



ESTUDIO Y MODELADO DEL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS

Proyecto Final para optar al grado de Ingeniero en Materiales

Matías Emanuel di Mauro

Mar del Plata | Argentina

2020

Dirección: Dr. Ing. Federico Rueda

Co-dirección: Dr. Ing. Javier Raffo

ESTUDIO Y MODELADO DEL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS



RINFI se desarrolla en forma conjunta entre el INTEMA y la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría mostrar mi mayor agradecimiento a mi familia: a mi mamá Alejandra, mi papá Guillermo, a mi hermano Sebastián, a mis tíos y a los que ya no están; por el incondicional apoyo que me han brindado, por aguantarme durante mis largas horas de estudio, por estar presentes en todos los momentos buenos y malos, y por acompañarme en todas las decisiones que he tomado a lo largo de toda mi vida.

Agradecer también a mis amigos y compañeros de estudio, con quienes he compartido una cantidad incontable de momentos inolvidables, y con quienes he recorrido estos años de puro aprendizaje, experiencias y crecimiento.

A mis directores, el Dr. Ing. Federico Rueda y el Dr. Ing. Javier Raffo, no solo por introducirme en este mundo de la simulación y la mecánica aplicada a la resolución de problemas de la Ciencia e Ingeniería de Materiales, sino también por proveerme de gran conocimiento, y compartir conmigo su gran experiencia, pasión y consejos. Además, me parece relevante destacar el compromiso que han asumido a pesar de esta situación extraña que nos ha llevado a mantener distancia en el contacto y comunicarnos por vías virtuales.

Al grupo de Ciencia e Ingeniería de Polímeros del INTEMA, por abrirme sus puertas, integrarme a su equipo de trabajo, y permitir involucrarme en este apasionante trabajo.

A todos los profesores y maestros de mis Colegios y Universidad, quienes me han aportado invaluable conocimiento y apoyo, y se han quedado incontable cantidad de veces después de clase para contestar todas mis dudas con la mejor predisposición y entusiasmo.

A todos los profesores y personal del Departamento de Materiales por su buena voluntad y seguimiento académico. De la misma manera, agradecer a todos los responsables de hacer que la Facultad de Ingeniería de la UNMdP sea la institución que es hoy.

Por último, me gustaría agradecer a la Dra. Ing. Silvia Simison, al Dr. Ing. Flavio Soldera y al equipo de EUSMAT. Ellos me han dado la oportunidad única de participar del proyecto de intercambio I.DEAR en la Universidad de Saarland (Alemania), y han contribuido a mi crecimiento personal y profesional, al haber aprendido conceptos que han sido fundamentales para llevar a cabo este trabajo.

A todos ellos, una vez más, ¡GRACIAS!

ÍNDICE

| | |
|---|-----------|
| RESUMEN | 4 |
| ABSTRACT | 5 |
| ESQUEMA DEL TRABAJO | 6 |
| NOMENCLATURA | 8 |
| 1. INTRODUCCIÓN | 14 |
| 1.1. EL USO DE POLÍMEROS EN TUBERÍAS DE DISTRIBUCIÓN DE GAS | 14 |
| 1.2. FALLA POR FRACTURA DE LAS TUBERÍAS | 15 |
| 1.2.1. INTRODUCCIÓN A LOS MECANISMOS DE FALLA POR FRACTURA | 15 |
| 1.2.1.1. Crecimiento Lento de Fisuras (SCG) | 16 |
| 1.2.1.2. Crecimiento Rápido de Fisuras (RCP) | 16 |
| 1.3. RCP COMO UN FENÓMENO DINÁMICO COMPLEJO | 17 |
| 1.3.1. ENSAYOS MECÁNICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL RCP | 19 |
| 1.3.1.1. El Test a Escala Completa (FST) | 19 |
| 1.3.1.2. El Test en Estado Estacionario de Pequeña Escala (S4T) | 20 |
| 1.3.2. EL USO DE MODELOS ANALÍTICOS Y COMPUTACIONALES | 21 |
| 1.4. OBJETIVOS DEL TRABAJO | 21 |
| REFERENCIAS: CAPÍTULO (1) | 23 |
| 2. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA DE FRACTURA | 25 |
| 2.1. LA MECÁNICA DE FRACTURA | 25 |
| 2.1.1. DEFINICIÓN DE “FRACTURA” | 26 |
| 2.2. MECÁNICA DE FRACTURA LINEAL ELÁSTICA (MFLE) | 26 |
| 2.2.1. FORMULACIÓN ENERGÉTICA | 27 |
| 2.2.1.1. La Tasa de Liberación de Energía | 29 |
| 2.2.1.2. Curvas de Resistencia G - \mathcal{R} | 30 |
| 2.2.2. FORMULACIÓN TENSIONAL | 31 |
| 2.2.3. RELACIÓN ENTRE G Y K | 33 |
| 2.3. MECÁNICA DE FRACTURA DINÁMICA | 33 |
| 2.3.1. SOLICITACIÓN RÁPIDA DE FISURAS | 34 |
| 2.3.2. PROPAGACIÓN DINÁMICA DE FISURAS Y ARRESTO. | 35 |
| 2.3.2.1. Cálculo Dinámico de la Fuerza Impulsora | 37 |
| 2.3.2.2. Velocidad de Propagación | 38 |
| 2.3.2.3. Resistencia a la Fractura Dinámica y Arresto | 38 |
| 2.4. FRACTURA EN POLÍMEROS | 39 |

| | |
|--|-------------------|
| REFERENCIAS: CAPÍTULO (2) | 42 |
| <u>3. PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS</u> | <u>44</u> |
| 3.1. EL FENÓMENO DE RCP | 44 |
| 3.2. CARACTERIZACIÓN EXPERIMENTAL | 45 |
| 3.2.1. DETERMINACIÓN DE LA PRESIÓN CRÍTICA | 45 |
| 3.2.1.1. El Test a Escala Completa (<i>Full Scale Test</i>) | 45 |
| 3.2.1.2. El Test en Estado Estacionario de Pequeña Escala (<i>Small-Scale Steady State Test</i>) | 46 |
| 3.2.1.3. Correlación FST-S4T | 48 |
| 3.2.2. ENSAYO DE IMPACTO CHARPY INSTRUMENTADO | 51 |
| 3.3. RCP COMO PROBLEMA DE FRACTURA DINÁMICA | 53 |
| 3.3.1. DEFORMACIÓN DE LAS PAREDES DE LA TUBERÍA | 54 |
| 3.3.2. DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN Y DINÁMICA DE FLUIDOS | 55 |
| 3.3.3. ANÁLISIS DE LA MECÁNICA DE FRACTURA | 60 |
| 3.3.3.1. La Propagación en Estado Cuasi-Estacionario | 60 |
| 3.3.3.2. Características de la Fuerza Impulsora | 62 |
| 3.3.3.3. Influencia de los Parámetros Principales | 63 |
| 3.3.3.4. Modelo Analítico de Irwin-Corten para la Fuerza Impulsora | 65 |
| 3.4. ANÁLISIS COMPUTACIONAL DEL RCP | 66 |
| REFERENCIAS: CAPÍTULO (3) | 69 |
| <u>4. DESARROLLO DEL MODELO</u> | <u>72</u> |
| 4.1. BASE Y ESQUEMA | 72 |
| 4.1.1. EL VOLUMEN DE CONTROL | 72 |
| 4.1.2. DEFORMACIÓN MECÁNICA | 73 |
| 4.1.3. DINÁMICA DEL FLUIDO | 75 |
| 4.1.4. PARÁMETROS DE LA MECÁNICA DE FRACTURA | 75 |
| 4.2. MODELO DE LA DEFORMACIÓN MECÁNICA | 76 |
| 4.2.1. VIGA DE EJE CURVO (EULER-BERNOULLI) | 76 |
| 4.2.2. FORMULACIÓN VARIACIONAL Y OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO | 81 |
| 4.2.2.1. Obtención del Problema de Contorno | 81 |
| 4.2.2.1.1. Cálculo de $\Delta I[\mathbf{w}, \mathbf{u}]$ | 83 |
| 4.2.2.1.2. Ecuaciones Diferenciales y Condiciones de Contorno | 88 |
| 4.2.3. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y SU RELACIÓN CON EL VOLUMEN DE CONTROL | 90 |
| 4.2.3.1. Método Variacional de Ritz | 92 |
| 4.2.3.2. Aplicación del Método | 92 |
| 4.3. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA | 99 |
| REFERENCIAS: CAPÍTULO (4) | 101 |
| <u>5. AJUSTE Y ANÁLISIS DEL MODELO</u> | <u>103</u> |
| 5.1. VERIFICACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE RITZ | 103 |
| 5.1.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA | 103 |

| | |
|---|------------|
| 5.1.2. COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE RITZ | 105 |
| 5.2. VERIFICACIÓN DEL MODELO INICIAL | 111 |
| 5.2.1. RESULTADOS [PRIMERA SIMULACIÓN] | 113 |
| 5.2.1.1. Cálculo de la Apertura de la Fisura | 1144 |
| 5.2.1.2. Cálculo de la Energía de Deformación y Trabajo de Fuerzas Externas | 114 |
| 5.2.1.3. Cálculo de la Energía Cinética | 1188 |
| 5.2.1.4. Análisis de Resultados | 1199 |
| 5.2.2. MODIFICACIONES DEL MODELO | 119 |
| 5.2.2.1. Reformulación del Problema de Contorno | 120 |
| 5.2.2.2. Ajuste de la Constante de Rigidez | 1222 |
| 5.3. VERIFICACIÓN DEL MODELO MODIFICADO | 125 |
| 5.3.1. RESULTADOS [SEGUNDA SIMULACIÓN] | 125 |
| 5.3.1.1. Cálculo de la Apertura de Fisura | 125 |
| 5.3.1.2. Cálculo de la Energía de Deformación y del Vínculo s_1 | 127 |
| 5.3.1.3. Trabajo de las Fuerzas Externas | 131 |
| 5.3.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS | 132 |
| 5.3.2.1. Interpretación mecánica y energética del resorte $s_1(z)$ | 132 |
| 5.3.2.2. Análisis de las Energías | 134 |
| 5.3.2.3. La Fuerza Impulsora para la Propagación | 138 |
| REFERENCIAS: CAPÍTULO (5) | 141 |
| | |
| 6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO | 143 |
| | |
| 6.1. CONCLUSIONES GENERALES | 143 |
| 6.2 TRABAJOS A FUTURO | 145 |
| | |
| ANEXOS | 147 |
| | |
| ANEXO 'A' – DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES (3.11) Y (3.12) | 147 |
| | |
| ANEXO 'B' – RELACIONES CINEMÁTICAS EN COORDENADAS POLARES (4.7) | 151 |
| | |
| ANEXO 'C' – CONCEPTOS BÁSICOS DEL CÁLCULO DE VARIACIONES | 155 |
| | |
| ANEXO 'D' – DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO VARIACIONAL DE RITZ | 161 |
| | |
| REFERENCIAS: ANEXOS | 164 |
| | |
| APÉNDICE | 166 |
| | |
| ALGORITMO DE MAPLESOFT: "MODELO INICIAL" | 166 |
| | |
| ALGORITMO DE MAPLESOFT: "MODELO MODIFICADO" | 169 |

RESUMEN

Los polímeros se han convertido en el material por excelencia en la industria de la distribución de gas. Por ello, el desarrollo de nuevas resinas para la fabricación de tuberías plásticas presurizadas con fluidos ha reavivado el interés por la comprensión y modelado del fenómeno de fractura conocido como Propagación Rápida de Fisuras (RCP).

El RCP se caracteriza por el crecimiento de una grieta frágil en estado cuasi-estacionario, capaz de propagarse a velocidades sónicas por todo el material, y producir consecuencias catastróficas. Este tipo de fractura tiene lugar bajo determinadas condiciones críticas de presión y temperatura, y suele iniciarse por la acción de fuentes externas de daño, como un impacto, o por el crecimiento lento de fisuras (SCG). Debido a la complejidad que entraña la prevención de la iniciación de grietas desde el diseño, el enfoque está puesto en que dichas condiciones críticas no se alcancen nunca. Para ello se han diseñado dos pruebas, ahora estandarizadas por la Organización Internacional de Normalización (ISO). La primera de ellas se trata de un costoso ensayo a escala real (FST), mientras que el segundo es un ensayo a escala de laboratorio (S4T) diseñado inicialmente con fines de investigación por P. S. Leever y colaboradores. Ambas pruebas intentan simular las condiciones de operación para determinar la presión crítica, por debajo de la cual, el crecimiento rápido es insostenible y la grieta se detiene. Sin embargo, la correlación entre sus resultados no es directa y todavía hoy no se comprenden bien las causas de esta discordancia. Además, aún no se ha desarrollado un método para medir la resistencia a la fractura del material de la tubería. Esta propiedad debe determinarse mediante un análisis profundo de los datos obtenidos a través de la versión instrumentada de estos experimentos.

Este trabajo describe el estudio teórico del RCP y el desarrollo de una novedosa herramienta computacional ideada para simularlo, y ayudar a la interpretación de los resultados de la prueba S4T. El modelo propuesto recoge los tres aspectos físicos principales del fenómeno de una manera sencilla: (i) la deformación de las paredes de la tubería, (ii) el escape transitorio de gas a través de la grieta abierta, (ii) el comportamiento de fractura del material, y sus efectos acoplados.

Aprovechando su naturaleza cuasi-estacionaria, el análisis se centra en una porción reducida de la tubería, un volumen de control que encierra la punta de la grieta y se traslada con ella a la misma velocidad. Este volumen se divide en secciones anulares contiguas cuya deformación, causada por la fractura y la fuga de fluido, se representa con la flexión y extensión axial de una viga curva. Las condiciones de transición entre dos anillos adyacentes se consiguen introduciendo una restricción elástica traslacional cuya rigidez varía axialmente junto con el perfil de distribución de la presión. La magnitud de la presión, la tasa de crecimiento y la geometría de la fisura medidos en un ensayo S4T instrumentado, junto con las propiedades del material y de la tubería, representan los parámetros de entrada.

El modelo mecánico utilizado para simular la fractura se deriva de un arco con una restricción traslacional externa en la ubicación de la grieta. El problema de contorno, sus ecuaciones diferenciales y las condiciones de transición se obtienen con la aplicación del Cálculo de Variaciones. El método de Ritz se implementa para obtener resultados numéricos del campo de desplazamiento. Este último se utiliza para realizar un balance de energía dentro del volumen de control que permite la cuantificación de la fuerza impulsora para la propagación. Esta magnitud puede utilizarse para caracterizar la resistencia a la fractura del polímero, siempre que los datos de entrada correspondan a las condiciones críticas.

ABSTRACT

Polymers have become the material par excellence in the industry of gas distribution. Therefore, the development of new resins for the manufacture of fluid-pressurized plastic pipes has revived the interest in the understanding and modeling of the fracture phenomenon known as *Rapid Crack Propagation* (RCP).

The RCP is characterized by the growth of a fragile crack in a quasi-stationary state, capable of propagating at sonic speeds throughout the material, thus producing catastrophic consequences. It takes place under certain critical conditions of pressure and temperature and is usually initiated by the action of external sources of damage, such as impacts, or *Slow Crack Growth* (SCG). Due to the complexity involved in the prevention of crack initiation from design, the focus is on preventing that such critical conditions are never reached. Two tests have been designed for this purpose, now standardized by the International Organization for Standardization (ISO). The first one is an expensive *full-scale test* (FST) while the second is a laboratory-scale test (*S4 Small Scale Steady State Test*), initially designed for research purposes by P. S. Leever and collaborators. Both tests attempt to simulate the operating conditions to determine the critical pressure, below which, the rapid growth is untenable and the crack is arrested. However, the correlation between their results is not direct and still today, the causes of this discordance are not well understood. Furthermore, a method to measure the fracture toughness of the pipe material has not been developed yet. This property has to be determined by a profound analysis of the data obtained through the instrumented version of these experiments.

This paper describes the theoretical study of RCP and a novel computational tool developed to simulate it and to assist the interpretation of the S4 test results. It compiles the three physical aspects of the complex phenomenon in a simple manner: (i) the deformation of the pipe walls, (ii) the transient scape of gas through the opened crack, (iii) the material's fracture behavior, and their coupled effects. Taking advantage of the quasi-stationary nature of the phenomenon, the analysis focuses on a reduced portion of the pipe, a control volume that encloses the crack tip and moves along with it. This volume is divided into contiguous ring sections whose deformation caused by the fracture and fluid leakage is modeled as a curved beam. The transition conditions between two adjacent rings are achieved by introducing an elastic translational restraint whose stiffness varies axially together with the pressure distribution profile. Both the spring stiffness, the magnitude of the pressure, and the growth rate are input parameters obtained from an S4 test.

The mechanical model used to simulate the fracture process is derived from an arc with an internal translational restraint in the crack location. The boundary value problem and the transition conditions are obtained with the application of the Calculus of Variations. The Ritz method is used to obtain numerical results of the displacement field. The latter is used to carry out an energy balance within the fracture control volume that allows the quantification of the crack driving force. This magnitude can be used to characterize the fracture toughness of the polymer, provided that the input data corresponds to the critical conditions.

ESQUEMA DEL TRABAJO

Capítulo 1: Introducción

Se presenta formalmente el tema de estudio y se definen de los objetivos del trabajo.

Capítulo 2: Conceptos de la Mecánica de Fractura

Se resumen los conceptos básicos de la Mecánica de Fractura que son necesarios para el desarrollo del trabajo. Se hace hincapié en la teoría elástica de fractura y en la teoría que describe los procesos dinámicos de rotura. Se presenta la formulación energética adoptada para describir el RCP.

Capítulo 3: Propagación Rápida de Fisuras

Se hace hincapié en una descripción fenomenológica del RCP desde un punto de vista teórico y experimental, con el objetivo de comprender la física detrás del proceso de rotura y modelarlo computacionalmente. Se abordan las técnicas experimentales diseñadas para su estudio, así como también los modelos pre-existentes destinados a su representación. Se reúnen y analizan los principales resultados reportados en bibliografía.

Capítulo 4: Desarrollo del Modelo

Se presenta el modelo desarrollado. Se exponen las hipótesis bajo las cuales el modelo tiene validez, y se describe la obtención y resolución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento mecánico de la tubería. Se esquematiza el algoritmo implementado.

Capítulo 5: Ajuste y Análisis del Modelo

Se contrasta la implementación del método de resolución de ecuaciones diferenciales con un grupo de soluciones analíticas. Se utiliza el modelo para reproducir los resultados experimentales de un ensayo de RCP, se detectan sus falencias y se proponen modificaciones. Se analizan e interpretan los nuevos resultados generados por estas modificaciones.

Capítulo 6: Conclusiones y Trabajos a Futuro

Se realiza una conclusión general del trabajo llevado a cabo y se proponen algunas actividades como trabajos a futuro.

ANEXO 'A': Deducción de las Ecuaciones (3.11) y (3.12)

Se deducen las expresiones analíticas para el parámetro de tasa de liberación de energía resultantes de la teoría de Irwin y Corten, con el objetivo de familiarizarse con la matemática utilizada en este tipo de modelos. (Deducción que no se encuentra disponible en la bibliografía revisada)

ANEXO 'B': Relaciones Cinemáticas en Coordenadas Polares (4.7)

Se deducen las expresiones cinemáticas que vinculan las componentes del tensor de deformaciones y el campo de desplazamientos en coordenadas polares.

ANEXO 'C': Conceptos Básicos del Cálculo de Variaciones

Se resumen los conceptos básicos del Cálculo de Variaciones o análisis funcional aplicado que son utilizados en el desarrollo del modelo.

ANEXO 'D': Descripción del Método Variacional de Ritz

Se describe el método variacional de Ritz utilizado para resolver las ecuaciones diferenciales gobernantes del modelo de manera aproximada.

APÉNDICE: Algoritmo del Modelo

Transcripción del algoritmo de Maple Software del modelo inicial y del modelo modificado.

NOMENCLATURA

ABREVIACIONES

| | |
|-------|--|
| MF | Mecánica de Fractura |
| MFD | Mecánica de Fractura Dinámica |
| MFLE | Mecánica de Fractura Lineal Elástica |
| MRS | Resistencia Mínima Requerida (<i>Minimum Required Strength</i>) |
| PE | Polietileno |
| PVC | Policloruro de Vinilo |
| RCP | Propagación Rápida de Fisuras (<i>Rapid Crack Propagation</i>) |
| FST | Ensayo a escala completa (<i>Full Scale Test</i>) |
| FDM | Método de Diferencias Finitas (<i>Finite Difference Method</i>) |
| FEM | Método de Elementos Finitos (<i>Finite Element Method</i>) |
| FVM | Método de Volúmenes Finitos (<i>Finite Volume Method</i>) |
| S4T | Ensayo en estado estacionario de pequeña escala (<i>Small-Scale Steady State Test</i>) |
| SCG | Crecimiento Lento de Fisuras (<i>Slow Crack Growth</i>) |
| SDR | Relación de Diámetro Estándar (<i>Standard Dimensional Ratio</i>) |
| SEL | Sistema de Ecuaciones Lineales |
| SMART | <i>Small-Scale Accelerated Reliable Test</i> |
| VC | Volumen de Control |

SÍMBOLOS

| | |
|-----------------------------|--|
| A | Área transversal de la viga de eje curvo |
| A_z | Área interna de la viga de eje curvo |
| a | Longitud de fisura |
| a_o | Longitud de fisura inicial |
| a_c | Longitud de fisura crítica |
| \dot{a} | Velocidad de propagación de fisura |
| $\mathcal{A}(\cdot)$ | Operador lineal de la Ecuación Diferencial |
| $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ | Forma bilineal |
| B | Espesor de placa semi-infinita |
| c_p | Capacidad calorífica a presión constante |
| c_v | Capacidad calorífica a volumen constante |

| | |
|--|---|
| c_o | Velocidad del sonido en el medio |
| \mathcal{C} | Conjunto de funciones admisibles |
| $\{c_i\}$ | Coefficientes indeterminados del método de Ritz |
| D | Diámetro externo de la tubería |
| D^* | Diámetro reducido, relación D/h |
| \underline{e}_i | Versor del sistema de referencia de la coordenada i |
| E, E_D | Módulos estáticos y dinámicos de Young |
| E' | Módulo en tensión/deformación plana |
| E_{tot} | Energía total |
| E_{INT} | Energía interna |
| E_K | Energía cinética |
| $f_{ij}(\theta)$ | Factor geométrico |
| f | Término externo de la Ecuación Diferencial |
| $\{f\}, \{m\}$ y $\{n\}$ | Vector de términos independientes del método de Ritz |
| \mathcal{G} | Fuerza impulsora para la propagación, tasa de liberación de energía |
| \mathcal{G}_C o \mathcal{R} | Tenacidad a la fractura |
| \mathcal{G}_D | Resistencia a la fractura dinámica |
| \mathcal{G}_{max} | Valor máximo de la curva $\mathcal{G}(\dot{a})$ |
| h | Espesor de pared |
| h_c | Espesor de pared crítico |
| \mathcal{H} | Espacio de direcciones admisibles |
| $\mathbf{H}, \mathbf{H}_{\mathcal{A}}$ | Espacio de Hilbert y subespacio con $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{A}}$ definido |
| $I[u(x)]$ | Funcional de $u(x)$ |
| \underline{I} | Tensor identidad |
| J_{ij}, J_{ij}^{-1} | Matriz Jacobiana de transformación y su inversa |
| K_I | Factor de Intensidad de Tensiones en Modo I |
| K_{IC} | Tenacidad |
| K_{IA}, K_{Ia} | Tenacidad de arresto y tenacidad de arresto aparente |
| K_D | Tenacidad dinámica |
| $[K], [A], [B]$ | Matriz de coeficientes y sub-matrices del método de Ritz |
| $[C]$ y $[D]$ | |
| L_D | Longitud de decaimiento |
| L_x | Longitud de semi-arco |
| L_{SS} | Longitud de fin del estado transitorio |
| \mathcal{L} | Función Lagrangiana |

| | |
|--------------------------|---|
| $l(\cdot)$ | Forma lineal |
| M_θ | Momento flector de cierre |
| M_e | Módulo de extensión |
| M_f | Módulo de flexión |
| $M_F^{(z)}$ | Momento flector de viga alrededor del eje (z) |
| $N_x, N(x)$ | Esfuerzo normal en dirección del eje de la viga |
| N | Número de términos de aproximación del método de Ritz |
| N_a | Número de anillos que constituyen el volumen de control |
| p | Presión |
| p_a | Presión externa |
| p_c | Presión crítica de colapso |
| p_{cFS} | Presión crítica medida en el FST |
| p_{cS4} | Presión crítica medida en el S4T |
| p_m | Presión adicional requerida por tensiones residuales |
| p_o | Presión inicial del medio presurizante |
| p_t | Presión local en la punta de la fisura |
| q | Carga distribuida |
| Q | Esfuerzo de corte |
| r | Coordenada radial del sistema coordenado cilíndrico |
| R | Radio medio |
| R_G | Constante universal de los gases ideales |
| r_o, s_o, t_o | Vínculos elásticos, resorte torsional, tangencial y transversal |
| $s_1(z)$ | Resorte tangencial |
| \mathcal{S} | Acción física |
| $\underline{\mathbf{t}}$ | Vector tensión |
| t | Tiempo |
| t_T | Tiempo característico dinámico |
| t_D | Tiempo de descarga |
| T | Temperatura |
| T_C | Temperatura de transición crítica |
| T_{DF} | Temperatura de transición dúctil frágil |
| $\mathcal{J}(\cdot)$ | Transformación lineal |
| $\underline{\mathbf{U}}$ | Campo de desplazamientos |
| u_S | Densidad de energía de deformación |
| U_S | Energía de deformación |

| | |
|--|--|
| $\mathcal{U}_E, \mathcal{U}_F, \mathcal{U}_T, \mathcal{U}_V$ | Componentes de extensión, flexión, torsión y de vínculos mecánicos |
| $\mathcal{U}_V(s_1), \mathcal{U}_{V,S}(s_1), \mathcal{U}_{V,K}(s_1)$ | Energía del vínculo s_1 y sus componentes de deformación y cinética |
| $u(r, x, t)$ | Componente tangencial del campo de desplazamientos |
| $u_N(x, z)$ | Aproximación de la componente tangencial |
| $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{R}$ | Espacios vectoriales y campo de los números reales |
| $w(r, x, t)$ | Componente transversal del campo de desplazamientos |
| $w_N(x, z)$ | Aproximación de la componente transversal |
| $w(\zeta)$ | Perfil de apertura de fisura, en función de la distancia axial normalizada ζ |
| W | Trabajo de las fuerzas externas (presión) |
| W_S | Trabajo de creación de nuevas superficies |
| x | Coordenada tangencial del sistema coordenado cilíndrico |
| z | Coordenada axial del sistema coordenado cilíndrico |
| $\{\alpha_i\}$ | Coefficientes indeterminados en la dirección transversal |
| $\{\beta_i\}$ | Coefficientes indeterminados en la dirección tangencial |
| γ | Cociente de calores específicos |
| γ_o | Energía específica de superficie |
| γ_{ij} | Distorsión |
| δ | Operador variacional |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker |
| $\underline{\epsilon}, \epsilon_{ij}$ | Tensor de Deformaciones y componentes |
| ξ | Parámetro de variación |
| θ | Coordenada angular del sistema coordenado cilíndrico |
| λ, μ | Constantes de Lamé |
| Π | Energía potencial |
| Π_o | Energía potencial del sistema no fracturado |
| ρ | Densidad |
| ν | Coefficiente de Poisson |
| $\underline{\sigma}, \sigma_{ij}$ | Tensor de Tensiones y componentes |
| σ_c | Tensión crítica de Griffith |
| $\sigma_{\theta B}$ | Tensión circunferencial residual |
| φ | Perturbación en la dirección tangencial |
| ϕ | Ángulo de giro de la sección de la viga respecto de su eje neutro / Función coordenada genérica y en dirección transversal |
| ψ | Perturbación en la dirección transversal / Función coordenada en dirección tangencial |

| | |
|--------------------------|---|
| \underline{x} | Vector posición en las coordenadas cartesianas $\{x_1, x_2\}$ |
| $\Omega, \partial\Omega$ | Dominio y su contorno |
| $\ \cdot\ $ | Norma vectorial |
| $(\cdot, \cdot)_H$ | Producto interno definido en el espacio de Hilbert H |

CAPÍTULO N° I

INTRODUCCIÓN

ESTUDIO Y MODELADO DEL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS

1. INTRODUCCIÓN

1.1. El uso de Polímeros en Tuberías de Distribución de Gas

El transporte y la distribución de recursos es y ha sido siempre un tema de relevancia. Un gran número de trabajos científico-tecnológicos tienen como objetivo la mejora de la eficiencia y el abaratamiento de los costos de fabricación, instalación, operación y mantención de los sistemas utilizados para dicho fin. En particular, cuando del transporte de fluidos se trata, los sistemas de tuberías proveen los medios más eficientes, rápidos y económicos. Por ejemplo, los sistemas de tuberías de transmisión de gas natural son una de las infraestructuras más importantes. Se han utilizado en todo el mundo como un vehículo eficiente para transportar grandes volúmenes a lo largo de largas distancias, típicamente desde una línea de recolección o una instalación de almacenamiento a un centro de distribución [1].

Históricamente, las primeras tuberías fueron construidas de piedra y arcilla, para ser reemplazadas posteriormente por el acero o fundición. Sin embargo, con el advenimiento de la tecnología de plásticos el paradigma ha cambiado, y son ahora los termoplásticos la familia de materiales más elegida [2].

Las tuberías plásticas se han transformado en el material por excelencia en la industria de distribución de gas [3]. En especial, el Polietileno (PE) ha revolucionado el diseño de estos sistemas sometidos a presión interna. Este material junto con otros polímeros como el Policloruro de Vinilo (PVC) o las Poliamidas [4] han reemplazado progresivamente los materiales convencionales para su construcción debido a una combinación especial de sus propiedades. El equilibrio entre su resistencia mecánica, rigidez, dureza y durabilidad han demostrado ser consistentes con los requisitos necesarios para la conducción de agua y gas bajo suelo y las condiciones de servicios comúnmente encontradas. Debido a su menor peso, presentan alta durabilidad y flexibilidad tanto en el transporte, como en la manipulación e instalación. Su fabricación es económica, y la versatilidad de su diseño permite manipular los costos de transformación del material, un proceso que usualmente se lleva a cabo a través de las técnicas de extrusión y moldeo por inyección. A su vez, presentan alta resistencia a la corrosión y otros productos químicos, así como también inercia biológica y capacidad de ser reciclados. Por último, en cuanto a sus propiedades mecánicas, demuestran alta resistencia al impacto y la abrasión, baja fricción y alta durabilidad a largo plazo.

Los procesos de distribución en la Argentina no son la excepción y también se han adherido a esta nueva tendencia. La industria de tubos de plásticos se ha extendido ampliamente durante las últimas décadas y es de esperar una alta tasa de crecimiento a futuro, impulsado por el aumento del número de aplicaciones en el mercado, la inversión en infraestructura en los países emergentes y la renovación de los sistemas metálicos corrosivos en los países desarrollados. Cabe destacar que en el año 2015 el Instituto Argentino del Petróleo y el Gas (IAPG) ha mencionado al abastecimiento de gas natural como una de las cuestiones más estratégicas del país, dado que la Argentina posee una de las reservas más importantes de *shale-gas* en el mundo con excelentes perspectivas de desarrollo. Según se indica en su informe técnico publicado [1], se espera que la demanda promedio anual de gas se incremente substancialmente en los próximos veinte años. Esto representa un gran desafío para lograr un óptimo abastecimiento y un uso racional y eficiente del recurso. De esta manera, el área de distribución deberá acompañar el desarrollo de la infraestructura del gas

mediante la incorporación de tecnología moderna, entre la que se destaca la innovación en tuberías plásticas de alta presión.

1.2. Falla por Fractura de las Tuberías

Varios factores deben ser tenidos en cuenta a la hora de elegir un material para la construcción de tuberías. Desde la durabilidad, la performance estructural sostenida en el tiempo hasta cuestiones relacionadas con la fiabilidad, la integridad de las uniones y la facilidad de construcción y disponibilidad del material, juegan un rol importante en la tarea de seleccionar un material óptimo. La introducción de nuevos polímeros a la industria de tuberías plásticas pretende superar estas dificultades a través de la formulación de nuevas resinas. Por otro lado, la incorporación de nuevos productos debe responder a la creciente demanda experimentada por este sector industrial. Los nuevos materiales deben ser capaces de soportar las condiciones agravadas que implica operar con sistemas de mayor diámetro y presiones más altas.

El desarrollo de nuevos materiales es un desafío que requiere de una rigurosa caracterización de sus propiedades, pues se debe garantizar la confiabilidad en el diseño, así como en los procesos de mantención e inspección. Para cumplir con tales objetivos, es necesario entender los mecanismos de falla más comunes con el fin de prevenir su rotura durante el servicio.

Convencionalmente, los materiales para tuberías son clasificados sobre la base de una Resistencia Mínima Requerida MRS (*Minimum Required Stress*), que es la tensión circunferencial máxima permitida para una vida útil de 50 años a 20 °C. Además de las propiedades del material, la geometría es otro parámetro de clasificación propio de las tuberías. La Relación de Dimensión Estándar SDR (*Standard Dimensional Ratio*), que es la relación entre el diámetro exterior y el grosor de la pared, se utiliza para este propósito, y junto con la MRS determinan la capacidad de soporte de presión. Sin embargo, estos métodos de caracterización se tornan insuficientes cuando las condiciones de servicio se vuelven más severas, por ejemplo, al incrementar las presiones de trabajo o al diseñar tuberías de mayor dimensión.

Debido a que un gran número de polímeros termoplásticos tienden a fallar por fenómenos de fractura, la resistencia a la fractura de las tuberías plásticas estudiada en función de las propiedades del material ha sido un tema de gran interés en la investigación científica. Se cree que el entendimiento de los mecanismos de fractura, junto con el diseño de ensayos de caracterización acordes, son capaces de asistir a los problemas actuales que enfrenta este sector tecnológico [2].

1.2.1. Introducción a los Mecanismos de Falla por Fractura

La fractura es un modo de falla dominado por la iniciación y propagación de fisuras. Las fisuras pueden ser consideradas como discontinuidades en el cuerpo material que se originan a causa de diversas fuentes. La **fase de iniciación** se identifica como el punto en el cual el defecto comienza a crecer. Seguida de la iniciación, tiene lugar la **fase de propagación**. Este período de crecimiento puede tener un carácter estable (si la velocidad con la que ocurre es constante o decreciente, y culmina con su arresto o detención) o un carácter inestable (si la velocidad aumenta).

El mecanismo de falla más común que se observa en las tuberías plásticas es el denominado Crecimiento Lento de Fisuras (SCG del inglés *Slow Crack Growth*). El Crecimiento Rápido de Fisuras (RCP del inglés *Rapid Crack Growth*), aunque rara vez observado en servicio, es otro mecanismo que también atrae igual preocupación. Esto último se debe al daño potencialmente más catastrófico que puede causar. En la *Figura 1.1* se muestran algunos ejemplos de estos tipos de falla.

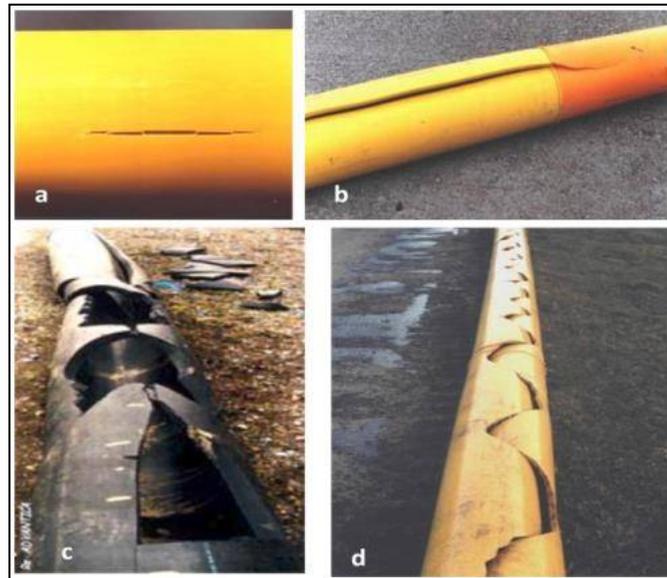


Fig. 1.1 Fracturas frágiles típicas de tuberías plásticas. (a) Crecimiento lento sin daño lateral, (b) propagación de fisura rápida, (c) grieta dinámica con destrozamiento de material en tubo de pared gruesa, (d) grieta "running-crack", propagación a muy alta velocidad. [5]

1.2.1.1. Crecimiento Lento de Fisuras (SCG)

Las roturas atribuidas al SCG involucran un crecimiento estable de fisura con escasa deformación plástica en el espesor, y que puede extenderse durante varios años antes de producir una fuga. La propagación de la grieta en el espesor de pared ocurre a menudo cuando la tubería se encuentra sujeta a fuerzas de flexión, y se inicia en defectos del material o fallas microscópicas. Es decir, se trata de un fenómeno localizado dominado por la resistencia del material al SCG; y cuya fuerza impulsora surge de la combinación de las sollicitaciones externas y de las características microestructurales del material.

El tamaño de defecto y la concentración de tensiones, la geometría del tubo y las tensiones internas causadas por la presión de gas, el peso del suelo, la flexión inducida por asentamiento, y las fuerzas externas junto con las tensiones residuales provenientes de la manufactura del tubo, contribuyen a este fenómeno. Luego de la nucleación de la fisura, esta aumenta de tamaño y crece en el espesor hasta adquirir un tamaño crítico, y adoptar un carácter mecánico frágil que culmina con la perforación del tubo [6].

1.2.1.2. Crecimiento Rápido de Fisuras (RCP)

El fenómeno RCP, en el cual se centra este trabajo, se caracteriza por la propagación en estado cuasi-estacionario de una fisura extensa y frágil, capaz de propagar a velocidades sónicas a lo largo de todo el material. Aunque se trate de un evento muy poco frecuente, las veces que ha ocurrido ha producido consecuencias catastróficas y roturas que se extienden por kilómetros, como la que se observa en la *Figura 1.2*.



Fig. 1.2 Fallo por RCP de tubería plástica. [tushnet.blogspot.com (2017)]

En los años '70 la fractura rápida y frágil fue identificada como un modo de falla inherentemente catastrófico de las tuberías de acero sometidas a presión interna, el cual migró posteriormente al área de los sistemas plásticos. A pesar de ser difíciles de iniciarse, este tipo de fallas se ha observado que ocurre incluso a presiones por debajo de las presiones máximas admisibles de diseño adoptadas contra el crecimiento lento de fisuras [7].

La propagación axial de fisuras a 100 m/s - 300 m/s a lo largo de kilómetros, con patrones de crecimiento rectos o sinusoidales, es característico de la RCP. Esto es acompañado por una rápida descompresión del gas, que se produce cuando el fluido escapa a través de la tubería abierta y causa severos daños estructurales. Como consecuencia, no solo se ve afectado el propio sistema de distribución, sino también el suelo que se encuentra por encima, las carreteras y el pavimento de alrededores. Además, cuando se trata de fluidos inflamables, existe el riesgo potencial de una explosión.

La propagación rápida tiene lugar bajo ciertas condiciones críticas de presión y temperatura que están íntimamente relacionadas con la geometría del tubo, las condiciones del suelo donde se entierra, las propiedades del fluido y las propiedades del material. Se inicia usualmente por la acción de fuentes de daño externas, como son las cargas de impacto, o bien el crecimiento lento SCG. Luego de la iniciación, la grieta se detiene o bien se propaga indefinidamente dependiendo de si la presión y temperatura lo permiten. Debido a que es muy complejo prevenir la iniciación de la fisura desde el diseño, el enfoque está puesto en evitar que dichas condiciones críticas no se alcancen. Por lo tanto, el estudio de la RCP en las tuberías de gas tiene como objetivo asegurar que una grieta en crecimiento siempre se arreste, se detenga, incluso bajo las condiciones de funcionamiento más extremas.

1.3. RCP como un Fenómeno Dinámico Complejo

Es bien sabido que una grieta propagante (*running-fracture*) es controlada por la relación entre la velocidad de descompresión del fluido y la velocidad de crecimiento [8]. El balance entre estas magnitudes es un resultado dinámico dependiente de las propiedades del fluido, la geometría de la tubería y el flujo de gas que por ella circula, de las propiedades frente a la fractura del material y las condiciones del medio circundante. De esta manera, la fisura se propaga siempre y cuando la energía almacenada en el sistema sea suficiente para impulsar

la grieta más rápido que la velocidad de liberación de energía y de escape del gas. Es decir, una vez iniciada, la fractura continúa hasta que no haya más gas fluyendo a través del vértice de la grieta. De esta manera, la presión que impulsa el proceso cae y provoca la detención o el arresto.

La complejidad del modo de falla recae en la coexistencia de tres fenómenos físicos fuertemente correlacionados, mencionados implícitamente en el párrafo anterior. Estos son:

(i) Deformación mecánica de las paredes de la tubería, dictadas por la magnitud de presión y la velocidad de descompresión.

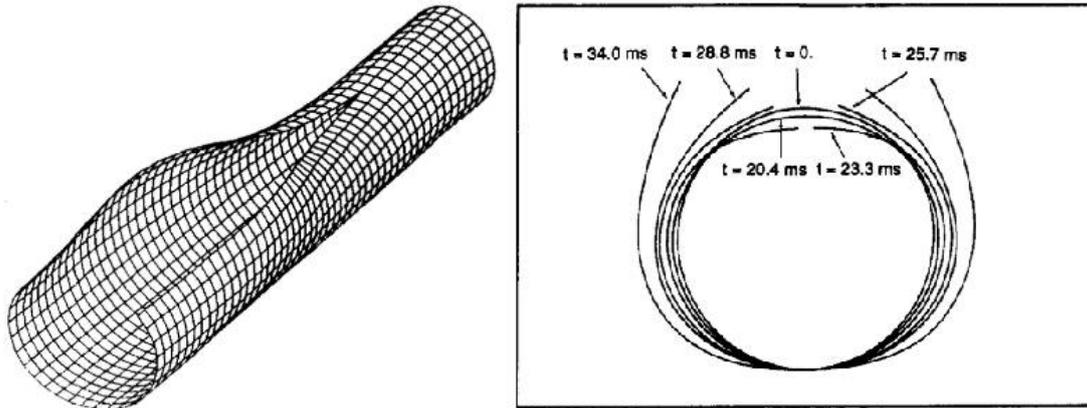


Fig. 1.3 Resultados del cómputo de la deformación de las paredes de una tubería y deformación de la sección transversal en diferentes tiempos desde el inicio de la fisura. [9]

(ii) Dinámica de fluidos no estacionaria asociada al escape del gas a través de la fisura, cuya velocidad depende del grado de deformación de las paredes y la abertura que estas causan.

