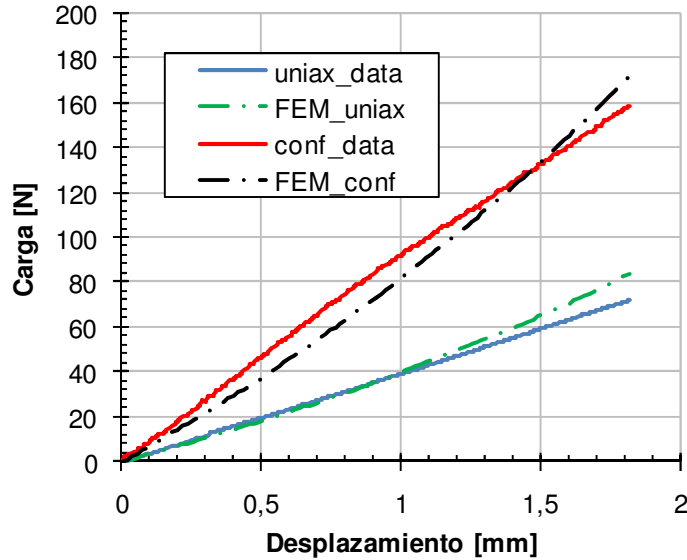


Figura 28. Ajuste utilizando los parámetros de la Tabla 5.

Si se considera la cámara de confinamiento como infinitamente rígida y el caso de compresión uniaxial como una probeta restringida por un material de rigidez nula podría decirse que se ha calibrado el modelo con los dos casos extremos de restricción lateral.

6.2.2.2. Discusión

6.2.2.1. Método “Uniax”

Lo observado en la Figura 25 puede explicarse si se analiza el comportamiento de las celdas cerradas de la espuma. Al considerar una celda bajo la acción compresiva de la máquina de ensayos, como ya se mencionó los mecanismos actuantes serán la compresión elástica del aire atrapado en los poros y la respuesta hiperelástico de las paredes de los mismos. En un ensayo de compresión uniaxial, la probeta no se encuentra restringida lateralmente por lo que estos poros pueden ensancharse al ser comprimidos, llevando a una expansión lateral macroscópica. De esta manera ninguna componente de tensión axial es introducida, además de la carga aplicada por la máquina. Cuando se restringe la probeta lateralmente y se la comprime, la respuesta volumétrica del material se ve afectada por las nuevas condiciones de borde, las nuevas cargas axiales introducidas no están consideradas en los parámetros obtenidos y por lo tanto es de esperar una estimación de la carga en defecto.

6.2.2.2. Método “Conf”

Si se sigue el razonamiento del punto anterior, es de esperar que ahora la predicción de la respuesta en compresión uniaxial presente valores de carga excesivos. Si el modelo es calibrado en compresión confinada la restricción lateral

colaborará a evitar el colapso de las celdas. Al retirar dicha restricción, esta componente de carga axial no se hace presente y por lo tanto la carga experimental se ve superada por la predicción FEM. Este hecho se confirma en la Figura 27.

Los hechos descritos tanto en este punto como en el anterior ponen en duda si un modelo puramente fenomenológico como el Hyperfoam es capaz de representar el comportamiento mecánico de la espuma con un error aceptable. Es claro que, al menos, no permite capturar la dependencia de la respuesta volumétrica con las condiciones de contorno.

En el desarrollo de modelos constitutivos tradicionalmente se han empleado dos enfoques principales[49]. El primero consiste en modelos físicos donde la relación tensión-deformación es considerada sobre bases termodinámicas. El segundo, abarcado en este trabajo, es un enfoque fenomenológico, inspirado en invariantes, dentro del cual la relación tensión-deformación es modelada ajustando datos experimentales. Los modelos constitutivos del primer tipo generalmente presentan una forma más complicada. En las simulaciones numéricas con fines ingenieriles se prefieren los modelos fenomenológicos debido a su simplicidad y eficiencia con la que pueden ser implementados[50]. Existen en bibliografía modelos no fenomenológicos de sólidos porosos[43]. Abordarlos es una tarea que excede el contenido de una carrera de grado, por lo que no fueron tratados en el presente trabajo.

6.2.2.3. Método “Uniax + Conf”

El programa inverso converge a la solución presentada en la Tabla 5. Como se observa en la Figura 28, el ajuste logrado es más que aceptable.

Era de esperar que la calibración con los dos tipos de compresión arroje el resultado más confiable, sin embargo el valor de α no es usual para espumas poliméricas[23]. Se han observado parámetros de valor nulo en modelos Hyperfoam de mayor orden calibrados para poliuretano[26] pero no en el caso de α . Sin embargo, para los rangos de deformación analizados la respuesta del material no ha sido marcadamente no lineal por lo que tiene sentido un valor de exponente α cercano a cero, pero no nulo.

6.2.2.4. Comparación entre métodos

Definiendo un error relativo porcentual (Ecuación 30) es posible estimar el error cometido al simular los ensayos con las distintas estrategias y, además, compararlas entre sí.

$$\Delta_r = \frac{|Residuo|}{Carga Experimental} \times 100$$

Ecuación 30

La Figura 29 presenta los valores de Δ_r para las distintas estrategias. Los valores correspondientes al ajuste de compresión uniaxial por “Uniax” y compresión confinada por “Conf” fueron omitidos, ya que en estos casos se obtienen valores menores al 1% en todo el rango de deformaciones considerado. En esos casos, la calibración se ve reducida al simple ajuste de una curva (Figura 24 y Figura 26)

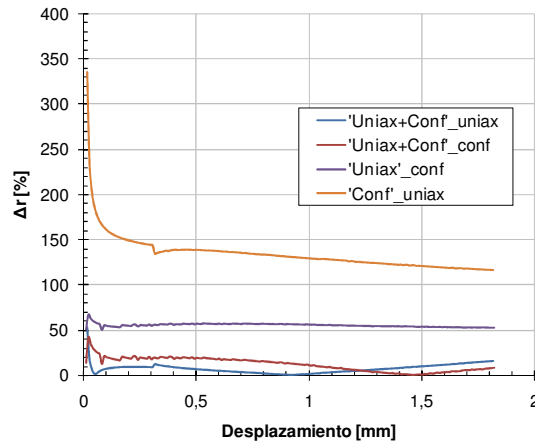


Figura 29. Error relativo de las distintas estrategias de calibración. El método empleado se indica entre comillas (") y a su lado se indica el ensayo modelado.

En todos los casos se observan picos en el error para bajos desplazamientos (<0.1mm), este hecho no debe ser mal interpretado. Si bien es cierto que el ajuste es muy pobre para estos valores, esto se debe principalmente a que los valores de carga son muy pequeños y esto hace que la Ecuación 30 arroje valores altos de Δ_r . Además este no es el rango de deformaciones de mayor interés ya que las condiciones críticas del disco se dan a desplazamientos en el rango de 1.4-2mm, por lo que no deben considerarse como errores graves.