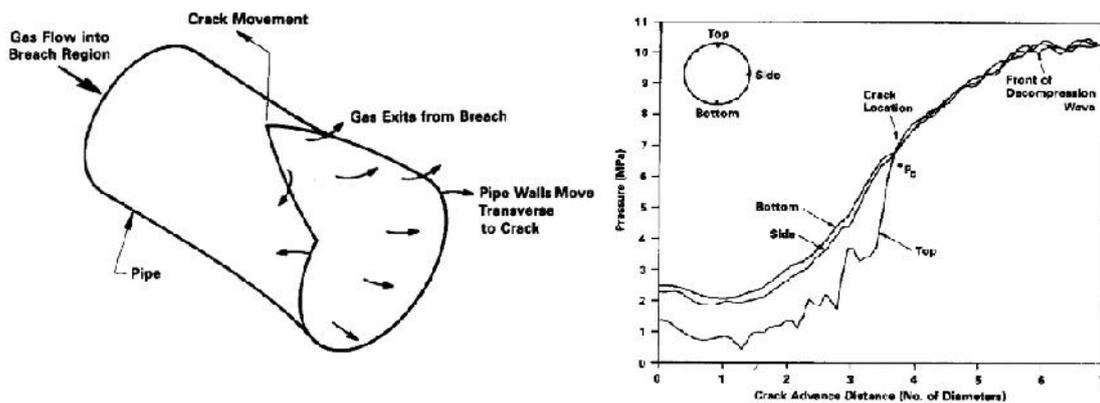


Fig. 1.4 Esquema de la dinámica de escape del fluido y perfil de descompresión en diferentes posiciones de la tubería medidos experimentalmente. [9]

(iii) Comportamiento frente a la fractura dinámica de materiales viscoelásticos, como son los polímeros.

Con el fin de minimizar los riesgos que este mecanismo acarrea y responder rápidamente a las demandas de la industria, un gran número de investigadores e instituciones se ha

involucrado en la tarea de comprender el fenómeno, la física detrás de la falla, así como los parámetros geométricos y del material más relevantes. Para ello, han utilizado tanto la experimentación como herramientas del modelado computacional. En su estudio se ha hecho énfasis en los tres aspectos físicos mencionados y se ha tomado como axioma principal la determinación de las condiciones de operación que aseguran el arresto repentino de la fisura frágil.

1.3.1. Ensayos Mecánicos para la Caracterización del RCP

Los métodos usualmente utilizados para clasificar materiales poliméricos de tuberías basados en el parámetro MRS no dan ninguna garantía del comportamiento del material frente a la RCP. Tampoco lo hacen los test propios de la fractura dinámica como los ensayos de impacto Charpy, empleados para medir la resistencia a la iniciación de fisuras por cargas de impacto. Este conflicto, sumado con la necesidad de demostrar una resistencia adecuada al RCP a 0 °C frente a organismos como la Industria Europea del Gas, han impulsado el desarrollo de dos ensayos específicos [8]. Hoy en día ambos test se encuentran estandarizados por la Organización Internacional de Normalización (ISO).

Los ensayos intentan simular las condiciones de servicio con el objetivo de determinar la presión crítica p_c , por debajo de la cual, la propagación rápida es insostenible y la fisura se arresta. A continuación, se los describe brevemente.

1.3.1.1. El Test a Escala Completa (FST)

La primera de estas pruebas se trata de costoso ensayo de escala completa (**FST** del inglés *Full Scale Test*, ISO 13478) diseñado en la década del '70 por *British Gas Corporation* y basado en los trabajos de J. Greig [10]. El test utiliza una tubería de prueba de al menos 14 m de longitud que se la entierra 100 m bajo grava y se instala dentro de un sistema de enfriamiento por agua para mantener la temperatura constante. La tubería se extiende artificialmente con una sección adicional de acero para simular un cilindro infinito y atenuar la reflexión de ondas mecánicas en los extremos libres. El sistema es presurizado con aire o nitrógeno por cuestiones de seguridad, y se induce el agrietamiento a través del impacto de una cuchilla de acero. El test permite hallar la presión crítica buscada p_{cFS} , definida como la presión a la cual se observa un crecimiento de la fisura en más de un 90 % de longitud del espécimen, *Figura 1.5*.

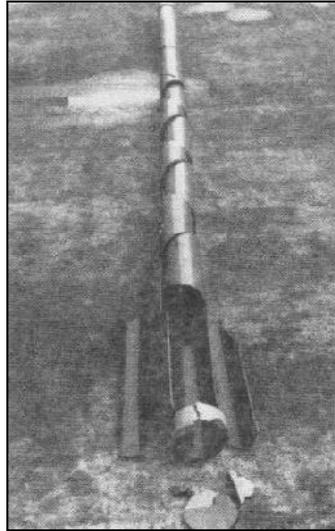


Fig. 1.5 Fractura a alta velocidad del ensayo FST en tubería de PVC. [10]

1.3.1.2. El Test en Estado Estacionario de Pequeña Escala (S4T)

El segundo ensayo se trata de un test a escala laboratorio (**S4T** del inglés *Small Scale Steady State Test*, ISO 13477), inicialmente diseñado con fines de investigación por P. S. Leever y colaboradores en 1987 en el Imperial College [8]. Este intenta simular las mismas condiciones de servicio dentro de las instalaciones de un laboratorio, y es preferido para la investigación y desarrollo de nuevos materiales dado que ofrece menores tiempos de ejecución y menores costos. En él, una tubería de 7 diámetros de longitud es sellada por ambos extremos y presurizada con aire (*Figura 1.6*). Con un percutor de punta aguda se inicia una fisura en la región de iniciación que crece hacia la zona principal de testeo del espécimen. Durante la propagación, la descompresión interna de gas es suprimida por la presencia de discos o baffles internos equiespaciados a lo largo de toda la longitud. Una jaula de contención rodea al tubo y limita la deformación radial (*flaring*) de las paredes fracturadas. El propósito de estas modificaciones consiste en establecer las condiciones estacionarias del RCP en tuberías de menor longitud y evitar un estallido transitorio que podría producir un falso arresto a altas presiones. Como resultado, se obtiene la presión crítica denominada como p_{CS4} .

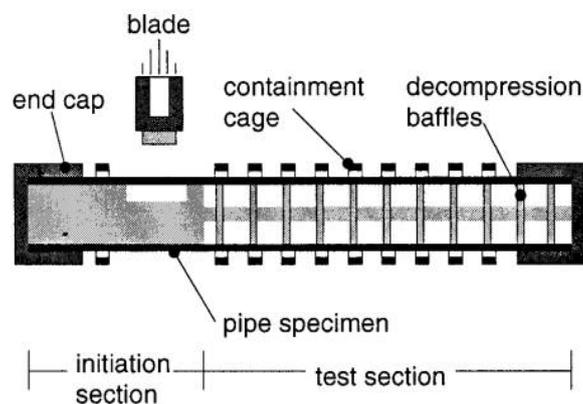


Fig. 1.6 Diagrama esquemático del S4T. [8]

El S4T y su versión instrumentada han tenido un gran éxito y su uso se ha extendido ampliamente entre investigadores. Una considerable cantidad de estudios se han llevado a cabo con el objetivo de identificar los principales parámetros que influyen en el comportamiento de la tubería. Entre ellos se destacan: el espesor de pared, el diámetro de la tubería, la temperatura y el tipo de material utilizado. Sin embargo, muchos investigadores han detectado una falta de correlación entre los resultados de estos ensayos y los obtenidos a través del FST, y de estos dos con las condiciones reales de servicio. En particular, las presiones calculadas del S4T resultan siempre menores que las presiones del FST ($p_{CS4} < p_{CFS}$), y aún hoy no se logra dilucidar las causas de esta discordancia.

1.3.2. El Uso de Modelos Analíticos y Computacionales

La complejidad del fenómeno y su naturaleza multi-física han hecho que las herramientas computacionales fueran las más utilizadas para el abordaje del problema.

Autores como A. Ivankovic y G. P. Venizelos (1997, 1998) han utilizado los Métodos de Volúmenes Finitos (FVM de *Finite Volume Method*) [11], mientras que otros, como P. E. O'Donoghue, Z. Zhuang y S. T. Green (1991) han optado por el Método de Elementos Finitos (FEM de *Finite Elements Method*) [12]. Por otro lado, autores como P. S. Leever han propuesto modelos semi-analíticos de resolución numérica, por medio del Método de Diferencias Finitas (FDM *Finite Difference Method*) [13].

Como común denominador, estos modelos incorporan de manera modular diferentes teorías mecánicas para describir las deformaciones de las paredes del tubo, modelos unidimensionales y bidimensionales simplificados para describir la dinámica del escape del gas, y criterios de mecánica de fractura para cubrir el comportamiento a la fractura del material. Tienen como objetivo principal brindar asistencia a la comprensión del fenómeno, evaluar cuantitativamente la influencia de cada parámetro y calcular la presión crítica para las condiciones del FST y S4T. Además, se han desarrollado con la intención de arrojar luz en el problema de correlación de los ensayos y también, para poder determinar propiedades intrínsecas de los materiales, como es la resistencia dinámica a la fractura. De esta manera, pretenden proveer una herramienta útil que asista y/o reemplace parcialmente la realización de ensayos experimentales costosos y laboriosos, o que permita diseñar otro tipo de test más convenientes.

1.4. Objetivos del Trabajo

El objetivo principal del proyecto final de tipo científico-tecnológico consiste en comprender el fenómeno denominado RCP en tuberías plásticas con el fin de asistir a la caracterización de nuevos materiales y a la interpretación de los resultados de los ensayos S4T y FST. Debido a la complejidad del problema la solución se abordará de forma computacional. Los objetivos y tareas específicas para cumplir con esta finalidad son:

- Realizar un estudio teórico y bibliográfico para determinar las características más importantes del fenómeno, con el fin de plantear hipótesis coherentes de cara a su modelado.
- Realizar un estudio de los modelos computacionales ya implementados.
- Plantear un modelo inicial para reproducir el fenómeno de manera computacional.

- Determinar el alcance del modelo desarrollado, sus falencias y aciertos, y compararlo con el resultado de otros esquemas de resolución numérica y resultados experimentales.

REFERENCIAS: CAPÍTULO (1)

- [1] IAPG, “De Vaca Muerta al hogar de los argentinos,” 2015.
- [2] P. Ozbek, “Rapid fracture resistance of polyethylene: Dependence on polymer structure,” *PhD Thesis, Dep. Mech. Eng. Imp. Coll. London*, no. January, 2008.
- [3] S. Tymkowicz, “Gas distribution in infrastructure: pipeline replacement and upgrades - cost recovery issues and approaches,,” 2012.
- [4] J. B. Kopp, C. Fond, and G. Hochstetter, “Rapid crack propagation in PA11: An application to pipe structure,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 202, pp. 445–457, 2018, doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.08.025.
- [5] K. Chaoui, L. Alimi, and S. Azzouz, “RELIABILITY INDEX COMPUTATION FOR HDPE PIPE USING CRITICAL STRESS INTENSITY FACTOR,” *23ème Congrès Français de Mécanique*, pp. 1–7, 2017.
- [6] M. Farshad, *Plastic Pipe Systems: Failure Investigation and Diagnosis*, First Edit., vol. 30, no. 4. Great Britain: Elsevier Science, 2006.
- [7] P. Venizelos and C. J. Greenshields, “Fast Brittle Fracture of Plastic Pipes Part 2 - Gas pressurised,” vol. 26, no. 9, pp. 394–403, 1998.
- [8] C. J. Greenshields and P. S. Leever, “Correlation between full scale and small scale steady state (S4) tests for rapid crack propagation in plastic gas pipe,” *Plast. Rubber Compos. Process. Appl.*, vol. 28, no. 1, pp. 20–25, 1999, doi: 10.1179/146580199322913287.
- [9] P. E. O’Donoghue, S. T. Green, M. F. Kanninen, and P. K. Bowles, “The development of a fluid/structure interaction model for flawed fluid containment boundaries with applications to gas transmission and distribution piping,” *Comput. Struct.*, vol. 38, no. 5–6, pp. 501–513, 1991, doi: 10.1016/0045-7949(91)90002-4.
- [10] L. E. J. Greig, “Fracture Propagation in Polyethylene (PE) Gas Pipes,” *Proc .5th Int. Conf. Plast. Pipes, Institue Mater.*, pp. 13.1-13.11, 1982.
- [11] A. Ivankovic and G. P. Venizelos, “Rapid crack propagation in plastic pipe: Predicting full-scale critical pressure from S4 test results,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 59, no. 5, pp. 607–622, 1998.
- [12] Z. Zhuang and P. E. O’Donoghue, “The recent development of analysis methodology for rapid crack propagation and arrest in gas pipelines,” *Int. J. Fract.*, vol. 101, no. 3, pp. 269–290, 2000.
- [13] P. Leever, “An engineering model for rapid crack propagation along fluid pressurized plastic pipe,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 96, pp. 539–557, 2012, doi: 10.1016/j.engfracmech.2012.09.001.

CAPÍTULO N° II

CONCEPTOS DE LA MECÁNICA DE FRACTURA

ESTUDIO Y MODELADO DEL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS

2. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA DE FRACTURA

2.1. La Mecánica de Fractura

La Mecánica de Fractura (MF) es la rama de la Mecánica del Sólido que se ocupa del estudio de la estabilidad estructural de materiales basado en el proceso de nucleación, iniciación y propagación de fisuras. Su introducción como rama formal de la mecánica ha modificado el enfoque del problema del diseño y selección de materiales apoyado inicialmente en la resistencia como parámetro fundamental. Esta teoría prioriza el análisis de los defectos existentes y su evolución en función de las condiciones de carga y las propiedades del material.

En el diseño tradicional, se compara la tensión a la cual se espera que esté sometido el cuerpo con sus propiedades mecánicas de fluencia (deformación plástica irreversible que ocurre cuando se sobrepasa una tensión crítica denominada tensión de fluencia) y de rotura. Mediante la introducción de un coeficiente de seguridad se define la tensión admisible que puede soportar la estructura, y se determina si el material estudiado es adecuado para soportar dichas condiciones de carga.

Por otro lado, el enfoque de diseño de la MF (*Fig. 2.1*) basa su análisis en tres variables: las **solicitaciones externas**, la **tenacidad a la fractura**, que reemplaza a la resistencia del material como propiedad relevante, y el **tamaño del defecto**. La geometría y dimensiones del defecto se añaden como variable adicional al asumir la preexistencia de una discontinuidad en el cuerpo material. La tenacidad a la fractura se define como la resistencia al crecimiento de una grieta. De esta manera, la mecánica de fractura cuantifica las posibles combinaciones críticas de estas tres variables con el objetivo de determinar las condiciones bajo las cuales es factible que se produzca la falla por fractura de la estructura [1].

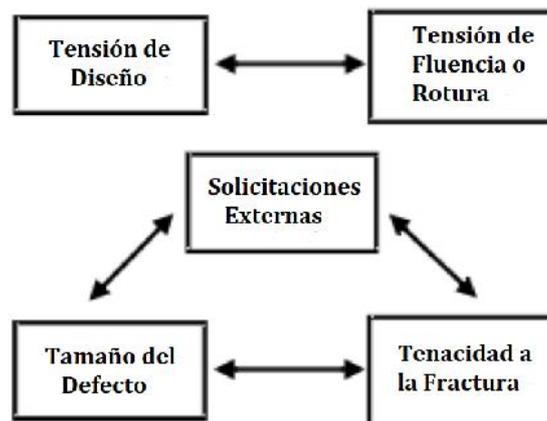


Fig. 2.1 Comparación del diseño tradicional y el diseño de la Mecánica de Fractura.

2.1.1. Definición de “Fractura”

La teoría que se enmarca en esta rama de la mecánica define a la **fractura** como la creación de nueva superficie dentro de un cuerpo sólido. Se diferencia de otras teorías de deformación en el sentido de que no preserva la continuidad del material.

Cualquier estructura bajo carga almacena energía potencial. La fractura ocurre solo cuando la liberación de esta energía junto con el trabajo mecánico realizado por fuentes externas es suficiente para crear nueva superficie libre y causar el crecimiento de defectos existentes. Es decir, ocurre cuando la liberación de energía provocada por la violación de la continuidad es suficiente para sobrepasar la resistencia a la fractura del material y actuar como fuerza impulsora del proceso de ruptura [2].

2.2. Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE)

La Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE) es la teoría que se encarga del estudio del fenómeno de fractura en cuerpos elásticos. Es un desarrollo con orígenes en la década del '20 que establece los criterios fundamentales para la descripción de la propagación de grietas en aquellos sólidos que obedecen leyes constitutivas lineales como, por ejemplo, la ley de Hooke.

Históricamente, existen dos enfoques fundamentales adoptados por la MFLE que son diferentes pero equivalentes entre sí. El primero de ellos se trata de un formalismo energético propuesto por Griffith, basado en conceptos de transformación de energía elástica en energía de superficie. El segundo, el formalismo de Irwin, plantea un análisis en término de tensiones, y describe el problema en función de campos de tensión y deformación. Ambos enfoques describen el proceso de fractura en base a la geometría del sistema, el estado de carga o energía almacenada y las propiedades del material. Buscan determinar parámetros intrínsecos del material que sean capaces de cuantificar su resistencia a la fractura.

Junto con estos dos formalismos analíticos, se han desarrollado un gran número de métodos experimentales, ensayos propios de la MF, que tienen como objetivo caracterizar la respuesta frente a la rotura por agrietamiento de los materiales. Los ensayos con base en el enfoque energético enfrentan la dificultad experimental de tener que medir tanto la fuerza aplicada al espécimen de prueba, como el desplazamiento o la deformación que este sufre. Esto se debe a que la energía se construye, en términos simplificados, como el trabajo realizado por una fuerza para producir un determinado desplazamiento. Por otro lado, en los test que sientan sus bases en la formulación tensional, la única variable medida es la fuerza aplicada a una probeta de geometría conocida. Por este motivo estos resultan ser más simples y menos sensibles a los errores experimentales de medición.

Como su nombre lo indica, la teoría MFLE se encuentra limitada a aquellos sistemas que se comportan de manera puramente elástica. Materiales que fallan únicamente experimentando deformaciones elásticas se dicen que sufren una **fractura frágil**. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, esta teoría puede aplicarse a materiales con un comportamiento inelástico y no lineal, como es la plasticidad.

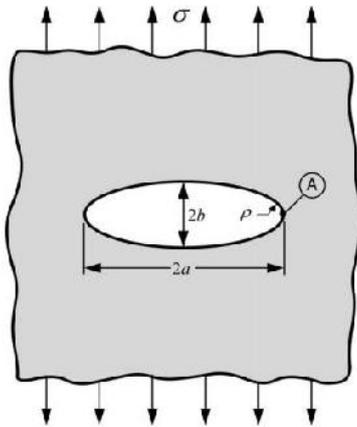
Cuando un material se deforma de manera irreversible y sufre deformación plástica, experimenta alteraciones estructurales que cambian su comportamiento mecánico. Estos mecanismos de falla acompañados de plasticidad son conocidos como **fractura dúctil**. En los

casos donde la deformación plástica se encuentra confinada en una zona de pequeñas dimensiones, es decir, ocurre de manera localizada, el problema admite una aproximación lineal en términos de la MFLE.

A continuación, se describen de manera resumida los dos enfoques de la MFLE anteriormente mencionados. Se hace un énfasis especial en la formulación energética por el significado que tiene en el marco de este trabajo [3].

2.2.1. Formulación Energética

Se considera una placa como medio semi-infinito, de un material perfectamente elástico con una cavidad elipsoidal en su interior de longitud $2a$ y ancho $2b$, Fig. 2.2. Sobre la placa semi-infinita actúa una tensión remota σ_o en el eje vertical. La solución elástica del problema indica que las tensiones alrededor del vértice de la cavidad σ_A tienden a infinito a medida que el vértice se hace más agudo (radio de curvatura ρ), independientemente de la magnitud de la tensión remota, como lo indican las ecuaciones (2.1) y (2.2).



$$\sigma_A = \sigma_o \left(1 + \frac{2a}{b} \right) = \sigma_o \left(1 + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.1)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_A = \infty \quad (2.2)$$

Fig. 2.2 Concentración de tensiones alrededor de una cavidad elíptica en un medio semi-infinito.[3]

A medida que el eje principal a aumenta con respecto al eje menor b y el radio de curvatura del vértice $\rho = b^2/a$ tiende a cero, la cavidad se asemeja a una fisura aguda. La divergencia del campo tensional en el punto (A) da origen a una singularidad, ecuación (2.2), que dificulta el uso de la tensión como criterio para determinar el momento en el que se produce la fractura. Por este motivo, conviene abordar el problema en términos de un balance de energía [4].

Este primer enfoque propuesto por Griffith para materiales frágiles considera que el trabajo externo realizado sobre un cuerpo material se almacena como energía potencial o energía de deformación U_s . La propagación de una fisura se produce si, al crecer, se libera más energía almacenada de la que es absorbida por la creación de dos nuevas superficies de manera termodinámicamente irreversible. Esta interpretación es válida si toda la energía absorbida está estrictamente asociada con la consumida en la creación de superficie libre. En otras palabras, el tratamiento del problema consiste en comparar la energía disponible para la propagación de una grieta en una estructura con la energía necesaria para generar su agrietamiento [5].

Para analizar la formulación de Griffith se considera nuevamente una placa semi-infinita compuesta de un material homogéneo e isótropo, de módulo elástico E y con una grieta

aguda de longitud $2a$ que atraviesa todo el espesor B . La fisura es deformada elásticamente por tensiones de tracción remotas σ_0 como muestra la *Fig. 2.3*.

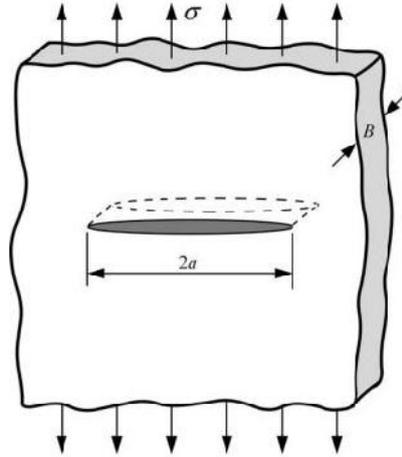


Fig. 2.3 Fisura pasante contenida en una placa semi-infinita y sometida a una tensión remota de tracción.[3]

La energía elástica almacenada puede encontrarse si se considera un volumen cilíndrico de radio a que inscribe a la fisura. La energía por unidad de volumen u_s es:

$$u_s = \int \underline{\sigma} : d\underline{\epsilon} = \int \sigma \frac{d\sigma}{E} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.3)$$

Donde $\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ representan los tensores de tensiones y deformación respectivamente. Luego, en el volumen cilíndrico $V = \pi a^2 B$ se almacena una energía de deformación total:

$$u_s = \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} \quad (2.4)$$

El proceso de propagación de la grieta involucra la creación de dos nuevas superficies, cada una de área $2aB$. Si γ_0 es la energía específica de superficie del material, el trabajo necesario para su creación resulta:

$$W_s = 4a\gamma_0 B \quad (2.5)$$

El balance energético propuesto por Griffith para un incremento diferencial del área de la grieta dA bajo condiciones de equilibrio puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\frac{dE_{tot}}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} \quad (2.6a)$$

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (2.6b)$$

Donde E_{tot} es la energía total y Π la energía potencial suministrada por la energía de deformación interna y las fuerzas externas. Para el caso ilustrado en la *Fig. 2.3* la energía

potencial adopta la siguiente expresión, siendo Π_o la energía potencial de la placa no fisurada.

$$\Pi = \Pi_o - u_s = \Pi_o - \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} \quad (2.7)$$

Si se expresa el diferencial de área dA en función del diferencial de longitud de fisura da como $dA = Bda$, se derivan las ecuaciones (2.4) y (2.5) respecto de a , se reemplazan en la expresión (2.6b) y se resuelve para la tensión, puede obtenerse la tensión crítica que provoca la propagación de la fisura haciendo que esta crezca de manera inestable y rápida, es decir, con un mecanismo frágil.

$$\sigma_c = \left(\frac{2E\gamma_o}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

2.2.1.1. La Tasa de Liberación de Energía

El tratamiento energético permite definir una magnitud de gran utilidad a la hora de resolver problemas de ingeniería, la denominada **tasa de liberación de energía \mathcal{G}** o *energy release rate*. Esta magnitud es una medida de la energía contenida en el sistema disponible para un incremento del área A de la fisura:

$$\mathcal{G} = - \frac{d\Pi}{dA} \quad (2.9)$$

Puede interpretarse como la tasa de cambio de la energía potencial del sistema a medida que la fisura aumenta de tamaño, y actúa como la fuerza impulsora para la propagación, *crack extension force* o *crack driving force* [6].

El valor de \mathcal{G} está determinado por las condiciones de cargas y sollicitaciones externas. Según la ecuación (2.7), para este caso, adopta la siguiente forma:

$$\mathcal{G} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.10)$$

La propagación de la fisura ocurre entonces cuando la tasa de liberación de energía alcanza un valor crítico denominado \mathcal{G}_c , que es una propiedad intrínseca del material y una medida de su **tenacidad a la fractura**. En este caso:

$$\mathcal{G}_c = \frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_o \quad (2.11)$$

De esta manera, la ecuación (2.6b) puede reescribirse como:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c \quad (2.12)$$

Esta es una expresión fundamental que se utilizará en este trabajo para determinar las condiciones en las cuales el fenómeno de propagación rápida de fisuras tiene lugar. Dicho

término indica que la propagación de la fisura es factible termodinámicamente cuando la energía provista por el sistema, en términos de \mathcal{G} , es capaz de sobrepasar la resistencia intrínseca del material \mathcal{G}_C . De manera compacta, el criterio de fractura obtenido a partir del planteo energético resulta:

$$\begin{cases} \mathcal{G} < \mathcal{G}_C & \text{entonces } da = 0, \text{ no hay extensión de la grieta (estable).} \\ \mathcal{G} = \mathcal{G}_C & \text{entonces } da \geq 0, \text{ posible extensión cuasiestática de la grieta.} \\ \mathcal{G} > \mathcal{G}_C & \text{entonces } da > 0, \text{ crecimiento dinámico de la grieta (inestable).} \end{cases} \quad (2.13)$$

Alternativamente, las dos ecuaciones anteriores pueden interpretarse como un equilibrio de dos fuerzas específicas que actúan sobre el frente de fisura. \mathcal{G} es la fuerza específica que tiende a hacer crecer la grieta de longitud a un segmento Δa y \mathcal{R} , a veces denominada \mathcal{R} , es la fuerza específica que resiste dicho incremento (Fig. 2.4).

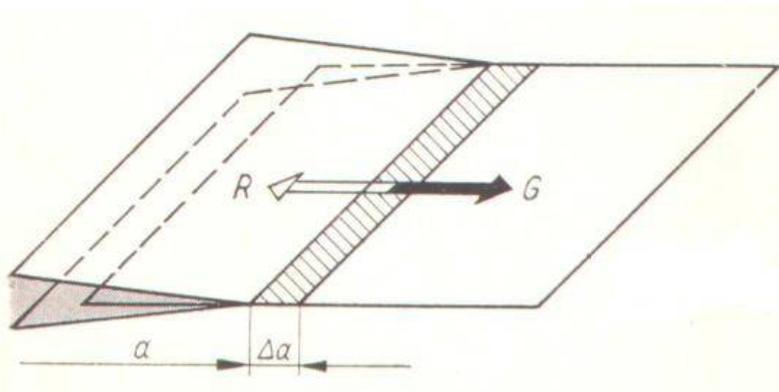


Fig. 2.4 Equilibrio entre la fuerza específica del crecimiento de fisura \mathcal{G} y la resistencia al crecimiento \mathcal{R} en la punta de la fisura.

2.2.1.2. Curvas de Resistencia \mathcal{G} - \mathcal{R}

La extensión de la fisura ocurre cuando $\mathcal{G} = \mathcal{R}$, pero la propagación puede ser **estable** (velocidad de propagación constante o decreciente) o **inestable** (velocidad creciente), dependiendo de cómo \mathcal{G} y \mathcal{R} varíen con la longitud de la grieta a .

El planteo anteriormente desarrollado es estrictamente válido para materiales frágiles cuya resistencia \mathcal{R} es constante e independiente de a . En ellos pueden darse únicamente dos situaciones: o la fisura es estable y no propaga ($\mathcal{G} \leq \mathcal{R}$), o bien la fisura se vuelve inestable y crece a una velocidad teórica infinita ($\mathcal{G} > \mathcal{R}$).

Sin embargo, la mayoría de materiales presentan una resistencia que es función de la longitud de la fisura $\mathcal{R}(a)$. Esta resistencia aumenta a medida que crece la grieta manteniendo una propagación estable, en equilibrio. En estas condiciones, para lograr un incremento Δa , es necesario suministrar continuamente más y más energía al sistema, es decir, aumentar \mathcal{G} . Este flujo continuo de energía hacia la punta de fisura mantiene una propagación cuasi-estática, como una sucesión de estados de equilibrio, a medida que el material opone más resistencia. Eventualmente, los mecanismos de endurecimiento y de aumento de tenacidad del material cesan y son incapaces de incrementar la resistencia al mismo ritmo que se aumenta el aporte de energía externa. Este punto crítico se conoce como punto de inestabilidad, a partir del cual la propagación estable se torna inestable al igual que ocurre con materiales “infinitamente” frágiles.

Para describir este comportamiento diferente de materiales que presentan cierta ductilidad, se ha introducido el concepto de “Curvas de Resistencia” o “Curvas $\mathcal{G} - \mathcal{R}$ ” [3], ilustradas en la Figura 2.5.

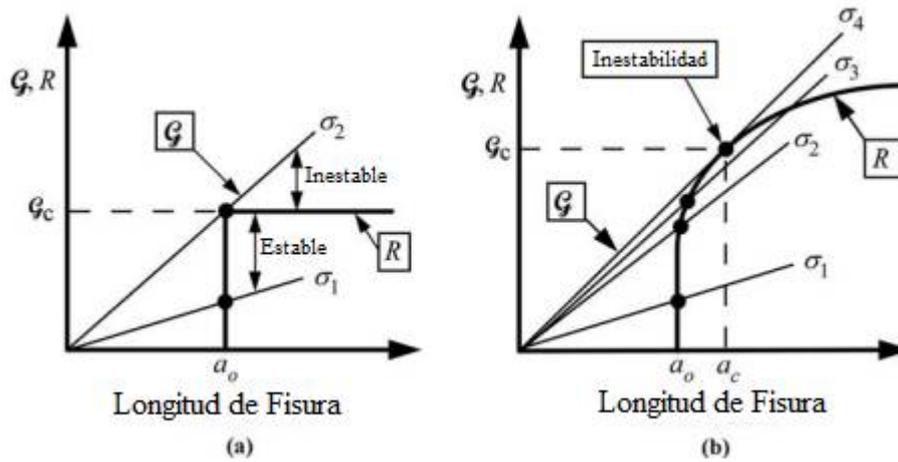


Fig. 2.5 Curvas de Resistencia \mathcal{G} - \mathcal{R} (a) material frágil (b) material con cierta ductilidad. [3]

La curva (a) de la Fig. 2.5 describe de manera esquemática el criterio de fractura de la expresión (2.13). La fuerza impulsora \mathcal{G} adopta la forma de una recta, ecuación (2.10), para dos tensiones diferentes σ_1 y σ_2 . La tensión σ_1 conduce a $\mathcal{G} < \mathcal{G}_c$, que para una grieta de longitud a_0 mantiene el sistema en una condición estable. Cuando la tensión se incrementa a un valor σ_2 , la tasa de liberación de energía es suficiente para igualar la resistencia del material y hacer crecer una fisura de tamaño a_0 de manera inestable.

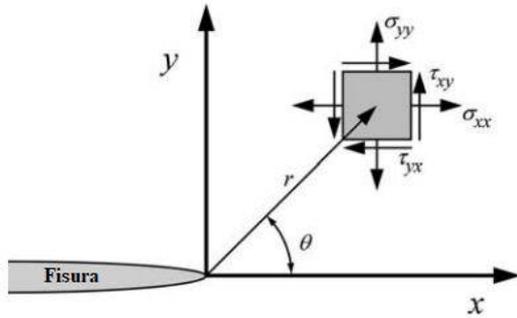
El comportamiento de un material con una Curva de Resistencia incremental se observa en la Figura 2.5(b). Para una grieta de dimensión a_0 , una tensión de magnitud σ_1 no provoca cambios en el sistema, $\mathcal{G} < \mathcal{G}_c$. Cuando la tensión adopta el valor σ_2 , $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ pero la resistencia del material aumenta (la curva se tuerce) evitando la inestabilidad y manteniendo una propagación en condiciones estables, $\frac{d\mathcal{G}}{da} = \frac{d\mathcal{R}}{da}$. La inestabilidad se alcanza al nivel de tensión σ_4 y a la longitud de fisura crítica a_c , cuando $\mathcal{G} = \mathcal{R}$. En estas condiciones el material es incapaz de aumentar su resistencia a igual ritmo que aumenta la fuerza impulsora, es decir, $\frac{d\mathcal{G}}{da} \geq \frac{d\mathcal{R}}{da}$. De esta manera, el material puede encontrarse en tres situaciones posibles: la fisura no propaga y es estable ($0 \leq \sigma < \sigma_2$); la fisura propaga de manera estable y cuasi-estática ($\sigma_2 \leq \sigma < \sigma_4$), esto quiere decir que, si la energía no es suficiente para sostener la continua creación de superficie la grieta se detiene (arresta); o bien la fisura se vuelve inestable y propaga de manera indefinida $\sigma \geq \sigma_4$. El criterio de fractura extendido puede formularse como sigue.

$$\begin{cases} \mathcal{G} < \mathcal{R} & ; \text{no hay extensión de la grieta (estable).} \\ \mathcal{G} = \mathcal{R} \wedge \frac{d\mathcal{G}}{da} < \frac{d\mathcal{R}}{da} & ; \text{extensión cuasiestática y estable.} \\ \mathcal{G} = \mathcal{G}_c \wedge \frac{d\mathcal{G}}{da} \geq \frac{d\mathcal{R}}{da} & ; \text{crecimiento inestable de la grieta.} \end{cases} \quad (2.14)$$

2.2.2. Formulación Tensional

Para ciertas geometrías fisuradas y sometidas a tensiones externas es posible obtener expresiones cerradas del campo de tensiones que rodea a la fisura, si se asume un comportamiento elástico, isotrópico y homogéneo del material. Los primeros resultados fueron publicados por Irwin [7] para un esquema similar al de la Fig. 2.3. Estos pueden

resumirse en la ecuación (2.15), donde se han adoptado coordenadas polares $\{r, \theta\}$ (Fig.2.6).



$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (2.15)$$

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi a} \quad (2.16)$$

Fig. 2.6 Sistema coordenado en frente de la punta de la fisura. [3]

σ_{ij} son las componentes del tensor de tensiones $\underline{\sigma} = \sigma_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$, $f_{ij}(\theta)$ una función que depende únicamente de la coordenada angular y que actúa como factor geométrico, y K_I se denomina el **factor de intensidad de tensiones** y es independiente de la geometría.

Esta formulación caracteriza el proceso de fractura a través del parámetro K_I . El factor de intensidad de tensiones describe unívocamente la distribución de tensiones en el vértice de la fisura, y puede ser utilizado para cuantificar la tenacidad a la fractura de materiales. Las cargas externas determinan la magnitud del factor K_I , así como anteriormente se dijo que definían \mathcal{G} . Entonces, la fractura se produce cuando dicho factor alcanza un valor crítico K_{IC} , el cual es una propiedad intrínseca del material y actúa de manera análoga a \mathcal{G}_C .

Cabe destacar que el subíndice 'I' hace referencia al Modo I de fractura. Brevemente, existen tres modos de apertura de fisura ilustrados en la Fig. 2.7.

- Modo (I): modo de apertura en tensión, donde las sollicitaciones externas actúan de manera perpendicular al plano que contiene la fisura y las superficies se separan una de otra. Resulta el más crítico y el caso más estudiado.
- Modo (II): modo de apertura de corte *in-plane*, con tensiones de corte que actúan en el plano de la fisura.
- Modo (III): modo de apertura de corte *out-of-plane*, con tensiones de corte que actúan fuera del plano de la grieta.

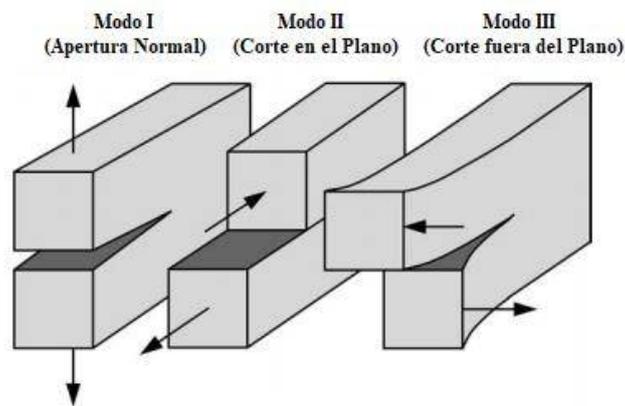


Fig. 2.7 Modos de apertura de una fisura, modos de carga. [3]

2.2.3. Relación entre \mathcal{G} y K

En aquellos sistemas donde prevalece la linealidad del comportamiento mecánico, la plasticidad se encuentra confinada en una región pequeña y es despreciable con respecto a las dimensiones del volumen analizado, existe una relación biunívoca entre tensiones, deformaciones y energía potencial elástica. El criterio energético de fractura tiene entonces una expresión equivalente en términos de tensiones y deformaciones, relación expresada por la ecuación (2.17).

$$\mathcal{G} = \frac{K^2}{E'} \quad (2.17)$$

donde E' denota al módulo elástico en condiciones de **tensión plana** (estado tensional bidimensional) o en condiciones de **deformación plana** (estado de deformación bidimensional), con ν el coeficiente de Poisson:

$$E = \begin{cases} E & \text{tensión plana} \\ E/(1 - \nu^2) & \text{deformación plana} \end{cases} \quad (2.18)$$

Para concluir, el enfoque energético define la magnitud \mathcal{G} que cuantifica el cambio en la energía potencial que acompaña al incremento de la fisura y a la creación de nueva superficie libre. Por otro lado, el enfoque basado en la descripción de los campos tensión y deformación introduce el parámetro K que los caracteriza en las proximidades de la singularidad del vértice de la fisura. De esta manera, el parámetro energético describe el comportamiento global, mientras el factor tensional es un parámetro local [1]. Por este motivo, la formulación en función del balance de energía resulta más conveniente para el tratamiento del problema de la propagación rápida de fisuras en tuberías plásticas.

2.3. Mecánica de Fractura Dinámica

El análisis de problemas estáticos de fractura involucra dos magnitudes fundamentales, las fuerzas y los desplazamientos. Los fenómenos dinámicos requieren la inclusión de una variable adicional, el **tiempo** [8].

Cuando se trata del modelado dinámico, suelen utilizarse las ecuaciones y resultados de los casos cuasi-estáticos como primera aproximación. Aunque resulta útil, la validez de tal extrapolación está restringida solo a algunos casos particulares. El principal motivo de esta limitación radica en que, cuando se trata de procesos dinámicos, es necesario reemplazar las ecuaciones de equilibrio por las ecuaciones mecánicas de movimiento de modo de tener en cuenta la dependencia temporal de las variables. A su vez, es necesario tener en consideración los siguientes fenómenos que no están presentes en los problemas cuasi-estáticos:

- Efectos de Inercia. Involucran la conversión de parte del trabajo realizado por las fuerzas externas sobre el sistema en energía cinética. Estos efectos adquieren relevancia cuando existe una variación abrupta de las cargas en intervalos cortos de tiempo.

- Dependencia de la Velocidad de Deformación. Muchos materiales presentan un comportamiento mecánico viscoelástico o viscoplástico, y los polímeros son uno de ellos. El carácter viscoso hace que sus propiedades cambien con el tiempo, algo que se traduce en una dependencia con la velocidad de deformación o *strain-rate dependance*. En consecuencia, el material responde de manera diferente en función de la velocidad con la que se lo solicita.
- Generación de Ondas Mecánicas. Cuando las cargas varían abruptamente o las grietas crecen a altas velocidades, las ondas mecánicas de tensión se propagan en el material y se reflejan en superficies libres o en el plano mismo de la grieta. La reflexión de estas ondas provoca la variación local de los campos de tensiones y deformaciones que envuelven a la punta de la fisura, y afecta al comportamiento del material frente a la fractura.

Una teoría que estudia estos procesos es la Mecánica de Fractura Elastodinámica (MFE), la cual desprecia la no-linealidad en la respuesta del material. Esta aborda principalmente dos tipos de problemas; (i) la iniciación de fisuras como resultado de cargas de impacto y (ii) la subsiguiente propagación rápida y el posible arresto de la grieta. [9]

2.3.1. Solicitación Rápida de Fisuras

Cuando se habla de solicitaciones rápidas suele hacerse referencia a cargas de impacto. Cuando una estructura sufre este tipo de perturbaciones la fuerza experimentada varía en función del tiempo de manera similar a lo mostrado en la *Fig. 2.8*.

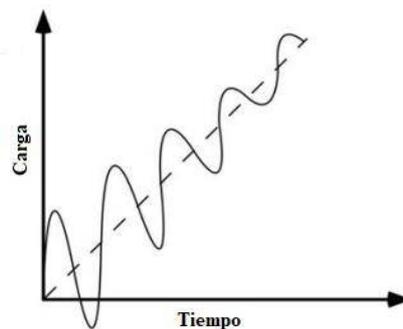


Fig. 2.8 Respuesta Fuerza-Tiempo de una solicitación dinámica.

Como se observa, la carga tiende a aumentar en el tiempo, pero oscila de manera errática a una frecuencia que depende de la geometría de la estructura y las propiedades del material. Estas oscilaciones se propagan a una velocidad finita, a la velocidad del sonido en el sólido, y hacen que el campo tensional sea altamente inhomogéneo. Es decir, provocan variaciones locales del campo de tensión del material que hacen que este no se encuentre solicitado con la misma intensidad en todos los puntos de la estructura. La amplitud de las oscilaciones decrece en el tiempo a medida que la energía cinética se disipa, y a tiempos suficientemente largos, el sistema tiende a un comportamiento estático o cuasi-estático.

La dificultad que enfrenta la MF recae en la compleja distribución de tensiones dependiente del tiempo que afecta a la intensidad del campo tensional en la vecindad de la fisura. Esto, sumado a la interferencia de ondas mecánicas reflejadas en las superficies libres de la grieta, hace que el valor instantáneo de los parámetros $G(t)$ y $K(t)$ (ahora dependientes del tiempo) sea difícil de determinar.

Diferentes autores como T. Nakamura [10] y J.F. Kalthoff [8] han identificado dos tipos de respuesta del material frente a estas situaciones: una a tiempos cortos y otra a tiempos largos. La **respuesta a tiempos cortos** está dominada por la propagación de ondas mecánicas y caracterizada por una marcada variación local de la tensión. En este transitorio inicial, la energía cinética resulta mayor que la energía de deformación almacenada por la estructura y los efectos de inercia tienen una fuerte influencia sobre el comportamiento del material. Por el contrario, la **respuesta a tiempos largos** se asemeja a un caso cuasi-estático, en el cual la energía de deformación excede a la energía cinética, y los efectos de inercia se hacen menos presentes.

La transición entre un tipo de respuesta y otro está determinada por el denominado **tiempo característico** t_T . Esta magnitud es definida como el instante de tiempo en el cual la energía cinética E_K y potencial de deformación almacenada por la estructura U_S , son iguales. Si bien los efectos globales de inercia son significativos en este tiempo intermedio, las oscilaciones de tensión en la punta de la fisura son despreciables.

$$\begin{cases} t < t_T \rightarrow E_K \gg U_S; \text{ respuesta a tiempos cortos} \\ t = t_T \rightarrow E_K = U_S; \text{ tiempo característico de transición} \\ t > t_T \rightarrow E_K \ll U_S; \text{ respuesta a tiempos largos} \end{cases} \quad (2.19)$$

La magnitud de t_T está íntimamente relacionada con las dimensiones y geometría de la estructura, así como también con las propiedades del material. Por ejemplo, cuanto más grande sea la estructura, menor será la influencia de sus extremos libres y las condiciones cuasi-estáticas serán alcanzadas más rápidamente. De esta manera, las ondas mecánicas emitidas desde la punta de la fisura y sus sucesivas reflexiones tardarán más tiempo en reincidir sobre la grieta y las oscilaciones del campo tensional podrán ser despreciadas. Por otro lado, y en lo que a las propiedades del material respecta, cuanto mayor sea su ductilidad más rápido se superará el estado transitorio inicial. Esto se debe a que la plasticidad es un fenómeno altamente no-lineal y disipativo; la deformación plástica contribuye a disipar rápidamente la energía cinética, y amortigua las oscilaciones y los efectos de inercia asociados. El comportamiento viscoso de ciertos materiales, como los polímeros, también ofrece un mecanismo de amortiguación similar a la plasticidad.

Entonces, puede decirse que un problema dinámico admite una aproximación cuasi-estática solo cuando los efectos inerciales son despreciables ($t \gg t_T$) y el material no presenta alta sensibilidad a la velocidad de deformación. De lo contrario, debe tenerse en cuenta la energía cinética y será necesaria una formulación dinámica.

2.3.2. Propagación Dinámica de Fisuras y Arresto.

La sollicitación rápida de fisuras está asociada principalmente a los problemas del tipo (i), mientras que la propagación se asocia a aquellos del tipo (ii). Como se mencionó en la Sección 1.2.1.2., el diseño frente al RCP destinado a la prevención de la iniciación de fisuras resulta extremadamente complejo. Es por este motivo que se lo categoriza como un problema de propagación, como los descritos a continuación.

Cuando la fuerza impulsora de la extensión de la grieta \mathcal{G} supera la resistencia del material \mathcal{R} , la estructura se vuelve inestable y ocurre el crecimiento rápido de la fisura. Si el *input* de energía supera el valor mínimo necesario para la creación de superficie libre se produce un exceso de energía. Según las leyes de la termodinámica, este excedente no puede simplemente desaparecer, y debe ser transformado en energía cinética (área sombreada de

la Fig. 2.9). En consecuencia, la fisura crece a una velocidad que depende de la magnitud de esta nueva forma de energía [3].

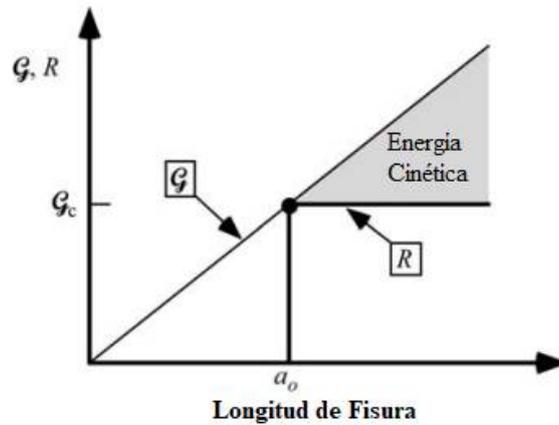


Fig. 2.9 Generación de energía cinética en exceso.[3]

De manera similar a como se utilizaron las Curvas de Resistencia para describir el proceso cuasi-estático, pueden utilizarse para el problema dinámico, Fig. 2.10. Las curvas de la Fig. 2.5 indican de manera general las condiciones bajo las cuales la estructura es estable o bien inestable, dependiendo de si la fuerza impulsora es mayor o menor que la resistencia del material, ecuaciones (2.13) y (2.14). Estas expresiones se aplican principalmente al instante de iniciación de la fisura y, por ende, la propagación debe tratarse a parte.

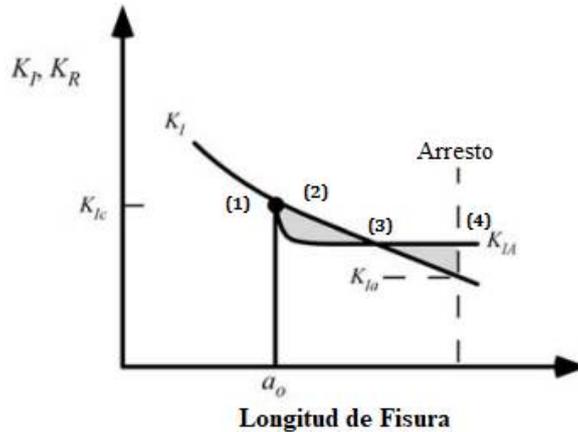


Fig. 2.10 Curva $K_I - K_R$. Propagación dinámica de fisura y arresto. (1) $K_I = K_{IC}$; Iniciación de la fisura. (2) $K_I > K_{IA}$; La fuerza impulsora supera la resistencia del material y el exceso de energía se almacena como energía cinética. (3) $K_I = K_{IA}$; Punto donde debería producirse el arresto, pero existe un exceso de energía cinética. (4) $K_I = K_{IA} < K_{IA}$; Arresto real de la fisura al liberar la energía cinética. [3]

Según la Fig. 2.10, la iniciación de la fisura se da cuando el factor de intensidad de tensiones alcanza el valor crítico antes definido K_{IC} . Una vez que la grieta comienza a crecer, el material ofrece menos resistencia, es decir, la resistencia a la propagación es menor a la de iniciación. El parámetro que caracteriza esta propiedad se define como K_D o G_D y adquiere un carácter dinámico. El **arresto** o detención ocurre cuando la fuerza impulsora externa, expresada en términos de K_I o G , es igual o menor a K_D o G_D . La Fig. 2.10 muestra una situación particular donde el sistema provee cada vez menos energía a medida que aumenta la longitud de fisura (curva $K_I(a)$ de pendiente negativa). Durante el crecimiento ($a > a_0$),

existe un punto en donde la curva de resistencia y la curva de la fuerza impulsora se cruzan. Si el fenómeno fuese estático, este punto representaría el arresto al alcanzar el valor del factor de intensidad de tensiones K_{IA} , **tenacidad de arresto**. Sin embargo, el arresto se da efectivamente a un valor menor K_{Ia} o **tenacidad aparente de arresto** $K_{Ia} < K_{IA}$, debido a que, como la propagación se trata de un proceso dinámico, el sistema almacena energía cinética que puede recuperarse y seguir contribuyendo al crecimiento. A diferencia del primero, K_{Ia} no representa una propiedad intrínseca del material.

Esta inconsistencia en el análisis conduce a definir parámetros “aparentes” de la MF, y se debe a que la curva antes presentada es calculada en base a una aproximación cuasi-estática. Es decir que, al no incluir la energía cinética como una contribución adicional a la energía total del sistema el arresto no se da a los valores esperados, sino a valores menores.

2.3.2.1. Cálculo Dinámico de la Fuerza Impulsora

El balance energético propuesto en la Sección 2.2.1, que condujo a la definición de \mathcal{G} puede modificarse para incluir todos los fenómenos cinéticos antes mencionados.

El principio de conservación permite relacionar la diferencia entre la energía introducida al sistema por las fuerzas externas W y la energía disipada W_S , con el cambio de energía potencial de deformación \mathcal{U}_S y la energía cinética E_K :

$$W + W_S = \mathcal{U}_S + E_K \quad (2.20)$$

Si se toma la tasa de cambio de estas magnitudes por unidad de área de fisura creada A , y se reordenan los términos resulta:

$$\frac{dW}{dA} - \frac{d\mathcal{U}_S}{dA} - \frac{dE_K}{dA} = \frac{dW_S}{dA} \quad (2.21)$$

La energía disipada es lo que se definió como la **resistencia dinámica a la fractura** G_D (término de la derecha), que resulta una propiedad del material.

$$G_D = \frac{dW_S}{dA} \quad (2.22)$$

El balance de energía restante entre el trabajo realizado por las fuerzas externas y el consumo de energía de deformación y energía cinética define la tasa de liberación de energía que provee la fuerza impulsora para la propagación;

$$\mathcal{G} = \frac{dW}{dA} - \frac{d\mathcal{U}_S}{dA} - \frac{dE_K}{dA} \quad (2.23)$$

Con los términos \mathcal{U}_S , E_K y W calculados como:

$$\mathcal{U}_S = \frac{1}{2} \int \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} dV \quad (2.24)$$

$$E_K = \frac{1}{2} \int \rho \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} dV \quad (2.25)$$

$$W = \int \underline{t} \cdot \underline{U} dS \quad (2.26)$$

donde $\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ representan el tensor de tensiones y de pequeñas deformaciones respectivamente, \underline{U} el campo de desplazamientos, \underline{t} el vector tensión que actúa en la superficie S del volumen de control V . La variable t representa el tiempo y ρ la densidad del material [11].

A bajas velocidades, los términos cinéticos pueden despreciarse y se recupera la igualdad $\mathcal{G} = \mathcal{G}_C$ antes vista. Pero en los casos de RCP estos términos cobran relevancia y \mathcal{G}_C debe ser reemplazado por \mathcal{G}_D . Este parámetro indica el trabajo que debe ser suministrado al frente de una fisura propagante para separar una unidad de área del material, y resulta una función de la velocidad de la grieta \dot{a} . La ecuación (2.23), probablemente la más importante de este trabajo, indica que el flujo de energía hacia el frente de fisura resulta de la diferencia entre el *input* de energía externa y aquella que se transforma en energía potencial y cinética. Es decir, del total de la energía que ingresa al material, parte se almacena como potencial y parte como cinética, y el resto es lo que impulsa y sostiene el crecimiento.

El criterio de fractura para la propagación y arresto puede formularse de la siguiente manera.

$$\begin{cases} \mathcal{G}(t, \dot{a}) \geq \mathcal{G}_D(\dot{a}); \text{propagación dinámica de la fisura.} \\ \mathcal{G}(t, \dot{a}) < \mathcal{G}_D(\dot{a}); \text{arresto de la fisura.} \end{cases} \quad (2.27)$$

2.3.2.2. Velocidad de Propagación

La velocidad con que viaja la fisura está determinada por la energía cinética que la estructura agrietada es capaz de almacenar y recuperar. Se han observado casos de velocidades similares a la del sonido en el sólido c_o , y se ha determinado que el límite superior está dado por la velocidad de propagación de las ondas superficiales de Rayleigh, c_r . Este resultado fue hallado por Freund a través de un análisis numérico del crecimiento dinámico de fisuras en cuerpos elásticos semi-infinitos. Este autor determinó además que la velocidad es independiente de la energía de fractura [12].

2.3.2.3. Resistencia a la Fractura Dinámica y Arresto

La resistencia que el material opone al agrietamiento resulta una función de la velocidad de propagación $\mathcal{G}_D(\dot{a})$ (o $K_{ID}(\dot{a})$), y en el límite $\dot{a} \rightarrow 0$ tiende al valor cuasi-estático de arresto $\mathcal{G}_D = \mathcal{G}_A$ (o $K_{ID} = K_{IA}$). Como se mencionó anteriormente, la resistencia dinámica es de menor magnitud que la resistencia a la iniciación \mathcal{G}_{IC} (o K_{IC}). Esto se debe principalmente a que una grieta en crecimiento tiende a ser más aguda y a presentar una región de plasticidad más pequeña alrededor de su punta. Por el contrario, una fisura estacionaria admite plasticidad más extendida y la activación de otros mecanismos de aumento de tenacidad, por lo que se requiere una mayor cantidad de energía para iniciar el crecimiento que para sostenerlo.

La ecuación (2.27) define las condiciones necesarias para el avance de una grieta, condiciones que deben cumplirse en cada instante de tiempo del proceso. Si eventualmente

$\mathcal{G}(t)$ cae por debajo de $\mathcal{G}_D(\dot{a})$ la propagación no puede continuar y la fisura se arresta. La detención puede ocurrir cuando se da alguna de las siguientes situaciones:

- La fuerza impulsora suministrada por el sistema disminuye a medida que la fisura se hace más grande.
- La resistencia del material aumenta.
- La fisura ingresa en una región compuesta por un material de mayor tenacidad, en una región con un gradiente térmico positivo o bien su avance es interrumpido por dispositivos que fuerzan su arresto.

La primera situación es la que presenta mayor importancia para el fenómeno de RCP. El objetivo del análisis aquí propuesto es determinar bajo qué condiciones el sistema es incapaz de proveer la suficiente energía como para mantener una propagación extendida. Sin embargo, el estudio de la detención del crecimiento no es trivial dado que no está gobernado solamente por las propiedades del material. Podría pensarse que el arresto se trata de un fenómeno cuasi-estático porque, en el momento de la detención, la velocidad se hace cero $\dot{a} = 0$. De esta manera, resultaría lógico utilizar parámetros calculados de manera no dinámica (*Fig. 2.10*). Sin embargo, el hecho de que se hayan observado arrestos de fisuras a altas velocidades hace que dicha aproximación sea inadecuada, y hacen su análisis algo más complejo.

2.4. Fractura en Polímeros

En esta sección se definen algunos conceptos de la Mecánica de Fractura aplicados al caso de los materiales poliméricos que comúnmente se utilizan en las tuberías de transporte de fluidos.

La fractura en polímeros es un modo de falla que se manifiesta como el resultado de un debilitamiento de los enlaces moleculares, la separación de las cadenas poliméricas y que culmina con la separación de dos superficies. En las tuberías plásticas, tiene lugar debido a la acción de varios factores que incluyen las cargas externas, la acción de agentes químicos, gradientes térmicos, el proceso de producción y las condiciones de servicio.

El proceso de fractura involucra algunas de las siguientes etapas:

- (1) Debilitamiento de los enlaces moleculares.
- (2) Crazeing o micro-cavitación.
- (3) Formación de una fisura estacionaria.
- (4) Crecimiento lento de la grieta (SCG).
- (5) Propagación de la grieta.
- (6) Propagación rápida de la grieta (RCP).
- (7) Rotura total.

Crazeing. El crazeing o cavitación es el nombre que se le da a los micro-huecos que se forman en regiones del material altamente deformado, y que se desarrollan de manera similar a una fisura. Son observados principalmente en los polímeros amorfos y semicristalinos.

Cuando un polímero es tensionado, se desarrollan en él zonas de micro-fluencia que se localizan alrededor de los defectos preexistentes. Allí, la tensión se intensifica y causa la formación de zonas de deformación delgadas con forma de placa, y que crecen en planos normales a la dirección de tracción principal. Es esta localización de la deformación la que da origen a la formación de micro-huecos (del orden de 10 nm). Posteriormente y con el aumento de la tensión, los micro-huecos crecen y provocan una expansión del volumen, una cavitación o *craze* (Fig. 2.11). La diferencia entre una cavidad de este tipo y una fisura es que esta última está caracterizada por una separación completa de la superficie, mientras que, dentro de un *craze*, las superficies se mantienen unidas por fibrillas moleculares. A medida que la sollicitación sigue aumentando las cavidades se multiplican y el material entre medio se estira. Cuando las fibrillas se rompen y las cavidades coalescen, la tensión en el vértice del *craze* aumenta y da paso a la formación de una fisura macroscópica.

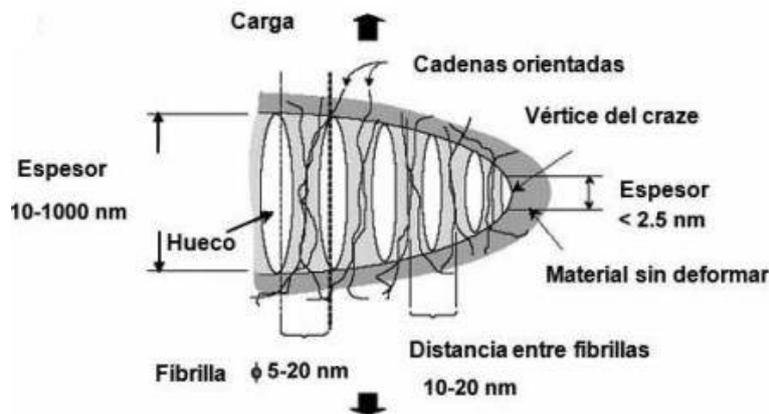


Fig. 2.11 Zona fibrilar de un craze. [https://www.wikiwand.com/en/Fracture_in_polymers]

Crecimiento de una grieta o *cracking*. Una vez formada, la grieta macroscópica puede crecer y provocar la rotura de la estructura por uno de los dos mecanismos principales ya definidos, el **SCG** o el **RCP**. Además, el tipo de falla puede adquirir un carácter frágil, dúctil o mixto.

De manera resumida, la falla **dúctil** es un proceso lento acompañado por una deformación plástica del material. Esta plasticidad hace que la grieta no se extienda a menos que se aumente la tensión externa. La superficie libre resultante muestra zonas de acuellamiento o adelgazamiento de pared y una apariencia rugosa consistente de micro-huecos y hoyuelos.

Por otro lado, la fractura **frágil** crece de manera rápida con nada o poca deformación plástica. En consecuencia, deja a la vista una superficie lisa con ángulos y bordes agudos. Este último tipo de falla es el más dañino y catastrófico, y el fenómeno de la propagación rápida de fisuras es uno de sus subtipos.

Muchos polímeros gozan de una alta resistencia a la iniciación dado que cavitan o se deforman plásticamente alrededor de la fisura tensionada. Esta deformación actúa como un mecanismo de aumento de tenacidad y endurecimiento al redondear el vértice de la fisura (*crack-tip blunting*) y disminuir la criticidad del defecto. Sin embargo, la resistencia al avance de una grieta en movimiento o propagación es menor. Micromecánicamente, esto se asocia con el hecho de que a altas velocidades de deformación la capacidad intrínseca del material de endurecer por deformación se reduce. A pesar de que la cantidad efectiva de enredos (*entanglements*) entre fibrillas aumenta y contribuye a una mayor resistencia, la baja conductividad térmica de estos materiales establece condiciones adiabáticas en la punta de la fisura que tienen un efecto contrario. El calentamiento local provoca un

ablandamiento del material y lo hace más susceptible a la propagación. Para que un polímero pueda disipar energía a altas velocidades de deformación debe ser capaz de relajar mecánicamente en intervalos cortos de tiempo. Y, como los grados de resina que se utilizan actualmente para la construcción de tuberías de transporte no son capaces de lograr esto, son potencialmente susceptibles a sufrir RCP.

REFERENCIAS: CAPÍTULO (2)

- [1] M. D. Chapetti, *Mecánica de Materiales - Teorías de Elasticidad, Plasticidad y Mecánica de Fractura*, Tercera Ed. La Plata - Argentina: Ediciones Al Margen, 2015.
- [2] R. W. Hertzberg, "Hertzberg - Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials (Fourth Ed) (indizado).pdf." John Wiley & Sons, INC., New Jersey, 1996.
- [3] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications*, Third Edit. Taylor & Francis Group, LLC, 2005.
- [4] C. E. Inglis, "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners," *Trans. Institue Nav. Archit.*, vol. 55, pp. 219-241, 1913.
- [5] A. Griffith, A, "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids," *Philos. Trans.*, vol. 221, pp. 147-166, 1920.
- [6] G. R. Irwin, "Onset of Fast Crack Propagation in High Strenght Steel nd Aluminum Alloys," in *Sagamore Research Conference Proceedings*, 1956, pp. 289-305.
- [7] G. R. Irwin, "Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Transversing a Plate," *J. Appl. Mech.*, vol. 24, pp. 361-364, 1957.
- [8] J. F. Kalthoff, "On the Measurement of Dynamic Fracture Toughnesses - a Review of Recent Work," *Int. J. Fract. Dyn. Fract.*, vol. 27, pp. 277-298, 1985.
- [9] C. H. Popelar, P. C. Gehlen, and M. F. Kanninen, "Dynamic Crack Propagation in Precracked Cylindrical Vessels," 1979.
- [10] T. Nakamura, C. F. Shih, and L. B. Freund, "Analysis of a Dinamically Loaded Three-Point-Bend Ductile Fracture Specimen," *ASTM STP 997, Am. Soc. Test. Mater.*, vol. I, pp. 217-241, 1989.
- [11] P. Ozbek, "Rapid fracture resistance of polyethylene: Dependence on polymer structure," *PhD Thesis, Dep. Mech. Eng. Imp. Coll. London*, no. January, 2008.
- [12] L. B. Freund, "Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading - I,II,III," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 20, pp. 129-140, 1972.

CAPÍTULO N° III

PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS

ESTUDIO Y MODELADO DEL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS

3. PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS

3.1. El Fenómeno de RCP

Como se mencionó anteriormente, el fenómeno de la Propagación Rápida de Fisuras (RCP) hace referencia a un proceso de fractura frágil observado en tuberías de transmisión presurizadas con gas u otro tipo de fluidos. Se caracteriza por la extensión axial de una grieta larga a velocidades que superan los 100 ms^{-1} , y que es acompañada por un rápido escape del fluido contenido. La rapidez del crecimiento está controlada por la velocidad de descompresión del gas, y el balance de estas dos velocidades es el resultado de la compleja interacción estructura-fluido. Dicho balance depende de las propiedades del gas, del tamaño de la línea de distribución, las condiciones del medio circundante y las propiedades mecánicas del material.

El RCP tiene lugar bajo condiciones particulares, principalmente ocurre cuando se sobrepasa una **presión crítica de colapso** p_c . A este nivel de presión la grieta es capaz de crecer en un estado cuasi-estacionario (velocidad constante) a lo largo de todo el material. Por el contrario, por debajo de dicha presión, la fisura se desacelera y se arresta a cortas distancias por ausencia de fuerza impulsora suficiente. En resumen:

- $si p > p_c \rightarrow$ Propagación en un estado cuasi-estacionario.
- $si p < p_c \rightarrow$ Arresto de la grieta.

El valor crítico de la presión está determinado por la temperatura, las dimensiones de la tubería, las propiedades del material, las condiciones de procesamiento, la presencia de tensiones residuales, las condiciones de servicio y el estado de envejecimiento del material, así como también de las propiedades fluidodinámicas del medio presurizante y de las condiciones del entorno.

Se ha determinado que, además de un valor de presión, existen también una temperatura y un espesor críticos. La **temperatura crítica** T_c establece el límite entre un comportamiento dúctil y un comportamiento frágil del material. Se define como la mínima temperatura a la cual la tubería es lo suficientemente tenaz para arrestar la fisura y no desarrollar una propagación frágil. De esta manera:

- $si T > T_c \rightarrow$ El material de la tubería se comporta de manera dúctil capaz de detener el avance de la fisura.
- $si T < T_c \rightarrow$ El material de la tubería se fragiliza y es susceptible a la propagación rápida.

Si bien las tuberías se encuentran solicitadas en condiciones de deformación plana, el espesor de pared también es capaz de inducir una transición entre comportamientos dúctiles y frágiles. En este caso, se trata de un cambio inducido por la geometría. El **espesor de pared crítico** h_c se define como el valor debajo del cual el fenómeno de RCP no puede darse:

- $si h > h_c \rightarrow$ Espesores grandes de pared establecen estados de deformación plana en la estructura, estados triaxiales de tensión. Bajo estas condiciones, las capacidades de deformación del material se encuentran restringidas y se induce un comportamiento frágil.

- $si h < h_c \rightarrow$ Espesores de pared pequeño hacen que prevalezca un estado plano de tensiones. Esto promueve la activación de los mecanismos de deformación del material, el cual es capaz de deformarse plásticamente previo a la fractura y mostrar un mecanismo de falla dúctil.

Por último, y con lo que a las características generales del fenómeno respecta, se han registrado fisuras axiales que adoptan formas rectas, así como también fisuras de morfología sinusoidal (*Fig. 1.1* y *Fig. 1.2*) y con bifurcaciones [1].

3.2. Caracterización Experimental

Existen tres requerimientos básicos para asegurar la confiabilidad de un material a la hora de ser utilizado en la construcción de tuberías de distribución. En el caso particular de las tuberías plásticas, las resinas poliméricas deben:

- (i) presentar un valor mínimo de MRS para asegurar la resistencia a la falla dúctil,
- (ii) presentar una excelente resistencia al SCG, y
- (iii) presentar alta resistencia a la fractura frágil exhibida en condiciones críticas de presión y temperatura.

En el desarrollo de nuevas resinas para este tipo de aplicaciones es necesario considerar una gran cantidad de variables. Estas incluyen: la naturaleza de catalizadores, las condiciones de polimerización, los tipos de reactivos, entre otras. Todas ellas tienen una marcada influencia en las propiedades finales del material.

Desde que se identificó al RCP como un mecanismo de falla altamente destructivo, se ha puesto un gran esfuerzo en la tarea de caracterizar la respuesta mecánica de los materiales para cubrir el ítem (iii). Los principales métodos utilizados se describen a continuación.

3.2.1. Determinación de la Presión Crítica

El test de escala completa FS y el test de escala reducida S4 se han utilizado para determinar experimentalmente las condiciones bajo las cuales un determinado grado de polímero es capaz de sufrir RCP.

3.2.1.1. El Test a Escala Completa (*Full Scale Test*)

El ensayo a escala completa, descrito brevemente en la Introducción, se utiliza para determinar la presión máxima admisible de una tubería plástica enterrada, por encima de la cual una fisura frágil se precipita y propaga rápidamente. Este valor se obtiene luego de realizar pruebas a diferentes presiones p_o y medir la longitud de fisura final, hasta lograr un crecimiento que exceda el 90 % de la longitud total de la tubería. Adicionalmente, permite realizar análisis cualitativos complementarios de la respuesta del material.

El principal resultado del FST es la distinción de las diferentes etapas que constituyen la propagación rápida. La primera de ellas es la **iniciación**. En condiciones de servicio esta suele producirse por la acción de fuentes externas; en cambio, en el test FS, es inducida por el impacto de una cuchilla de acero. La iniciación está caracterizada por un estado transitorio altamente dependiente del tiempo, y que resulta muy similar al descrito en el Capítulo 2 cuando se mencionó el concepto de tiempo característico t_T . Luego de esta

primera etapa, la fisura alcanza un **estado cuasi-estacionario**. La grieta viaja a velocidad constante, y la configuración de la tubería deformada alrededor de la punta de la fisura no cambia para un observador que se mueve con ella a la misma velocidad y en la dirección de la propagación. Esto sugiere que, si la tubería es lo suficientemente larga, el crecimiento podría proceder de manera indefinida. Finalmente, la última etapa concluye con la **rotura total**, o bien con el **arresto repentino** del crecimiento.

Durante el RCP en un gasoducto las paredes de la tubería se "abren" y el fluido comienza a escapar por detrás de la punta de la grieta en movimiento. Así, se establece una onda de descompresión que se propaga en la sección que se encuentra frente a la grieta. Esta onda se adelanta a la fisura, la sobrepasa, y deja una región en donde la presión disminuye gradualmente hasta hacerse cero. Es decir, se establece un perfil de decaimiento de la presión detrás de la estela de la grieta. La prueba FS simula estas condiciones y permite estudiar la dinámica del escape del fluido [2].

A su vez, el FST ha permitido demostrar que el RCP se trata de un fenómeno de fractura sumamente frágil. La rotura deja como resultado superficies suaves y lisas con deformación plástica en pequeña escala, aun cuando el polímero presenta alto grado de ductilidad (*Fig. 3.1*). Además, ha permitido determinar las características de la trayectoria de la fisura, la cual adopta un carácter recto a presiones que exceden la presión crítica p_{cFS} , pero que tiende a formas sinusoidales a velocidades de propagación moderadas.



Fig. 3.1 Superficie de fractura (RCP - FST). [2]

3.2.1.2. El Test en Estado Estacionario de Pequeña Escala (*Small-Scale Steady State Test*)

Al igual que su contraparte a escala completa, el test S4 inicia una fisura de crecimiento rápido en una tubería enfriada y presurizada con aire a través de un percutor. Una vez creada, la grieta abandona la zona de iniciación y se propaga o arresta en la longitud de testeo dependiendo de las condiciones de ensayo. Como se describió en la Introducción, la ventaja que ofrece esta configuración es la utilización de especímenes de tan solo 7 – 8 diámetros de largo. Sin embargo, el uso de longitudes más cortas requiere de la introducción adicional de las siguientes modificaciones sobre la tubería de prueba (*Fig. 3.2*):

- **Jaula de contención:** el tubo se introduce dentro de una jaula de contención formada por anillos concéntricos. Limitan la deformación radial de las paredes del tubo como resultado del escape del fluido.

- Baffles de descompresión internos: se añaden discos internos que dividen la sección interna de la tubería en segmentos equiespaciados. Previenen la descompresión axial de la presión observada en el FST.

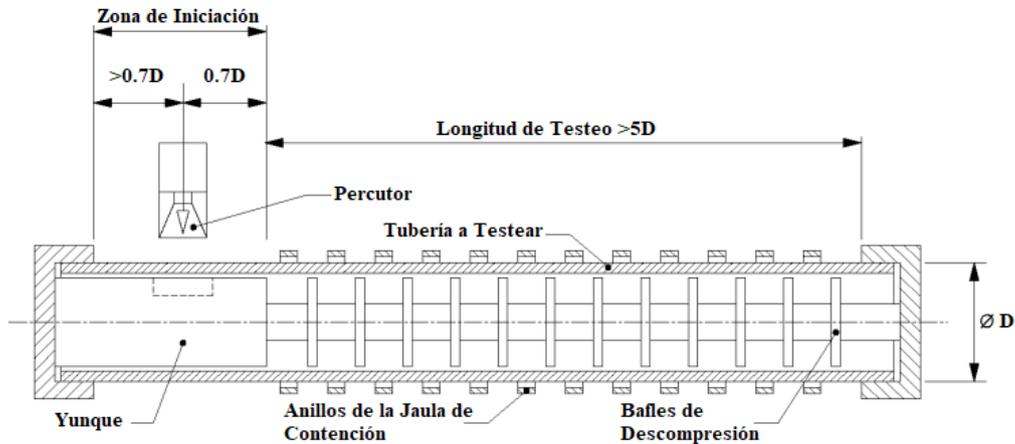


Fig. 3.2 Esquema del Espécimen de Prueba del S4T.

Tanto la limitación de la deformación de las paredes que reducen la apertura de la tubería, como el seccionamiento en cámaras individuales de presión que generan los baffles, mantienen la presión en la punta de la fisura y reducen la descompresión. De esta manera, las modificaciones permiten establecer el crecimiento en estado estacionario en longitudes más cortas al restringir el transitorio inicial violento. Además, evitan el efecto conocido como "arresto falso", en donde la fisura se detiene a muy altas presiones debido a una descompresión exageradamente acelerada. Este arresto es un efecto espurio generado por las condiciones del test y no tiene correspondencia con lo que sucede en aplicaciones reales.

La siguiente figura muestra la forma de campana típica que adopta la fisura abierta, así como también, una trayectoria sinusoidal de propagación.

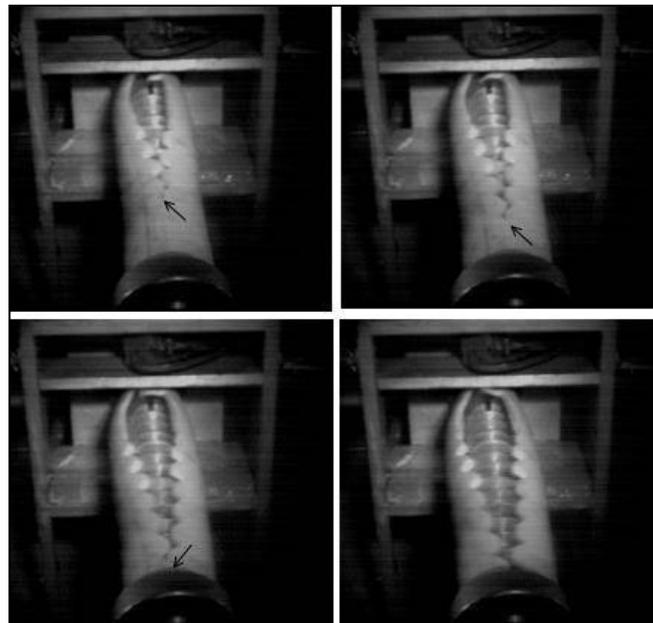


Fig. 3.3 Propagación en una tubería de PVC, 110 mm de diámetro, en el test S4. (La flecha indica el frente de la grieta) [2]

Cabe destacar que la versión original del test, diseñada por Yayla y P.S. Leever (1989), ha sido modificada por Gregory (1995) para instrumentar las mediciones y poder obtener propiedades de fractura del material. Esta modificación permite registrar la velocidad de propagación \dot{a} con una serie de cables contadores (*timing wires*), así como también la evolución de la presión a lo largo del proceso mediante transductores de presión.

3.2.1.3. Correlación FST-S4T

Ambos ensayos intentan simular las condiciones de servicio de una tubería enterrada. Sin embargo, las presiones de colapso medidas a través del S4T resultan siempre menores a las obtenidas del FST, $p_{c_{S4}} < p_{c_{FS}}$. La correlación entre estos resultados no es directa, y es un tema de discusión aún vigente [3]. La dificultad de establecer una relación entre ellas radica en que la magnitud de presión crítica denota una compleja transición en comportamiento del material, que es resultado de la interacción entre la velocidad de propagación, la temperatura y el espesor de pared.

Los factores que pueden influir en esta diferencia son diversos. A continuación, se detallan algunos de ellos.

Dinámica de Fluidos

En el FST, la presión que contribuye al crecimiento de la fisura no es la presión inicial del fluido p_o . La descompresión parcial que genera el escape del gas a través de la abertura hace que la presión adquiera un valor menor $p_t < p_o$ en la punta de la grieta. Por este motivo, es p_t la presión que debe considerarse como la causante de la propagación en caso del FST. En cambio, como la inclusión de los baffles internos en el S4T evita esta descompresión, la presión que contribuye al agrietamiento en este test es directamente p_o . La relación entre la presión inicial y la presión del gas parcialmente descomprimido permite establecer un factor de correlación entre la presión de ambos ensayos al considerar $p_{c_{S4}} \sim p_o$ y $p_{c_{FS}} \sim p_t$:

$$p_{c_{FS}} = 3,6 p_{c_{S4}} + 2,6 \quad (3.1)$$

Este factor de correlación se atribuye principalmente a la diferencia en el comportamiento del fluido en los dos test. Su aplicabilidad es limitada, solamente válida bajo ciertas condiciones específicas. Por ejemplo, diferentes grados de polímero PE demuestran una gran dispersión del cociente $p_{c_{FS}}/p_{c_{S4}}$. A su vez, algunas modificaciones vigentes del test S4 también influyen en este factor de correlación. La configuración del ensayo fue modificada para asegurar que la iniciación provocada por el percutor no influya en la subsiguiente propagación. Para ello se introdujo un mecanismo de arresto que previene el impacto directo entre el percutor y las paredes de la tubería. Este cambio mejora ampliamente la consistencia del ensayo, pero permite que las paredes se abran libremente durante la fractura. Esto reduce la presión $p_{c_{S4}}$ e incrementa el factor de correlación hasta valores mayores a 5. Entonces, no toda presión obtenida por medio del S4T puede ser escalada a través de la ecuación (3.1) para calcular $p_{c_{FS}}$, dado que esta simple relación no captura la influencia de todos los factores intervinientes [3].

Relleno de la Zanja

En condiciones de servicio, el desempeño de la tubería se ve afectado por el medio circundante, y en especial, por el relleno de la zanja donde se entierra. Este relleno restringe la deformación de sus paredes y limita la transferencia de energía desde el fluido hacia la grieta en crecimiento. En el caso extremo que la deformación radial se halle totalmente impedida, la única contribución energética a la fuerza impulsora sería la energía elástica almacenada en la estructura. Entonces, es lógico pensar que la restricción del medio

circundante provoca un incremento de la presión crítica p_c al disminuir el aporte energético del fluido que deforma las paredes. Como consecuencia de esta deformación, el material del suelo que rodea la tubería se acelera y absorbe energía cinética al tener cierta inercia. Esta transformación de energía disminuye la energía efectiva que podría disiparse al crear nueva superficie. Por lo tanto, la acción del medio disminuye la fuerza impulsora para la propagación, y hace que se requiera mayor presión para provocar el RCP [4].

En el FST la tubería se entierra al menos 100 mm por debajo de la superficie. Por el contrario, en el otro test, el tubo se deja por encima del nivel superficial y se recrea así una situación más crítica. Esta diferencia en las condiciones de ensayo es una contribuyente más a la discrepancia de los resultados.

Tensiones Residuales

El procesamiento del material desde su forma en pellets hasta el tubo conformado se hace por extrusión. El material fundido, mezclado y homogeneizado es presurizado en una extrusora, y forzado a fluir a través de un molde o cabezal donde adquiere su forma final. A la salida de la extrusora el material es enfriado y forzado a solidificar (cristalizar) por diferentes mecanismos de refrigeración.

Los parámetros de procesamiento **velocidad de extrusión** y **velocidad y tipo de enfriamiento** influyen fuertemente en las siguientes características del producto:

- Geometría del tubo.
- Perfil de cristalinidad en la pared y a lo largo del espesor.
- Perfil de tensiones/deformaciones residuales como consecuencia del ciclo térmico.

A su vez, todas ellas modifican el desempeño del material tanto en servicio, como en los ensayos de caracterización. Los **perfiles de cristalinidad** influyen sobre las propiedades mecánicas, dado que regiones con mayor porcentaje de polímero cristalino son capaces de absorber mayor energía de deformación y provocar un aumento de la presión necesaria para la ruptura. Por su parte, las **tensiones y deformaciones residuales** se suman a las sollicitaciones que sufre la tubería y modifican la fuerza que impulsa el crecimiento.

La deformación residual y su distribución en el material están directamente determinadas por el método de post-enfriamiento. Según cómo el material pierda calor, los gradientes de temperatura que se generan en el espesor dan origen a inhomogeneidades en la cristalinidad y a la formación de esfuerzos residuales. Se distinguen dos tipos de enfriamiento:

- Refrigeración Simple: El enfriamiento se produce únicamente extrayendo calor desde la superficie externa del tubo. Se generan áreas de mayor cristalinidad en la parte interior y un perfil de tensiones residuales asimétrico (tracción en la cara interna y compresión en el exterior).
- Refrigeración Dual: El enfriamiento desde ambas superficies da origen a regiones de baja cristalinidad en ambos extremos del espesor de pared y una distribución simétrica y balanceada de esfuerzos residuales.

La presencia de estas tensiones tiene dos efectos opuestos sobre la performance del material frente al RCP. Por un lado, la energía de deformación extra que se almacena previo a la fractura puede ser liberada durante la rotura y contribuir de manera adicional a la fuerza impulsora. Pero, por otro lado, el perfil de tensiones casi parabólico (*Fig. 3.4*) es la fuente de la existencia de un **momento flector M_θ** que actúa oponiéndose a la deformación radial de las paredes. Este esfuerzo tiende a mantener las superficies de fractura en contacto, a disminuir la apertura de la fisura y reducir la fuerza impulsora.

El efecto del momento flector tiene mayor influencia que la contribución energética adicional. En consecuencia, esto hace que se requiera una presión adicional p_m para mantener la propagación [2]. Además, la magnitud y distribución del momento varía en función del enfriado, y es más significativo en el caso de refrigeración simple cuando los perfiles de tensiones no son simétricos y están desbalanceados. La ecuación (3.2) es una expresión aproximada para la magnitud de presión adicional puesta en función de la tensión circunferencial residual máxima $\sigma_{\theta B}$ y el diámetro normalizado $D^* = D/h$ [3].

$$p_m = \frac{2}{3(D^* - 2)^2} \sigma_{\theta B} \quad (3.2)$$

Cabe destacar que no toda la energía residual almacenada es recuperada durante la fractura debido a los efectos viscoelásticos del material (la relajación de tensiones y deformaciones).

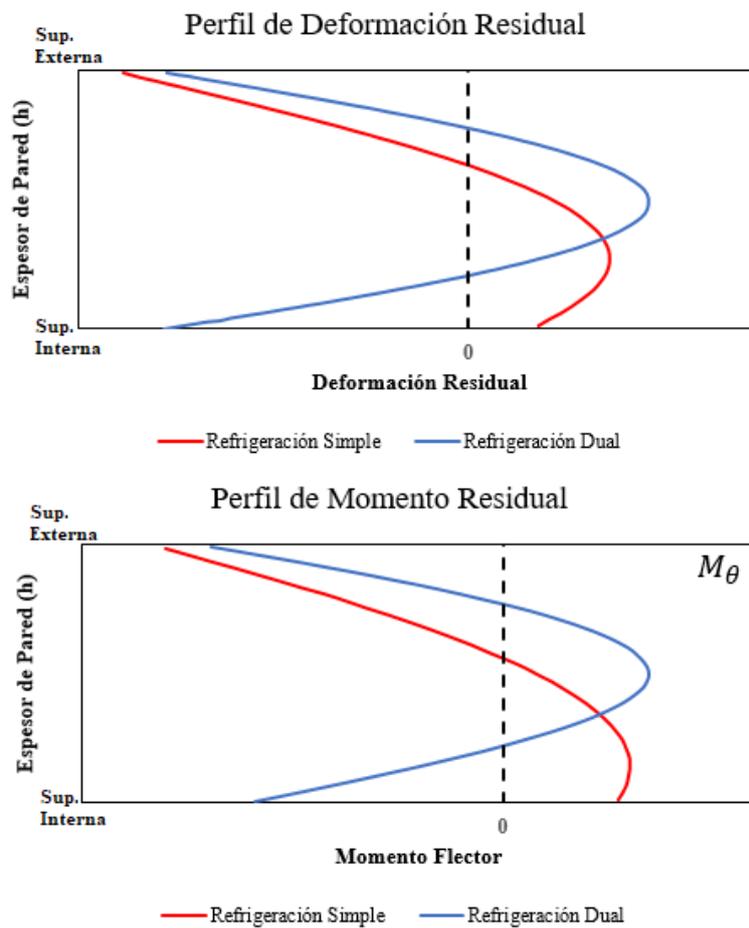


Fig. 3.4 Esquema de perfiles de deformación y momento flector residual en función del tipo de enfriamiento.