Del análisis de la Figura 29 se observa que claramente el método “Uniax + Conf” es el que mejores resultados arroja, obteniéndose errores menores al 10% y 19% para compresión uniaxial y confinada respectivamente. La predicción de las otras dos estrategias presente errores inadmisibles con un 50% y 125% para “Uniax” y “Conf” respectivamente.

De lo anteriormente expuesto surge un hecho que llama la atención, y es que el modelo constitutivo calibrado en un estado uniaxial arroja mejores resultados a la hora de predecir un estado triaxial que la calibración en un estado triaxial resolviendo un estado uniaxial. Esto es contrario a lo esperado debido a que en el ensayo de compresión confinada uno captura además la respuesta volumétrica del material, lo que en un ensayo de compresión uniaxial bien lubricado no sucede. Es posible que para “Conf” exista otro juego de parámetros solución que no hayan sido encontrados por el software de modelado inverso.

La suma del cuadrado de los valores residuales (Ecuación 29) se presenta en la Figura 30. Nótese que el resultado obtenido para “Uniax + Conf” es casi 35 veces menor que para los restantes dos métodos. Este hecho confirma junto con los resultados de la Figura 29 que la estrategia de calibración que implica ambos ensayos es la más apta.

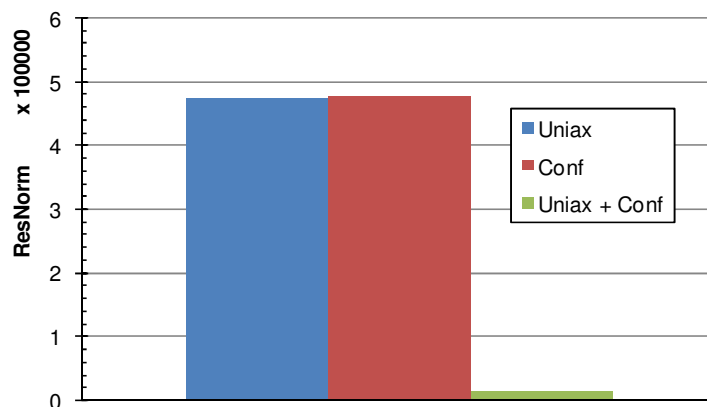


Figura 30. Suma del cuadrado de los valores residuales para las tres estrategias de calibración.

Si se considera sólo este último parámetro de comparación podría decirse que las estrategias “Uniax” y “Conf” obtendrían resultados de calidad similar, tal como se comprueba en la Figura 30. La suma del cuadrado de valores residuales es una medida del error absoluto, y como tal no considera el valor real de la estimación que se está realizando. Por estos motivos, es importante el análisis anteriormente realizado sobre Δ_r ya que, si bien ambas presentaron malas predicciones, con “Uniax” se obtuvieron resultados levemente mejores.

6.3. Modelado por Elementos Finitos del Disco Intervertebral

6.3.1. Resultados

La Figura 31 muestra las distribuciones de tensión de Von Mises para el disco intacto, denucleado e implantado. Se observan valores pico de tensión en los extremos del núcleo para ambos casos cuyo origen es principalmente debido a la restricción geométrica que el anillo y las vertebrae lindantes suponen. Las condiciones intacta y denucleada muestran distintos perfiles de tensión en el anillo, mientras que la condición implantada es más comparable a la intacta en este sentido. Cabe destacar que el implante presenta una distribución de tensiones más alta y uniforme respecto al núcleo natural.

La distribución de desplazamientos radiales para los tres casos es comparada en la Figura 32. Es mucho más claro en este caso como el implante contribuye a

restaurar los perfiles de desplazamiento de la condición natural. Sin embargo, el desplazamiento radial del núcleo intacto es significativamente mayor que el del implante. En este último caso, el anillo sufre por acción del núcleo un desplazamiento mucho menor. En la condición denucleada se observa un pandeo del anillo, evidenciado por desplazamientos opuestos y hacia afuera del anillo en ambas caras del mismo.

El desplazamiento radial a lo largo del ecuador del disco intervertebral para los tres modelos fue analizado en detalle (Figura 33). Las condiciones intacta e implantada muestran desplazamientos positivos. La condición denucleada exhibe desplazamientos negativos hasta un 72% de la distancia al eje de simetría correspondiente al abarrilamiento del anillo hacia adentro del disco. Luego los desplazamientos pasan gradualmente a ser positivos pero sin llegar a ser los correspondientes a la condición intacta o la implantada.

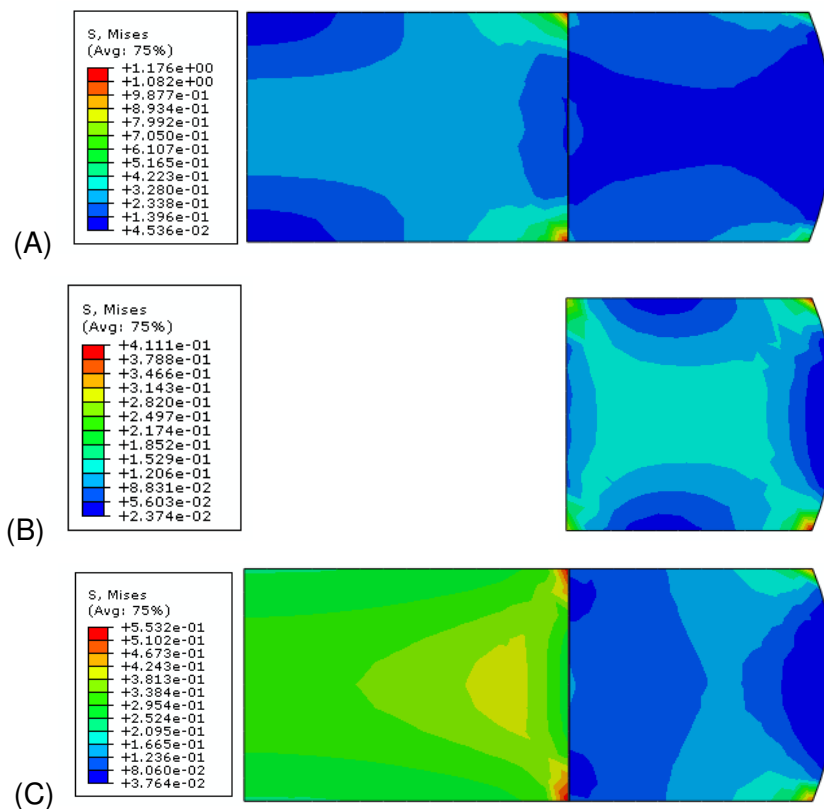


Figura 31. Distribución de tensiones de Von Mises para un modelo (A) intacto, (B) denucleado e (C) implantado. Todos los valores en MPa.