Las tensiones residuales no son iguales entre los especímenes utilizados en el S4T y FST dado que la geometría, las dimensiones y por ende su proceso de confección son diferentes. Es muy posible que esta diferencia sea una causante adicional de la discrepancia mencionada. Los siguientes resultados experimentales (Fig. 3.5) comparan la relación p_{cFS}/p_{cS4} en diferentes condiciones de ensayo con la relación lineal predicha por la ecuación (3.1), e ilustran claramente la ausencia de correlación. La figura de la derecha muestra la acción del momento flector de cierre, en especial cuando el camino de la fisura es ondulado.

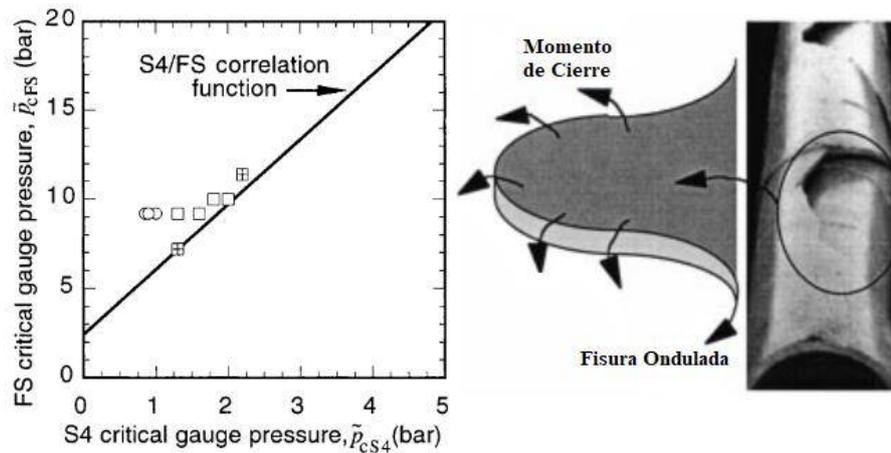


Fig. 3.5 Comparación de la Función de Correlación (—) con resultados experimentales de tuberías (□) enfriadas de manera simple con relleno (○) enfriadas de manera dual con relleno y (⊠) enfriadas de manera simple, sin relleno. Esquema de acción del momento de cierre. [3]

Patrón de Crecimiento de la Fisura

El patrón de crecimiento afecta directamente a la fuerza impulsora. Cuanto más ondulado sea, mayor será el área de fractura creada por unidad de longitud de tubería. Es decir, cuando la trayectoria no es recta, se genera mayor cantidad de superficie nueva que cuando la trayectoria no se ondula. Entonces, la propagación de grietas rectas requiere de menor energía, o lo que es lo mismo, de presiones menores. Dado que la forma de la fisura varía entre los especímenes del S4T y FST, esto también aporta al problema de la correlación [3].

3.2.2. Ensayo de Impacto Charpy Instrumentado

Debido a la falta de practicidad y a los costos de la realización de los ensayos S4 y FS, existe un especial interés en el desarrollo de test más económicos y acelerados, que ofrezcan una manera rápida y eficiente de evaluación. Estos ensayos, denominados SMART (del inglés *Small-Scale Accelerated Reliable Test*), deben permitir caracterizar el comportamiento que el material tendría en un ensayo a escala completa o escala reducida [5].

Una prueba que podría ser capaz de cumplir con estos requerimientos es el ensayo de impacto Charpy. Este conocido test utiliza un espécimen en forma de barra montado sobre un soporte horizontal. En uno de los lados de la probeta se maquina una entalla cuyo eje principal coincide con el eje vertical del espécimen. Un martillo de masa conocida se deja caer en forma de péndulo desde una altura conocida, de manera que impacte y fracture al material. La fuerza y el desplazamiento del martillo se registran como funciones del tiempo de impacto durante la colisión mediante distintos dispositivos de adquisición de datos (Fig. 3.6).

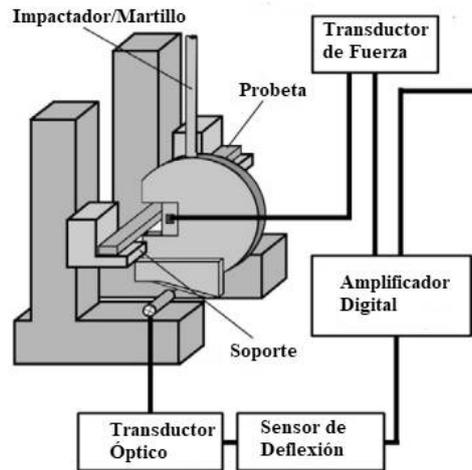


Fig. 3.6 Esquema del equipamiento usado para un Ensayo de Impacto Charpy Instrumentado.

El estado de sollicitación al cual se somete la probeta corresponde a una flexión en tres puntos. El impacto se produce sobre la cara opuesta a la superficie que contiene la entalla, lo que facilita la iniciación de la fisura desde la punta de la hendidura. La geometría de la probeta provoca la concentración de tensiones alrededor de dicho vértice y fuerza a la grieta a crecer a lo largo del ligamento remanente.

El objetivo principal del ensayo es determinar la energía absorbida por el material durante el impacto. La medición se hace directamente a través de la altura que el péndulo adquiere luego de separar al espécimen en dos (Normas ASTM D 6110, ISO 179-1). En el caso del ensayo instrumentado, se registra la posición del péndulo durante el impacto por medio de sensores ópticos, y se empareja con la fuerza que el martillo ejerce sobre la muestra. Esto permite la confección de diagramas de fuerza-desplazamiento, como el de la Fig. 3.7, que pueden ser analizados utilizando las herramientas de la Mecánica de Fractura Dinámica (Norma ISO 179-2). De esta manera, es posible determinar los parámetros característicos de la MF que cuantifican la resistencia del material frente a la iniciación y propagación inestable de la fisura [6].

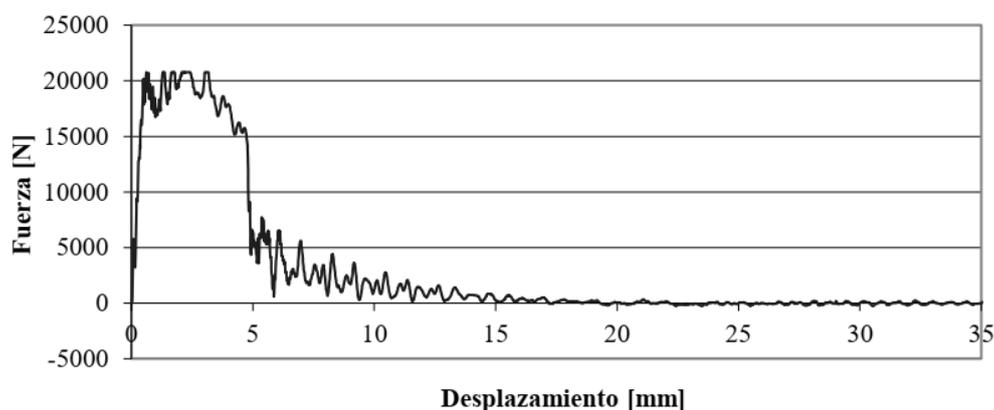


Fig. 3.7 Diagrama característico Fuerza-Desplazamiento.

Una de las principales ventajas que ofrece esta técnica, tanto su versión instrumentada como no instrumentada, es la posibilidad de realizar ensayos a diferentes temperaturas. Así puede determinarse, por ejemplo, la **temperatura de transición dúctil-frágil del material T_{DF}** (si es que este la tuviera).

El ensayo de Charpy Reverso es otra de las técnicas que pueden cumplir con los requerimientos de la categoría SMART [7]. En esta configuración, algo diferente de la convencional, la probeta se impacta del lado de la superficie entallada. El objetivo de esta prueba es medir la resistencia del material polimérico bajo la extensión rápida de una fisura en condiciones de tensión plana. Esta magnitud se expresa como disipación de trabajo plástico por unidad de volumen, y puede ser utilizada como una componente que contribuye a la resistencia total del material frente al RCP.

La falta de unicidad en la correlación de los resultados de los ensayos S4 y FST, con los de la prueba Charpy convencional y reversa, dificultan el uso de estas últimas como SMART. Por ejemplo, se ha demostrado que la energía de impacto medida a temperatura ambiente es un indicador pobre de la tenacidad del material cercana a la temperatura T_C del RCP. Esta magnitud representa una energía promedio absorbida por un material cuya tenacidad depende de la velocidad de propagación. Como durante el ensayo dicha velocidad varía continuamente, las energías medidas a temperatura ambiente presentan una gran dispersión estadística que dificulta el tratamiento de datos y la interpretación de los resultados. Además, la longitud del ligamento que atraviesa la grieta es muy corta y hace que los efectos transitorios iniciales y efectos de bordes sean predominantes, y hagan que los valores de resistencia a la propagación así medidos no sean adecuados [8]. Por otro lado, la temperatura de transición dúctil-frágil obtenida por estos medios ha mostrado la misma tendencia que los resultados del comportamiento en el S4T. Sin embargo, la correlación no es biunívoca y es altamente sensible al tipo de material testeado [5]. Otro conflicto está relacionado con la distinción entre dos propiedades del material diferentes en cuanto a la resistencia a la ruptura por fractura: la resistencia a la iniciación y la resistencia a la propagación. Como en el ensayo Charpy se mide una resistencia global que incluye ambas, es necesario poder discernir entre estas componentes debido a que la resistencia a la propagación es la que realmente importa para el RCP. La elección del parámetro obtenido de los diagramas fuerza-desplazamiento y que se utiliza para caracterizar al material tampoco es una tarea trivial. Algunos de los posibles a ser considerados son: la temperatura de transición T_{DF} , la pendiente inicial del diagrama (una mayor pendiente indicaría una resistencia más alta), la mínima temperatura a la cual la resistencia a la propagación comienza a desarrollarse, la energía de impacto promedio, la temperatura a la cual se supera la energía de impacto de 10 kJ/m^2 (valor tomado del ensayo S4), entre otros.

Como se concluye del párrafo anterior, el uso de este tipo de ensayos como métodos evaluativos del RCP enfrenta muchas dificultades, sin embargo, se espera que una comprensión más profunda del fenómeno permita su correcta implementación.

3.3. RCP como Problema de Fractura Dinámica

El fenómeno de RCP es reconocido como uno de los problemas de la Mecánica de Fractura Dinámica más importantes de la actualidad. Involucra los siguientes tres aspectos físicos principales:

- (i) Grandes deformaciones de las paredes.
- (ii) Dinámica de fluidos.
- (iii) Proceso de propagación dinámico de la fisura.

A continuación, se profundizan cada uno de ellos.

3.3.1. Deformación de las Paredes de la Tubería

Al fracturarse, las paredes de las tuberías sufren grandes deformaciones y adoptan una configuración dependiente de la distancia respecto del frente de la grieta. El principal causante de esta deformación es el movimiento del fluido que escapa. Por este motivo, la apertura de las paredes depende de la presión aplicada, y a su vez, esta depende de qué tan deformada se encuentre la estructura.

El modo de deformación está gobernado por la fuerza de presión, la resistencia del material, la rigidez de la estructura y la influencia del medio circundante. La apertura es causada principalmente por los desplazamientos radiales y circunferenciales de las paredes detrás de la punta de la fisura. El desplazamiento axial (en dirección paralela al eje principal de la estructura) que induce una leve deformación fuera del plano, tiene un porte menor. Las paredes adoptan la forma de aletas (*flaps*) y abren la grieta en forma de campana. Los esquemas de la *Fig. 3.8* representan lo mencionado.

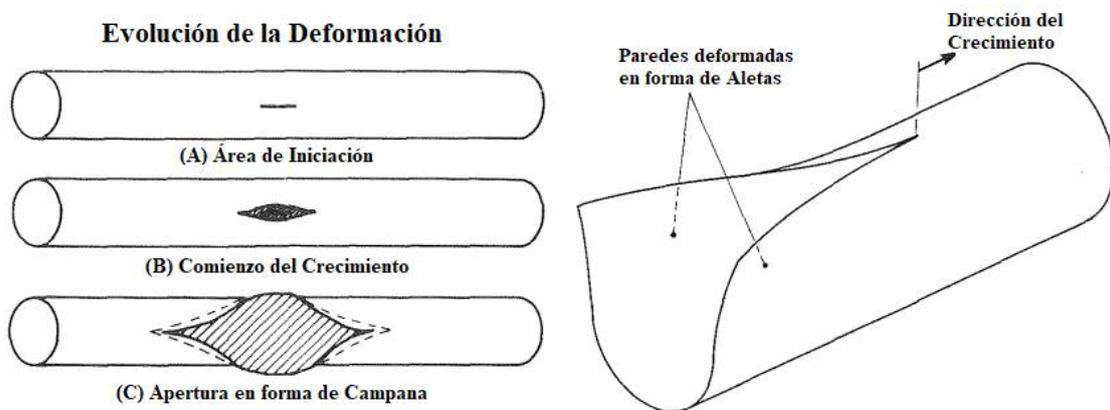


Fig. 3.8 Esquema de la deformación de las paredes de la tubería. (Basado en [9])

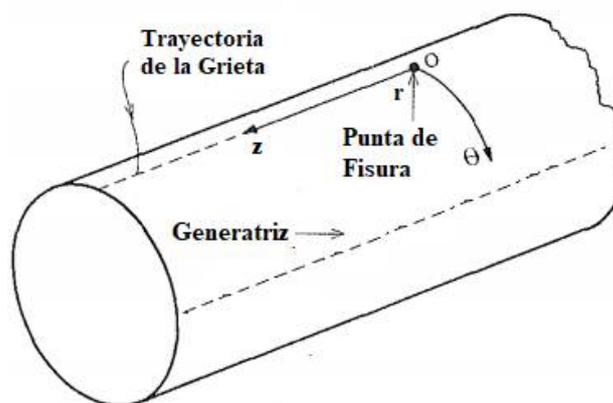


Fig. 3.9 Sistema coordenado cilíndrico de la deformación de las paredes. (Basado en [10])

La *Fig. 3.9* muestra el sistema coordenado cilíndrico $\{r, \theta, z\}$ utilizado para describir la geometría de la deformación. Desde el punto de vista mecánico, el desplazamiento de las

paredes es producido principalmente por flexión, con una mínima elongación circunferencial θ concentrada en la línea media del espesor. La configuración es de deformación plana y obedece a la **inextensibilidad**, es decir que, la deformación superficial en las aletas es constante a lo largo de las generatrices del cilindro que conforman el tubo [9]. En caso de que la fisura axial crezca sin curvarse, la rotura puede pensarse como la división en dos de la generatriz que contiene la trayectoria de la grieta. Esta se separa y expone las superficies de fractura. Las aletas formadas a ambos lados son simétricas respecto de la línea de esta trayectoria, y cada sección transversal que las forman se desplazan hacia afuera abandonando levemente el plano $z = \text{constante}$. Las generatrices permanecen rectas, excepto por el pequeño desplazamiento fuera del plano transversal (al eje del tubo) acomodado por un estiramiento en la superficie media del espesor en la dirección del eje z [10]. La naturaleza inextensional de la deformación es una restricción básica en la configuración geométrica adoptada por las aletas, y debe tenerse en cuenta al modelar el fenómeno [11].

Por último, cabe destacar que las características de la deformación están determinadas por el comportamiento viscoelástico y/o viscoplástico del material. Sin embargo, debido a las reducidas escalas de tiempo en las cuales el fenómeno tiene lugar, es posible representar dicho comportamiento mediante leyes constitutivas lineales elásticas como la Ley de Hooke generalizada:

$$\underline{\sigma} = 2\mu\underline{\varepsilon} + \lambda \cdot \text{tr}(\underline{\varepsilon})\underline{I} \quad (3.3)$$

donde $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$ y \underline{I} son los tensores de tensiones, deformaciones e identidad respectivamente, λ y μ son las constantes de Lamé y el operador $\text{tr}(\cdot)$ denota la traza del tensor.

3.3.2. Distribución de Presión y Dinámica de Fluidos

El proceso de descompresión debido a la fractura ocurre en dos fases diferenciadas:

- El flujo de retroceso axial que genera la propagación de una onda de descompresión frente a la fisura.
- El decaimiento de la presión del fluido remanente causado por la descarga transversal.

La *Fig. 3.10* esquematiza lo mencionado.

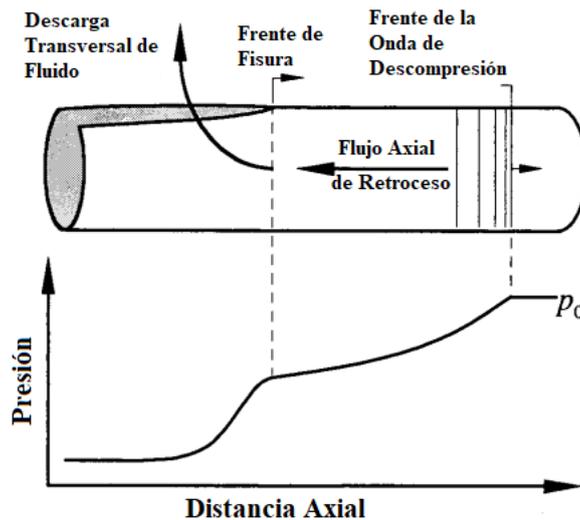


Fig. 3.10 Esquema del proceso de descompresión del fluido durante la fractura. (Basado en [3])

Flujo de Retroceso

En la tubería no fracturada, la presión interna puede considerarse constante y homogéneamente distribuida con un valor definido p_0 . Cuando la grieta empieza a abrirse, el fluido contenido en la región del ligamento remanente frente a la punta de la fisura entra en contacto con el medio externo. Este medio se encuentra a una presión menor, y se establece así un gradiente entre el interior y exterior del tubo. El gas se ve forzado a fluir y comienza a desplazarse hacia la abertura, es decir, retrocede en dirección contraria a la dirección de propagación. Esta descompresión provocada por el flujo axial (a lo largo del eje principal del tubo) se propaga en el sistema como una onda de presión. La Fig.3.10 muestra el plano que contiene el frente de dicha onda, el cual divide el ligamento remanente en dos partes. La primera, comprendida entre la sección transversal que contiene la fisura y el frente de descompresión, alberga fluido a una presión menor que p_0 . La segunda región, aguas arriba, alberga fluido no perturbado que conserva la presión inicial p_0 . Esta última región no ha sido alcanzada aún por la onda de descompresión, y permanece inalterada.

La descompresión se propaga a la velocidad sónica en el medio (cercano a los 331 m/s en aire a 0°C). Cuando este frente sobrepasa a la fisura que viaja a velocidad \dot{a} , deja en la primera región un perfil de decaimiento exponencial. Si la longitud de la tubería es grande, este perfil se estira lo suficiente y permite considerar la presión delante de la punta de la fisura como constante para unos pocos diámetros de distancia [2]. La presión en la punta de la fisura p_t resulta entonces menor a p_0 .

La disminución de la presión depende de la velocidad con la que crece la fisura. A partir de un modelo de flujo unidimensional propuesto por Maxey [12], es posible establecer una relación simplificada entre p_t y p_0 . El modelo considera que la descarga se realiza en un ducto semi-infinito que contiene un gas ideal inicialmente presurizado a p_0 (presión substancialmente mayor a la presión externa del ducto). En cierto instante, se permite al gas escapar desde un extremo del ducto y simultáneamente este extremo comienza a retroceder respecto del punto de observación a una velocidad \dot{a} (lo que simula la propagación de la fisura). El retroceso ocurre a una velocidad menor a del sonido en el medio. Al imponer que la velocidad relativa de las partículas del gas en el extremo libre del ducto sea igual a la del sonido (condición de contorno), la resolución de las ecuaciones de flujo transitorio unidimensional (ec. de continuidad y balance de energía), en condiciones adiabáticas, conduce a la expresión (3.4).

$$\frac{p_t + 1}{p_o + 1} = \begin{cases} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c_o} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} & \dot{a} < c_o \\ 1 & \dot{a} > c_o \end{cases} \quad (3.4)$$

donde γ es el cociente de calores específicos del gas a presión c_p y volumen constante c_v , $\gamma = c_p/c_v$; $c_o = \sqrt{\gamma RT}$ es la velocidad del sonido en el medio y R la constante universal de los gases ideales. La ecuación (3.4) indica que, si la onda de descompresión es capaz de sobrepasar a la fisura propagante $\dot{a} < c_o$, la presión se reduce en función de las propiedades del gas y la relación de velocidades \dot{a}/c_o . En dichas condiciones, el flujo se asemeja al escape de fluido a través de una boquilla obstruida, y el proceso no se ve afectado por el movimiento del gas en la región situada detrás de la fisura. Por el contrario, si la fisura crece más rápido de lo que se desplaza la onda de presión negativa $\dot{a} > c_o$, el valor local en la punta de la fisura será igual al valor inicial $p_t = p_o$.

La expresión (3.4) es la que da origen a la función de correlación (3.2). El cociente $p_{c_{FS}}/p_{c_{S4}}$ se transforma en una función de \dot{a} y γ , si se reconoce que p_t se corresponde con $p_{c_{S4}}$ y p_o con $p_{c_{FS}}$, en las condiciones críticas. Al considerar al arresto de la fisura como un proceso estático con $\dot{a} = 0$ (lo cual constituye una aproximación simplificada del fenómeno) y al adoptar las siguientes propiedades del aire:

Tabla 3.1 Propiedades del aire como gas ideal.

| GAS | c_p [kJ/kg · K] | c_v [kJ/kg · K] | γ |
|------|-------------------|-------------------|----------|
| Aire | 1,0052 | 0,7180 | 7/5 |

de la ecuación (3.3) se obtiene:

$$\frac{p_{c_{S4}} + 1}{p_{c_{FS}} + 1} = 0,279 \quad (3.5)$$

Resolviendo para $p_{c_{FS}}$, se llega a la ecuación de correlación:

$$p_{c_{FS}} = \frac{p_{c_{S4}}}{0,279} + \left(\frac{1}{0,279} - 1 \right) = 3,6 p_{c_{S4}} + 2,6 \quad (3.6)$$

Decaimiento de la Presión por Descarga Transversal

Detrás de la fisura, la presión remanente p_t no colapsa inmediatamente a la presión externa. Desde el frente y hacia la estela de la grieta, la presión se pierde de manera acelerada a medida que el flujo axial se incrementa. El gas escapa fluyendo de manera transversal a través de la abertura creada por la fisura, a una velocidad que depende del tamaño de esta. A su vez, qué tan abierta se encuentre la grieta depende de la propia presión. A una cierta distancia detrás de la punta de la fisura, conocida como **longitud de decaimiento L_D** , la presión cae hasta el valor del exterior y pone fin al proceso de descompresión. Tanto la longitud de descompresión como el perfil de presión tienen una gran influencia sobre la magnitud de la fuerza impulsora [13].

Mediante el análisis de los resultados de ensayos S4 instrumentados, se ha podido observar que el perfil de presión detrás de la fisura se asemeja a una función lineal. Estos resultados están de acuerdo con diferentes modelos analíticos y numéricos que aproximan el proceso de descarga a un problema de flujo unidimensional. Las Fig. 3.11-12 muestran las señales

registradas por los traductores de presión durante un S4T, así como también el análisis funcional de las curvas resultantes [14].

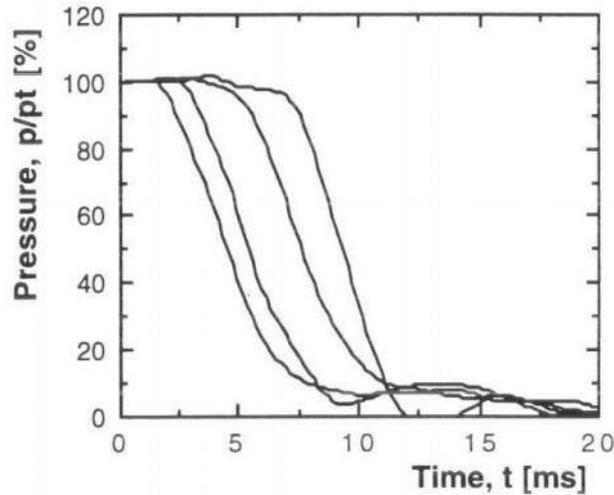


Fig. 3.11 Decaimiento de la presión registrado durante un ensayo S4. [14]

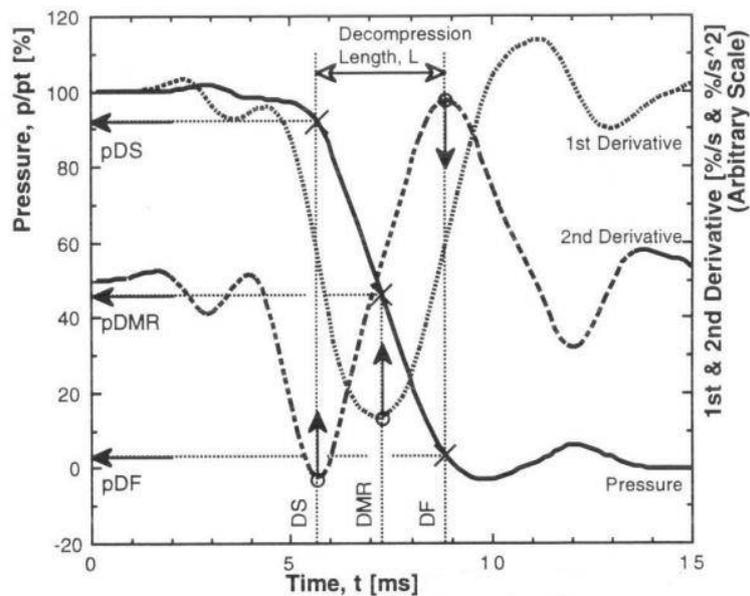


Fig. 3.12 Presión experimental, curva de decaimiento y sus derivadas (S4T) [14]

El perfil de presión está caracterizado por los siguientes aspectos:

- La curva principal tiene una forma sigmoidal, pero la mayor parte de la caída puede aproximarse de manera lineal. La variación se produce mayoritariamente en la dirección de la tubería y el cambio circunferencial es despreciable (independiente de la coordenada angular θ).
- La primera derivada muestra un mínimo absoluto indicando el punto donde la velocidad de descompresión es máxima (DMR, Decompression Maximum Rate).

- La segunda derivada, que representa la curvatura, muestra dos extremos distintos: un mínimo absoluto localizado donde comienza la descompresión (DS, *Decompression Start*), que coincide con la ubicación de la punta de la fisura; y un máximo absoluto donde la descompresión finaliza (DF, *Decompression Finish*).

La distancia ubicada entre DS y DF es la longitud de descompresión característica. Se ha observado que la misma adopta valores entre dos a cuatro veces el diámetro $2 - 4 D$ [15]. Cabe destacar que, si bien las gráficas anteriores ilustran la variación de la presión en función del tiempo en el cual se registra la señal, puede pensarse como si la variable independiente fuese la posición. La variable tiempo t puede convertirse en distancia axial z (Fig. 3.13) si se considera que la fisura se propaga a velocidad constante \dot{a} , y si se toma como referencia el sistema coordenado ya presentado.

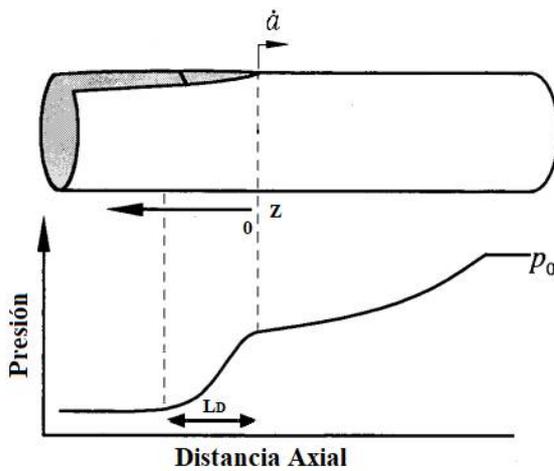


Fig. 3.13 Esquema del Eje Axial.

$$z = \dot{a} \cdot t \quad (3.7)$$

$$z = \begin{cases} 0 & ; \text{punta de fisura.} \\ L_D & ; \text{longitud de descarga.} \end{cases}$$

Por último, es importante mencionar que el perfil puede caracterizarse a través de otro parámetro, el **tiempo de descarga** t_D . Este hace referencia al tiempo que tarda la fisura en recorrer la longitud de decaimiento al trasladarse a velocidad constante, y obedece la siguiente relación:

$$t_D = L_D / \dot{a} \quad (3.8)$$

$$t_D / D = 0,162 \left(\frac{\rho}{p_0} \cdot \frac{h}{D} \cdot \frac{1}{c_0} \right)^{1/3}$$

donde ρ es la densidad del polímero, la única propiedad del material presente en (3.8). La ecuación es un resultado de estimar el tiempo de descompresión a través de modelo de flujo del gas en una dimensión que responde a un caso de flujo compresible y obstruido en un recipiente infinito. Fue propuesto por Greenshields y Venizelos [14], y presenta una buena correlación con los resultados experimentales [16].

3.3.3. Análisis de la Mecánica de Fractura

Las herramientas de la Mecánica de Fractura pueden usarse para describir las condiciones bajo las cuales se da la propagación rápida. Resulta más sencillo analizar el problema desde la formulación energética presentada en la Sección 2.2.2., teniendo en cuenta lo enunciado en la Sección 2.3. respecto a la naturaleza dinámica del proceso.

3.3.3.1. La Propagación en Estado Cuasi-Estacionario

La **condición de propagación** puede ser expresada en términos de las siguientes magnitudes:

- Fuerza impulsora (*energy releaserate o crack driving force*) $\mathcal{G}(a, t, p, D, SDR, E)$: es la energía por unidad de área que el sistema es capaz de suministrar para sostener el agrietamiento de la estructura. Es una magnitud externa, y puede pensarse como la sollicitación ejercida por el propio sistema sobre el material. Es una función de la longitud de la fisura a , el tiempo t , la presión p , la geometría de la tubería D, SDR , y el módulo elástico del polímero E .
- Resistencia a la fractura dinámica del material $\mathcal{G}_D(T, \dot{a}, h)$: es una propiedad del material que mide el requerimiento energético para crear dos nuevas superficies. Es decir, es el trabajo por unidad de área que es necesario suministrar para fracturar al polímero. Resulta una función de la temperatura T , la velocidad de propagación \dot{a} y el espesor del tubo h .

Análogamente a lo expresado en la ecuación (2.27), esta condición resulta:

$$\begin{cases} \mathcal{G}(a, t, p, D, SDR, E) \geq \mathcal{G}_D(T, \dot{a}, h) ; \text{propagación dinámica de la fisura.} \\ \mathcal{G}(a, t, p, D, SDR, E) < \mathcal{G}_D(T, \dot{a}, h) ; \text{arresto de la fisura.} \end{cases} \quad (3.9)$$

El enunciado afirma que el crecimiento rápido es posible cuando la fuerza impulsora impuesta por el sistema es capaz de equiparar continuamente la tenacidad del material. Por el contrario, cuando el sistema que contiene la grieta en crecimiento no puede suplir más la energía requerida para la creación de nueva superficie, la fisura necesariamente se arresta y finaliza así el proceso dinámico e inestable de propagación.

Desde el momento que se produce la iniciación hasta que se establecen las condiciones de propagación características del RCP, la tasa de liberación de energía evoluciona en función de la distancia de propagación como lo muestra la *Fig. 3.14*.

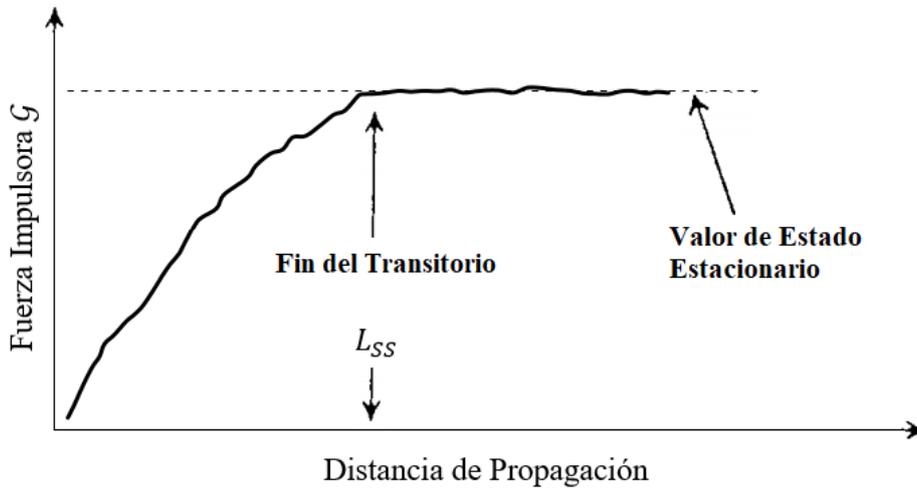


Fig. 3.14 Evolución de la fuerza impulsora en función de la distancia de propagación.

El esquema hace evidente cómo la magnitud G comienza a crecer erráticamente desde cero durante un **período transitorio inicial**. En el inicio, la velocidad de propagación es muy alta y fluctúa, mientras que la presión interna se mantiene en un valor cercano a p_0 . Posteriormente, cuando la fisura ha crecido una distancia denominada L_{SS} , el sistema abandona el estado transitorio para entrar en ya mencionado **estado cuasi-estacionario**. Al alcanzar la longitud L_{SS} , la fuerza impulsora adopta un valor constante que mantiene por el resto del proceso. La velocidad de crecimiento varía de manera despreciable y puede considerarse también como constante, con un valor \dot{a} definido menor a la velocidad inicial transitoria.

El punto L_{SS} coincide con la distancia en la que el área de la apertura de la fisura supera el área de la sección transversal del ducto (condiciones “totalmente desarrolladas” o *fully developed conditions*). En este instante, las aletas en la estela de la grieta se forman por la presión del gas, y fuerzan al material a desplazarse a una posición que permanece prácticamente constante durante la subsiguiente propagación. La ventilación del gas y la descompresión ocurren a un ritmo fijo que no decrece durante la ruptura. De esta manera, se genera una configuración geométrica estable en la punta de la fisura que viaja atravesando la tubería.

Tanto los campos de tensiones y deformaciones, como el perfil de presión, alcanzan una distribución constante que se mantiene y se mueve siguiendo a la grieta con la misma velocidad. Esto último implica que el proceso de fractura es insensible a la longitud total de la fisura, una vez que se ha desarrollado completamente el estado estacionario.

Si se considera que la velocidad de propagación es constante, la variable tiempo puede ser eliminada de la expresión (3.9). Además, si el proceso es independiente de la longitud de la fisura y se comporta como si esta y la tubería tuviesen una longitud semi-infinita, la variable a también puede obviarse. De esta manera, se obtiene la siguiente expresión (válida durante el estado estacionario):

$$\begin{cases} G(\dot{a}, p, D, SDR, E) \geq G_D(T, \dot{a}, h); \text{ propagación en estado estacionario.} \\ G(\dot{a}, p, D, SDR, E) < G_D(T, \dot{a}, h); \text{ arresto de la fisura.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Es importante mencionar que este particular estado del crecimiento puede perderse por efectos de borde. La reflexión de las ondas de descompresión y de las ondas de

flexión/extensión (emanadas desde el vértice de la grieta), en los extremos libres del ducto, son capaces de destruir la estacionariedad [17].

3.3.3.2. Características de la Fuerza Impulsora

La naturaleza cuasi-estacionaria del RCP permite parametrizar el valor constante de \mathcal{G} en función de \dot{a} . Es decir, para una determinada presión, la fuerza impulsora provista por el sistema puede pensarse como una función de la tasa de crecimiento. Esta dependencia se encuentra representada en la siguiente figura.

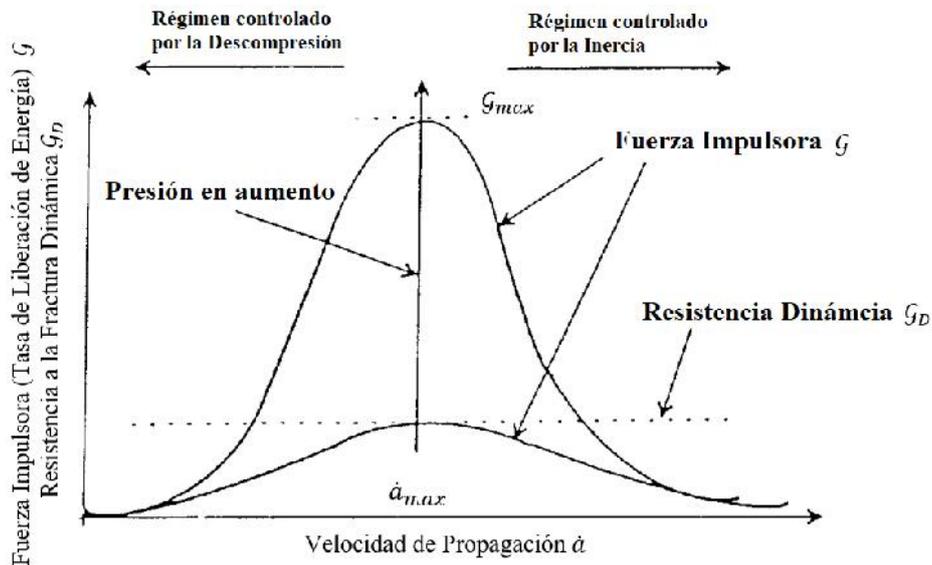


Fig. 3.15 Esquema de la parametrización $\mathcal{G}(\dot{a})$. (Basado en [17])

Para un nivel de presión constante, las curvas $\mathcal{G}(\dot{a})$ adoptan una forma de campana muy característica. Esto permite la distinción de dos regímenes:

- Régimen controlado por la descompresión: a bajas velocidades de crecimiento, el flujo de energía hacia la punta de la fisura está controlado principalmente por el proceso de descarga. El trabajo que la presión realiza sobre las aletas de la tubería, durante la deformación, representa la mayor contribución a dicho flujo. Posteriormente, \mathcal{G} aumenta conforme \dot{a} se incrementa porque la fisura comienza a viajar más cerca del frente de onda de descompresión.
- Régimen controlado por la inercia: en el límite de muy altas velocidades, los efectos cinéticos e inerciales comienzan a cobrar importancia. En este régimen, la aceleración del sistema consume un gran porcentaje de energía en forma de energía cinética y disminuye aquella utilizada para el agrietamiento. Esto se traduce en una reducción en la magnitud de \mathcal{G} .

La forma de campana permite definir un máximo \mathcal{G}_{max} . Este valor extremo se alcanza a una velocidad \dot{a}_{max} y mide la máxima capacidad de entrega de energía por parte de la estructura. La mínima presión que es capaz de generar un máximo \mathcal{G}_{max} que supere la resistencia dinámica del material \mathcal{G}_D , ($\mathcal{G}_{max} \geq \mathcal{G}_D$), es la presión definida como crítica o de colapso p_C . Este nivel de presión sostiene la propagación rápida a un ritmo cercano a \dot{a}_{max} . Debe mencionarse que la Fig. 3.15 muestra una simplificación del comportamiento del material, pues considera la tenacidad como constante e independiente de \dot{a} .

$$p \geq p_C \rightarrow \mathcal{G}(\dot{a}_{max}) = \mathcal{G}_{max} \geq \mathcal{G}_D$$

La velocidad \dot{a}_{max} a la cual se alcanza el máximo, la posición del máximo, es una propiedad del sistema y no varía con cambios de la presión [18].

La Fig. 3.16 representa una situación más cercana a la realidad. En ella se muestra un material cuya tenacidad tiene cierta variación con \dot{a} . También, se muestran las curvas $G(\dot{a})$ de los test S4 y FS a diferentes niveles de presión. Aquellas correspondientes al ensayo de escala completa adoptan la forma de campana antes mencionada. Si la presión p es menor que p_{cFS} la fisura es incapaz de crecer y el RCP no ocurre. Si $p \geq p_{cFS}$, la función $G(\dot{a})_{[FST]}$ es igual a $G_D(\dot{a})$ en al menos un punto (círculo negro relleno). La intersección de las curvas define las condiciones en las que el RCP es factible, pero solo el punto de la derecha puede considerarse como una situación estable [19].

Por el contrario, y para el ensayo S4, $G(\dot{a})_{[S4T]}$ presenta una forma distinta de la campana, aunque mantiene la misma tendencia. Esta diferencia se debe a las características propias de la prueba, en especial, es producto de la inclusión de la jaula de contención. Si se efectúa un análisis análogo al del párrafo anterior, puede definirse el punto que hace estable la RCP como la intersección entre $G(\dot{a})_{[S4T]}$ y $G_D(\dot{a})$. Se observa que, en este ensayo y en relación al FST, tanto las presiones de colapso como las velocidades de propagación son menores.

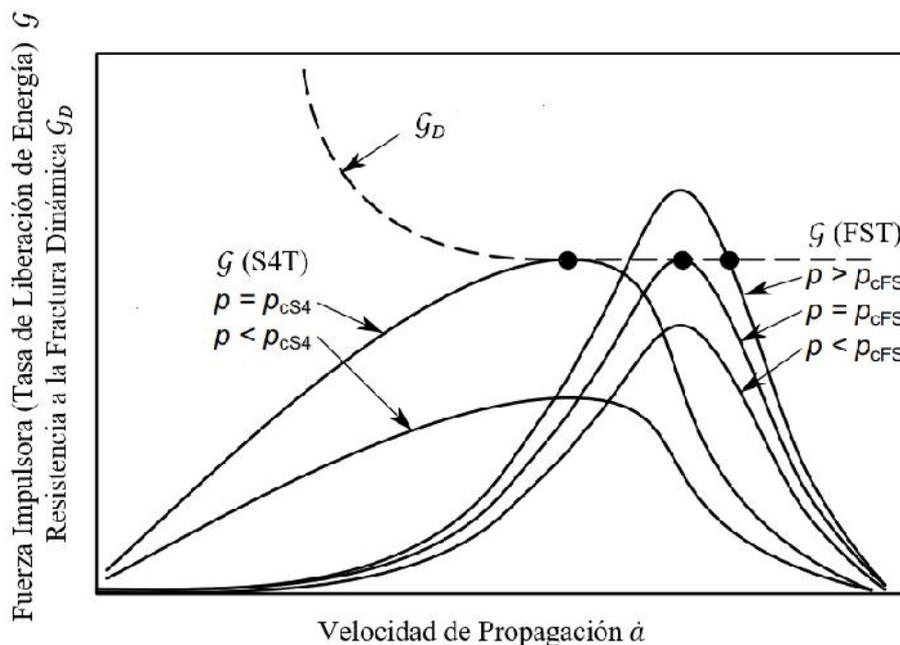


Fig. 3.16 Curvas $G(\dot{a})$ para el S4T y FST (Basado en [19])

3.3.3.3. Influencia de los Parámetros Principales

A continuación, se describe brevemente la influencia de los parámetros relevantes que modifican la performance del material.

Temperatura

A temperaturas más altas, el aumento de la ductilidad conduce a un incremento de la resistencia dinámica del material. Por este motivo, se necesitan presiones más altas para producir el colapso.

Espesor de Pared

Un espesor de pared más grande restringe la capacidad de deformación del material e induce una respuesta más frágil. Esto hace que la fractura posible a una presión menor. Sin embargo, si el espesor varía, pero D^* se mantiene constante, la presión de colapso no se altera [19].

Velocidad de Propagación

Como se muestra en la *Fig. 3.16* la resistencia del material disminuye a mayores velocidades, de la misma manera que un material se comporta de manera más frágil a velocidades de deformación más altas.

Propiedades del Gas y Presión

Como se mencionó anteriormente, la contribución del medio presurizante a la fuerza impulsora proviene del trabajo que el gas realiza sobre las paredes de la tubería durante la descompresión. La dependencia es cuadrática, es decir, $G \propto p^2$. Lo mismo ocurre con la longitud de descompresión, dado que ambas magnitudes p y L_D impactan de manera similar sobre G . Así, si p o L_D se duplican (o reducen a la mitad), el aporte a la fuerza impulsora se cuadruplica (o reduce $1/4$) (*Fig. 3.17*). Esto se debe a que el trabajo de las fuerzas externas es realizado por presión p_o a lo largo de la distancia L_D , y es proporcional a la denominada **área de carga** [15].

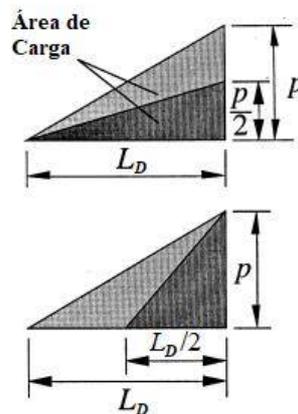


Fig. 3.17 Esquema de la influencia de la presión y la longitud de descompresión. Se define el Área de Carga como el área bajo el perfil lineal de presión a lo largo de la longitud L_D y mide la contribución a la fuerza impulsora. Tanto un cambio en la magnitud de la presión p y la longitud L_D producen alteraciones similares en el área de carga. (Basado en [15])

Por otro lado, si las características físicas del gas permiten que este fluya más rápidamente, la descompresión se produce de manera más acelerada. Si la presión se pierde en un lapso de tiempo breve, y por lo tanto, en una longitud de decaimiento menor, la fuerza impulsora se reduce y el arresto es más probable [3].

Módulo Elástico Dinámico

La elasticidad del material incide de manera compleja sobre el proceso de agrietamiento. Cuanto más rígido sea, menor será la deformación y menor será la fuerza impulsora experimentada. Sin embargo, la situación cambia en el régimen de altas velocidades. La reducción de la apertura de la fisura restringe la transformación de energía en energía cinética y de deformación. Bajo estas condiciones, la fuerza impulsora se ve incrementada y la mayor rigidez del material es contraproducente [3].

Densidad

Mayor inercia del material provoca una disminución del máximo G_{max} y un corrimiento hacia valores menores de la velocidad \dot{a}_{max} a la cual se produce [3].

No Linealidad del Material

La alinealidad del comportamiento mecánico del material provoca una reducción de la fuerza impulsora experimentada a altas presiones.

3.3.3.4. Modelo Analítico de Irwin-Corten para la Fuerza Impulsora

Los primeros modelos destinados a la descripción analítica del fenómeno RCP se atribuyen a Irwin y Corten [20]. Basados en la teoría cuasi-estática de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE), el modelo permite llegar a una expresión cerrada que relaciona las principales variables involucradas en el problema: la fuerza impulsora para la propagación, la presión interna, las propiedades del material y las características geométricas del sistema.

El análisis asume las siguientes hipótesis;

- El sistema se compone de una tubería de pared delgada, de diámetro externo D y espesor h , sometida a una presión interna p_o .
- El material puede ser representado por un modelo lineal elástico, caracterizado por su módulo de elasticidad E y su coeficiente de Poisson ν .
- La energía de deformación almacenada en las paredes de la tubería solicitada, a causa de la presión interna, es lo único que impulsa al crecimiento de la fisura.
- El fenómeno se considera cuasi-estático, es decir, no se tienen en cuenta términos cinéticos o dinámicos en el balance de energía.
- El fluido contenido es un fluido incompresible que almacena una cantidad de energía de deformación despreciable.
- La pared de la tubería detrás de la punta de la grieta se descarga rápidamente, completamente y sin desplazamiento radial.

La expresión para la fuerza impulsora bajo estas consideraciones asume la siguiente forma:

$$\mathcal{G} = \frac{\pi p_o^2}{8Eh^2} (D - 2h)^2 (D - h) \quad (3.11)$$

La deducción de dicha ecuación se encuentra en el Anexo 'A'. Si se tiene en cuenta que el proceso de propagación es un fenómeno dinámico, pueden reemplazarse como primera aproximación, los parámetros \mathcal{G} y E por sus equivalentes \mathcal{G}_D y E_D . Es decir, reemplazar la fuerza impulsora por la resistencia a la fractura dinámica del material (en condiciones críticas de propagación) y el módulo por el módulo dinámico. De esta manera, al resolver la ec. (3.11) para la presión puede obtenerse la expresión (3.12) para el valor crítico p_c .

$$p_c = \frac{1}{(D^* - 2)} \sqrt{\frac{8E_D \mathcal{G}_D}{\pi D} \frac{D^*}{D^* - 1}} \quad (3.12)$$

donde $D^* = D/h$ es el diámetro normalizado, también definido como SDR [21]. De acuerdo con esta ecuación, la presión crítica varía con la raíz cuadrada del producto del módulo dinámico y la resistencia dinámica del material, de modo que resulta proporcional a la tenacidad dinámica del material K_D , el parámetro de campo.

$$\mathcal{G}_D = K_D^2 / E_D \quad (3.13)$$

Sin embargo, esta relación entre \mathcal{G}_D y K_D no es trivial, en especial cuando se trata de materiales viscoelásticos altamente dependientes de la velocidad de deformación. La aplicabilidad de la ecuación (3.13) es sensible al valor del módulo dinámico, el cual debe ser determinado a una velocidad de deformación representativa [22].

Este planteo analítico asume por hipótesis que la única fuerza impulsora que promueve la propagación de la fisura es únicamente la liberación de la energía de deformación. Esta energía almacenada en las paredes de la tubería es disipada al momento de la creación de nueva superficie y al relajarse las tensiones. Es decir, se asume de manera implícita que el término de energía cinética es cero, y que no hay efectos dinámicos que contribuyan a la fuerza impulsora. Por este motivo, su validez se pierde a velocidades de propagación altas debido que los efectos de inercia se vuelven más significativos.

Por otro lado, al no tener en cuenta la energía de deformación contenida en el fluido comprimido su implementación a fluidos altamente compresibles, como los gases, es inapropiada. Los gases son capaces de almacenar gran cantidad de energía interna debido a su capacidad de contraerse/expandirse, es decir, deformarse (al ser tratados como un medio continuo). Así, cuando se produce la fisura en la tubería, el gas sometido a presión escapa y libera gran parte de su energía almacenada al causar la deformación de las paredes del tubo (*flaring*). Como se dijo anteriormente, la deformación causada por la presión del fluido tiene una enorme contribución a la fuerza impulsora [19]. En otras palabras, el modelo falla al no tener en cuenta la energía liberada por el propio medio presurizante. Por el contrario, fluidos como el agua retienen pequeñas cantidades de energía de deformación debido a que poseen un módulo de compresibilidad alto. Bajo estas condiciones, la ecuación (3.11) puede usarse como una buena aproximación [2][7]. Por ejemplo, es el caso del test S4 con 100% agua, donde esta ecuación se utiliza para aproximar la resistencia dinámica del material G_D de manera efectiva. Durante la fractura provocada en este test, la expansión del agua resulta en una rápida descompresión sin un significativo escape del fluido. La presión detrás de la onda de descompresión cae rápidamente reestableciendo la presión del medio externo y sin ejercer efecto sobre la fuerza impulsora. Cabe destacar que, en dicha prueba, para poder mantener una propagación rápida, es necesario modificar el espécimen. Usualmente se incluye una entalla interna que suple la falta de fuerza impulsora, o bien se añade un núcleo rígido interno que desacelera la descompresión y permite cierta interacción fluido-estructura [23].

Por último, debe mencionarse que la validez del análisis se haya también limitada a un comportamiento frágil del material. En el caso de los polímeros termoplásticos para la extrusión de tuberías, estos deben mostrar una tensión de fluencia lo suficientemente alta y un mecanismo de fractura a altas velocidades lo suficientemente frágil como para satisfacer los requerimientos de la MFLE [19]. Sin embargo, cuando el fenómeno RCP es llevado al régimen dúctil y las grandes deformaciones junto con los términos cinéticos comienzan a tener mayor importancia, son necesarios planteos dinámicos que reemplacen las aproximaciones cuasi-estáticas, como lo es la ec. (2.23). Estos aspectos han sido tenidos en cuenta e incluidos en los modelos más complejos que han sucedido al de Irwin-Corten. Todos ellos reproducen este primer modelo para un caso límite de velocidad de propagación nula ($\dot{a} = 0$) y longitud de decaimiento también nula ($L_D = 0$) [15].

3.4. Análisis Computacional del RCP

Para concluir con el Capítulo 3 se abordan brevemente los diferentes modelos computacionales propuestos hasta la fecha que tienen por objetivo simular el RCP.

En cuanto a los esfuerzos previos en el estudio de este problema se puede mencionar el trabajo de P. S. Leever [19], quien desarrolló un modelo analítico adaptable y extensible que tiene en cuenta la influencia de las tensiones residuales desarrolladas en las paredes de las tuberías, la condición de contorno del suelo y la sustitución parcial del gas presurizado por agua en el modelado computacional del RCP. Representa el fenómeno a través de un

sistema equivalente conformado por una viga simple montada sobre una base elástica (Fig. 3.18). Al imponer un desplazamiento axial a velocidad constante, la resolución de las ecuaciones diferenciales del problema dinámico de una viga tipo Euler-Bernoulli, por el método FDM, da como resultado el perfil de apertura de la fisura $w(\zeta)$ (donde ζ es la coordenada axial normalizada z/L_D). El cómputo de las energías y de la fuerza impulsora se realiza al parametrizar estas magnitudes en función de $w(\zeta)$.

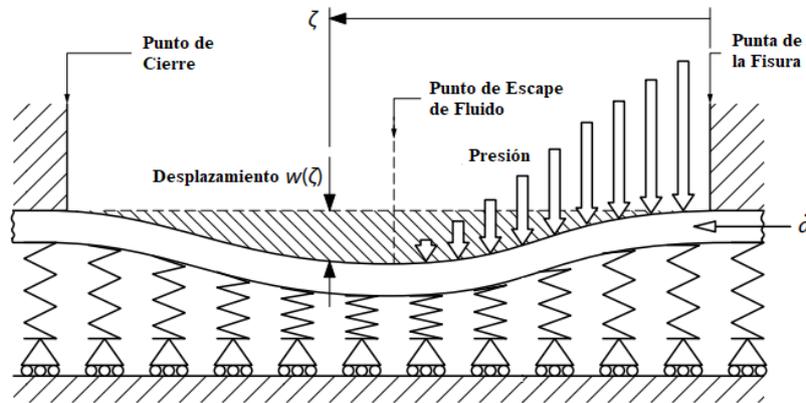


Fig. 3.18 Modelo equivalente de una viga simple, apoyada sobre una base elástica. (Basado en [19])

En cuanto al modelado FEM, O'Donoghue et al. [24] propusieron un código computacional que acopla un modelo tridimensional de diferencias finitas para la dinámica del fluido con el método de los elementos finitos tipo cáscara (*shell elements*) para la deformación mecánica de la tubería. En este trabajo se comparan las predicciones del modelo en estado estacionario con los resultados de ensayos FS para tuberías de acero, obtenidos sobre un rango de posibles velocidades de crecimiento. Posteriormente, el modelo fue extendido para tuberías de polietileno. El esquema de resolución por elementos finitos permite obtener la fuerza impulsora por medio del clásico balance de energías, así como también, a través del concepto de liberación de la fuerza nodal (*nodal release force*). En este último caso, \mathcal{G} es calculado como el trabajo por unidad de área realizado por la fuerza que experimentan los nodos del elemento que contiene la fisura en crecimiento.

Más adelante, el código FEM fue adaptado para poder simular el test S4 [25]. Se incluyó un algoritmo que simula el contacto de las paredes con la jaula de contención y representar adecuadamente las condiciones del ensayo. A su vez, esto último fue utilizado para la evaluar la efectividad de la inclusión de anillos de acero alrededor de la tubería como dispositivos de arresto de fisura [26].

Por su parte, Zhuang [27] se ha basado en los elementos finitos para simular el RCP en una tubería enterrada en presencia de gas a presión. Este autor utiliza un elemento de resorte con masa, adherido a las paredes de la tubería, para simular los efectos del medio circundante y del relleno de la zanja. Es decir, tiene en cuenta las propiedades del suelo y el efecto de la profundidad del relleno a través de la constante de rigidez del resorte.

Por último, A. Ivankovic y Demirdzic [28] [29] junto con los aportes de G. P. Venizelos [15], han desarrollado un modelo basado en la técnica FVM. Propusieron un esquema de resolución que trata de solventar algunas de las dificultades encontradas en el modelado por FEM. Por ejemplo, no utiliza elementos de tipo cáscara de modo que su aplicabilidad no se limita solamente a tuberías de pared delgada. Además, incluye la deformación mecánica del sistema y el comportamiento del fluido en un único algoritmo. Esto elimina las complicaciones de utilizar dos métodos diferentes para cada problema (flujo del gas y deformación de las paredes) y de la necesidad de incluir una interfaz de acoplamiento, como sí lo hace el método de O'Donoghue antes mencionado. La discretización por volúmenes finitos permite calcular \mathcal{G} a través de un balance de energías en un volumen de control, o

bien, a través del concepto de fuerza de contención (*holding back force*), análogo al *nodal release force*. Utilizando este algoritmo, los autores han estudiado las diferencias entre las condiciones de propagación en estado transitorio y en estado estacionario, así como también la dependencia de \mathcal{G} con los diferentes parámetros involucrados.

REFERENCIAS: CAPÍTULO (3)

- [1] M. Farshad, *Plastic Pipe Systems: Failure Investigation and Diagnosis*, First Edit., vol. 30, no. 4. Great Britain: Elsevier Science, 2006.
- [2] C. Argyrakis, "Models for designing pipe-grade polyethylenes to resist rapid crack propagation," *PhD Thesis, Dep. Mech. Eng. Imp. Coll. London*, no. March, 2010.
- [3] C. J. Greenshields and P. S. Leever, "Correlation between full scale and small scale steady state (S4) tests for rapid crack propagation in plastic gas pipe," *Plast. Rubber Compos. Process. Appl.*, vol. 28, no. 1, pp. 20–25, 1999, doi: 10.1179/146580199322913287.
- [4] L. B. Freund and D. M. Parks, "Analytical Interpretation of Running Ductile Fracture Experiments in Gas-Pressurized Linepipe," *ATM STP 711*, pp. 359–378, 1980.
- [5] R. A. C. Deblieck *et al.*, "A Simple Intrinsic Measure for Rapid Crack Propagation in Bimodal Polyethylene Pipe Grades Validated by Elastic-Plastic Fracture Mechanics Analysis of Data From Instrumented Charpy Impact Test," *Polym. Eng. Sci.*, vol. 57, no. 1, pp. 13–21.
- [6] W. Grellman and B. Langer, "Testing of Plastics - Instrumented Charpy Impact Test (ICIT)," 2007.
- [7] P. Ozbek, "Rapid fracture resistance of polyethylene: Dependence on polymer structure," *PhD Thesis, Dep. Mech. Eng. Imp. Coll. London*, no. January, 2008.
- [8] M. F. Kanninen, S. G. Sampath, and C. Popelar, "Steady-State Crack Propagation in Pressurized Pipelines Without Backfill.," *Am. Soc. Mech. Eng.*, no. 75-PVP-39, 1975.
- [9] K. D. Ives, A. K. Shoemaker, and R. F. McCartney, "Pipe deformation during a running shear fracture in line pipe," *J. Eng. Mater. Technol. Trans. ASME*, vol. 96, no. 4, pp. 309–317, 1974, doi: 10.1115/1.3443246.
- [10] F. Abbassian and C. R. Calladine, "On the deformation of the pipe wall during propagation of a ductile crack in a high-pressure gas pipeline," *J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME*, vol. 111, no. 1, pp. 47–57, 1989, doi: 10.1115/1.3265639.
- [11] L. Freund, D. Parks, and J. Rice, "Running Ductile Fracture in a Pressurized Line Pipe," *Mech. Crack Growth*, pp. 243-243–20, 2009, doi: 10.1520/stp33950s.
- [12] D. M. Parks and L. B. Freund, "On the Gasdynamics of Running Ductile Fracture in a Pressurized Line Pipe," *J. Press. Vessel Technol.*, vol. 100, no. 1, pp. 13–17.
- [13] P. Venizelos and C. J. Greenshields, "Fast Brittle Fracture of Plastic Pipes Part 2 - Gas pressurised," vol. 26, no. 9, pp. 394–403, 1998.
- [14] P. S. Venizelos, G. P., Greenshields, C. J., Leever, "An analytical model for the discharge process in the S4 test for Rapid Crack Propagation," no. 3. Department of Mechanical Engineering, Imperial College, London SW7 2BX, UK, pp. 529–532, 1992.
- [15] A. Ivankovic and G. P. Venizelos, "Rapid crack propagation in plastic pipe: Predicting full-scale critical pressure from S4 test results," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 59, no. 5, pp. 607–622, 1998.
- [16] J. G. Williams and G. P. Venizelos, "A perturbation analysis of rapid crack propagation in pressurised pipe," *Int. J. Fract.*, vol. 94, no. 2, pp. 161–176, 1998, doi: 10.1023/A:1007543300866.
- [17] Z. Zhuang and P. E. O'Donoghue, "The recent development of analysis methodology for rapid crack propagation and arrest in gas pipelines," *Int. J. Fract.*, vol. 101, no. 3,

- pp. 269–290, 2000.
- [18] Z. Zhuang and P. E. O'Donoghue, "Material fracture toughness determination for polyethylene pipe materials using small scale test results," *Acta Mech. Sin. Xuebao*, vol. 13, no. 1, pp. 78–80, 1997, doi: 10.1007/bf02487832.
 - [19] P. Leever, "An engineering model for rapid crack propagation along fluid pressurized plastic pipe," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 96, pp. 539–557, 2012, doi: 2012.09.001.
 - [20] H. T. Corten, G. R. Irwin, "Evaluating the feasibility of basing pipeline operating pressure on in-place hydrostatic test pressure," 1968.
 - [21] C. J. Greenshields and P. S. Leever, "Rapid crack propagation in plastic water pipes: Measurement of dynamic fracture resistance," *Int. J. Fract.*, vol. 79, no. 1, pp. 85–95, 1996, doi: 10.1007/BF00017714.
 - [22] I. Leever, Greenshields, Venizelos, "Material, structural and pressurising fluid models for RCP tests on thermoplastic pipes," *Dep. Mech. Eng. Imp. Coll. London SW7 2BX, UK*.
 - [23] C. J. G. P. S. Leever, "Fast fracture of plastic water pipes and the measurement of dynamic fracture resistance."
 - [24] P. E. O'Donoghue, S. T. Green, M. F. Kanninen, and P. K. Bowles, "The development of a fluid/structure interaction model for flawed fluid containment boundaries with applications to gas transmission and distribution piping," *Comput. Struct.*, vol. 38, no. 5–6, pp. 501–513, 1991, doi: 10.1016/0045-7949(91)90002-4.
 - [25] Z. Z. O'Donoghue, "Simulation of a small-scale steady state test," *Dep. Civ. Eng. Univ. Coll. Dublin, Earlsoft Terrace, Dublin 2, Irel.*, vol. 7, 1995.
 - [26] P. E. O'Donoghue and Z. Zhuang, "Finite element model for crack arrestor design in gas pipelines," *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, vol. 22, no. 1, pp. 59–66, 1999, doi: 10.1046/j.1460-2695.1999.00139.x.
 - [27] Z. Zhuo and P. E. O'Donoghue, "Analysis model to simulate the cracked pipe buried in soil," *Acta Mech. Sin. Xuebao*, vol. 14, no. 2, pp. 154–155, 1998.
 - [28] A. Ivankovic, S. Muzaferija, and I. Demirdzic, "Finite volume method and multigrid acceleration in modelling of rapid crack propagation in full-scale pipe test," *Comput. Mech.*, vol. 20, no. 1–2, pp. 46–52, 1997, doi: 10.1007/s004660050215.
 - [29] A. Ivankovic, I. Demirdzic, J. G. Williams, and P. S. Leever, "Application of the finite volume method to the analysis of dynamic fracture problems," *Int. J. Fract.*, vol. 66, no. 4, pp. 357–371, 1994, doi: 10.1007/BF00018439.

CAPÍTULO N° IV

DESARROLLO DEL MODELO

ESTUDIO Y MODELADO DEL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS

4. DESARROLLO DEL MODELO

4.1. Base y Esquema del Modelo

Sobre la base de los fundamentos teóricos explicados en los dos capítulos anteriores, se ideó un modelo computacional para representar el Crecimiento Rápido de Fisuras en tuberías plásticas. El problema fue abordado como un “Problema Matemático de Contorno” que describe la deformación de una serie de vigas de eje circular. Mediante las técnicas del Cálculo de Variaciones se pudieron obtener las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno que gobiernan los desplazamientos del sistema. Cada viga se utiliza para representar una sección discreta del volumen de control que contiene el desarrollo de la fisura desde la tubería sana hasta el punto de descarga del gas. Mediante un modelo que consiste en la sucesión de anillos contiguos con condiciones de contorno ajustadas al comportamiento real de un ensayo es que se obtienen los resultados dentro volumen de control descripto. Para la resolución de las ecuaciones gobernantes se utilizó el método variacional de Ritz y se desarrolló un algoritmo numérico en Maple Software®, programado en el lenguaje propio de la herramienta.

En las siguientes cuatro secciones se detallan las bases fundamentales del modelo, las hipótesis bajo las cuales fue ideado, así como también los sub-modelos elegidos para representar cada uno de los aspectos físicos que componen el proceso de RCP.

4.1.1. El Volumen de Control

La *Fig. 4.1* representa una fisura que se propaga en estado estacionario, con velocidad \dot{a} constante, a lo largo de una tubería de diámetro externo D y espesor h , y sometida a una presión interna inicial p_0 . La presión local en la punta de la fisura es $p_t < p_0$, y decae de manera lineal a lo largo de la longitud L_D a medida que la estructura se abre detrás de la grieta.

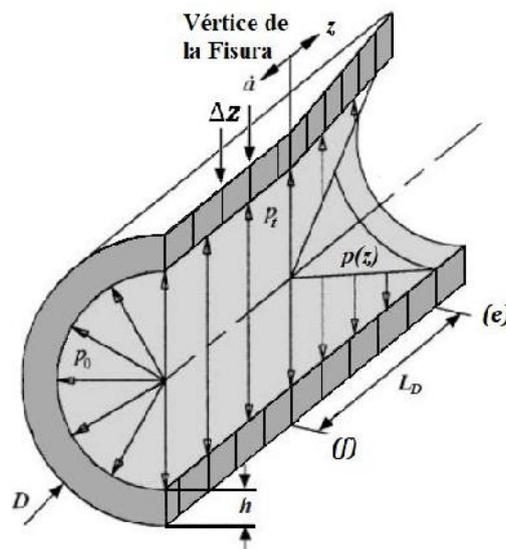


Fig. 4.1 Volumen de control del modelo numérico.

El análisis se limita al estado estacionario y se ignora el transitorio inicial, dado que se trata del estadio de mayor importancia. Se asume que se han alcanzado las condiciones de propagación y apertura completamente desarrolladas (*fully developed conditions*), en la cual, tanto el gas en movimiento, el campo de desplazamientos alrededor de la fisura, como la propia grieta conservan una configuración estable que se mantiene en el tiempo. Se considera también que los procesos de iniciación no influyen sobre la subsiguiente propagación. Por este motivo, la tubería se trata como un sistema semi-infinito sin dependencia explícita de la longitud de la fisura a . A su vez, se ignoran todos los efectos de borde que pueden ocasionarse por la reflexión de las perturbaciones mecánicas, o de la onda de descompresión, en el extremo libre aguas arriba.

El estado estacionario permite eliminar la dependencia explícita del tiempo de todas las magnitudes relevantes, dado que un observador situado en la punta de la fisura y que se mueve con ella no registra ningún cambio en la tubería o en sus alrededores. Esto posibilita efectuar el cálculo dichas magnitudes a una región limitada del sistema. Se toma un **volumen de control** (VC) que se extiende desde un plano por delante de la punta de la fisura (f) (de frente), en el cual las paredes de las tuberías se encuentran en equilibrio con el fluido parcialmente descomprimido, hasta un plano detrás de la punta de la fisura en donde el fluido ha escapado por completo (e) (de estela). La posición del VC se mantiene fija y atada a la punta de la fisura, es decir, se desplaza con ella.

Se adopta un sistema coordenado cilíndrico $\{r, \theta, z\}$ análogo al presentado en la *Fig. 3.9* y la *Fig. 3.13*. El origen de la coordenada axial ($z = 0$) se ubica en el vértice de la grieta, y toma valores positivos en dirección de la estela y hasta el final del volumen en $z = L_D$.

4.1.2. Deformación Mecánica

Se divide el VC en anillos de ancho Δz como muestra la *Fig. 4.1*. La deformación del tubo es modelada hallando el campo de desplazamientos radial y tangencial de cada una de estas secciones como si fueran vigas de eje curvo que obedecen las hipótesis Euler-Bernoulli [1]. Debido a la simetría del problema, solo es necesario resolver la mitad del arco de circunferencia que representa una sección curva.

Se considera que:

- El sistema dentro del volumen de control alcanza una configuración deformada estable que se mantiene en el tiempo.
- En cuanto a la deformación de las vigas curvas, la sección transversal de cada una de ellas es plana y permanece plana y perpendicular al eje neutro de la viga durante el cambio de forma. Además, esta deformación queda completamente descrita por los desplazamientos radial $w(r, x, t)$ y tangencial $u(r, x, t)$ de la línea media de la viga.
- La viga se encuentra empotrada en el extremo inferior, es decir, no puede rotar ni desplazarse.
- El extremo superior corresponde al plano de la fisura, por lo tanto, es considerado inicialmente como extremo libre.
- Cada anillo está solicitado únicamente por una presión interna, cuyo valor depende de la posición axial que ocupa a lo largo del eje z . La presión actúa como una carga distribuida constante.

- A priori, no existe influencia de la dimensión axial al considerar los anillos contenidos en el plano. Es decir, no se tienen en cuenta la deformación fuera del plano que experimentan las paredes del tubo.
- No existe variación en la dirección radial del campo de desplazamientos. Esto transforma al problema en un caso unidimensional, dependiente de la coordenada espacial que recorre la línea media de la viga y del tiempo, es decir: $w(x, t)$ y $u(x, t)$.

Entonces, cada una de las vigas de eje curvo puede representarse según la Fig. 4.2.

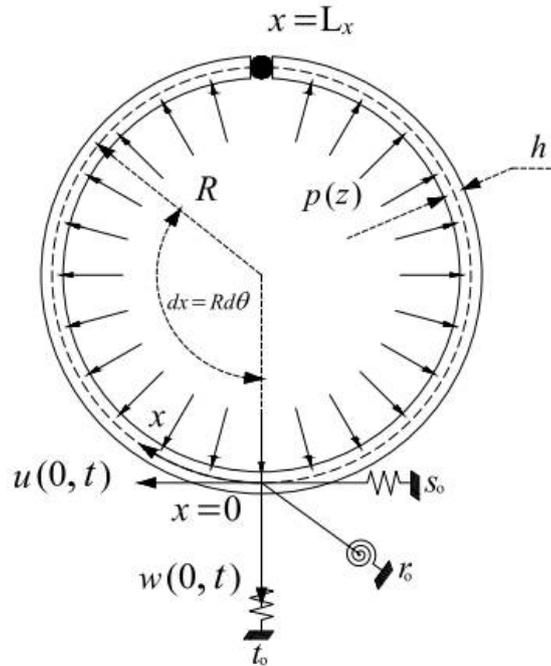


Fig. 4.2 Modelo mecánico de anillo como viga de eje curvo (sección plana).

$\{r, x\}$ representa el sistema coordenado elegido, siendo r la coordenada radial o transversal y $dx = R \cdot d\theta$ la coordenada angular o tangencial, y R el radio medio.

$$R = \frac{D - h}{2} \quad (4.1)$$

Las componentes del campo de desplazamiento son:

$$\begin{aligned} \text{Componente transversal: } w(r, x, t) &\rightarrow w(x, t) \\ \text{Componente tangencial: } u(r, x, t) &\rightarrow u(x, t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$p(z)$ es el perfil de presión, t_0 , s_0 y r_0 son las restricciones elásticas en la posición $x = 0$ (o $\theta = 0$) de los resortes transversal, tangencial y rotacional respectivamente. Como se dijo, el extremo $x = L_x$ corresponde a la generatriz que contiene a la fisura, y L_x es la longitud total del semi-arco de anillo.

$$L_x = \pi \cdot R \quad (4.3)$$

La deformación así descrita responde a la inextensibilidad mencionada en la Sección 3.3.1., con la salvedad de que se ignoran los desplazamientos fuera del plano. La influencia de este

tipo de deformación es despreciable y no aporta significativamente a la energía contenida en el sistema. Entonces, ignorarlas no supone una aproximación errónea [2].

4.1.3. Dinámica del Fluido

En base a lo expuesto en la Sección 3.3.2., se asume lo siguiente para el comportamiento del fluido:

- El gas se descarga a lo largo del volumen de control, y lo hace de manera estacionaria y no transitoria.
- La distribución de presión es una función que depende únicamente de la coordenada axial z y su variación circunferencial θ es despreciable.

$$p(z, \theta) \rightarrow p(z) \quad (4.4)$$

- La descompresión parcial en el frente de la fisura p_t puede ser representado por la ecuación (3.4).
- La presión que experimenta cada uno de los anillos está biunívocamente determinada por su posición axial. El perfil de presiones puede aproximarse con una función lineal:

$$p(z) = \frac{p_a - p_t}{L_D} \cdot z + p_t \quad (4.5)$$

donde p_a es la presión externa a la cual descarga el fluido.

4.1.4. Parámetros de la Mecánica de Fractura

El balance de todas las energías dentro de la porción de tubería comprendida entre los planos (f) y (e) permite obtener la fuerza impulsora que proporciona el sistema para sostener la propagación de la fisura. \mathcal{G} considera la energía total (deformación y cinética) por unidad de longitud de tubería entre estos planos, sumada a la contribución de la fuerza de presión ejercida sobre las aletas que se abren. Al eliminar la dependencia explícita del tiempo, \mathcal{G} puede calcularse como un balance instantáneo en función del campo de desplazamientos, para un determinado perfil de presión.

Si bien el transitorio inicial es ignorado, los efectos de inercia aún deben ser tenidos en cuenta. En especial, debe incluirse la energía cinética que adquieren las paredes durante su deformación.

Debe mencionarse que, los micromecanismos de falla que contribuyen a la tenacidad del material no son considerados de manera directa, pero sí de manera indirecta. Los procesos que ocurren a nivel microscópico como el *crazing* y la fluencia localizada que hacen al comportamiento constitutivo del material, quedan enmascarados en el carácter macroscópico del balance. Sin embargo, y para lo que al modelo respecta, la influencia de

estos mecanismos de rotura se manifiesta en el valor de la resistencia dinámica del material G_D . Si los cálculos son realizados en condiciones que producen el colapso de la línea, el valor de G obtenido se corresponderá con G_D .

4.2. Modelo de la Deformación Mecánica

4.2.1. Viga de Eje Curvo (Euler-Bernoulli)

La Fig. 4.3. muestra el sistema mecánico modelado.

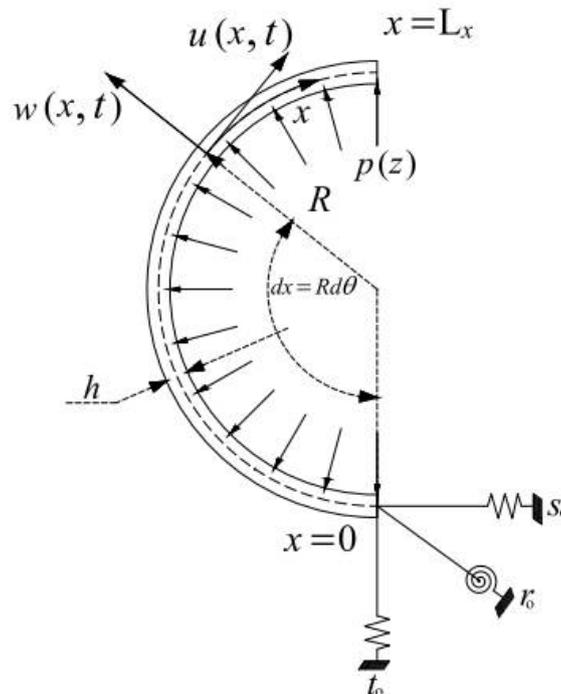


Fig. 4.3 Modelo mecánico del semi-arco de anillo como viga de eje curvo (sección plana).

La configuración deformada de la viga está representada por el campo de desplazamientos $\underline{U} = w \cdot \underline{e}_r + u \cdot \underline{e}_x$ en las coordenadas polares $\{r, x\}$ de vectores de base \underline{e}_r y \underline{e}_x . El campo se describe por las componentes tangenciales y radiales de la línea media correspondiente al punto x , en un instante de tiempo t , como funciones $w = w(x, t)$ y $u = u(x, t)$, $\forall x \in [0, L_x] \wedge \forall t$.

La deformación del sistema se expresa mediante el tensor $\underline{\varepsilon}$;

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{xx} \end{bmatrix} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \quad (4.6)$$

donde \otimes indica el producto tensorial de los vectores de base \underline{e}_i y \underline{e}_j . Por otro lado, ε_{rr} denota la deformación en la dirección radial, ε_{xx} en la dirección tangencial y $\varepsilon_{rx} = \varepsilon_{xr}$ las deformaciones de corte.

Las ecuaciones cinemáticas de la mecánica vinculan las componentes del campo \underline{U} y las componentes del tensor $\underline{\varepsilon}$. En el caso bidimensional donde las funciones dependen de ambas coordenadas espaciales r y x resultan [3]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w(r, x, t)}{\partial r} \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{r} \cdot w(r, x, t) + \frac{\partial u(r, x, t)}{\partial x} \\ \varepsilon_{rx} = \varepsilon_{xr} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w(r, x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(r, x, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot u(r, x, t) \right]\end{aligned}\quad (4.7)$$

Si las funciones w y u son independientes de la coordenada radial, las expresiones (4.7) se simplifican de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w(x, t)}{\partial r} = 0 \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{r} \cdot w(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \\ \varepsilon_{rx} = \varepsilon_{xr} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{r} \cdot u(x, t) \right]\end{aligned}\quad (4.8)$$

Debe aclararse que las expresiones (4.7) y (4.8) son válidas para todo instante de tiempo t fijo. En el Anexo 'B' se muestra la justificación matemática de estas ecuaciones.

Para poder usar la formulación energética de la MF es necesario representar matemáticamente cada una de las contribuciones a la energía total del sistema compuesto por el anillo. Posteriormente, deben sumarse los aportes individuales de cada uno de ellos para componer la energía total del volumen de control analizado.

Si se centra el análisis en un único anillo, pueden distinguirse tres componentes principales: la **energía de deformación** \mathcal{U}_S , la **energía cinética** E_K y el **trabajo de la presión** W . A continuación, se muestra cómo son calculados cada una de estos términos para el caso del semi-anillo de la Fig. 4.3.

Energía de Deformación

Cuando una viga se encuentra sometida a esfuerzos normales, de torsión y de flexión, se producen tensiones y deformaciones, que se relacionan por la Ley de Hooke en el límite elástico (deformaciones del 10% aprox.). El estado solicitado conduce al almacenamiento de energía potencial elástica. Esta magnitud puede interpretarse como el aumento de energía interna de la viga a medida que el sólido se deforma, y surge como resultado del trabajo realizado por las fuerzas externas que causan el cambio de forma. Si se usa un sistema coordenado cuyo eje principal coincide con el baricentro de la viga y los demás ejes normales coinciden con las direcciones principales de la deformación, la energía puede descomponerse en contribuciones internas de **extensión** \mathcal{U}_E , de **flexión** \mathcal{U}_F , de **torsión** \mathcal{U}_T , y la **energía de vínculos mecánicos externos** \mathcal{U}_V (de los resortes transversales, tangenciales y rotacionales), para un sistema que responde a las hipótesis de Euler-Bernoulli [4].

$$U_S = U_E + U_F + U_T + U_V \quad (4.9)$$

El sistema representado en la *Fig. 4.2* se encuentra libre de torsión. Por este motivo, se ignora esta componente en lo que resta del análisis.

- **Energía de Extensión Interna (deformación a lo largo del eje de la viga)**

La extensión es provocada por el esfuerzo normal N_x que actúa en la dirección del eje de la viga. La expresión (2.24) permite obtener esta componente energética como la integración en el volumen del sólido del trabajo realizado por la tensión normal $\sigma_{xx}^{(N)}$, al provocar la deformación ε_{xx} . De esta manera:

$$U_E = \frac{1}{2} \int \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} dV = \frac{1}{2} \int E \varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} dV = \frac{1}{2} \int E \cdot \varepsilon_{xx}^2 A dx \quad (4.10)$$

donde $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$ de la Ley de Hooke simplificada y el diferencial del volumen es expresado como $dV = A dx$, con $A = h \cdot \Delta z$ el área transversal constante de la viga. La ec. (4.8) expresa la forma funcional de ε_{xx} , que al ser reemplazada en la expresión anterior resulta:

$$U_E = \frac{1}{2} EA \int_0^{L_x} \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.11)$$

- **Energía de Flexión Interna**

La flexión de la viga en el plano (r, x) es ocasionada por el momento flector $M_F^{(z)}$ alrededor del eje perpendicular z . Este esfuerzo induce una tensión normal $\sigma_{xx}^{(M)}$ que se suma a la tensión $\sigma_{xx}^{(N)}$. La Ley de Navier [5] relaciona $\sigma_{xx}^{(M)}$ y $M_F^{(z)}$ mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_{xx}^{(M)} = -\frac{M_F^{(z)}}{I_{zz}} r \quad (4.12)$$

siendo I_{zz} el momento de inercia respecto del eje z . Para la viga de sección rectangular estudiada:

$$I_{zz} = \iint r^2 dr dz = \frac{h^2 \Delta z}{12} \quad (4.13)$$

La variable r es tomada localmente como la coordenada que recorre el espesor h de la viga desde el radio interno hasta el radio externo, para cada x (o θ) fijo. Si bien se asumió que las variables principales no dependen de r , esta hipótesis no se aplica momentáneamente para hallar la expresión buscada.

La energía de flexión puede calcularse utilizando nuevamente la expresión (2.24):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_F &= \frac{1}{2} \int \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} dV = \frac{1}{2} \int \sigma_{xx} \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} dr dz dx = \frac{1}{2E} \int \int \int \left(-\frac{M_F^{(z)}}{I_{zz}} r \right)^2 dr dz dx \\ &= \frac{1}{2E} \iint r^2 dr dz \int \frac{M_F^{(z)^2}}{I_{zz}^2} dx = \frac{1}{2E} I_{zz} \int \frac{M_F^{(z)^2}}{I_{zz}^2} dx = \int \frac{M_F^{(z)^2}}{2EI_{zz}} dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es necesario ahora relacionar el momento flector con las magnitudes de deformación. La ecuación diferencial aproximada de la elástica de la viga establece la correspondencia entre el ángulo de giro ϕ de la sección respecto del eje neutro, y el esfuerzo de flexión como [5]:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_F^{(z)}}{EI_{zz}} \quad (4.15)$$

Y, en este caso, la tangente del ángulo de giro resulta igual al doble de la componente de deformación por corte ε_{rx} , también llamada distorsión γ_{rx} . Para ángulos pequeños:

$$\phi \approx \tan \phi = \gamma_{rx} = 2\varepsilon_{rx}; \quad (4.16)$$

Entonces, al juntar ambas expresiones:

$$M_F^{(z)} = EI_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial x} = EI_{zz} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{r} \cdot u \right) = EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.17)$$

Al reemplazar esto en (4.14) se obtiene la ecuación a utilizar para calcular la contribución de la flexión a la energía de deformación:

$$\mathcal{U}_F = \frac{1}{2} EI_{zz} \int_0^{L_x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.18)$$

- Energía de Vínculos Mecánicos Externos

La energía de los vínculos mecánicos t_o , s_o y r_o , ubicados en $x = 0$, puede calcularse como si se tratasen de muelles o resortes elásticos lineales y de torsión. Las magnitudes t_o , s_o y r_o representan la rigidez de cada uno de ellos (constantes del resorte). Estas restricciones elásticas actúan sobre las componentes del desplazamiento $w(x, t)$, $u(x, t)$ y $\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$ (rotación) respectivamente, cuando son evaluadas en $x = 0$.

Las expresiones matemáticas que permiten el cálculo son:

(i) *Resorte transversal*

$$t_o \cdot [w(0, t)]^2 \quad (4.19)$$

(ii) *Resorte tangencial*

$$s_o \cdot [u(0, t)]^2 \quad (4.20)$$

(iii) *Resorte rotacional*

$$r_o \cdot \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right]^2 \quad (4.21)$$

Finalmente, la energía de deformación total del semi-anillo resulta:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \left[EA \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx + t_o \cdot [w(0, t)]^2 + s_o \cdot [u(0, t)]^2 + r_o \cdot \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right]^2 \quad (4.22)$$

Trabajo de la Presión

En términos formales, el trabajo de la presión corresponde a una componente más de la energía de la deformación. Sin embargo, es tratado convenientemente como una magnitud independiente para facilitar el análisis posterior de la MF y el cálculo de \mathcal{G} .

La contribución energética surge de la integración del trabajo realizado por la fuerza de la presión $F(z)$ sobre el desplazamiento transversal $w(x, t)$, a lo largo de la longitud de la viga L_x . La fuerza de presión que actúa sobre un área A_z de la cara interna del anillo resulta;

$$dF(z) = p(z) dA_z = p(z) \Delta z dx \quad (4.23)$$

y la contribución energética:

$$W = \Delta z \int_0^{L_x} p(z) \cdot w dx \quad (4.24)$$

La expresión es válida para un anillo de ancho Δz ubicado en la posición z donde la presión adquiere un valor constante $p(z)$ dado por el perfil (4.5).