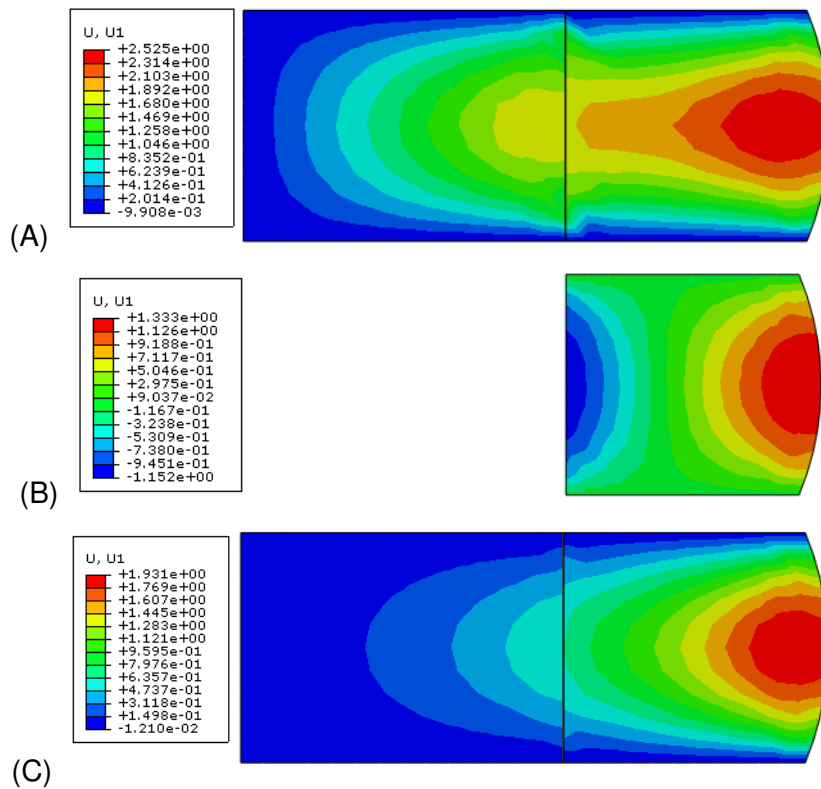


Figura 32. Distribución de desplazamientos radiales para un modelo (A) intacto, (B) denucleado e (C) implantado. Todos los valores en mm.

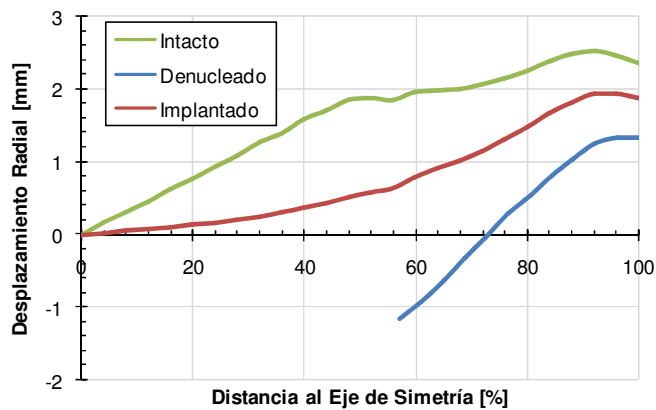


Figura 33. Desplazamientos radiales de los modelos intacto, denucleado e implantado.

El implante corrige de manera significativa la distribución de desplazamientos pero puede observarse que no es del todo satisfactoria. En una estimación rápida podría decirse que corrige en un 50% la distribución denucleada pero sin llegar a copiar exactamente el caso natural.

6.3.2. Discusión

El reemplazo de núcleo pulposo es una técnica emergente para el tratamiento de la degeneración temprana de discos intervertebrales lumbares[51][52]. Sin embargo,

no abunda el conocimiento sobre el efecto en el comportamiento mecánico del disco. Este trabajo pretende mediante un sencillo análisis FEM discutir algunos aspectos que hacen a la prestación del implante.

Mediante la simulación de las tres condiciones de disco se ha demostrado que un implante de núcleo pulposo puede ser efectivo en la reducción de la tensión en el tejido remanente. La presencia del implante restaura los valores de tensión en el anillo fibroso prácticamente a los valores correspondientes al estado natural (0.13MPa en la condición implantada frente a 0.11MPa en el disco intacto). Esto implica que el implante es capaz de retrasar el deterioro del anillo fibroso restaurando los valores de tensión correspondientes al disco sano. Además, el implante de poliuretano no se deteriora por lo hasta sería capaz de detener el proceso de degeneración del disco.

Para las condiciones intacta e implantada se observaron valores de Von Mises no nulos en la intercara entre el núcleo y el anillo (Figura 31) así también como desplazamientos positivos (Figura 33) y distorsiones hacia el exterior del disco. Mediante un modelo sencillo de elementos finitos se comprobó entonces que bajo condiciones normales de compresión el núcleo es capaz de tensionar el anillo, y el implante, a su vez, puede mantener en cierta medida este mecanismo natural de transferencia de carga. La Figura 34 compara los modelos deformados para las tres condiciones de disco.

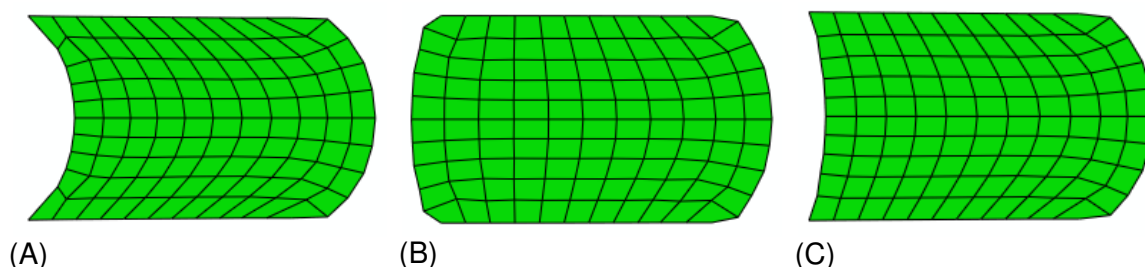


Figura 34. Configuración deformada del anillo fibroso para los modelos (A) intacto, (B) denucleado e (C) implantado.

La condición denucleada además de presentar diferencias en la distribución de Von Mises (Figura 31) exhibe un claro abarillamiento de la cara interna del anillo además del esperado en la cara externa (Figura 34). El abarillamiento del anillo de la forma señalada en la Figura 34(B) coincide con los resultados numéricos y experimentales encontrados en bibliografía[31][53] que demostraron que la cara interna del anillo fibroso se curva hacia adentro en condiciones denucleadas.