Energía Cinética

Según la ec. (2.25), la energía cinética se calcula simplemente como:

$$E_K = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \rho A \left[\left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (4.25)$$

4.2.2. Formulación Variacional y Obtención del Problema de Contorno

Una vez identificadas las variables principales del problema, la relación existente entre ellas, así como también las energías, es necesario encontrar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema mecánico. Para dicho fin, se utilizaron las técnicas del denominado *Cálculo de Variaciones* resumidas en el Anexo 'C'.

4.2.2.1. Obtención del Problema de Contorno

El Cálculo de Variaciones constituye una formidable herramienta de uso en la física-matemática y en la ingeniería que permite obtener las ecuaciones diferenciales y las correspondientes condiciones de contorno que definen el problema cerrado de una manera sistemática, rigurosa y eficaz [6]. En esta sección se utilizan las técnicas enunciadas en el Anexo 'C' para formular el problema de contorno que describe el comportamiento del sistema mecánico de interés, *Fig. 4.3*.

De las ec. (4.9), (4.11), (4.18-22) y (4.24-25) la función Lagrangiana del sistema, definida como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= E_K - \mathcal{U}_S + W \\ \mathcal{L} &= \int_{x_o=0}^{x_1=L_x} \left\{ \frac{1}{2} \rho A \left[\left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} EA \left(\frac{w(x, t)}{r} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \Delta z p(z) \cdot w(x, t) \right\} dx \quad (4.26) \\ &\quad - t_o \cdot [w(0, t)]^2 - s_o \cdot [u(0, t)]^2 - r_o \cdot \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right]^2 \end{aligned}$$

donde se utiliza $x_1 = L_x$ y $x_o = 0$ de ahora en adelante para los extremos del semi-anillo.

El funcional de energía o acción física del sistema $I[w, u]$ se construye como la integral de línea del Lagrangiano sobre todas las trayectorias de movimiento posibles entre dos instantes de tiempo. Este depende de dos variables dependientes $w(x, t)$ y $u(x, t)$ y de sus derivadas, pero no depende explícitamente ni de la coordenada x , ni del tiempo t .

$$I[w, u] = \int \mathcal{L} \left(w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) dt \quad (4.27)$$

Según el principio de Hamilton, la configuración deformada $[w(x, t), u(x, t)]$ adoptada por la viga de eje curvo es aquella que minimiza $I[w, u]$ y por lo tanto cumple la siguiente expresión:

$$\delta I[w, u] = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) dt = 0 \quad (4.28)$$

Para poder realizar la variación del funcional $\delta I[w, u]$, éste debe estar definido en un espacio lineal. Formalmente, las funciones $w(x, t)$ y $u(x, t)$ pertenecen al conjunto de funciones continuas y de derivadas parciales continuas hasta orden cuarto $C^4(\Omega)$ y segundo $C^2(\Omega)$ respectivamente. Estos conjuntos $C^k(\Omega)$ se definen sobre el dominio cerrado $\Omega = [x_0, x_1] \times [t_1, t_2]$. El espacio de funciones admisibles de $w(x, t)$ es un subconjunto de $C^4(\Omega)$ denominado $\mathcal{C}_w \subset C^4(\Omega)$; y de manera análoga, el subconjunto de funciones admisibles en la dirección tangencial $u(x, t)$ es $\mathcal{C}_u \subset C^2(\Omega)$. Luego, $\mathcal{C}_w \times \mathcal{C}_u$ es el espacio admisible del funcional $I[w, u]$. Este es el espacio formado por todas las configuraciones que el sistema puede adoptar al satisfacer las restricciones geométricas del problema, y es lineal si cumple la siguiente condición:

$$\mathcal{C} = \{[w, u] ; [w, u] \in \mathcal{C}_w \times \mathcal{C}_u / w \in \mathcal{C}_w, u \in \mathcal{C}_u \wedge w(x, t_1) = w_1(x), w(x, t_2) = w_2(x), \\ u(x, t_1) = u_1(x), u(x, t_2) = u_2(x) \forall x \in [x_0, x_1]\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} [w^{(1)}, u^{(1)}] + [w^{(2)}, u^{(2)}] &= [w^{(1)} + w^{(2)}, u^{(1)} + u^{(2)}], \quad \forall w^{(1)}, w^{(2)} \in \mathcal{C}_w, \forall u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathcal{C}_u \\ \alpha \cdot [w, u] &= [\alpha \cdot w, \alpha \cdot u], \quad \forall w \in \mathcal{C}_w, \forall u \in \mathcal{C}_u, \forall \alpha \in \mathfrak{R} \end{aligned} \right.$$

(4.29)

El cálculo de la variación del funcional requiere transformar las funciones admisibles w y u en las nuevas funciones \bar{w} y \bar{u} , que representan una pequeña desviación de la configuración de equilibrio. Es decir, requiere evaluar la variación de w y u como δw y δu :

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, t) &= w(x, t) + \delta w(x, t) = w(x, t) + \xi \cdot \psi(x, t) \\ \bar{u}(x, t) &= u(x, t) + \delta u(x, t) = u(x, t) + \xi \cdot \varphi(x, t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Las direcciones admisibles ψ y φ en el punto $[w, u] \in \mathcal{C}_w \times \mathcal{C}_u$ son aquellas desviaciones para las cuales $[\bar{w}, \bar{u}] \in \mathcal{C}_w \times \mathcal{C}_u$ para todo parámetro arbitrario $\xi > 0 \in \mathfrak{R}$ lo suficientemente pequeño. En consecuencia, se definen los espacios de direcciones admisibles \mathcal{H}_w (dirección transversal) y \mathcal{H}_u (dirección tangencial) en donde existen ψ y φ , ($\psi \in \mathcal{H}_w$ y $\varphi \in \mathcal{H}_u$). Luego, $\mathcal{H}_w \times \mathcal{H}_u$ es el espacio de direcciones admisibles del funcional $I[w, u]$ compuesto por todas las funciones ψ y φ que satisfacen las mismas hipótesis de continuidad que w y u , y sus correspondientes condiciones de borde esenciales

$$\mathcal{H} = \{[\psi, \varphi] ; [\psi, \varphi] \in \mathcal{H}_w \times \mathcal{H}_u / \psi \in \mathcal{H}_w, \varphi \in \mathcal{H}_u \wedge \psi(x, t_1) = \psi(x, t_2) = \\ \varphi(x, t_1) = \varphi(x, t_2) = 0, \forall x \in [x_0, x_1]\} \quad (4.31)$$

lo cual resulta análogo a las restricciones (C.23) del Anexo 'C'. Este enunciado impone que la perturbación $[\xi\psi, \xi\varphi]$ respecto de la configuración $[w, u]$ se anula en los puntos temporales extremos conocidos de la trayectoria del movimiento t_1 y t_2 .

Ahora, la variación $\delta I[w, u]$ puede calcularse según indican las ec. (C.19-20):

$$\delta I[\bar{w}, \bar{u}] = \xi \left[\frac{\Delta I}{\xi} \right]_{\xi \rightarrow 0} = \left(\frac{dI[w + \xi\psi, u + \xi\varphi]}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0 \quad (4.32)$$

con $\Delta I = I[\bar{w}, \bar{u}] - I[w, u]$. Esto lleva a;

$$\begin{aligned} \Delta I[w, u] &= \int \Delta \mathcal{L} dt \\ &= \int \left[\mathcal{L} \left(\bar{w}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \mathcal{L} \left(w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dt \\ &= \int \{ [E_K(\bar{w}, \bar{u}) - \mathcal{U}_S(\bar{w}, \bar{u}) + W(\bar{w}, \bar{u})] - [E_K(w, u) - \mathcal{U}_S(w, u) + W(w, u)] \} dt \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.2.2.1.1. Cálculo de $\Delta I[w, u]$

Se calculan ahora cada uno de los términos de (4.33) por separado.

Término de Energía Cinética

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} E_K(\bar{w}, \bar{u}) - E_K(w, u) dt = \\ &= \frac{1}{2} \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0=0}^{x_1=L_x} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dx dt \end{aligned}$$

Considerando la relación (4.30) y desarrollando la expresión anterior:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2\xi \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\xi \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dx dt \\ &= \frac{1}{2} \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[2\xi \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + 2\xi \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dx dt \end{aligned} \quad (4.34)$$

Según lo enunciado en el desarrollo de Taylor de las ec. (C.6-9) los términos de orden cuadrático del parámetro ξ , que pesa las perturbaciones de las variables dependientes, no influyen en los cálculos posteriores. La magnitud ξ^2/ξ desaparece al tomar el límite $\xi \rightarrow 0$ de la ec. (4.32) y por lo tanto ξ^2 puede despreciarse y ser eliminado de la expresión anterior.

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} E_K(\bar{w}, \bar{u}) - E_K(w, u) dt = \\ &= \frac{(2\xi)}{2} \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \right\} dx dt \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dado que los límites de integración son constantes e independientes entre sí, los símbolos de las integrales pueden ser intercambiados. Ahora, puede aplicarse el Teorema de Green

en una dimensión para integrar en t , al considerar $\alpha = \partial w / \partial t$, $d\alpha = \partial^2 w / \partial t^2 dt$, $d\beta = \partial \psi / \partial t dt$ y $\beta = \psi$ para la dirección transversal y $\alpha = \partial u / \partial t$, $d\alpha = \partial^2 u / \partial t^2 dt$, $d\beta = \partial \varphi / \partial t dt$ y $\beta = \varphi$ para la tangencial.

Teorema de Green 1D (Regla de Integración por Partes)

$$\int_{x_1}^{x_2} \alpha \cdot d\beta = (\alpha \cdot \beta)|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \beta \cdot d\alpha$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} E_K(\bar{w}, \bar{u}) - E_K(w, u) dt = \\ & = \frac{(2\xi)}{2} \rho A \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \psi \right) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \psi dt + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi \right) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \varphi dt \right\} dx \end{aligned} \quad (4.36)$$

Como el par $[\psi, \varphi]$ pertenece al espacio de direcciones admisibles \mathcal{H} , las funciones cumplen con las restricciones de la ec. (4.31) y se anulan en los extremos t_1 y t_2 de la trayectoria. Esto conduce finalmente a:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} E_K(\bar{w}, \bar{u}) - E_K(w, u) dt = \\ & = -\frac{(2\xi)}{2} \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \psi + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \varphi \right] dx dt \end{aligned} \quad (4.37)$$

Término de Energía de Deformación por Extensión

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U}_E(\bar{w}, \bar{u}) - \mathcal{U}_E(w, u) dt = \\ & = \frac{1}{2} EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0=0}^{x_1=L_x} \left[\left(\frac{\bar{w}}{r} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \\ & = \frac{1}{2} EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\bar{w}^2}{r^2} + 2 \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \right) - \left(\frac{w^2}{r^2} + 2 \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dx dt \quad (4.38) \\ & = \frac{1}{2} EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{w^2}{r^2} + \frac{2w\xi\psi}{r^2} + \frac{\xi^2\psi^2}{r^2} + \frac{2w}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2w\xi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2\xi\psi}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\xi^2\psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\xi \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{w^2}{r^2} - 2 \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \end{aligned}$$

Simplificando y despreciando los términos de ξ^2

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2\xi)}{2} EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{w\psi}{r^2} + \frac{w}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\psi}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \\
 &= \frac{(2\xi)}{2} EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\underbrace{\left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \psi}_{(i)} + \underbrace{\left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{(ii)} \right] dx dt
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

El término (i) tiene el orden de derivación correcto, pero el término (ii) debe integrarse una vez respecto de x para reducir el orden de derivación de φ :

$$\begin{aligned}
 &\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx \\
 &= \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \varphi \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Finalmente, al reemplazar (4.39) y (4.40) en (4.38)

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U}_E(\bar{w}, \bar{u}) - \mathcal{U}_E(w, u) dt = \\
 &= \frac{(2\xi)}{2} EA \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \psi \right] dx + \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \Big|_{x_0}^{x_1} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \varphi \right] dx \right\} dt
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Término de Energía de Deformación por Flexión

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U}_F(\bar{w}, \bar{u}) - \mathcal{U}_F(w, u) dt = \\
 &= \frac{1}{2} EI_{zz} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0=0}^{x_1=L_x} \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \\
 &= \frac{1}{2} EI_{zz} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dt
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} EI_{zz} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\xi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \xi^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{2 \partial^2 w}{r} \frac{\partial u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\
 &\quad - \frac{2\xi \partial^2 \psi}{r} \frac{\partial u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\xi \partial^2 w}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2\xi^2 \partial^2 \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\xi \partial u}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
 &\quad \left. + \frac{\xi^2}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{2 \partial^2 w}{r} \frac{\partial u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt
 \end{aligned}$$

Simplificando y despreciando los términos de ξ^2

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2\xi)}{2} EI_{zz} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1 \partial^2 \psi}{r} \frac{\partial u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1 \partial^2 w}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1 \partial u}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \\
 &= \frac{(2\xi)}{2} EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}_{(i)} + \frac{1}{r} \underbrace{\left(\frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{(ii)} \right] dx dt \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

El término (i) debe integrarse por partes respecto de x dos veces para reducir el orden de derivación de ψ :

$$\begin{aligned}
 &\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] dx \\
 &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1 \partial^2 u}{r} \frac{\partial u}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] dx \\
 &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_0}^{x_1} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1 \partial^2 u}{r} \frac{\partial u}{\partial x^2} \right) \psi \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1 \partial^3 u}{r} \frac{\partial u}{\partial x^3} \right) \psi \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Por otro lado, el término (ii) debe integrarse por partes respecto de x una vez para reducir el orden de derivación de φ :

$$\begin{aligned}
 &\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx \\
 &= \frac{1}{r} \left(\frac{1 \partial u}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \varphi \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1 \partial^2 u}{r} \frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \varphi \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Luego, al reemplazar (4.44) y (4.45) en (4.43)

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U}_F(\bar{w}, \bar{u}) - \mathcal{U}_F(w, u) dt = \\
 & = \frac{(2\xi)}{2} EI_{zz} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_0}^{x_1} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \psi \Big|_{x_0}^{x_1} \right. \\
 & \quad + \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \psi \right] dx + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \varphi \Big|_{x_0}^{x_1} \\
 & \quad \left. - \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \varphi \right] dx \right\} dt
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Término de Energía de Deformación por Restricciones Elásticas

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U}_V(\bar{w}, \bar{u}) - \mathcal{U}_V(w, u) dt = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -t_o [\bar{w}(0, t)]^2 - s_o [\bar{u}(0, t)]^2 - r_o \left[\frac{\partial \bar{w}(0, t)}{\partial x} \right]^2 + t_o [w(0, t)]^2 \right. \\
 & \quad \left. + s_o [u(0, t)]^2 + r_o \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right]^2 \right\} dt \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -t_o [w(0, t)]^2 + 2\xi w(0, t) \psi(0, t) + \xi^2 \psi(0, t)^2 \right. \\
 & \quad - s_o [u(0, t)]^2 + 2\xi u(0, t) \varphi(0, t) + \xi^2 \varphi(0, t)^2 \\
 & \quad - r_o \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right]^2 + 2\xi \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} \left. \right\} \\
 & \quad + t_o [w(0, t)]^2 + s_o [u(0, t)]^2 + r_o \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right]^2 \Big\} dt
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Simplificando y despreciando los términos de ξ^2 resulta:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U}_V(\bar{w}, \bar{u}) - \mathcal{U}_V(w, u) dt = \\
 & -2\xi \int_{t_1}^{t_2} \left\{ t_o [w(0, t) \psi(0, t)] + s_o [u(0, t) \varphi(0, t)] + r_o \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} \right] \right\} dt
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Término de Trabajo de Presión

Este último término resulta simplemente:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} W(\bar{w}, \bar{u}) - W(w, u) dt = \\
 & = \Delta z \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0=0}^{x_1=L_x} [p(z) \bar{w} - p(z) w] dx dt = \Delta z p(z) \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} [w + \xi \psi - w] dx dt \\
 & = \Delta z \xi \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} [p(z) \psi] dx dt
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

4.2.2.1.2. Ecuaciones Diferenciales y Condiciones de Contorno

El objetivo es hallar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema. Como fue mencionado, esto es posible de realizar a través de la evaluación del principio de Hamilton (4.32). Con la ayuda de las expresiones (4.37), (4.41), (4.46), (4.48) y (4.49) la variación de la acción física $\delta I[\bar{w}, \bar{u}]$ puede expandirse como:

$$\begin{aligned}
\delta I = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\frac{(2\xi)}{2} \rho A \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \psi + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \varphi \right] dx \right. \\
& - \frac{(2\xi)}{2} EA \left[\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \psi \right] dx + \left. \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \right]_{x_0}^{x_1} \right. \\
& - \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \varphi \right] dx \left. - \frac{(2\xi)}{2} EI_{zz} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x_0}^{x_1} \right. \\
& - \left. \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \psi \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \psi \right] dx + \\
& + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \varphi \left. \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \varphi \right] dx \left. \right\} + \\
& + \Delta z \xi \int_{x_0}^{x_1} [p(z) \psi] dx - 2\xi [t_o [w(0, t) \psi(0, t)] + s_o [u(0, t) \varphi(0, t)] \\
& + r_o \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} \right]] dt = 0
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Los términos evaluados en los extremos de la viga resultan:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi \Big|_{x_0}^{x_1} &= \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} \varphi_{x_1} - \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_0} \varphi_{x_0} \\
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_0}^{x_1} &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_1} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_0} \\
\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \psi \Big|_{x_0}^{x_1} &= \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_1} \psi_{x_1} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_0} \psi_{x_0} \\
\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \varphi \Big|_{x_0}^{x_1} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x_1} \varphi_{x_1} - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x_0} \varphi_{x_0}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

con $\psi_{x_i} = \psi(x_i, t)$, $\varphi_{x_i} = \varphi(x_i, t)$ y $\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_i} = \frac{\partial \psi(x_i, t)}{\partial x}$, $i = 0, 1$. Al agrupar los términos multiplicados por las mismas variables asociadas a las direcciones ψ , φ , $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ (destacadas con colores) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\delta I[\bar{w}, \bar{u}] &= 0 \\
\xi \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \left[-\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI_{zz} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) - EA \left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \Delta z p(z) \right] \psi dx \right. \\
& + \left. \int_{x_0}^{x_1} \left[-\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \varphi dx + \right.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[EA \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_o} + \frac{EI_{zz}}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x_o} - s_o u(0, t) \right] \varphi_{x_o} + \\
 & - \left[EA \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} + \frac{EI_{zz}}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x_1} \right] \varphi_{x_1} + \\
 & - \left[EI_{zz} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_o} + t_o w(0, t) \right] \psi_{x_o} + \\
 & \quad + EI_{zz} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_1} \psi_{x_1} + \\
 & + \left[EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_o} - r_o \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} + \\
 & \quad - EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_1} \Big\} = 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, del Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones **(C.16)** puede decirse que para cada dirección admisible, dado que deben cumplir con las condiciones de contorno nulas, si cada término integral es nulo, entonces son nulos los términos entre corchetes. De allí surgen las siguientes **Ecuaciones Diferenciales Gobernantes**

$$\begin{aligned}
 \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_{zz} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + EA \left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \Delta z p(z) &= 0 \\
 \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - EA \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

junto con las siguientes **Condiciones de Contorno Naturales**

$$\left\{ \begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & EA \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_o} + \frac{EI_{zz}}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x_o} - s_o u(0, t) = 0 \\
 \text{(II)} \quad & EA \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} + \frac{EI_{zz}}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x_1} = 0 \\
 \text{(III)} \quad & EI_{zz} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_o} + t_o w(0, t) = 0 \\
 \text{(IV)} \quad & EI_{zz} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_1} = 0 \\
 \text{(V)} \quad & EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_o} - r_o \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \\
 \text{(VI)} \quad & EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} = 0
 \end{aligned} \right. \tag{4.54}$$

Las ecuaciones (4.53) representan un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas para las componentes $w(x, t)$ y $u(x, t)$ del campo de desplazamientos. Su solución describe cómo se deforma el semi-arco de anillo por acción de la presión interna $p(z)$, y que representa una sección de la pared de la tubería. Cabe destacar que, la primera de dichas ecuaciones corresponde a la dirección transversal, y por este motivo, aparece la influencia explícita de la presión. Por el contrario, la segunda ecuación gobierna principalmente la deformación en la dirección tangencial y la influencia de la presión aparece de forma implícita.

Las **condiciones de contorno naturales** (impuestas sobre las variables secundarias) pueden interpretarse como la magnitud que adoptan los esfuerzos normales $N(x)$, de corte $Q(x)$ y el momento flector $M_F(x)$ en los extremos del semi-arco.

Las ecuaciones (I) y (II) del conjunto (4.54) están asociadas al esfuerzo $N(x)$. El término $EA \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ corresponde al esfuerzo normal generado por la extensión de la viga a lo largo de su eje principal, mientras que $\frac{EI_{zz}}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ es el esfuerzo normal por flexión (ambos con unidades de fuerza). De esta manera, la condición (I) indica que el esfuerzo $N(x)$ debe igualar a la fuerza de vínculo generada por el resorte tangencial $s_o u(0, t)$ en el extremo $x = 0$ (o x_o), mientras que, la condición (II) dicta que el extremo $x = L_x$ (o x_1) es un borde libre.

El esfuerzo de corte está determinado por (III) y (IV) si se tiene en cuenta que $EI_{zz} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$ es la fuerza cortante generada por flexión. La primera de estas condiciones indica que el esfuerzo de corte en $x = 0$ debe balancear aquel generado por el vínculo transversal, $t_o w(0, t)$. La segunda impone el borde $x = L_x$ como un extremo libre de corte.

Por último, y en relación al momento flector $EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ (unidades de fuerza \times distancia), la condición (V) iguala este esfuerzo con aquel producido por el resorte de torsión $r_o \frac{\partial w(0,t)}{\partial x}$ en x_o , a su vez que (VI) indica que en x_1 el momento es cero. Cabe aclarar que, este término de flexión es el mismo que se utilizó en la ec. (4.17) y se encuentra relacionado con el esfuerzo de corte $EI_{zz} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$ por una derivación. Estos resultados están en acuerdo con las ecuaciones típicas de una viga tipo Euler-Bernoulli que vinculan la carga distribuida $q(x)$, el esfuerzo de corte $Q(x)$ y el momento flector $M_F(x)$ [5]:

$$\left. \begin{aligned} q(x) &= dQ(x)/dx \\ Q(x) &= dM_F(x)/dx \end{aligned} \right\} q(x) = d^2 M_F(x)/dx^2 \quad (4.55)$$

Por último, debe mencionarse que el problema carece de restricciones geométricas de contorno o condiciones esenciales sobre las variables principales w y u .

4.2.3. Resolución de las Ecuaciones Diferenciales y su relación con el Volumen de Control

Esta sección se centra en la resolución del problema de condiciones de frontera cerrado definido por las ec. (4.53) y (4.54).

Las ecuaciones (4.53) modelan el comportamiento dinámico de la estructura, es decir, con una dependencia explícita de la variable tiempo. Resolver este sistema de ecuaciones es una

tarea compleja que requiere el uso de herramientas numéricas. Sin embargo, este puede simplificarse al considerar que el proceso de fractura ocurre en un estado cuasi-estacionario.

Se distinguen dos variables temporales: el tiempo t asociado a la deformación de cada uno de los anillos, que aparece en las expresiones (4.53) y (4.54), y el tiempo del propio proceso de propagación. Como se explica a continuación, estas dos variables corresponden a un único tiempo que vincula la deformación con la propagación dentro del modelo.

Como se mencionó anteriormente, el estado cuasi-estacionario hace que la configuración deformada que encierra el volumen no cambie en el tiempo a medida que diferentes puntos materiales lo atraviesan. Por este motivo, puede considerarse que las variables $w(x, t)$ y $u(x, t)$ no dependen de t , y que la única variable dependiente es la coordenada x .

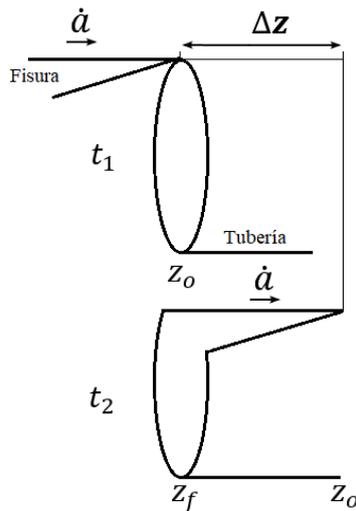
$$\begin{aligned} \text{Componente transversal: } w(x, t) \rightarrow w(x), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ \text{Componente tangencial: } u(x, t) \rightarrow u(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{4.56}$$

De esta manera el problema se vuelve completamente unidimensional y las ecuaciones que lo gobiernan se modifican de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} EI_{zz} \left(\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3 u}{dx^3} \right) + EA \left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) - \Delta z p(z) = 0 \\ EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - EA \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = 0 \end{aligned} \tag{4.57}$$

donde se reemplazan las derivadas parciales $\partial(\cdot)$ por diferenciales totales $d(\cdot)$.

El par de ecuaciones (4.57) representa el caso de deformación estática de una viga. No obstante, se sabe que la fractura no es estática sino dinámica, y que la componente de energía cinética (dependiente del tiempo) es una magnitud relevante. Entonces, esta simplificación trae la desventaja de tener que introducir externamente la componente cinética al balance energético, pues esta no surge de manera natural de las ecuaciones. Este procedimiento puede hacerse porque la fractura ocurre a velocidad constante y esta velocidad puede ser medida experimentalmente. Al imponer el intervalo de tiempo que separa la configuración inicial (no fracturada en t_1) del estado deformado (fracturado en t_2), dado por la velocidad de crecimiento de la grieta, es posible considerar el aporte cinético a la energía. En términos matemáticos, se expresa por la relación (4.58) y se ilustra en la Fig. 4.4.



$$\Delta z = z_f - z_0 = \dot{a} \cdot \Delta t \quad (4.58)$$

Fig. 4.4 Movimiento relativo de la grieta y deformación del anillo.

Se considera que un anillo de sección de tubería no fracturada se encuentra dentro del VC en la posición $z_0 = 0$ en el instante de tiempo t_1 . Al desplazarse la fisura una distancia axial $\Delta a = \Delta z$ a velocidad \dot{a} (y el VC con ella), en un instante de tiempo posterior t_2 el anillo se ubicará en la posición $z_f = \Delta z + z_0$, pero ahora estará deformado, es decir, fisurado. El intervalo de tiempo que separa el estado intacto del fracturado es $\Delta t = t_2 - t_1$.

Entonces, se ha reemplazado el problema completamente dinámico por un sistema de ecuaciones que describen un comportamiento estático, pero donde se impone una velocidad de deformación como parámetro externo, y así una componente cinética. Esta velocidad coincide con la de propagación de la grieta, al hacer uso de la naturaleza cuasi-estacionaria del fenómeno.

Formulación Dinámica \rightarrow Formulación Estática + Imposición de Velocidad

Cómo método de resolución del conjunto (4.57) y (4.54) se utilizó el método directo conocido como método variacional de Ritz.

4.2.3.1. Método Variacional de Ritz

El *Método de Ritz* es una herramienta que permite obtener una solución aproximada a los problemas de condiciones de frontera. Pertenece a la familia de *Métodos Directos* los cuales se basan en buscar una solución que se expresa en función de parámetros ajustables. Estos se determinan al proponer una solución de prueba, reemplazarla dentro del funcional y encontrar su valor extremo o valor estacionario con respecto a estos parámetros. Se denominan métodos directos porque la solución aproximada es obtenida utilizando el mismo principio variacional que se utilizó para obtener las ecuaciones gobernantes.

Las soluciones propuestas adoptan la forma de una combinación lineal finita de **parámetros indeterminados** y **funciones de prueba** elegidas convenientemente. Al representar la solución de un problema continuo como un conjunto finito de funciones se introduce un error. La solución propuesta se aproxima cada vez más a la real a medida que aumenta el número de funciones de prueba linealmente independientes y se asume que existe una convergencia [7].

4.2.3.2. Aplicación del Método

En el Anexo 'D' se describen resumidamente las bases de este método que son tenidas en cuenta en la sección presente.

Partiendo de la forma fuerte, (4.57) y (4.54), se busca encontrar la formulación débil del problema de contorno para poder aplicar el método de resolución de Ritz. Para ello, se multiplican cada una de las ecuaciones diferenciales por las variaciones en la dirección transversal $\delta w(x)$ y tangencial $\delta u(x)$ respectivamente. Debe tenerse en cuenta que el par $[\delta w, \delta u]$ pertenece al espacio de direcciones admisibles \mathcal{H} y son funciones suaves y bien comportadas en el dominio $[0, L_x]$. Luego, debe debilitarse la continuidad (o diferenciabilidad) requerida para la función solución aproximada mediante el intercambio del orden de diferenciación entre $w(x)$ y $\delta w(x)$, y entre $u(x)$ y $\delta u(x)$. Es decir, mediante el Teorema de Green, debe lograrse que los pares de funciones $[w, \delta w]$ y $[u, \delta u]$ estén presentes en el mismo orden de diferenciación. Por último, debe utilizarse la información provista por las expresiones (4.54) para que la forma débil contenga explícitamente las condiciones de contorno naturales.

Dirección Transversal

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[EI_{zz} \left(\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3 u}{dx^3} \right) + EA \left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) - \Delta z p(z) \right] \delta w dx = 0 \quad (4.59)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[EI_{zz} \left(\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3 u}{dx^3} \right) \delta w + EA \left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w - \Delta z p(z) \delta w \right] dx = 0$$

$$\underbrace{EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3 u}{dx^3} \right) \delta w dx}_{(i)} + \underbrace{EA \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w dx}_{(ii)} - \underbrace{\Delta z \int_{x_0}^{x_1} p(z) \delta w dx}_{(iii)} = 0$$

Integrando por partes la expresión (i) dos veces respecto de x :

$$\begin{aligned} & EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3 u}{dx^3} \right) \delta w dx \\ &= EI_{zz} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta w \Big|_{x_0}^{x_1} - EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta w' dx \\ &= EI_{zz} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta w \Big|_{x_0}^{x_1} - EI_{zz} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w' \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &\quad + EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w'' dx \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde $\delta w' = \frac{d(\delta w)}{dx}$ y $\delta w'' = \frac{d^2(\delta w)}{dx^2}$. Al desarrollar y utilizar las condiciones de contorno (III)-(VI):

$$\begin{aligned} &= \underbrace{EI_{zz} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x_1}}_{=0} \delta w_{x_1} - \underbrace{EI_{zz} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x_0}}_{=-t_0 w(0,t)} \delta w_{x_0} \\ &- \underbrace{EI_{zz} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right)_{x_1}}_{=0} \delta w'_{x_1} + \underbrace{EI_{zz} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right)_{x_0}}_{=r_0 \frac{dw(0)}{dx}} \delta w'_{x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w'' dx \\
 = & EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w'' dx + t_o w(0) \delta w_{x_0} + r_o \frac{\partial w(0)}{\partial x} \delta w'_{x_0}
 \end{aligned}$$

Y reemplazando (4.60) en (4.59) resulta:

$$\begin{aligned}
 EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w'' dx + EA \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w dx + t_o w(0) \delta w_{x_0} \\
 + r_o \frac{dw(0)}{dx} \delta w'_{x_0} = \Delta z \int_{x_0}^{x_1} p(z) \delta w dx
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Dirección Tangencial

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_1} \left[EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - EA \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right] \delta u dx = 0 \\
 \int_{x_0}^{x_1} \left[EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta u - EA \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta u \right] dx = 0 \\
 \underbrace{EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta u dx}_{(i)} - \underbrace{EA \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta u dx}_{(ii)} = 0
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Integrando por partes la expresión (i) una vez respecto de x :

$$\begin{aligned}
 EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{r} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta u dx \\
 = EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta u \Big|_{x_0}^{x_1} - EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta u' dx
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Haciendo lo mismo para la expresión (ii):

$$\begin{aligned}
 -EA \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \delta u dx \\
 = -EA \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right) \delta u \Big|_{x_0}^{x_1} + EA \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right) \delta u' dx
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Luego, al agrupar las ec. (4.63) y (4.64), desarrollar cada uno de los términos y aplicar las condiciones de contorno (I) y (II), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 = EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta u \Big|_{x_0}^{x_1} - EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta u' dx \\
 - EA \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right) \delta u \Big|_{x_0}^{x_1} + EA \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right) \delta u' dx
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
 &= EA \int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right) \delta u' dx - EI_{zz} \int_{x_o}^{x_1} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta u' dx \\
 &\quad + \underbrace{\left[EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right)_{x_1} - EA \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right)_{x_1} \right]}_{=0} \delta u_{x_1} \\
 &\quad + \underbrace{\left[EA \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right)_{x_o} - EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right)_{x_o} \right]}_{=s_o u(0)} \delta u_{x_o}
 \end{aligned}$$

Lo que resulta en:

$$EA \int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right) \delta u' dx - EI_{zz} \int_{x_o}^{x_1} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta u' dx + s_o u(0) \delta u_{x_o} = 0 \quad (4.66)$$

Formulación Débil

Finalmente, de (4.61) y (4.66):

$$\begin{aligned}
 EI_{zz} \int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w'' dx + EA \int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{w}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \delta w dx + t_o w(0) \delta w_{x_o} \\
 + r_o \frac{dw(0)}{dx} \delta w'_{x_o} = \Delta z \int_{x_o}^{x_1} p(z) \delta w dx \quad (4.67) \\
 \int_{x_o}^{x_1} \left[EA \left(\frac{w}{r} + \frac{du}{dx} \right) - EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dx} \right) \right] \delta u' dx + s_o u(0) \delta u_{x_o} = 0
 \end{aligned}$$

Esta forma débil del problema de frontera está compuesta por dos tipos de expresiones. Aquellas que contienen ambos tipos de funciones, los pares $[w(x), \delta w(x)]$ y $[u(x), \delta u(x)]$ y sus respectivas derivadas, constituyen la **forma bilineal** \mathcal{B} . Mientras que, aquellas que contienen solo las funciones de variación δw y δu conforman la **forma lineal** l . Ambos tipos de expresiones reformulan el problema variacional como:

$$\mathcal{B}(w, u ; \delta w, \delta u) = l(\delta w, \delta u) \quad (4.68)$$

Con el objetivo de aproximar las funciones $w(x)$ y $u(x)$ se escoge el conjunto de funciones polinómicas $\{\phi_i\}_{i=0}^N = \{x^i\}$, motivado principalmente por la simpleza de trabajar con ellas numéricamente. Esta familia de polinomios algebraicos $\{1, x, x^2, \dots\}$ constituye una base completa del espacio vectorial de funciones admisibles \mathcal{C} (que actúa como espacio de Hilbert), al incluir todos los términos desde el orden 0 (o x^0), hasta el término de mayor orden deseado x^N . En otras palabras, es un conjunto admisible de funciones coordenadas. Además, cumplen con los requerimientos de continuidad y diferenciabilidad (D.12), y satisfacen las condiciones de contorno esenciales homogéneas. Esto último es importante porque, como se dijo anteriormente, el problema carece de restricciones geométricas explícitas.

Al expandir $w(x)$ y $u(x)$ en la base polinómica, la aproximación de las soluciones resulta:

$$\begin{aligned}
 w(x) \approx w_N(x) &= \sum_{k=0}^N \alpha_k \phi_k(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_N x^N \\
 u(x) \approx u_N(x) &= \sum_{k=0}^N \beta_k \psi_k(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_N x^N
 \end{aligned}
 \tag{4.69}$$

donde $\{\phi_k\}_{k=0}^N = \{x^k\}$, $\{\psi_k\}_{k=0}^N = \{x^k\}$ son las funciones coordenadas o auxiliares para la dirección transversal y tangencial respectivamente, y $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ sus coeficientes indeterminados.

Las magnitudes $\delta w(x)$ y $\delta u(x)$ que aparecen en la formulación débil actúan como funciones de peso. Son introducidas para obtener tantas relaciones independientes para los coeficientes $\{\alpha_k\}$ y $\{\beta_k\}$ como se deseen. Esto se consigue seleccionando $N + 1$ funciones independientes para $\delta w(x)$ y otras $N + 1$ funciones independientes para $\delta u(x)$. Así, la formulación integral (4.67) puede ser utilizada para obtener las ecuaciones algebraicas necesarias que determinan los coeficientes del método.

En el procedimiento propuesto por Ritz, se utilizan directamente las funciones de prueba o coordenadas como funciones de peso. Es decir:

$$\begin{aligned}
 \delta w(x) &= \phi_i(x) \\
 \delta u(x) &= \psi_i(x)
 \end{aligned}
 \tag{4.70}$$

para obtener la ecuación i -ésima de $\{\alpha_k\}$ y i -ésima de $\{\beta_k\}$ del sistema de $2N + 2$ ecuaciones lineales. Matemáticamente esto puede interpretarse como el procedimiento de proyectar las funciones $w_N(x)$ y $u_N(x)$ sobre cada una de las bases coordenadas $\phi_i(x)$ y $\psi_i(x)$ para obtener los coeficientes de la combinación lineal. En este contexto, proyectar implica realizar el producto interno, definido en el espacio de Hilbert \mathcal{C} de funciones admisibles, entre los pares $w_N - \phi_i$ y $u_N - \psi_i$.

Se reemplazan ahora las expresiones (4.69) y (4.70) en la formulación débil.

Dirección Transversal

$$\begin{aligned}
 &EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^2 \phi_k}{dx^2} - \frac{1}{r} \sum_{k=0}^N \beta_k \frac{d\psi_k}{dx} \right] \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx + \\
 &+ EA \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^N \alpha_k \phi_k + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^N \beta_k \frac{d\psi_k}{dx} \right] \phi_i dx + t_o \left[\sum_{k=0}^N \alpha_k \phi_k(x_o) \right] \phi_i(x_o) \\
 &+ r_o \left[\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d\phi_k}{dx} \Big|_{x_o} \right] \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x_o} = \Delta z \int_{x_0}^{x_1} p(z) \phi_i dx
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

Al operar algebraicamente sobre la expresión anterior, y agrupar aquellos términos que multiplican los coeficientes $\{\alpha_k\}$ y $\{\beta_k\}$ teniendo en cuenta estos no dependen de x :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \left[EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2 \phi_k}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx + EA \int_{x_0}^{x_1} \phi_k \phi_i dx + t_o \phi_k(x_o) \phi_i(x_o) \right. \\ \left. + r_o \frac{d\phi_k}{dx} \Big|_{x_0} \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x_0} \right] \alpha_k \\ + \sum_{k=0}^N \left[-EI_{zz} \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\psi_k}{dx} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx + EA \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\psi_k}{dx} \phi_i dx \right] \beta_k \\ = \Delta z \int_{x_0}^{x_1} p(z) \phi_i dx \end{aligned} \quad (4.72)$$

Y en forma matricial queda:

$$\sum_{k=0}^N A_{ik} \alpha_k + \sum_{k=0}^N B_{ik} \beta_k = m_i \quad (4.73)$$

donde se definen las matrices $[A]$ y $[B]$, y el vector de términos independientes $\{m\}$.

$$\begin{aligned} A_{ik} &= EI_{zz} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2 \phi_k}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) dx + EA \int_{x_0}^{x_1} (\phi_k \phi_i) dx + t_o [\phi_k(x_o) \phi_i(x_o)] \\ &\quad + r_o \left[\frac{d\phi_k}{dx} \Big|_{x_0} \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x_0} \right] \\ B_{ik} &= -EI_{zz} \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d\psi_k}{dx} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) dx + EA \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d\psi_k}{dx} \phi_i \right) dx \\ m_i &= \Delta z \int_{x_0}^{x_1} p(z) \phi_i dx \end{aligned} \quad (4.74)$$

Dirección Tangencial

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left[EA \left(\frac{1}{r} \sum_{k=0}^N \alpha_k \phi_k + \sum_{k=0}^N \beta_k \frac{d\psi_k}{dx} \right) - EI_{zz} \frac{1}{r} \left(\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^2 \phi_k}{dx^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r} \sum_{k=0}^N \beta_k \frac{d\psi_k}{dx} \right) \right] \frac{d\psi_i}{dx} dx + s_o \left[\sum_{k=0}^N \beta_k \psi_k(x_o) \right] \psi_i(x_o) = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Al seguir el mismo procedimiento que para la dirección transversal, se obtiene:

$$\sum_{k=0}^N \left[EA \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x_1} \phi_k \frac{d\psi_i}{dx} dx - EI_{zz} \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2 \phi_k}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} dx \right] \alpha_k \quad (4.76)$$

$$+ \sum_{k=0}^N \left[EA \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\psi_k}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} dx + EI_{zz} \frac{1}{r^2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\psi_k}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} dx + s_o \psi_k(x_o) \psi_i(x_o) \right] \beta_k = 0$$

La forma matricial resulta:

$$\sum_{k=0}^N C_{ik} \alpha_k + \sum_{k=0}^N D_{ik} \beta_k = n_i \quad (4.77)$$

donde se definen las matrices $[C]$ y $[D]$, y el vector de términos independientes $\{n\}$.

$$C_{ik} = EA \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x_1} \left(\phi_k \frac{d\psi_i}{dx} \right) dx - EI_{zz} \frac{1}{r} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2 \phi_k}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right) dx$$

$$D_{ik} = EA \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d\psi_k}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} \right) dx + EI_{zz} \frac{1}{r^2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d\psi_k}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} \right) dx + s_o [\psi_k(x_o) \psi_i(x_o)] \quad (4.78)$$

$$n_i = 0$$

Sistema de Ecuaciones Lineales

Las ecuaciones (4.73) y (4.77) se pueden expresar de manera más compacta como se muestra a continuación.

$$\sum_{k=0}^N A_{ik} \alpha_k + \sum_{k=0}^N B_{ik} \beta_k = m_i \rightarrow [A] \cdot \{\alpha\} + [B] \cdot \{\beta\} = \{m\}$$

$$\sum_{k=0}^N C_{ik} \alpha_k + \sum_{k=0}^N D_{ik} \beta_k = n_i \rightarrow [C] \cdot \{\alpha\} + [D] \cdot \{\beta\} = \{n\} \quad (4.79)$$

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{\alpha\} \\ \{\beta\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{m\} \\ \{n\} \end{bmatrix} \rightarrow [K] \cdot \{c\} = \{f\}$$

Al expandir $[K] \cdot \{c\} = \{f\}$ resulta:

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0N} & B_{00} & B_{01} & \dots & B_{0N} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1N} & B_{10} & B_{11} & \dots & B_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N0} & A_{N1} & \dots & A_{NN} & B_{N0} & B_{N1} & \dots & B_{NN} \\ C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0N} & D_{00} & D_{01} & \dots & D_{0N} \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1N} & D_{10} & D_{11} & \dots & D_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N0} & C_{N1} & \dots & C_{NN} & D_{N0} & D_{N1} & \dots & D_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_N \\ n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

La expresión **(4.80)** constituye el sistema de ecuaciones lineales (SEL) para las $2N + 2$ incógnitas, los $N + 1 \{\alpha_k\}$ y los $N + 1 \{\beta_k\}$ (con $k = 0, 1, \dots, N$) que permiten construir las aproximaciones a las componentes del campo de desplazamientos de la viga. El SEL vuelve a reformular el problema variacional como:

$$\mathcal{B}(\phi_k, \psi_k; \phi_i, \psi_i) = l(\phi_i, \psi_i) \quad \text{con } k, i = 0, 1, \dots, N \quad (4.81)$$

donde la forma bilineal resulta directamente en los coeficientes de la matriz $[K]$ y la forma lineal en el vector columna de términos independientes $\{f\}$. Cabe mencionar que, $[K]$ es una matriz simétrica ($[K] = [K]^T$), la cual está compuesta por las sub-matrices $[A]$, $[B]$, $[C]$ y $[D]$. Estas sub-matrices contienen términos *transversales puros*, *transversales-tangenciales*, *tangenciales-transversales*, y *tangenciales puros* respectivamente.

4.3. Implementación Numérica

Para simular el proceso de fractura RCP se desarrolló un algoritmo numérico mediante la herramienta Maple Software®. En el Apéndice “Modelo Inicial” se muestra una transcripción detallada del mismo. A continuación, se describe su estructura general.

El código desarrollado se basa en hallar los campos de desplazamientos de cada uno de los anillos de ancho Δz que componen la región de la tubería encapsulada por el volumen de control. A cada anillo le corresponde una determinada magnitud de presión interna, que depende únicamente de su posición axial. El valor de presión definido por **(4.5)** provoca una sollicitación diferente, y por lo tanto una deformación diferente en cada una de estas porciones de tubería. Las componentes transversal y tangencial del campo se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones lineales representado en **(4.79)**.

En la resolución, tanto la matriz de coeficientes como el vector de términos independientes se definen de manera genérica y como funciones de la variable independiente z . Es decir, no se especifican para ningún anillo en particular, sino que, se definen de manera genérica. Así, los coeficientes que permiten construir las componentes w y u también se hallan como funciones de z , ec. **(4.82)**. Esto trae la ventaja de trabajar con tan solo dos funciones.

$$\begin{aligned} w(x, z) \approx w_N(x, z) &= \sum_{k=0}^N \alpha_k(z) \cdot \phi_k(x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k(z) \cdot x^k \\ u(x, z) \approx u_N(x, z) &= \sum_{k=0}^N \beta_k(z) \cdot \psi_k(x) = \sum_{k=0}^N \beta_k(z) \cdot x^k \end{aligned} \quad (4.82)$$

Si bien w y u dependen explícitamente de z y parecería que se tratan de funciones continuas, en realidad son funciones discretas. Es decir, tienen validez sólo en los puntos específicos de la longitud del volumen de control que corresponden a los anillos. Para hallar el campo de desplazamientos del anillo j –ésimo basta con reemplazar la variable z de **(4.82)** por la posición z_j que este ocupa. Esto es equivalente a pensar que el sistema de ecuaciones genérico se resuelve de manera local para cada anillo en particular donde z es fijo y la presión es únicamente un número.

Una vez resuelto el sistema, las expresiones funcionales de w y u permiten calcular la contribución energética de cada sección a la energía total contenida en el volumen de

control. Esto se realiza mediante las ecuaciones (4.11), (4.18-22), (4.24) y (4.25). Debe tenerse en cuenta que, dada la simetría del problema se resuelve la mitad de cada anillo. Por lo tanto, la energía de cada semi-anillo se multiplica por dos antes de ser sumada al total de energía. Por último, se realiza el balance energético (2.23) dentro del volumen de control para hallar el valor de la fuerza impulsora \mathcal{G} .

El algoritmo puede esquematizarse de la siguiente manera:

- **Definición del número de polinomios de aproximación N .**
- **Datos del Problema**
 - **Dimensiones de la Viga:** SDR , D , Δz , h , D^* , R , L_x , I_{zz} y A .
 - **Propiedades del Material:** E_D y ρ .
 - **Módulos de Flexión y Extensión:** $M_e = E_D A$ y $M_f = E_D I_{zz}$.
 - **Presión Interna:** p_o , p_t y $p(z)$ como función.
- **Constante de Rigidez de Vínculos:** t_o , s_o y r_o (debe considerarse que, como en el extremo $x = 0$ tanto los desplazamientos transversales y tangenciales como la rotación están restringidas, la magnitud de estos vínculos debe ser ∞ o un número muy grande).
- **Cálculo de Funciones Coordenadas:** subrutina que arma las funciones coordenadas polinómicas $\{1, x, x^2, \dots\}$ para cada dirección como vectores.
- **Forma Bilineal:** construcción de la matriz $[K]$ como matriz compuesta por $[A]$, $[B]$, $[C]$ y $[D]$ de (4.74) y (4.78).
- **Forma Lineal:** construcción del vector de términos independientes $\{f\}$, compuesto por $\{m\}$ y $\{n\}$ de (4.74) y (4.78).
- **Resolución del Sistema $[K] \cdot \{c\} = \{f\}$:** resolución del SEL por el método de factorización 'LU' y construcción de las funciones de aproximación $w_N(x, z)$ y $u_N(x, z)$.
- **Post-procesamiento**
 - **Cálculo de las Energías:** cálculo de la energía total de cada anillo y composición de la energía total. Cálculo de \mathcal{G} por balance energético.
 - **Gráfica de Funciones:** gráfica de las componentes de desplazamientos y geometría del anillo deformado en coordenadas polares (para un valor de z determinado). Y, gráfica de la evolución de cada una de las energías, tanto en valor puntual como valor acumulado, en función de la coordenada axial.

REFERENCIAS: CAPÍTULO (4)

- [1] C. Roxana Miranda-Mendoza, M. Ernesto Gutiérrez-Rivera, and L. David Celaya-García, “Análisis de la viga de Timoshenko utilizando el Método del Elemento Finito,” 2019.
- [2] F. Abbassian and C. R. Calladine, “On the deformation of the pipe wall during propagation of a ductile crack in a high-pressure gas pipeline,” *J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME*, vol. 111, no. 1, pp. 47–57, 1989, doi: 10.1115/1.3265639.
- [3] J. R. Barber, *Solid Mechanics and its Applications - Elasticity*, Second Edi. Department of Mechanical Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, U.S.A.: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [4] J. Massa, J. Giro, and A. Giudici, *Compendio de Cálculo Estructural II*. FCEFyN - UNC, 2015.
- [5] M. D. Chapetti, *Mecánica de Materiales - Teorías de Elasticidad, Plasticidad y Mecánica de Fractura*, Tercera Ed. La Plata - Argentina: Ediciones Al Margen, 2015.
- [6] R. O. Grossi and A. Aranda, “Formulación variacional de problemas de contorno para vigas Timoshenko,” *Rev. Int. métodos numéricos para cálculo y diseño en Ing.*, vol. 9, no. 3, pp. 313-324–324, 1993.
- [7] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, College Station, Texas: John Wiley & Sons, INC.

CAPÍTULO N° V

AJUSTE Y ANÁLISIS DEL MODELO

5. AJUSTE Y ANÁLISIS DEL MODELO

5.1. Verificación de la Implementación del Método de Ritz

Para asegurar la correcta implementación del método numérico, se escogió un problema de deformación de vigas de eje curvo con soluciones analíticas conocidas, y se contrastaron los resultados obtenidos numéricamente.

5.1.1. Solución Analítica

C. W. Lim et. al. hallaron un conjunto de soluciones analíticas del campo de deformación de una viga curva tipo Euler-Bernoulli sometida a una carga distribuida [1]. Estas soluciones se encuentran parametrizadas en función de constantes indeterminadas C_i^E ($i = 1 \dots 6$), las cuales dependen de las condiciones de apoyo (extremos libres, empotrados o de libre rotación). La Fig. 5.1 representa el sistema mecánico de referencia: una viga de espesor h , momento de inercia I , radio de curvatura R y compuesta de un material elástico de módulo E . La carga distribuida es $p(x) = q(\theta)$, y $dx = Rd\theta$ la coordenada angular.

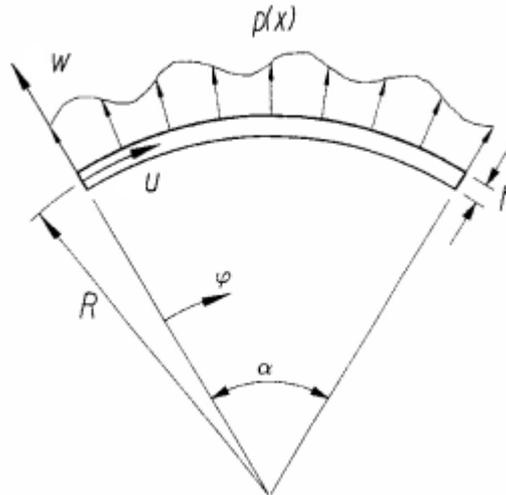


Fig. 5.1 Geometría de la viga curva. [1]

Las soluciones generales para los esfuerzos normales N^E , de corte Q^E y el momento flector M^E son:

$$\begin{aligned}
 N^E &= C_1^E \sin \theta + C_2^E \cos \theta + Rf_1[q(\theta)] \\
 Q^E &= -C_1^E \cos \theta + C_2^E \sin \theta - Rf_1'[q(\theta)] \\
 \frac{M^E}{R} &= -C_1^E \sin \theta - C_2^E \cos \theta - Rf_1[q(\theta)] + C_3^E
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

donde $f_1[q(\theta)]$ es la integral particular de la ecuación diferencial de segundo orden $d^2(\cdot)/d\theta^2 + (\cdot) = q(\theta)$, y $f_1'[q(\theta)]$ su primera derivada respecto a θ . En el caso de una viga sometida hidrostáticamente a una carga uniforme se reduce a $f_1[q(\theta)] = q(\theta)$, y $f_1'[q(\theta)] = 0$.

La componente transversal w^E y tangencial u^E del campo de desplazamiento adoptan la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 w^E &= C_4^E \sin \theta + C_5^E \cos \theta - \frac{R^3}{EI} \left(N^E + \frac{M^E}{R} \right) \\
 &+ \frac{R}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) \{ \theta Q^E + \theta R f_1'[q(\theta)] + 2R f_2[q(\theta)] \} \\
 u^E &= C_4^E \cos \theta - C_5^E \sin \theta + C_6^E + \frac{\theta R}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) N^E + \frac{\theta R^3}{EI} \left(N^E + \frac{M^E}{R} \right) \quad (5.2) \\
 &+ \frac{R}{2EA} \left(1 - \frac{R^2}{\sqrt{I/A}} \right) \{ Q^E + R f_1'[q(\theta)] \} + \frac{R^2}{EA} \int f_1[q(\theta)] d\theta \\
 &- \frac{R^2}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) \left\{ \theta f_1[q(\theta)] + 2 \int f_2[q(\theta)] d\theta \right\}
 \end{aligned}$$

donde $f_2[q(\theta)]$ es la integral particular de la ecuación diferencial de segundo orden $d^2(\cdot)/d\theta^2 + (\cdot) = f_1[q(\theta)]$. En el caso de una viga sometida hidrostáticamente a una carga uniforme se reduce a $f_2[q(\theta)] = f_1[q(\theta)] = q(\theta)$ y además $\int f_1[q(\theta)] d\theta = \int f_2[q(\theta)] d\theta = \theta q(\theta)$.

En un extremo empotrado se cumplen las condiciones (5.3), mientras que en un extremo libre lo hacen las relaciones (5.4).

$$\text{Extremo empotrado: } \begin{cases} u_o^E = 0 \\ w_o^E = 0 \\ \frac{dw_o^E}{dx} = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\text{Extremo libre: } \begin{cases} N^E = 0 \\ Q^E = 0 \\ \frac{M^E}{R} + N^E = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Se buscan las constantes C_i^E , los esfuerzos N^E , Q^E y M^E , y las componentes w^E y u^E que corresponden a una viga curva formada por un semiarco circular de apertura angular $\alpha = \pi$, con un extremo empotrado en $\theta = 0$ y libre en $\theta = \pi$, y sujeta a una carga $q(\theta) = q$ constante. De las condiciones de borde, el cálculo de las constantes C_i^E ($i = 1 \dots 6$) lleva a:

$$\begin{aligned}
 C_1^E &= C_3^E = C_4^E = C_6^E = 0 \\
 C_2^E &= Rq(\theta) \\
 C_5^E &= -\frac{R}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) \{2Rq(\theta)\}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Al introducir las constantes (5.5) en las expresiones de los esfuerzos (5.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 N^E &= Rq[1 + \cos \theta] \\
 Q^E &= Rq \sin \theta \\
 M^E &= -R^2q[1 + \cos \theta]
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Y, al reemplazar esto en las expresiones (5.2) de las componentes del desplazamiento resultan las expresiones analíticas buscadas.

Soluciones analíticas:

$$\begin{aligned}
 w^E &= \left\{ -\frac{R}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) [2Rq] \right\} \cos \theta \\
 &+ \frac{R}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) \{ \theta Rq \sin \theta + 2Rq \} \\
 u^E &= \left\{ \frac{R}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) [2Rq] \right\} \sin \theta + \frac{\theta R}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) Rq[1 + \cos \theta] \\
 &+ \frac{R}{2EA} \left(1 - \frac{R^2}{\sqrt{I/A}} \right) Rq \sin \theta + \frac{\theta R^2}{EA} q - \frac{R^2}{2EA} \left(1 + \frac{R^2}{[\sqrt{I/A}]^2} \right) (3\theta q)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.1.2. Comparación con el Método de Ritz

Se utilizó el algoritmo implementado en Maple Software para hallar la configuración deformada de la viga curva descrita en la sección anterior para poder verificar los resultados así obtenidos. El problema se resolvió con los siguientes parámetros genéricos:

Tabla 5.1 Parámetros del modelo.

| PARÁMETRO | | Valor | Unidades |
|-----------|------------|----------------------|--------------------|
| Geometría | SDR | 11 | - |
| | D | 160 | mm |
| | Δz | 1 | mm |
| | h | 16 | mm |
| | R | 72 | mm |
| Material | E_D | 2500 | MPa |
| | ρ | 940×10^{-9} | kg/mm ³ |

| | | | |
|--------------------|-------|--------------------|---------|
| Vínculos Elásticos | t_o | 1×10^{30} | N/mm |
| | s_o | 1×10^{30} | N/mm |
| | r_o | 1×10^{30} | N/rad |

Los valores de 1×10^{30} de las constantes de rigidez generan un empotramiento en $x = 0$ al restringirse los desplazamientos transversales, tangenciales, así como también la rotación.

Si se aproximan las componentes $w(\theta)$ y $u(\theta)$ como una combinación lineal de funciones coordenadas polinómicas hasta grado 4, es decir $N = 5$, la resolución del SEL (4.79) conduce al siguiente resultado.

Soluciones del Método Variacional de Ritz:

$$w_N(\theta) = 8.1335 \times 10^{-31} + 2.0039 \times 10^{-27}(R \cdot \theta) + 0.0014 (R \cdot \theta)^2 - 5.8632 \times 10^{-6}(R \cdot \theta)^3 + 2.7665 \times 10^{-9}(R \cdot \theta)^4 \quad (5.8)$$

$$u_N(\theta) = 0.0023 (R \cdot \theta) - 0.0001 (R \cdot \theta)^2 - 5.7848 \times 10^{-6}(R \cdot \theta)^3 + 1.5947 \times 10^{-8}(R \cdot \theta)^4$$

El valor $N \geq 5$ garantiza que w_N y u_N cumplan con las restricciones de derivabilidad impuestas por la ecuación diferencial (4.57) y su formulación débil sobre el conjunto de soluciones posibles.

Las Fig. 5.2 y 5.3 comparan el resultado del cálculo de variaciones (5.8) con la solución analítica (5.7) de este caso particular.

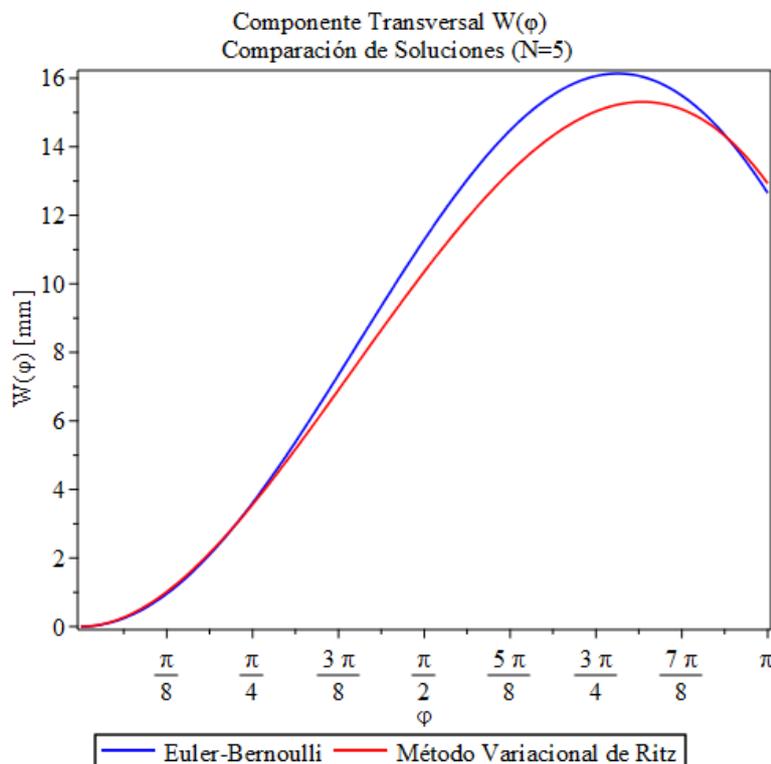


Fig. 5.2 Comparación de solución, componente transversal w ($N=5$).

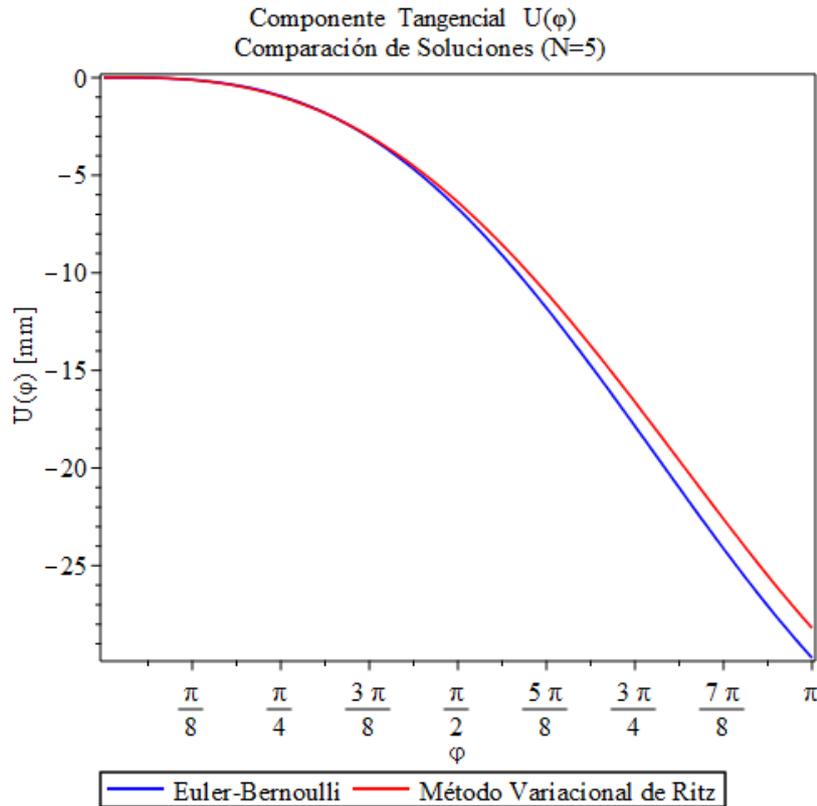


Fig. 5.3 Comparación de solución, componente tangencial u ($N=5$).

La solución provista por el método de Ritz se asemeja a la forma funcional exacta, pero la reproduce con limitada exactitud. La diferencia entre ambos resultados es despreciable para valores pequeños de la coordenada θ cercanos al extremo empotrado $\theta = 0$, pero se incrementa a medida que la deformación crece hacia el extremo libre $\theta = \pi$. Este resultado indica que la implementación es correcta, que el algoritmo puede reproducir la configuración deformada de la viga sometida a una carga distribuida constante, pero con un error apreciable para $N = 5$.

En la Fig. 5.5 se muestra lo que sería una sección transversal de tubería representada por la viga, para una mejor visualización del resultado. En ella se observa la sección en su estado inicial, así como también en su configuración deformada. La posición de cada uno de los puntos materiales del sistema en el estado deformado fue obtenida construyendo el vector desplazamiento \underline{U} con sus componentes w y u , y sumando este resultado al vector posición del sistema sin deformar $\underline{\chi}_0$.

$$\underline{\chi} = \underline{\chi}_0 + \underline{U} \tag{5.9}$$

En coordenadas cartesianas $\{x_1, x_2\}$, $\underline{\chi} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + x_2 \cdot \underline{e}_2$ esto resulta:

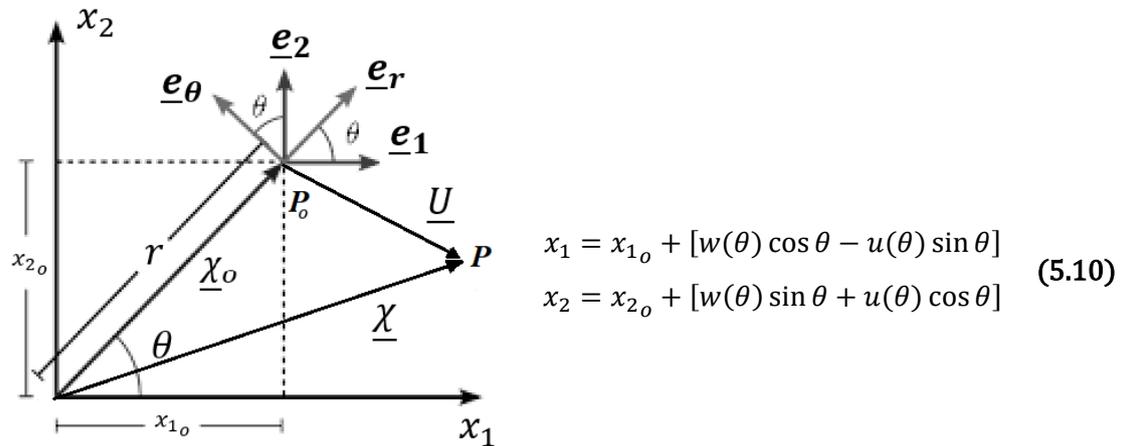


Fig. 5.4 Relación entre puntos materiales de la configuración no deformada P_o y deformada P .

SECCIÓN DE TUBO DEFORMADA - Solución Analítica Euler-Bernoulli

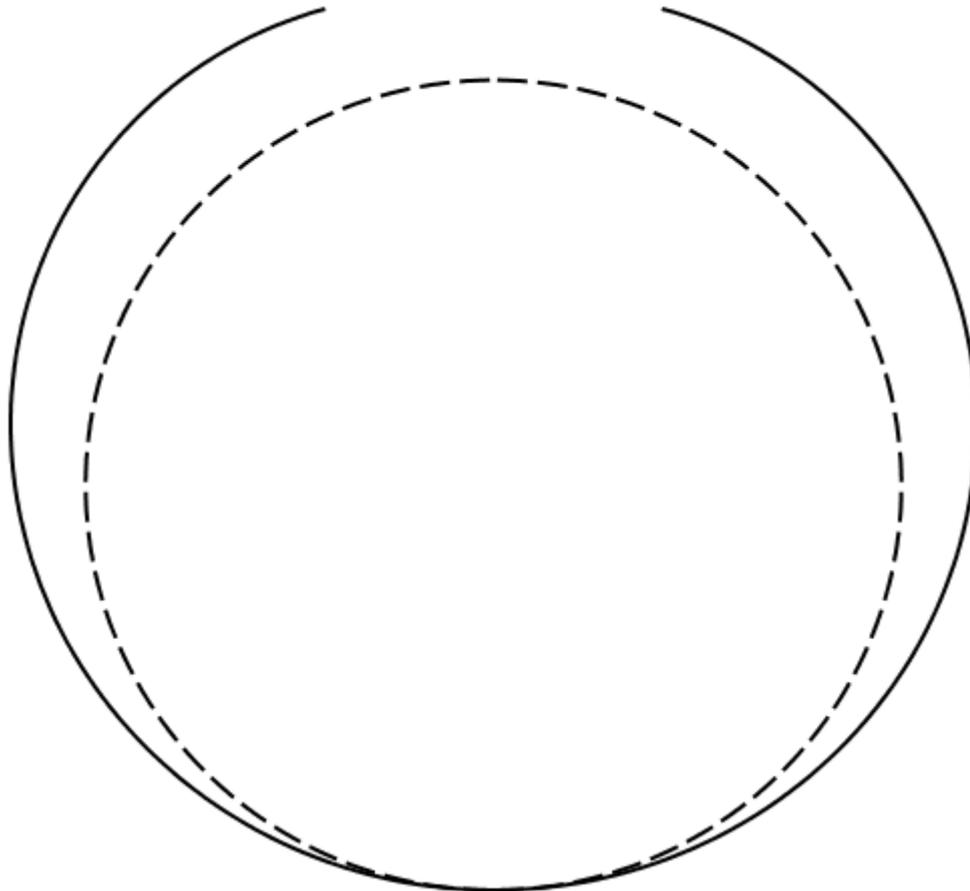


Fig. 5.5 Representación de la sección de tubo intacta [---] y deformada [—].

Al incrementar el valor de N puede mejorarse la exactitud del resultado tanto como se desee. Si se construyen las combinaciones lineales (4.69) con un mayor número de funciones auxiliares, las aproximaciones w_N y u_N convergen a la solución exacta según lo

indican las propiedades del método variacional directo **(D.5)**. Este comportamiento se observa en las *Fig. 5.6-9*, en donde se muestran sucesivas aproximaciones calculadas con diferentes valores de N . Una particularidad del método es que el aumento de N no produce alteración en los coeficientes $\{\alpha\}$ y $\{\beta\}$ computados anteriormente. Esto es así porque, cuando se mejora la aproximación, simplemente se agregan nuevos términos que no modifican los calculados previamente.

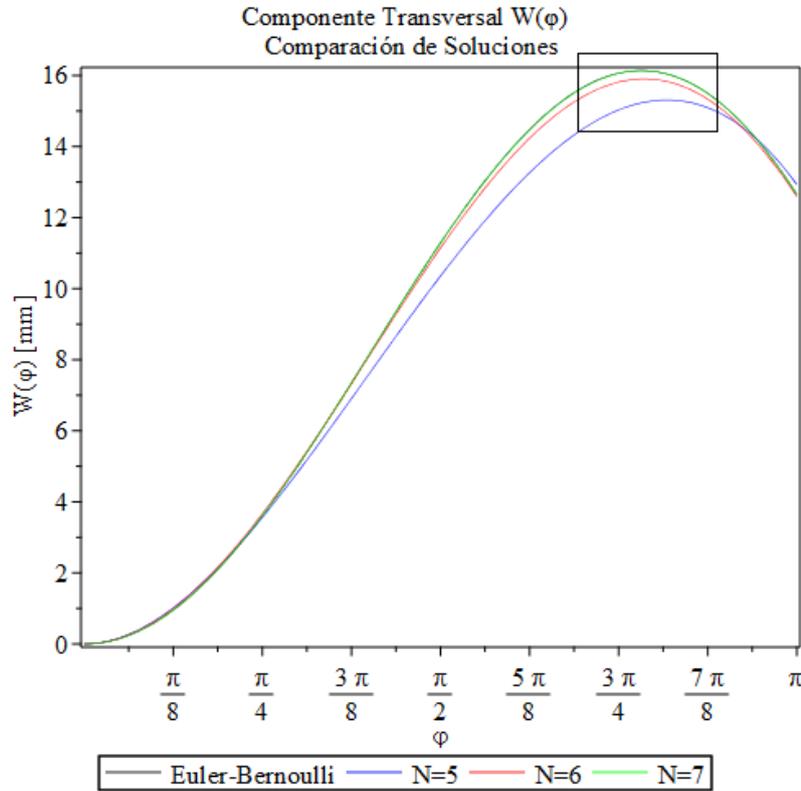


Fig. 5.6 Comparación de soluciones, componente transversal w (diferentes N).

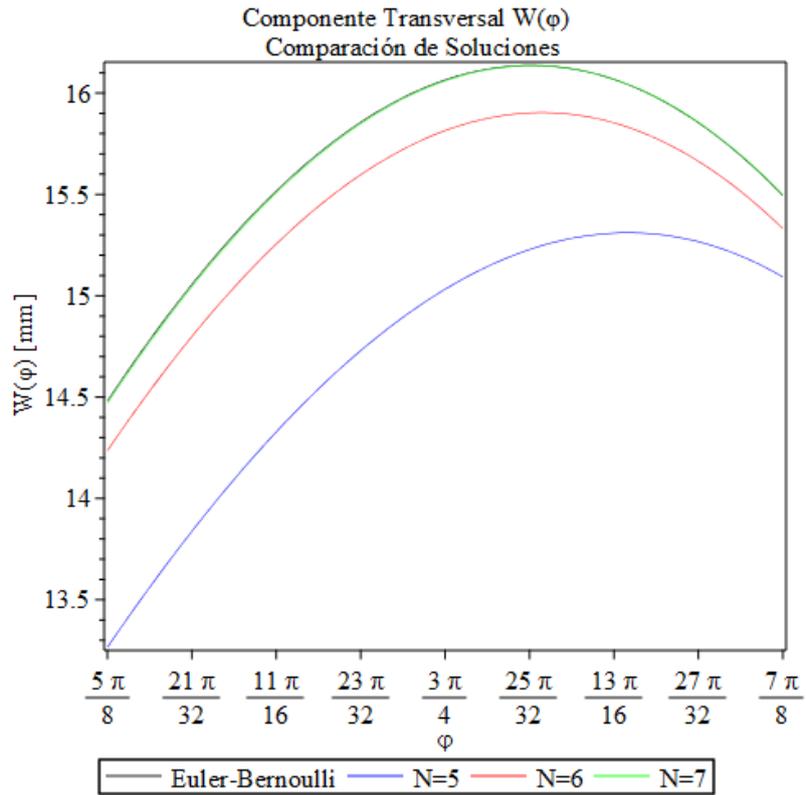


Fig. 5.7 Ampliación del recuadro de Fig. 5.5 (superposición de la solución analítica y la solución para $N=7$).

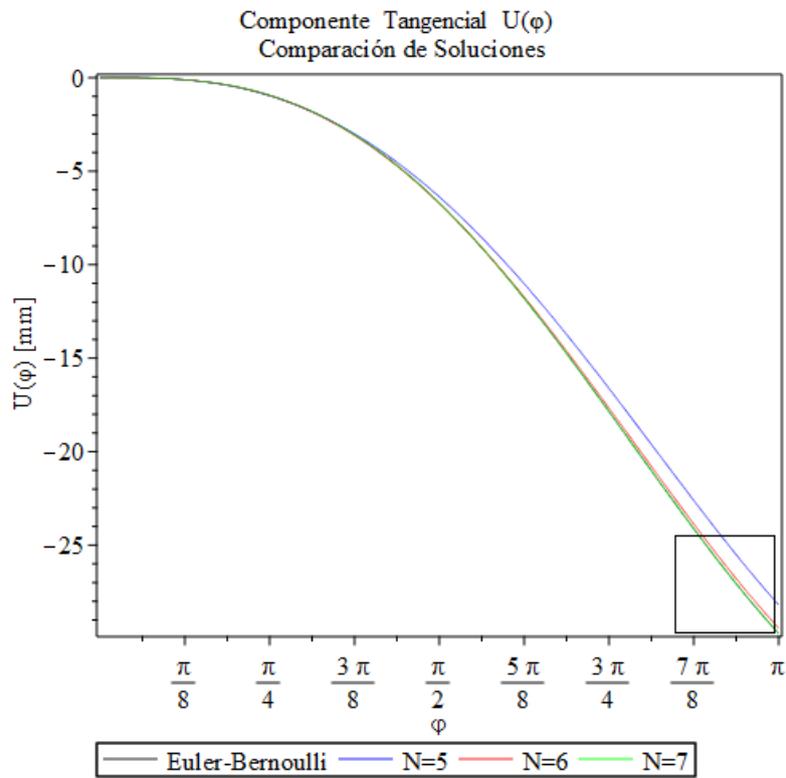


Fig. 5.8 Comparación de soluciones, componente tangencial u (diferentes N).

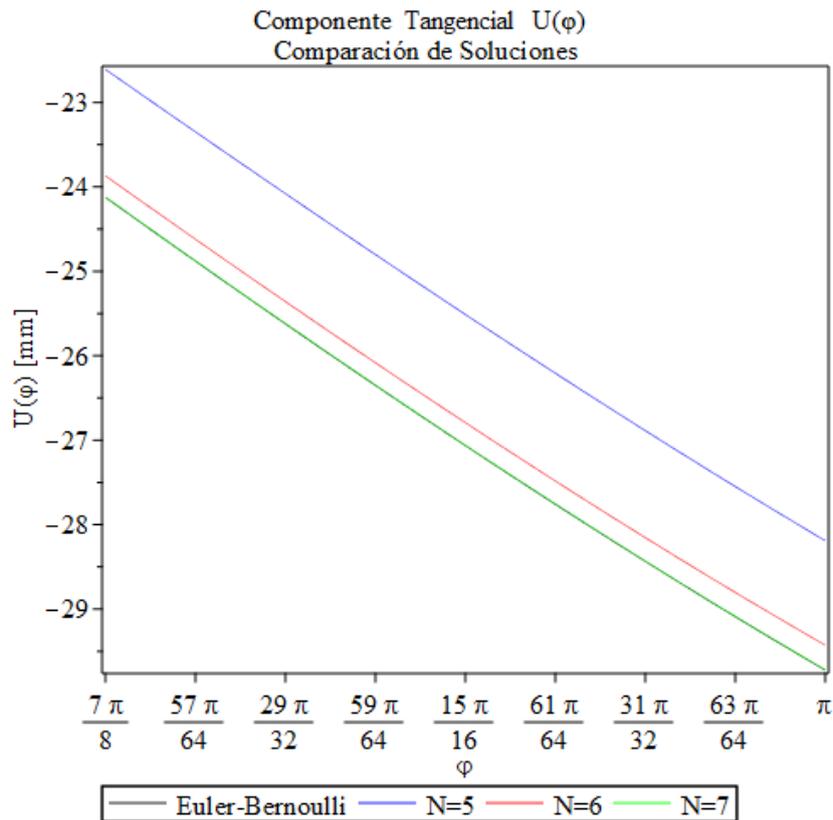


Fig. 5.9 Ampliación del recuadro de Fig. 5.7 (superposición de la solución analítica y la solución para $N=7$).

En la gráfica, las curvas de $N = 7$ y la solución exacta no se diferencian pues están superpuestas. De las Fig. 5.6-9 puede concluirse que, para $N > 7$ la solución obtenida por el algoritmo desarrollado no difiere de la solución analítica indicada como Euler-Bernoulli. Por este motivo, en lo que sigue del trabajo todos los cálculos fueron realizados aproximando las soluciones con polinomios de grado 7.

Cabe destacar que, las deformaciones calculadas se encuentran dentro del límite de validez de estas teorías de elasticidad de aproximadamente un 10% de deformación.

El resultado aquí expuesto se limita a la descripción del campo de deformaciones de un único anillo y no a la capacidad del modelo de representar el fenómeno RCP. La verificación teniendo en cuenta este último aspecto se aborda en las siguientes secciones.

5.2. Verificación del Modelo Inicial

El procedimiento para evaluar el algoritmo como modelo de propagación rápida de fisuras, para detectar sus falencias y proponer modificaciones, se basó en su capacidad de reproducir los resultados de un caso tomado como referencia.

Como caso de estudio se seleccionó un ensayo S4 instrumentado y documentado, llevado a cabo por P. S. Leever sobre Polietileno PE100 presurizado con aire, junto con los resultados de la simulación realizada por este autor [2]. Los parámetros del test, requeridos como datos de ingreso para el modelo, se indican en la *Tabla 5.2*.

Tabla 5.2 Parámetros del ensayo S4 instrumentado.

| PARÁMETRO | | Valor | Unidades |
|-----------|------------------|----------------------|--------------------|
| Geometría | SDR | 11 | - |
| | D | 125 | mm |
| | h | 12.5 | mm |
| | R | 56.25 | mm |
| Material | E_D | 1.5 | GPa |
| | ν | 0.4 | - |
| | ρ | 940×10^{-9} | kg/mm ³ |
| RCP | Temperatura | -24 | °C |
| | c_o | 340 | m/s |
| | γ (aire) | $7/5$ | - |
| | \dot{a} | ~165 | m/s |
| | L_D (3.2 D) | 400 | mm |
| | p_o | 0.15 | MPa |

Durante este ensayo también se registró el perfil de apertura de la fisura o COD (*Crack Opening Displacement*) como se muestra en la Fig. 5.10(a). En ella se incluye también la apertura predicha por el modelo semi-analítico de P. S. Leever, mencionado previamente en la Sección 3.8. La Fig. 5.10(b) muestra el resultado del ajuste de este modelo, realizado a partir de estos datos experimentales y parámetros de entrada de la simulación de P.S. Leever.

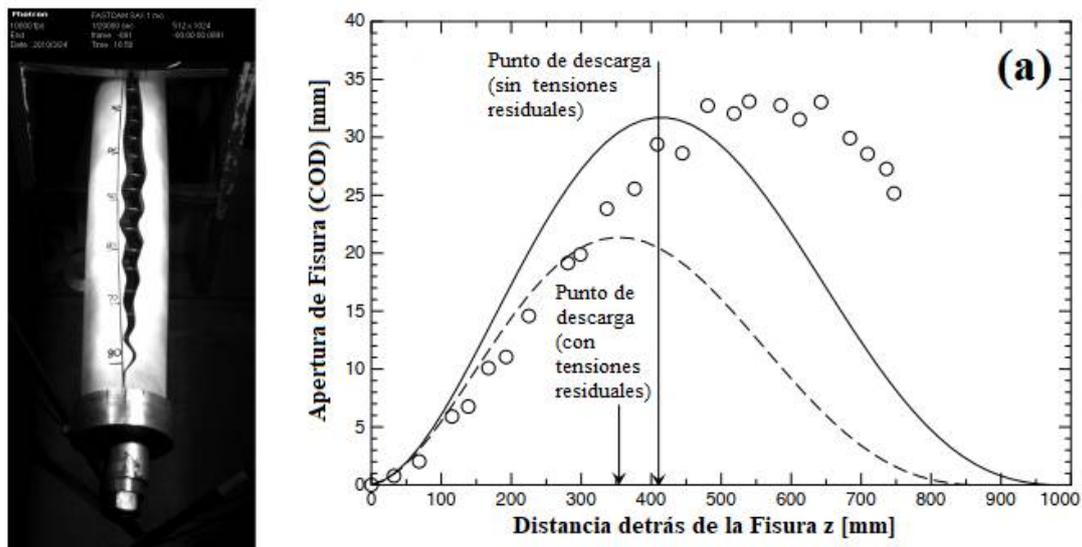


Fig. 5.10 (a) Ensayo S4T instrumentado: (izquierda) espécimen fracturado, (derecha) perfil de apertura de fisura experimental [○], simulado con [---] y sin tensiones residuales [—]. [2]

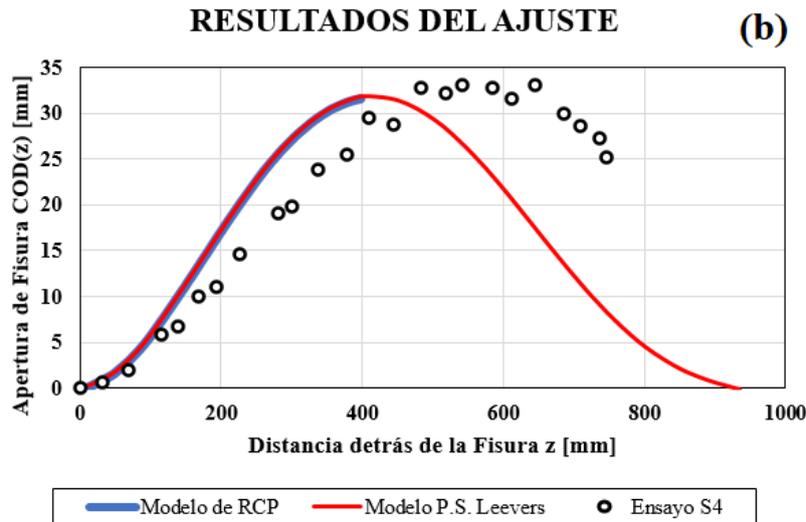


Fig. 5.10 (b) Resultados del ajuste del modelo propuesto de RCP con datos de calibración experimentales y de simulación de P.S. Leever.

Las tres únicas propiedades del material que son necesarias para el modelo son: el módulo elástico, el coeficiente de Poisson y la densidad. El primero resulta un parámetro fundamental pues debe caracterizar por completo el comportamiento mecánico del material. Al tratarse de un fenómeno dinámico, la elección de un valor adecuado no es trivial, especialmente cuando se trata polímeros típicamente viscoelásticos y altamente dependientes de la velocidad de deformación. La inclusión de estos efectos requiere del uso de propiedades medidas a una velocidad o escala de tiempo representativa que, para el RCP, es el tiempo de descompresión $t_D = L_D/\dot{a}$ [2]. Como este tiempo es del orden de milisegundos (0.0024 s) no es necesario un análisis viscoelástico riguroso. La rigidez del material no varía significativamente y puede representarse con un único valor.

Por otro lado, el módulo también debe contener información de las restricciones geométricas propias del sistema. Las tuberías enterradas se encuentran solicitadas en deformación plana, y debe utilizarse la ec. (2.18) para definir el módulo en estas condiciones.

La presión inicial p_o fue tomada como la presión p_t que actúa sobre la punta de la fisura. Esto se debe a que, como se dijo anteriormente, la descompresión originada por el flujo de retroceso se encuentra restringida por los baffles internos incluidos en el S4T. De no ser así, la ec. (3.4) podría utilizarse para calcular p_t y determinar la presión inicial que actúa en $z = 0$.

5.2.1. Resultados [Primera Simulación]

Se realizó una primera simulación utilizando los parámetros de la Tabla 5.2. Se logró una solución independiente del ancho Δz de los anillos al dividir el volumen de control, de 400 mm de longitud, en $N_a = 400$ secciones contiguas ($\Delta z = 1$ mm). Cada uno de los anillos tiene un momento de inercia de $I_{zz} = 162.76$ mm⁴ y se encuentra solicitado por una presión interna que se determinó evaluando el perfil (4.5) en la posición z que ocupa su línea media

La definición de la dimensión del VC es muy importante. A priori, su extensión axial está dada por la longitud de descarga L_D . Sin embargo, hay que considerar que el análisis debe enfocarse en una región de la tubería libre efectos transitorios iniciales. Por lo tanto, el VC

debe tener una dimensión mayor a la longitud de fisura a partir de la cual se alcanza el estado estacionario, es decir, L_{SS} (Sección 3.3.3.1.). Esta condición suele cumplirse para $a \geq 2D$, cuando alcanza la condición “totalmente desarrollada” de propagación [3]. En este caso de estudio, el volumen de control es de $3.2 D = 400 \text{ mm}$ y garantiza el cumplimiento de estas premisas.