7. Conclusiones

El estudio en compresión uniaxial y confinada de los sistemas poliuretánicos fue satisfactorio. La espuma estudiada presentó en compresión uniaxial un comportamiento elástico dentro del rango de deformación estudiado (menor al 20%). Se observó un módulo elástico de aproximadamente 2MPa. El valor de módulo encontrado es coherente con estudios realizados previamente sobre el mismo sistema poliuretánico y se encuentra dentro del rango apto para implantes sólidos de núcleo pulposo. La lubricación empleada durante el ensayo en los extremos de la probeta fue efectiva para los valores reportados, sin embargo a niveles de carga superiores se observó un abarilamiento de la misma. Se recomienda en caso de estudiar rangos de deformación mayores sustituir el film de teflón utilizado por otro lubricante (por ejemplo, grasa de alta presión).

Por otra parte, en compresión confinada el material exhibió un comportamiento no lineal con una marcada etapa de densificación a deformaciones volumétricas superiores al 35%. Los niveles de carga soportados, fueron superiores a los valores de carga fisiológica por lo que la resistencia del material sería óptima para su aplicación en implantes de núcleo pulposo.

En la parte computacional del trabajo, se desarrolló una herramienta matemática capaz de aplicar el método inverso para calibrar modelos constitutivos. El Programa Inverso presentado obtiene, asistido por un software comercial de elementos finitos, los parámetros de un modelo constitutivo a partir de datos experimentales correspondientes a distintos tipos de ensayos mecánicos. A partir del empleo del modelo constitutivo de Ogden-Storakers fue posible capturar el comportamiento del material en estados tensionales multiaxiales básicamente compresivos. Se consideraron tres estrategias de calibración distintas del modelo constitutivo de acuerdo a los ensayos utilizados para inferir los parámetros : i) compresión uniaxial, ii) compresión confinada y, por último, iii) compresión uniaxial y confinada.

La estrategia de calibración en la que se emplean datos de compresión uniaxial y confinada demostró ser la más apta de las empleadas. Esta es la única capaz de obtener parámetros capaces de describir con un error aceptable la respuesta del material en ambas configuraciones de carga para los rangos de deformación estudiados. Los parámetros obtenidos a partir de compresión uniaxial predicen cargas menores a las encontradas experimentalmente en la configuración confinada. Por otro lado, al calibrar sólo con datos de compresión confinada se sobreestima en aproximadamente un 100% la carga en compresión uniaxial.

Por último, mediante un modelo sencillo de elementos finitos que interpreta la biomecánica del disco intervertebral se simuló la respuesta del disco en las condiciones intacta, denucleada e implantada. El implante de núcleo del material propuesto ejerce una acción sobre la cara interna del anillo fibroso equivalente a la presión intradiscal natural correspondiente al caso del disco sano.

Como conclusión final del presente proyecto se puede afirmar que el implante propuesto en base a espumas poliuretánicas restaura en un grado considerable el mecanismo natural de transferencia de carga del disco quedando demostrada su aptitud mecánica para la aplicación en la artroplastía de columna vertebral como reemplazo de núcleo pulposo de disco intervertebral.

8. Referencias

- [1] White A, Panjabi M. *Clinical Biomechanics of the Spine*. Philadelphia: J.B. Lippincott Company; 1990
- [2] Iatridis JC, Weidenbaum M, Setton LA, Mow VC. Is the Nucleus pulposus a Solid or a Fluid? *Mechanical Behaviors of the Nucleus Pulposus of the Human Intervertebral Disc*, Spine 1996; 21:1174-84
- [3] Buckwalter JA. Aging and degeneration of the Human Intervertebral Disc. Spine 1995; 20:1307-14
- [4] Bao QB, McCullen GM, Higham PA, Dumbleton JH. The Artificial Disc: Theory, Design and Materials. *Biomaterials* 1996; 17:1157-66.
- [5] Maroudas A, Stockwell RA, Nachemson A, Urban J. Factors Involved in the Nutrition of the Human Lumbar Intervertebral Disc: Cellularity and diffusion of Glucose in Vitro. *Journal of Anatomy* 1975;120
- [6] Kapandji AI. *Fisiología Articular: Esquemas Comentados de Mecánica Humana*, ed. Médica Panamericana, 1998
- [7] Luoma K, Riihimaki H, Luukkonen R, Raininko R, Viikari Juntura E, Lamminen A. Low back pain in relation to lumbar disc degeneration. Spine 2000;25:487-492.
- [8] Kambin, P. and M. Savitz, *Arthroscopic Microdiscectomy: An Alternative to Open Disc Surgery*. The Mount Sinai Journal of Medicine, 2000. 67(4): p. 283-287.
- [9] Shutov FA, *Integral/Structural Polymer Foams: Technology, Properties and Applications*, Springer-Verlag, 1986.
- [10] Thomson T, *Polyurethanes as Specialty Chemicals: Principles and Applications*, CRC Press LLC, 2005.
- [11] Bao QB, McCullen GM, Higham PA, Dumbleton JH, Yuan HA, The artificial disc: theory, design and materials, *Biomaterials*, 17 (12) 1157-1167, 1996.
- [12] Bao QB, Yuan HA. New Technologies in Spine: Nucleus Replacement. Spine 2002; 27:1245-47.
- [13] Zienkiewicz OC, Taylor RL, *El Método de los Elementos Finitos*, Cuarta Edición, Mc Graw-Hill, 1994.
- [14] Cook RD, *Finite Element Modeling For Stress Analysis*, John Wiley & Sons, 1995.
- [15] Rivlin RS, *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, IV. Further Developments of the General Theory*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 241:379-397, 1948.
- [16] Mooney MJ, *A Theory of Large Elastic Deformation*. *Journal of Applied Physics*, 11:582-592, 1940.
- [17] Yeoh OH, Some forms of the strain energy function for rubber, *Rubber Chemistry and technology*, Volume 66, Issue 5, November 1993, Pages 754-771, 1993.
- [18] Selvadurai APS, *Deflections of a rubber membrane*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 54, no. 6, pp. 1093-1119. 2006.
- [19] Ogden RW, *Large Deformation Isotropic Elasticity: On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids*, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 326:565~584, 1972.
- [20] Storakers B, *On Material Representation and Constitutive Branching in Finite Compressible Elasticity*, *J. Me&. Phys. Solids* Vol. 34, No. 2, pp. 125-145, 1986.
- [21] *Abaqus 6.9-EF Theory Manual*.
- [22] Mills NJ, *Finite Elements Models for the Viscoelasticity of Open-Cell Polyurethane foam*, As in *Cellular Polymers*, Vol. 25, No. 5, 2006.
- [23] Li B, Gu YD, English R, Rothwell G, Ren XJ, *Characterisation of nonlinear material parameters of foams based on indentation tests*.
- [24] Nocedal J, Wright S, *Numerical Optimization*, Springer, 1999.

- [25] Sachetti L, Estudio del comportamiento en compresión uniaxial y confinada de poliuretanos biomédicos, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, 2008.
- [26] Mills NJ, Lyn G, Design of Foam Padding for Rugby Posts, *Materials and Science in Sports*, pp. 105-177, 2001.
- [27] ASTM D 695 – 02a. Standard Test Method for Compressive Properties of Rigid Plastics.
- [28] Mills NJ, Fitzgerald C, Gilchrist A, Verdejo R, Polymer foams for personal protection: cushions, shoes and helmets, *Composites Science and Technology*, 63, 2398-2400, 2003.
- [29] Beckstein J et al, Comparison of Animal Discs Used in Disc Research to Human Lumbar Disc: Axial Compression Mechanics and Glycosaminoglycan Content. *Spine*, 2008. 33(6): p. E166.
- [30] Massey CJ, Finite Element Analysis and Materials Characterization of Changes Due to Aging and Degeneration of the Human Intervertebral Disc, PhD. Thesis, Drexel University, 2009.
- [31] Joshi A, Massey CJ, Karduna A, Vresilovic E, Marcolongo M, The Effect of Nucleus Implant Parameters on the Compressive Mechanics of the Lumbar Intervertebral Disc: A Finite Element Study, *Journal of Biomedical Materials Research Part B: Applied Biomaterials*, pp. 596-607, 2009.
- [32] Goel V, Monroe B, Gilbertson L, Brinckmann P. Interlaminar shear stresses and laminae separation in a disc. Finite element analysis of the L3–L4 motion segment subjected to axial compressive loads. *Spine* 1995;20:689–698.
- [33] Ferguson S, Ito K, Nolte L. Fluid flow and convective transport of solutes within the intervertebral disc. *J Biomech* 2004;37:213–221.
- [34] Shirazi-Adl S, Shrivastava S, Ahmed A. Stress analysis of the lumbar disc-body unit in compression. A three-dimensional nonlinear finite element study. *Spine* 1984;9:120–134.
- [35] Meakin J, Reid J, Hukins D. Replacing the nucleus pulposus of the intervertebral disc. *Clin Biomech (Bristol, Avon)* 2001;16:560–565.
- [36] Iatridis J, Weidenbaum M, Setton L, Mow V. Is the nucleus pulposus a solid or a fluid? Mechanical behaviors of the nucleus pulposus of the human intervertebral disc. *Spine* 1996;21:1174–1184.
- [37] Nagy G, Gentle C. Significance of the annulus properties to finite element modeling of intervertebral discs. *J Musculoskeletal Res* 2001;5:159–171.
- [38] Jin H, Lewis J, Characterizing Mechanical Properties of Cartilage in Situ, University of Minnesota Department of Orthopedic Surgery, 2010.
- [39] Joshi A, Fussell G, Thomas J, Hsuan A, Lowman A, Karduna A, Vresilovic E, Marcolongo M. Functional compressive mechanics of a PVA/PVP nucleus pulposus replacement. *Biomaterials* 2006;27:176–184.
- [40] Yao J, Turteltaub S, Ducheyne P. A three-dimensional nonlinear finite element analysis of the mechanical behavior of tissue engineered intervertebral disc under complex loads. *Biomaterials* 2006;27:377–387.
- [41] Help Matlab R2010a, The MathWorks, 2010
- [42] Lobo H, Bethard T, Practical Issues in the Development and Implementation of Hyperelastic Models, Datapoint Testing Services
- [43] Danielsson M, Parks DM, Boyce MC, Constitutive modeling of porous hyperelastic materials, *Mechanics of Materials* 36 (2004) 347–358.
- [44] Ren XJ, Silberschmidt VV, Numerical modelling of low-density cellular materials, *Comput Mater Sci* 2008;43:65–74.
- [45] Gibson LJ, Ashby MF, Cellular solids: structures and properties, 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press; 1997.
- [46] Feng WW, Hallquist JO, On Constitutive Equations For Elastomers And Elastomeric Foams, 4th European LS-DYNA Users Conference, Material II, pp. D-II-15 – D-II-18.

- [47] Masso Moreu Y, Mills NJ. Rapid hydrostatic compression of low-density polymeric foams. *Polymer Testing* 23 (2004) 313–322.
- [48] Ma Z, Ravi-Chandar K, Confined Compression: A Stable Homogeneous Deformation for Constitutive Characterization, *Experimental Mechanics*, Vol. 40, No. 1, 38-45, March 2000.
- [49] Holmes DW, Loughran JG, Suehrcke H, Constitutive model for large strain deformation of semicrystalline polymers, *Mech Time-Depend Mater* (2006) 10, 281-313.
- [50] Duan Y, Saigal A, Greif R, Zimmerman MA, A uniform Phenomenological Constitutive Model for Glassy and Semicrystalline Polymers. *Polym. Eng. Sci.* Vol. 41 No. 8. (2001).
- [51] Jin D, Qu D, Zhao L, Chen J, Jiang J. Prosthetic disc nucleus (PDN) replacement for lumbar discs herniation. *J Spinal Disord Tech* 2003;16:331–337.
- [52] Sherman J, Bowman B, Ahrens M, Halm H, Huec JL, Liljenqvist U, Donkersloot P, Hook S, Yuan H. Functional lumbar artificial nucleus replacement–DASCOR. In: Szpalski M, Gunzburg R, Huec JL, Brayda-Bruno M, editors. *Nonfusion Technologies in Spine Surgery*. Philadelphia, PA: Lippincott, William, & Wilkins; 2006. p 131.
- [53] Meakin J, Reid J, Hukins D. Replacing the nucleus pulposus of the intervertebral disc. *Clin Biomech (Bristol, Avon)* 2001;16:560–565.

9. Trabajos Futuros

Analizar casos de carga cíclica y creep.

Se realizó un estudio bastante completo de solicitaciones estáticas pero han quedado descubiertas las cargas cíclicas y la respuesta del material del implante en función del tiempo, aspectos relevantes en lo que a la prestación en servicio del implante refiere.

Utilizar el modelado inverso para calibrar otros modelos constitutivos de elastómeros compresibles.

El ajuste logrado con el método “Uniax + Conf” es más que aceptable. Igualmente podría emplearse un modelo físico (de tipo no fenomenológico) para lograr un mejor ajuste de la respuesta mecánica del implante, aunque esto implicaría un esfuerzo computacional mucho mayor.

Realizar ensayos de compresión en confinamientos de distinta rigidez.

El ensayo en una cámara de confinamiento construida por ejemplo a partir de un tubo de grilon (material bien caracterizado) podría brindar un estado de confinamiento intermedio y permitiría validar el modelo calibrado en un estado de confinamiento elástico.

Validar el modelo de elementos finitos del disco intervertebral.

La simulación de la mecánica del disco intervertebral realizada fue de carácter cualitativo y sirvió para analizar y comparar las distintas condiciones del disco intervertebral entre sí. La realización de ensayos mecánicos sobre material cadavérico permitirá la validación del modelo.

ANEXO I

Compensación de Ensayos de Compresión Uniaxial

En una curva típica Tensión – Deformación (Figura 1) existe una región (AC) que no es representativa del material ensayado[27]. Esta región es generada por el alineamiento o asentamiento de la probeta. Con el fin de obtener valores correctos de valores como el módulo, deformación y punto de fluencia los datos experimentales deben ser corregidos y obtener el correcto origen del eje de deformación o extensión según corresponda.

En el caso de un material que exhiba una región de comportamiento Hookeano (lineal) como el de la Figura 35 se debe construir una continuación de la región lineal (CD) hasta el eje de las abscisas. Esta intersección (B) es el nuevo punto de deformación cero a partir del cual todos los desplazamientos y deformaciones deben ser medidos. El módulo elástico puede ser determinado dividiendo la tensión en cualquier punto de la línea CD por la deformación correspondiente, medida desde el punto B.

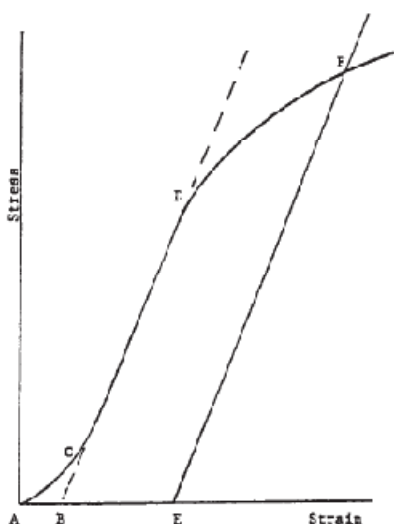


Figura 35. Material con región Hookeana.

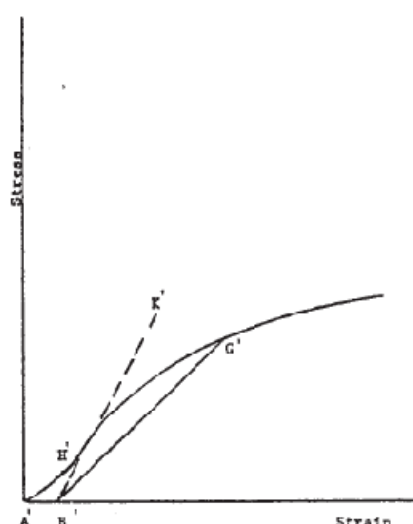


Figura 36. Material sin región Hookeana.

Por otro lado, si se tiene un material que no exhibe ninguna región lineal (Figura 36) la corrección anterior puede ser realizada trazando una tangente a la pendiente máxima en el punto de inflexión (H'). Esta debe ser extendida hasta el eje de deformación. El nuevo punto de deformación nula es ahora B'. Usando este punto, la tensión en cualquier punto (G') de la curva puede ser dividido por la deformación en ese punto para obtener un módulo secante (pendiente de la línea B'G'). Para estos materiales sin región lineal, cualquier otro intento de trazar tangentes en el entorno del punto de inflexión de la curva puede llevar a errores inaceptables en la determinación del punto de fluencia.

Compensación de los valores de desplazamiento.

La Figura 1 representa el registro Carga – Desplazamiento del ensayo de compresión de la muestra a1. Se extrapoló la región lineal a fin de corregir los valores de desplazamiento. Del ajuste lineal $y(x)= Bx+A$ se obtuvieron los valores mostrados en la Tabla 1.

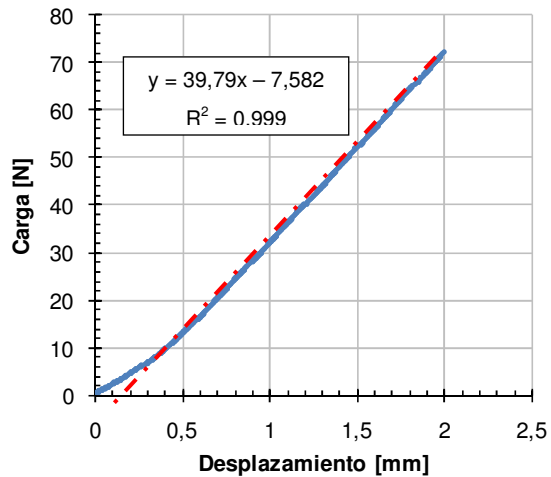


Figura 37. Extrapolación lineal de los datos de compresión uniaxial.

A	B	R ²
-7.58	39.79	0.999

Tabla 6. Ajuste lineal para corrección de datos experimentales.

La intersección entre el ajuste lineal y el eje de las abscisas es el origen corregido del eje de desplazamiento y se calcula como $-A/B$. Para este caso corresponde a $x=0.19$. Es decir que a todos los subsecuentes valores de desplazamiento se le deben restar 0.19mm.

ANEXO II

Código del Programa de Modelado Inverso

Inverse (Cuerpo Principal)

```
clear all
global Data
global iter
global proc
proc=2;
ReadExp
%valores semilla normalizados
Data.xo = [ 0.86899/10 , 3.43533/10 , 0.10981/0.45 ];
options = optimset('Display','iter','DiffMinChange',1e-3,'Tolx',1e-4);
%lower boundary
lb=[0 0 0];
%upper boundary
ub=[1 1 1];
iter=1;
[x,resnorm,residual,exitflag,output,jacobian]=lsqcurvefit(@RunAbq,Data
.xo,Data.exp{1,1},Data.exp{1,2},lb,ub,options);
```

ReadExp

```
function ReadExp
global Data
global proc
file1='a1.txt';
file11='a11.txt';
file21='a21.txt';
switch (proc)
    case(1)
        fid1 = fopen(file1);
        A1=textscan(fid1,'%f %f',540,'delimiter','\n');
        fclose(fid1);
        WriteDat(A1);
    case(2)
        fid11=fopen(file11);
        A11=textscan(fid11,'%f %f',482,'delimiter','\n');
        fclose(fid11);
        WriteDat(A11);
    case(3)
        fid21=fopen(file21);
        A21=textscan(fid21,'%f %f',488,'delimiter','\n');
        fclose(fid21);
        WriteDat(A21);
    case(4)
        fid11=fopen(file11);
        A11=textscan(fid11,'%f %f',482,'delimiter','\n');
        fclose(fid11);
        fid21=fopen(file21);
        A21=textscan(fid21,'%f %f',488,'delimiter','\n');
        fclose(fid21);
        for i=1:2
```

```

        B{1,i}=cat(1,A11{1,i},A21{1,i});
    end
    WriteDat(B);
case(5)
    fid1 = fopen(file1);
    A1=textscan(fid1,'%f %f',540,'delimiter','\n');
    fclose(fid1);
    fid11=fopen(file11);
    A11=textscan(fid11,'%f %f',482,'delimiter','\n');
    fclose(fid11);
    fid21=fopen(file21);
    A21=textscan(fid21,'%f %f',488,'delimiter','\n');
    fclose(fid21);
    for i=1:2
        B{1,i}=cat(1,A1{1,i},A11{1,i},A21{1,i});
    end
    WriteDat(B);
case (6)
    fid1 = fopen(file1);
    A1=textscan(fid1,'%f %f',540,'delimiter','\n');
    fclose(fid1);
    fid11=fopen(file11);
    A11=textscan(fid11,'%f %f',482,'delimiter','\n');
    fclose(fid11);
    for i=1:2
        B{1,i}=cat(1,A1{1,i},A11{1,i});
    end
    WriteDat(B);
case (7)
    fid1 = fopen(file1);
    A1=textscan(fid1,'%f %f',540,'delimiter','\n');
    fclose(fid1);
    fid21=fopen(file21);
    A21=textscan(fid21,'%f %f',488,'delimiter','\n');
    fclose(fid21);
    for i=1:2
        B{1,i}=cat(1,A1{1,i},A21{1,i});
    end
    WriteDat(B);
otherwise
    disp('ERROR: proc invalido')
end
end

```

WriteDat

```

function WriteDat(A)
global Data
Data.exp{1,1}(1,1)=A{1,1}(1,1);
Data.exp{1,2}(1,1)=A{1,2}(1,1);
j=2;
for i=2:size(A{1,1},1);
    if A{1,1}(i-1,1)~=A{1,1}(i,1)
        Data.exp{1,1}(j,1)=A{1,1}(i,1);
        Data.exp{1,2}(j,1)=A{1,2}(i,1);
    end
end

```

```

        j=j+1;
    end
end
end

```

RunAbq

```

function [F] = RunAbq(x,xdata)
global Data
global iter
global proc
Data.histx(iter,1)=10*x(1);
Data.histx(iter,2)=10*x(2);
Data.histx(iter,3)=0.45*x(3);
disp('=====')
disp('=====')
disp('Iteracion')
disp(iter)
disp('=====')
iter=iter+1;
disp('Modificando INP...')
ModINP(x);
%%
if proc==1||proc==5||proc==6||proc==7
    disp('Submitting uniax...')
    !abaqus analysis job=uniax input=uniax output_precision=full
    cpus=2
    WaitAbq1;
    !abaqus odbreport job=uniax step="Carga" history
end
%%
if proc==2||proc==3||proc==4||proc==5||proc==6||proc==7
    disp('Submitting confined...')
    !abaqus analysis job=confined2 input=confined2
    output_precision=full cpus=2
    WaitAbq2;
    !abaqus odbreport job=confined2 step="Carga" history
else if proc~=1
    disp('ERROR: proc invalido')
end
end
%%
ReadRpt;
disp('Matcheando datos...')
F = MatchData(xdata,Data.FEM{1,2},Data.FEM{1,1});
%%
GraphFunc(Data.exp{1,1},Data.exp{1,2},Data.FEM{1,1},Data.FEM{1,2});
end

```

ModInp

```

function ModINP( xnew )
global proc
o = cat( 2 , num2str( (10*xnew(1)) , '%9.5f' ) , ' , ' );
o = cat( 2 , o , num2str( (10*xnew(2)), '%9.5f' ) , ' , ' );
o = cat( 2 , o , num2str( (0.45*xnew(3)), '%9.5f' ) );

```

```

disp('Parametros =')
disp(o)
if proc==1||proc==5||proc==6||proc==7
    fid1 = fopen('uniac.inp');
    arch = textscan(fid1,'%s','delimiter','\n');
    i=1;
    while strcmp(arch{1,1}{i,1},'*Hyperfoam')==0;
        i=i+1;
    end;
    fclose(fid1);
    %escribe en la línea i+1 los nuevos parametros
    arch{1,1}{i+1,1} = o;
    n=size(arch{1,1},1);
    fid1 = fopen('uniac.inp','w');
    for j=1:n
        fprintf(fid1,'%s\n',arch{1,1}{j,1});
    end
    fclose(fid1);
end
if proc==2||proc==3||proc==4||proc==5||proc==6||proc==7
    fid2 = fopen('confined2.inp');
    arch = textscan(fid2,'%s','delimiter','\n');
    i=1;
    while strcmp(arch{1,1}{i,1},'*Hyperfoam')==0;
        i=i+1;
    end;
    fclose(fid2);
    arch{1,1}{i+1,1} = o;
    n=size(arch{1,1},1);
    fid2 = fopen('confined2.inp','w');
    for j=1:n
        fprintf(fid2,'%s\n',arch{1,1}{j,1});
    end
    fclose(fid2);
else if proc~=1
    disp('ERROR: proc invalido')
end
end
end

```

WaitAbq1

```

function WaitAbq1
n=0;
while n==0
    pause(0.1)
    n=exist('uniac.023','file');
end
while exist('uniac.023','file')==2
    pause(0.1)
end

```


WaitAbq2

```
function WaitAbq2
n=0;
while n==0
    pause(0.1)
    n=exist('confined2.023','file');
end
while exist('confined2.023','file')==2
    pause(0.1)
end
```

ReadRpt

```
function ReadRpt
global Data
global proc
file1='uni-ax.rep';
file2='confined2.rep';
switch (proc)
    case(1)
        Data.FEM=Readrep(file1);
    case(2)
        Data.FEM=Readrep(file2);
    case(3)
        Data.FEM=Readrep(file2);
    case(4)
        A=Readrep(file2);
        for i=1:2
            C{1,i}=cat(1,A{1,i},A{1,i});
        end
        Data.FEM=C;
    case(5)
        A=Readrep(file1);
        B=Readrep(file2);
        for i=1:2
            C{1,i}=cat(1,A{1,i},B{1,i},B{1,i});
        end
        Data.FEM=C;
    case(6)
        A=Readrep(file1);
        B=Readrep(file2);
        for i=1:2
            C{1,i}=cat(1,A{1,i},B{1,i});
        end
        Data.FEM=C;
    case(7)
        Readrep(file1,A);
        Readrep(file2,B);
        for i=1:2
            C{1,i}=cat(1,A{1,i},B{1,i});
        end
        Data.FEM=C;
end
end
```

ReadRep

```
function [Z]=Readrep (file)
fid1 = fopen(file);
textscan(fid1,'%s',37,'delimiter','\n');
temp = textscan(fid1,'%*f %f',101,'delimiter','\n');
Z{1,2} = (-1) * temp{1,1};
clear temp
textscan(fid1,'%s',5,'delimiter','\n');
temp = textscan(fid1,'%*f %f',101,'delimiter','\n');
Z{1,1} = (-1) * temp{1,1};
for i=1:8
    textscan(fid1,'%s',14,'delimiter','\n');
    clear temp
    temp = textscan(fid1,'%*f %f',101,'delimiter','\n');
    Z{1,2}=Z{1,2}+(-1)*temp{1,1};
end
clear temp
fclose (fid1);
end
```

MatchData

```
function [Y]=MatchData(xdata,RF2,U2)
global proc
xdata=Data.exp{1,1};
RF2=Data.FEM{1,2};
U2=Data.FEM{1,1};
proc=2;

j=1;
for i=2:size(xdata,1)
    if xdata(i,1)==0
        pos(j)=i;
        j=j+1;
    end
end
end
%%
if proc==1 || proc==2 || proc==3
    Y(1,1)=U2(1,1);
    j=2;
    for i=2:size(xdata,1)
        while U2(j,1)<xdata(i,1)
            j=j+1;
        end
        a=(RF2(j,1)-RF2(j-1,1))/(U2(j,1)-U2(j-1,1));
        b=RF2(j,1)-U2(j,1)*a;
        Y(i,1)=a*xdata(i,1)+b;
    end
else if proc==5
    Y(1,1)=U2(1,1);
    j=2;
    for i=2:pos(1)-1
        while U2(j,1)<xdata(i,1)
            j=j+1;
        end
    end
```

```

    a=(RF2(j,1)-RF2(j-1,1))/(U2(j,1)-U2(j-1,1));
    b=RF2(j,1)-U2(j,1)*a;
    Y(i,1)=a*xdata(i,1)+b;
end
Y(pos(1),1)=U2(102,1);
j=103;
for i=pos(1)+1:pos(2)-1
    while U2(j,1)<xdata(i,1)
        j=j+1;
    end
    a=(RF2(j,1)-RF2(j-1,1))/(U2(j,1)-U2(j-1,1));
    b=RF2(j,1)-U2(j,1)*a;
    Y(i,1)=a*xdata(i,1)+b;
end
Y(pos(2),1)=U2(203,1);
j=204;
for i=pos(2)+1:size(xdata,1)
    while U2(j,1)<xdata(i,1)
        j=j+1;
    end
    a=(RF2(j,1)-RF2(j-1,1))/(U2(j,1)-U2(j-1,1));
    b=RF2(j,1)-U2(j,1)*a;
    Y(i,1)=a*xdata(i,1)+b;
end
else if proc==4 || proc==6 || proc==7
    Y(1,1)=U2(1,1);
    j=2;
    for i=2:pos(1)-1
        while U2(j,1)<xdata(i,1)
            j=j+1;
        end
        a=(RF2(j,1)-RF2(j-1,1))/(U2(j,1)-U2(j-1,1));
        b=RF2(j,1)-U2(j,1)*a;
        Y(i,1)=a*xdata(i,1)+b;
    end
    Y(pos(1),1)=U2(102,1);
    j=103;
    for i=pos(1)+1:size(xdata,1)
        while U2(j,1)<xdata(i,1)
            j=j+1;
        end
        a=(RF2(j,1)-RF2(j-1,1))/(U2(j,1)-U2(j-1,1));
        b=RF2(j,1)-U2(j,1)*a;
        Y(i,1)=a*xdata(i,1)+b;
    end
end
end
end
end
end

```

GraphFunc

```
function GraphFunc(x_exp,y_exp,x,y)
global proc
j=1;
for i=2:size(x_exp,1)
    if x_exp(i,1)==0
        pos(j)=i;
        j=j+1;
    end
end
switch (proc)
case(1)
    plot(x_exp,y_exp,x,y)
    title('Compresión Uniaxial a1')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Fuerza')
case(2)
    plot(x_exp,y_exp,x,y)
    title('Compresión Confinada a11')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Fuerza')
case(3)
    plot(x_exp,y_exp,x,y)
    title('Compresión Confinada a21')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Fuerza')
case(4)
    subplot(2,1,1);plot(x_exp(1:pos(1)-1,1),y_exp(1:pos(1)-
1,1),x(1:101,1),y(1:101,1))
    title('Compresión Confinada a11')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Fuerza')

subplot(2,1,2);plot(x_exp(pos(1):size(x_exp,1),1),y_exp(pos(1):size(y_
exp,1),1),x(102:202,1),y(102:202,1))
    title('Compresión Confinada a21')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Fuerza')
case(5)
    subplot(2,1,1);plot(x_exp(1:pos(1)-1,1),y_exp(1:pos(1)-
1,1),x(1:101,1),y(1:101,1))
    title('Compresión Uniaxial a1')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Fuerza')
    subplot(2,1,2);plot(x_exp(pos(1):pos(2)-
1),y_exp(pos(1):pos(2)-
1),x_exp(pos(2):size(x_exp,1),1),y_exp(pos(2):size(y_exp,1),1),x(102:2
02,1),y(102:202,1))
    title('Compresión Confinada a11 - a21')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Fuerza')
case(6)
    subplot(2,1,1);plot(x_exp(1:pos(1)-1,1),y_exp(1:pos(1)-
1,1),x(1:101,1),y(1:101,1))
```

```

        title('Compresión Uniaxial a1')
        xlabel('Desplazamiento')
        ylabel('Fuerza')

subplot(2,1,2);plot(x_exp(pos(1):size(x_exp,1),1),y_exp(pos(1):size(y_
exp,1),1),x(102:202,1),y(102:202,1))
        title('Compresión Confinada a11')
        xlabel('Desplazamiento')
        ylabel('Fuerza')
    case(7)
        subplot(2,1,1);plot(x_exp(1:pos(1)-1,1),y_exp(1:pos(1)-
1,1),x(1:101,1),y(1:101,1))
        title('Compresión Uniaxial a1')
        xlabel('Desplazamiento')
        ylabel('Fuerza')

subplot(2,1,2);plot(x_exp(pos(1):size(x_exp,1),1),y_exp(pos(1):size(y_
exp,1),1),x(102:202,1),y(102:202,1))
        title('Compresión Confinada a21')
        xlabel('Desplazamiento')
        ylabel('Fuerza')
end
end

```