5.2.1.1. Cálculo de la Apertura de la Fisura

Las componentes $w(x)$ y $u(x)$ fueron utilizadas para calcular el desplazamiento transversal en la posición $x = L_x$ de cada uno de los anillos. Este resultado expresado como función de la coordenada z constituye el perfil de apertura de la fisura. Es decir, representa la geometría de la grieta abierta como si fuese observada desde una vista superior, Fig. 5.11.

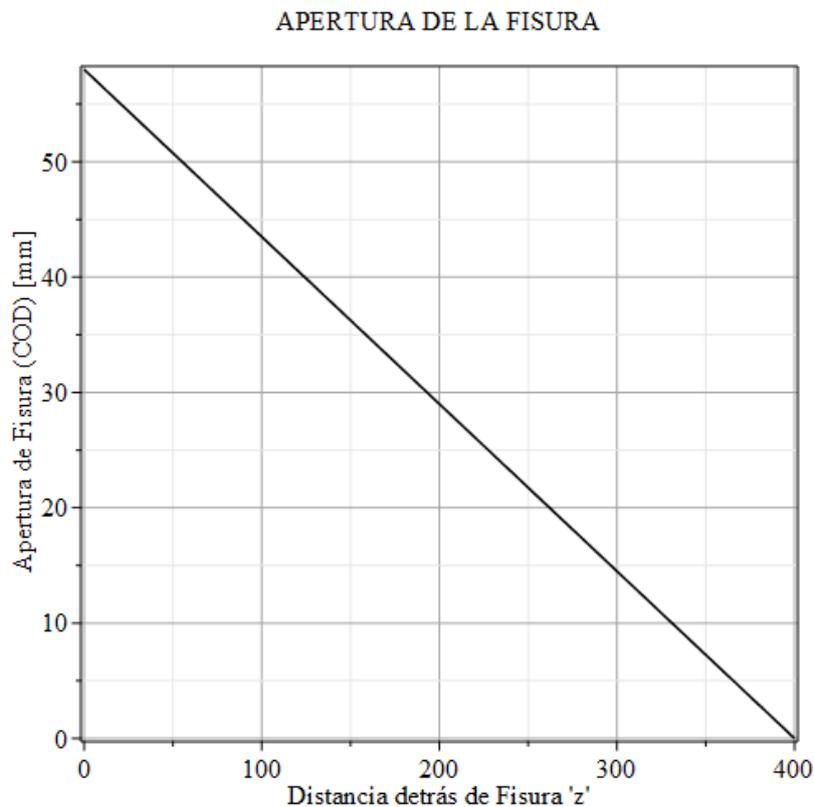


Fig. 5.11 Perfil de la apertura de la fisura.

5.2.1.2. Cálculo de la Energía de Deformación y Trabajo de Fuerzas Externas

Al seguir el esquema de resolución explicado en el Capítulo anterior, se obtuvo la energía interna de deformación y el trabajo de presión en cada uno de los semi-arcos de anillo (mitades de sección transversal). Al duplicar estos resultados se obtuvieron las magnitudes correspondientes a un anillo completo, y con la contribución de todos ellos, se calculó la energía total del sistema.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_S(z_j) &= \mathcal{U}_{S,j} ; \text{Energía de Deformación del Anillo } j - \text{ésimo} \\ W(z_j) &= W_j ; \text{Trabajo de la Presión en el Anillo } j - \text{ésimo} \end{aligned} \quad (5.11)$$

con $j = 1, \dots, N_a$. Las Fig. 5.12 y 5.13 muestran el valor de estas dos magnitudes como curvas de línea continua. Los cálculos fueron realizados en unidades de $N \cdot mm = mJ$ convenientemente, para luego expresar la fuerza impulsora en las unidades convencionales $mJ/mm^2 = kJ/m^2$.

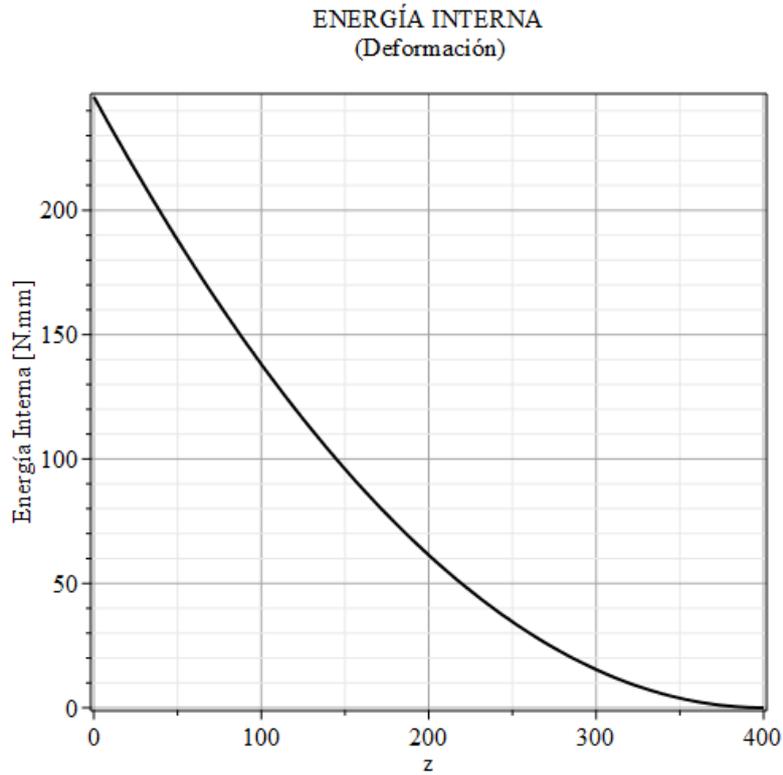


Fig. 5.12 Energía interna de deformación.

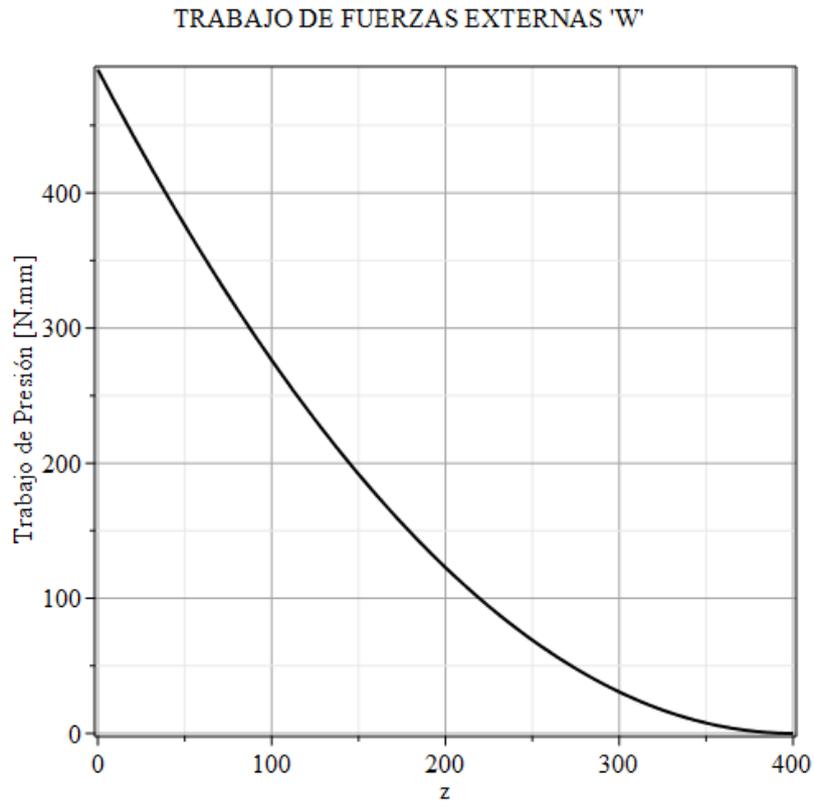


Fig. 5.13 Trabajo de las fuerzas externas [presión].

Se calculó la energía acumulada en el VC hasta cierta posición arbitraria en z_i mediante la suma de la contribución de cada anillo desde el inicio hasta el punto deseado.

$$U_{S,acumulada}(z_i) = \int_0^{z_i} U_S(z) dz \approx \sum_{j=1}^{j=i} U_{S,j} \quad (5.12)$$

$$W_{acumulada}(z_i) = \int_0^{z_i} W(z) dz \approx \sum_{j=1}^{j=i} W_j = \Delta z \sum_{j=1}^{j=i} \left[\int_0^{L_x} p(z_j) \cdot w_j(x) dx \right] \quad (5.13)$$

El subíndice k recorre los anillos desde el primero, en $z = 0$ ($j = 1$), hasta el ubicado en la posición z_i ($j = i$). Los resultados de este cálculo de energías acumuladas se ilustran en las Fig. 5.14 y 5.15 en unidades de $N \cdot mm$.

ENERGÍA INTERNA ACUMULADA

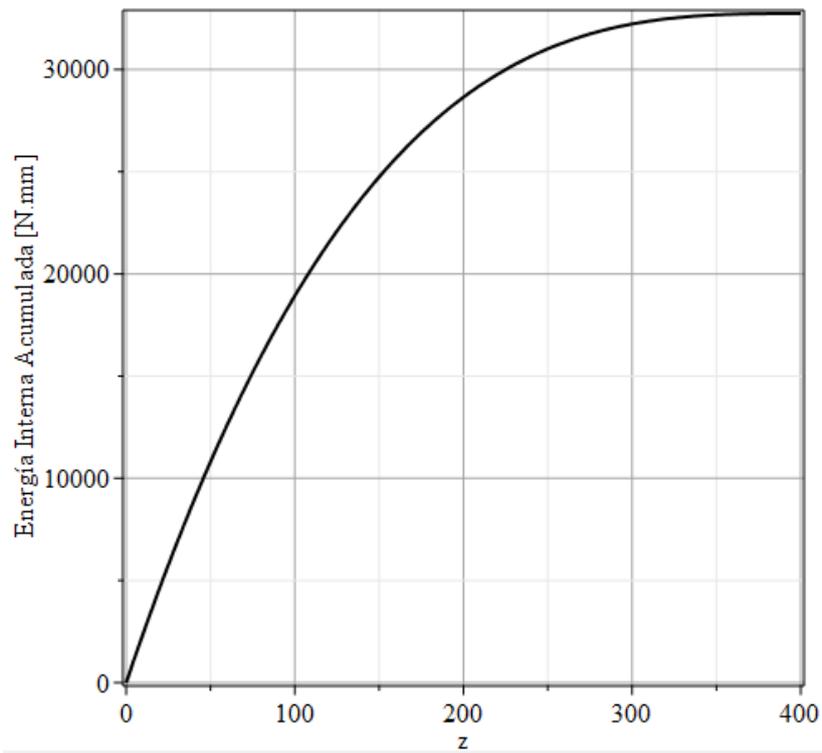


Fig. 5.14 Energía interna acumulada en el VC.

TRABAJO DE FUERZAS EXTERNAS ACUMULADO

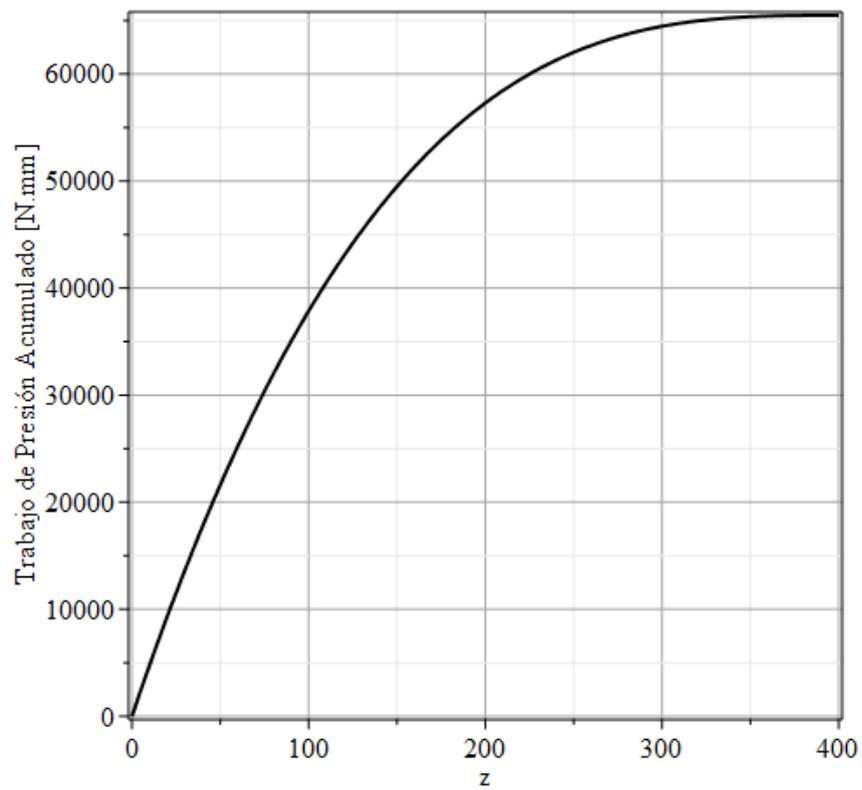


Fig. 5.15 Trabajo de fuerzas externas acumulado en el VC.

El valor final de cada una de estas curvas es la magnitud requerida para el cálculo de la fuerza impulsora. Es decir, son las energías totales que se acumulan en todo el volumen, y que resultan de sumar la contribución de todos los anillos.

$$U_{S,total} = \sum_{j=1}^{N_a} U_{S,j} \quad (5.14)$$

$$W_{total} = \sum_{j=1}^{N_a} W_j \quad (5.15)$$

Tabla 5.3 Resultados de energía acumulada [primera simulación].

| Energía de Deformación Acumulada en VC $U_{S,total} [N \cdot mm]$ | Trabajo de Fuerzas Externas Acumulado en VC $W_{total} [N \cdot mm]$ |
|--|---|
| 33,200 | 65,600 |

5.2.1.3. Cálculo de la Energía Cinética

La energía cinética no surge naturalmente de las ecuaciones del modelo, dado que estas describen un problema de deformación estática. Sin embargo, y como se dijo anteriormente, la componente dinámica de la deformación puede imponerse de manera externa al conocer la velocidad con la que ocurre el proceso de fractura.

Se propuso calcular la energía cinética reemplazando las derivadas de la ecuación (4.25) por su expresión en diferencias:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = \frac{(\cdot)_{t_2} - (\cdot)_{t_1}}{t_2 - t_1} = \frac{(\cdot)_{t_2} - (\cdot)_{t_1}}{\Delta t_j} \quad (5.16)$$

Para el anillo j –ésimo, se consideró como tiempo t_1 el tiempo inicial no fracturado, y como t_2 un instante de tiempo Δt_j posterior, correspondiente a su estado completamente deformado. Este intervalo Δt_j es diferente para cada sección de tubería y depende de la posición en z que esta ocupe. Para el anillo ubicado en z_j , el intervalo se calculó con la expresión (4.58), es decir: $\Delta t_j = \frac{(z_j - 0)}{\dot{a}}$ y su energía cinética se obtuvo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E_{K,j} &= \frac{1}{2[\Delta t_j]^2} \int_{x_0=0}^{x_1=L_x} \rho A \left[\{w_j(x, t_2) - w_j(x, t_1)\}^2 + \{u_j(x, t_2) - u_j(x, t_1)\}^2 \right] dx \\ &= \frac{\dot{a}^2}{2[z_j]^2} \int_{x_0=0}^{x_1=L_x} \rho A \left[\{w_j(x, t_2) - w_j(x, t_1)\}^2 + \{u_j(x, t_2) - u_j(x, t_1)\}^2 \right] dx \end{aligned} \quad (5.17)$$

Sin embargo, los resultados así obtenidos son erróneos. La energía acumulada en los anillos cercanos a la punta de la fisura excede los valores esperados en varios ordenes de magnitud.

Por ejemplo, según la ecuación anterior, el anillo ubicado inmediatamente después del vértice de la grieta acumula $6.83 \times 10^7 \text{ Nmm}$ de este tipo de energía. Esto se debe principalmente a que los intervalos Δt_j son muy pequeños, del orden de los milisegundos, y varían desde valores cercanos a cero hasta 2.4 ms (el tiempo de descompresión). Al ser magnitudes chicas, al estar elevadas al cuadrado y dividiendo, la energía cinética toma valores que carecen de sentido físico.

5.2.1.4. Análisis de Resultados

El modelo así planteado presenta dos falencias principales.

La primera de ellas está relacionada con el ancho de fisura calculado. La *Fig. 5.11* no se condice con el típico perfil de *COD* en forma de campana observado, *Fig. 5.10*. Según este modelo, la deformación de la tubería varía linealmente con el cambio de la presión. Es decir, cuando la presión es máxima (en $z = 0$) la deformación es máxima, y cuando la presión cae a cero hacia el final del volumen de control, la deformación es mínima. Esto también puede observarse en las *Fig. 5.12* y *5.13*. Tanto la energía de deformación como el trabajo de la presión son máximos en $z = 0$, y decaen progresivamente hasta $z = L_D$ junto con la presión interna. El perfil obtenido de esta manera adopta una forma triangular. En otras palabras, este perfil demuestra una mayor apertura en la posición donde debería estar ubicado el vértice de la grieta, y una apertura nula en donde la deformación debería ser máxima. En una tubería real el comportamiento es inverso: la sección que contiene la punta de fisura se encuentra prácticamente cerrada, y la sección en la cual finaliza el proceso de descarga se encuentra totalmente deformada, a pesar de no existir una carga interna que fuerce esta apertura.

La segunda falencia se asocia a la energía cinética. Como se vio con los resultados de la Sección 5.2.1.3. el método de cálculo propuesto predice valores físicamente incongruentes. Estos no solo se deben a tener que utilizar intervalos de tiempo muy pequeños, sino que también se relacionan con el hecho de haber sido calculados sobre campos de deformaciones que no reproducen la geometría real de la grieta.

La falta de condiciones de transición entre anillos contiguos es la causante principal de la falla del modelo. Cada uno de ellos se encuentra "incomunicado" y actúa de manera independiente: la deformación experimentada en la sección en z_j no ejerce ninguna influencia sobre las secciones en z_{j-1} y z_{j+1} , y viceversa. De esta manera, la tubería como tal no impone ninguna restricción sobre la deformación de cada uno de estos anillos. Por este motivo, fue necesario reformular parcialmente el modelo para solucionar este problema.

5.2.2. Modificaciones del Modelo

Se modificó el sistema mecánico de la *Fig. 4.3* mediante la introducción de un vínculo elástico tangencial de constante de rigidez s_1 ajustable en la posición $x = L_x$, según se observa en el siguiente esquema.

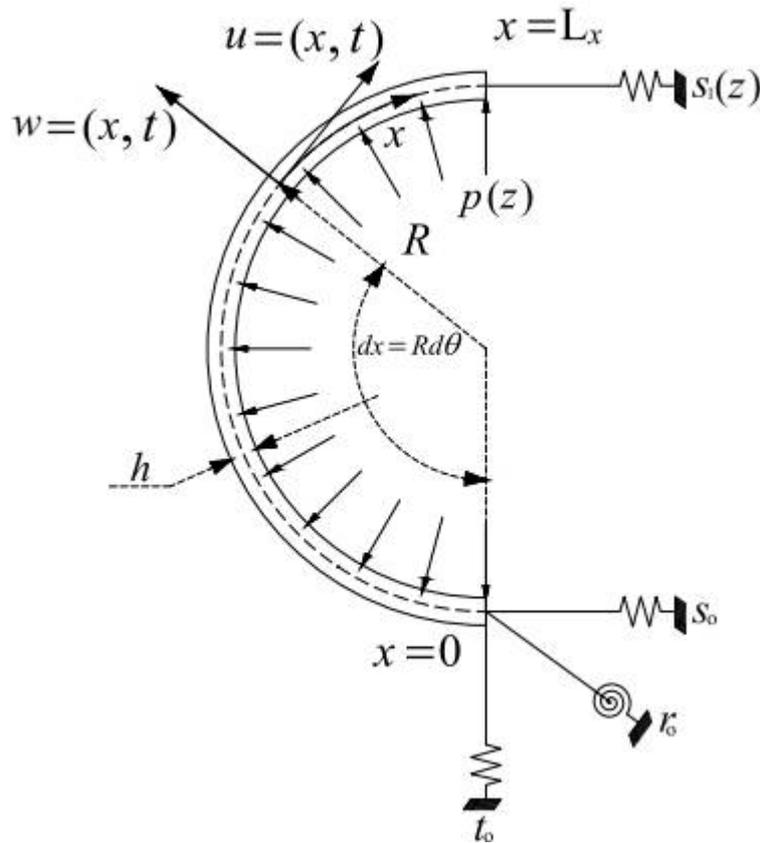


Fig. 5.16 Modelo mecánico del semi-arco de anillo como viga de eje curvo con resorte de variación axial.

La implementación de esta nueva restricción tuvo y tiene el objetivo de forzar que la deformación calculada por el modelo se corresponda con la deformación observada experimentalmente al tener en cuenta los parámetros de entrada definidos por P.S.Leevers en su simulación. Esto se logra ajustando su constante de rigidez punto a punto a lo largo del volumen de control. De esta manera, s_1 se transforma en una función de la coordenada z haciendo que este vínculo tangencial varíe de manera axial.

$$\text{Vínculo tangencial de variación axial: } s_1 = s_1(z) \quad (5.18)$$

Desde un punto de vista global, puede pensarse como que la tubería se encuentra representada por una serie de anillos contiguos cuyos extremos, en el plano de la fisura, se encuentran unidos por una distribución axial de resortes tangenciales que modulan su apertura.

5.2.2.1. Reformulación del Problema de Contorno

El elemento elástico s_1 introduce un nuevo término de energía que debe ser tenido en cuenta para la formulación del problema de contorno. A la componente U_V que resume la energía de todos los vínculos se le debe sumar la siguiente expresión:

$$s_1(z) \cdot [u(x_1, t)]^2 \quad o \quad s_1(z) \cdot [u(L_x, t)]^2 \quad (5.19)$$

Así, el nuevo Lagrangiano resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= E_K - \mathcal{U}_S + W \\ \mathcal{L} &= \int_0^{L_x} \left\{ \frac{1}{2} \rho A \left[\left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} EA \left(\frac{w(x, t)}{r} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} EI_{zz} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \Delta z p(z) \cdot w(x, t) \right\} dx \quad (5.20) \\ &\quad - t_o \cdot [w(0, t)]^2 - s_o \cdot [u(0, t)]^2 - r_o \cdot \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right]^2 - s_1(z) \cdot [u(x_1, t)]^2 \end{aligned}$$

Si se sigue el mismo procedimiento del Cálculo de Variaciones utilizado en el capítulo anterior, se llega a un resultado idéntico al de las ecuaciones (4.53) y condiciones (4.54) con la única modificación de la condición de contorno (II).

$$EA \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} + \frac{EI_{zz}}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x_1} - s_1(z) u(x_1, t) = 0 \quad (5.21)$$

La condición de contorno (II) en (4.54) tiene validez global, es igual para cada uno de los anillos sin importar su posición. Por el contrario, esta nueva expresión adopta un valor particular para cada sección de tubería dependiendo de la magnitud de $s_1(z)$.

Eliminando la dependencia explícita con la variable t como se hizo con la ec. (4.57) y aplicando el procedimiento del método de Ritz se define el nuevo SEL a resolver. Este resulta idéntico al representado por (4.79) con una única modificación en la submatriz $[D]$. Sus coeficientes se calculan como:

$$\begin{aligned} D_{ik} &= EA \int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{d\psi_k}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} \right) dx + EI_{zz} \frac{1}{r^2} \int_{x_o}^{x_1} \left(\frac{d\psi_k}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} \right) dx + s_o [\psi_k(x_o) \psi_i(x_o)] \\ &\quad + s_1(z) [\psi_k(x_1) \psi_i(x_1)] \quad (5.22) \end{aligned}$$

El algoritmo de resolución sigue el mismo esquema presentado en la Sección 4.3. La única diferencia es que ahora, la matriz $[K]$ de la forma bilineal no es igual para todos los anillos. Sus coeficientes K_{ij} ($i, j = N + 1, \dots, 2N + 2$) cambian de valor a lo largo del eje axial, al contener la función $s_1(z)$ en su interior. Una matriz de coeficientes no numéricos (coeficientes algebraicos, en función de z) es difícil de factorizar en sus componentes triangular superior e inferior. Es por esto que, para seguir obteniendo los coeficientes $\{\alpha_k\}$ y $\{\beta_k\}$ como funciones de z , se tuvo que reemplazar el método de factorización 'LU' por el comando "solve" genérico implementado en el software.

El Apéndice "Modelo Modificado" muestra una transcripción del nuevo algoritmo.

5.2.2.2. Ajuste de la Constante de Rigidez

Si se conoce el valor de la apertura de la fisura en función de la distancia a su vértice, es posible calibrar la variación de s_1 con la coordenada axial z . Esta información puede obtenerse como resultado de los ensayos S4 instrumentados que, para el caso de estudio seleccionado, está dada en la gráfica de la Fig. 5.10. El ajuste se realizó según el procedimiento descrito a continuación, tomando como referencia los resultados de la simulación de P.S. Levers para una comparación más sencilla.

(i) Obtención de la función $COD(z)$

Con la herramienta digital PlotDigitizer se extrajo el conjunto de puntos que representa el perfil de apertura de la Fig. 5.10.

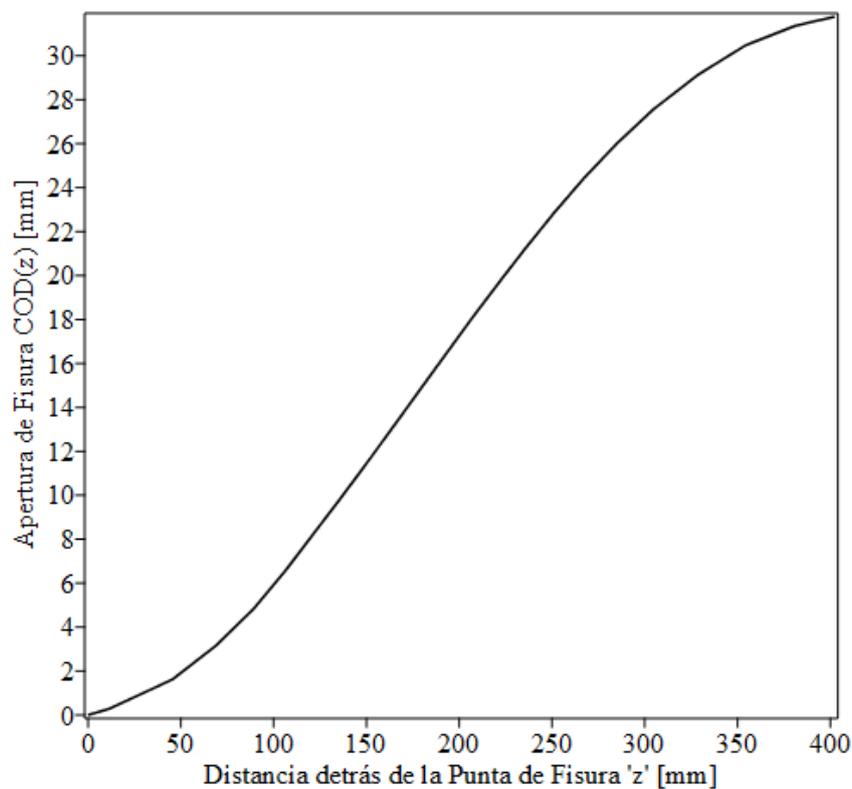


Fig. 5.17 Perfil de apertura de fisura utilizado como referencia para el ajuste (línea continua).

(ii) Determinación del conjunto de puntos $s_1(z_j)$

Para cada punto del perfil $COD(z_j)$ se halló el valor de $s_{1,j} = s_1(z_j)$ que hace que la apertura de fisura calculada por el modelo mecánico coincida con el valor real medido en la posición z_j . Este ajuste se realizó por un proceso iterativo de convergencia: luego de definir la presión $p(z_j)$ en z_j , se modificó $s_{1,j}$ y calculó el COD resultante hasta encontrar el mejor valor de $s_{1,j}$ que cumple la condición propuesta. De esta manera, se obtuvo un conjunto de pares $\{s_{1,j}; z_j\}$ esquematizados a continuación, Fig. 5.18.

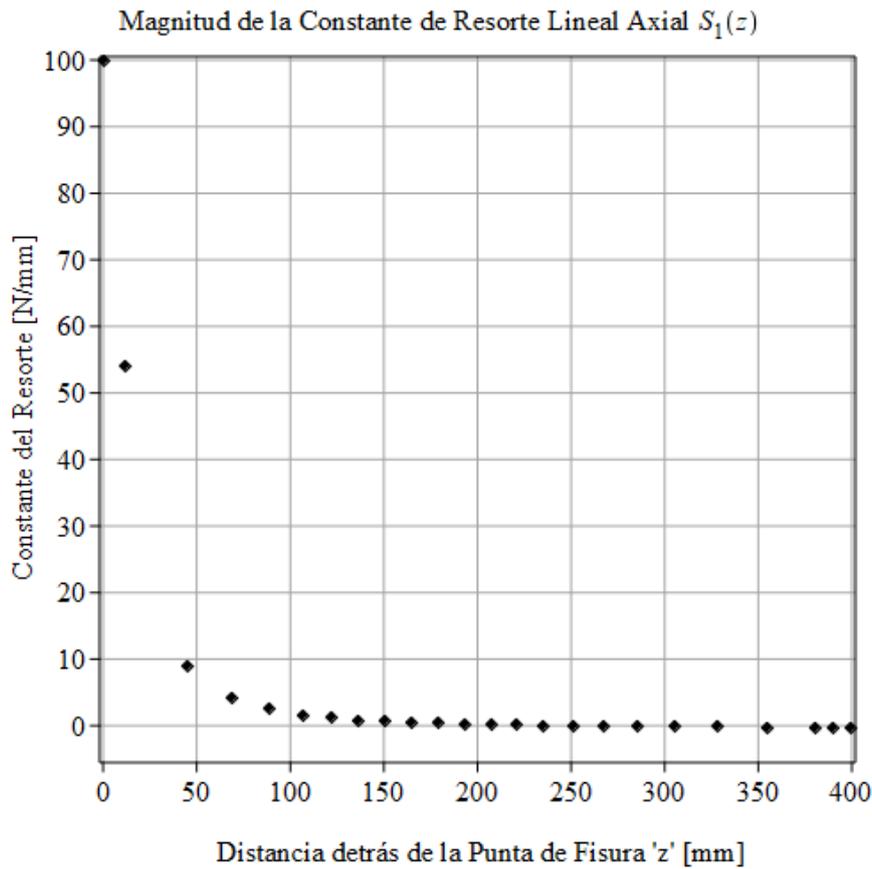


Fig. 5.18 Conjunto de puntos $\{s_{1,j}; z_j\}$.

(iii) Interpolación y obtención de la función $s_1(z)$

El conjunto $\{s_1(z_j); z_j\}$ caracteriza el comportamiento mecánico del vínculo en la región acotada $z \in [0, L_D]$. Para hallar la forma funcional $s_1(z)$ se optó por interpolar estos puntos mediante el método de Thiele. Así, se definió una función racional con la que pudo operarse fácilmente dentro del software Maple.

Como se dijo anteriormente, la tubería se encuentra completamente cerrada en $z = 0$ a pesar de que la presión es máxima. El resorte debe garantizar que los extremos de la viga curva coincidan en $x = L_x^+$ y $x = L_x^-$ y por ende, el valor teórico de $s_1(z)$ en $z = 0$ tiende a infinito, $s_1(0) \rightarrow \infty$. Si se opera con algunos valores infinitos (o números muy grandes), la interpolación del conjunto de puntos se dificulta. Debido a esto, se tomó como $s_1(0)$ la magnitud más grande posible que permitió una aproximación suave de la curva $s_1(z)$. Este valor resultó ser de aproximadamente 500 N/mm .

La interpolación realizada se puede apreciar en la Fig. 5.19. Cabe destacar que, en la región de $200 \text{ mm} \leq z \leq 400 \text{ mm}$ los parámetros de ajuste, así como también el COD resultante son muy sensibles a los valores de s_1 . Esto se debe principalmente al comportamiento asintótico que tiene esta curva para valores grandes de z , Fig. 5.20.

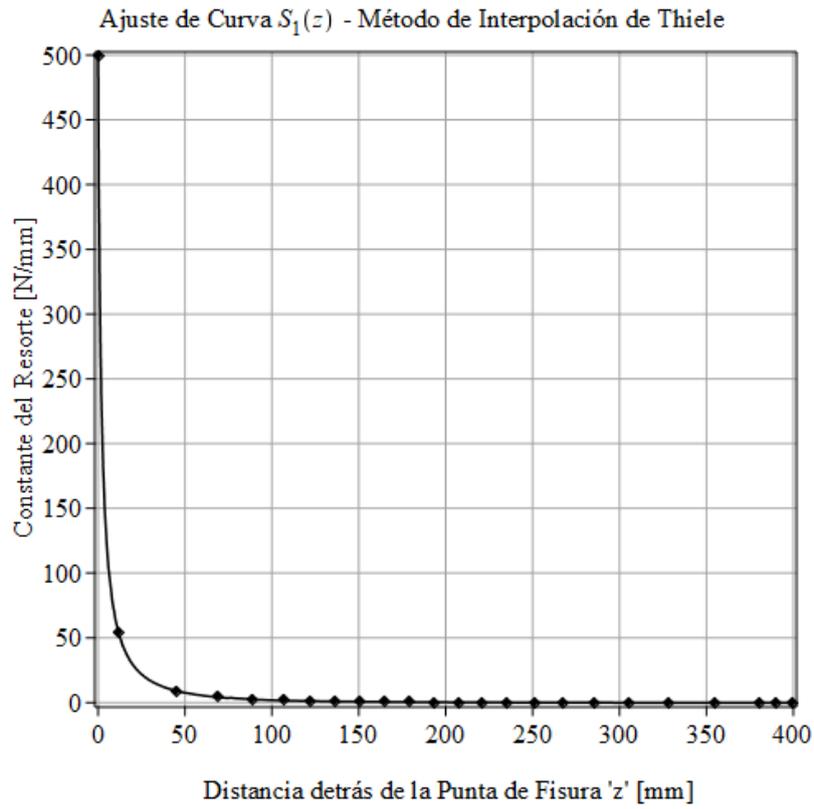


Fig. 5.19 Resultado de la interpolación del conjunto $\{s_1(z_j); z_j\}$ por el método de Thiele.

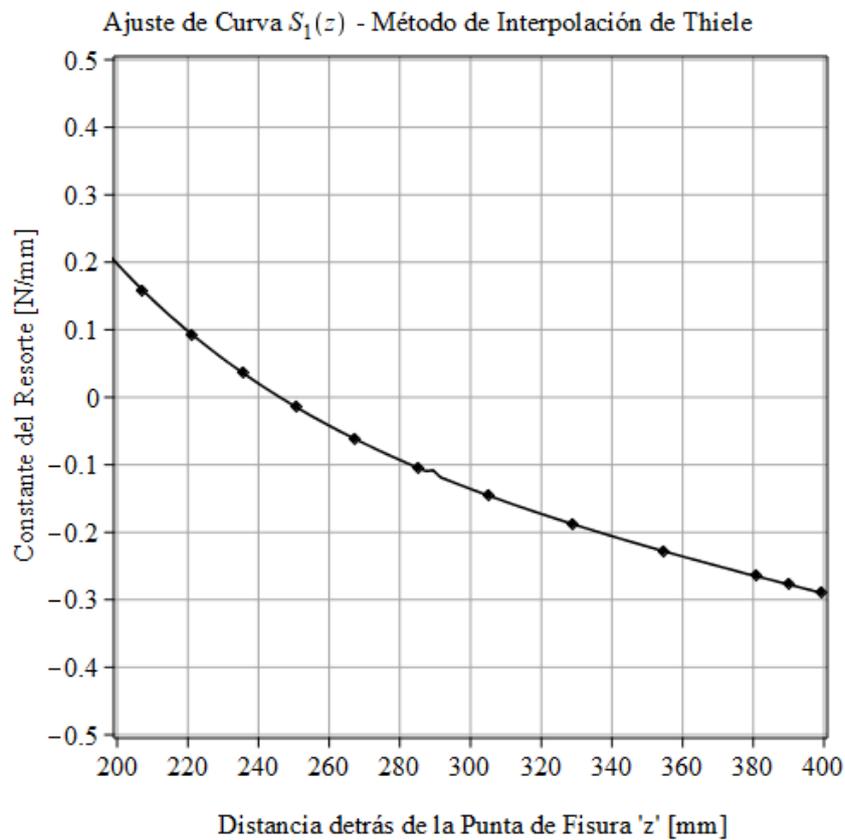


Fig. 5.20 Ampliación de la Fig. (5.19) en el rango $[200, 400]$.

Por último, debe mencionarse que la calibración de la rigidez y definición de la función $s_1(z)$ es particular para cada ensayo S4. El modelo modificado requiere tener información de la geometría que adopta la fisura durante su propagación, algo que es posible registrar con cámaras de alta rapidez. Así, el procedimiento de ajuste debe repetirse para cada set de datos que se desea utilizar como información de entrada.

5.3. Verificación del Modelo Modificado

5.3.1. Resultados [Segunda Simulación]

Se llevó a cabo una segunda simulación con la introducción de la restricción elástica tangencial en $x = L_x$ y de rigidez determinada por la función $s_1(z)$ calibrada. Se utilizaron los mismos parámetros geométricos y del material dados por la *Tabla 5.2*, con un número de anillos igual al implementado anteriormente.

5.3.1.1. Cálculo de la Apertura de Fisura

La siguiente gráfica muestra la curva $COD(z)$ calculada junto con la variación la rigidez del resorte s_1 .

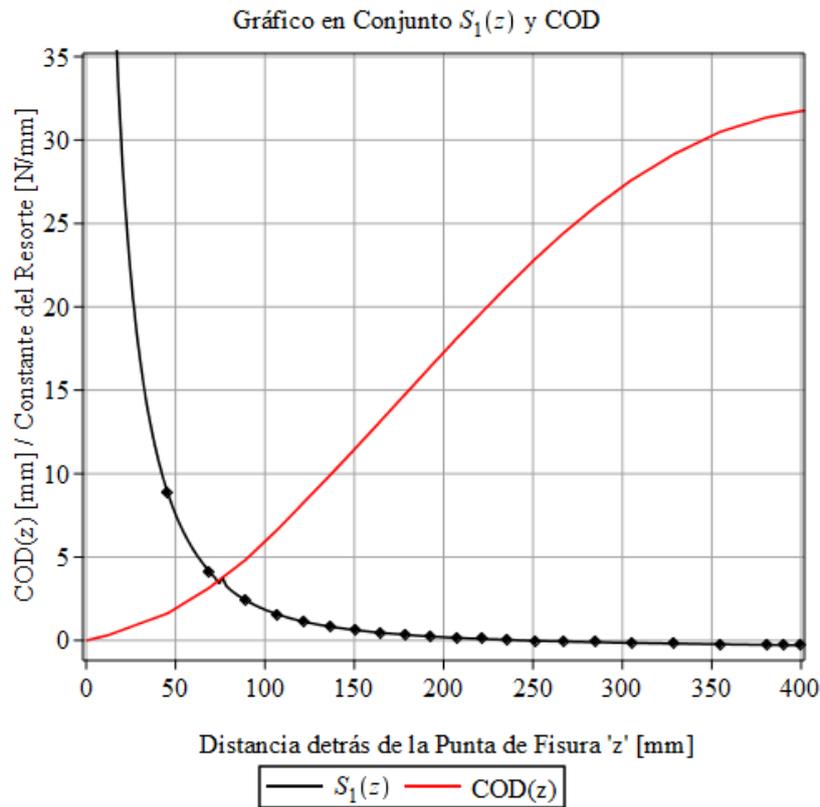


Fig. 5.21 Gráfico de las funciones $COD(z)$ y $s_1(z)$ en conjunto.

El perfil que describe la grieta se muestra en la *Fig. 5.22*. Se puede observar que, esta geometría ha dejado de ser triangular y adquiere la forma de campana registrada durante el ensayo. Esto demuestra que la implementación de esta representación mecánica simple es adecuada para reproducir este resultado.

APERTURA DE FISURA COD(z)

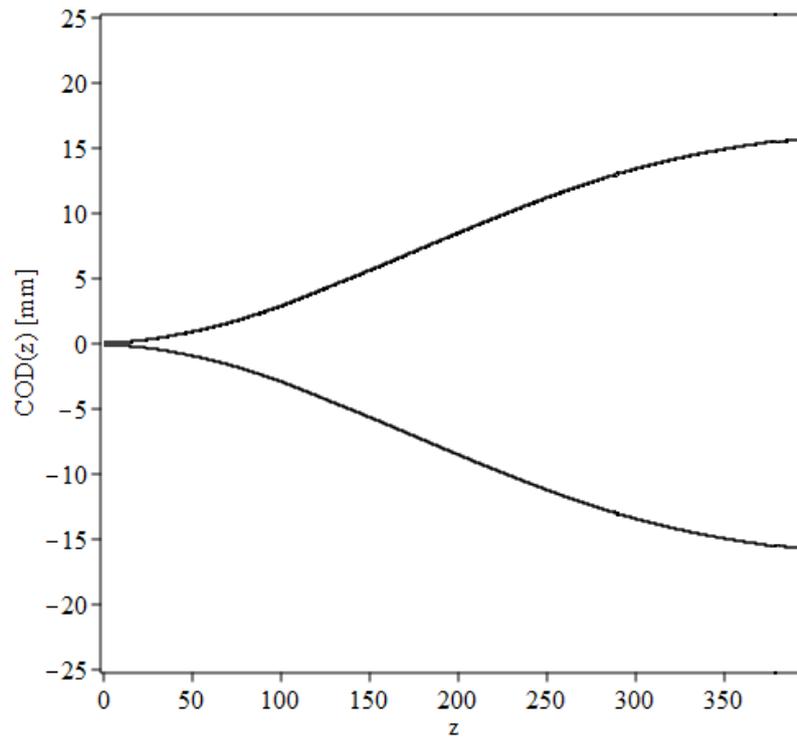


Fig. 5.22 Geometría de la grieta.

La Fig. 5.23 ofrece una vista más global de la deformación de la tubería. En ella se superponen diferentes secciones fracturadas de la línea de distribución ubicadas a distancias cada vez más alejadas del plano del vértice de la grieta. Dicha distancia se expresa en términos relativos al diámetro externo D .

SECCIÓN DE TUBO DEFORMADA

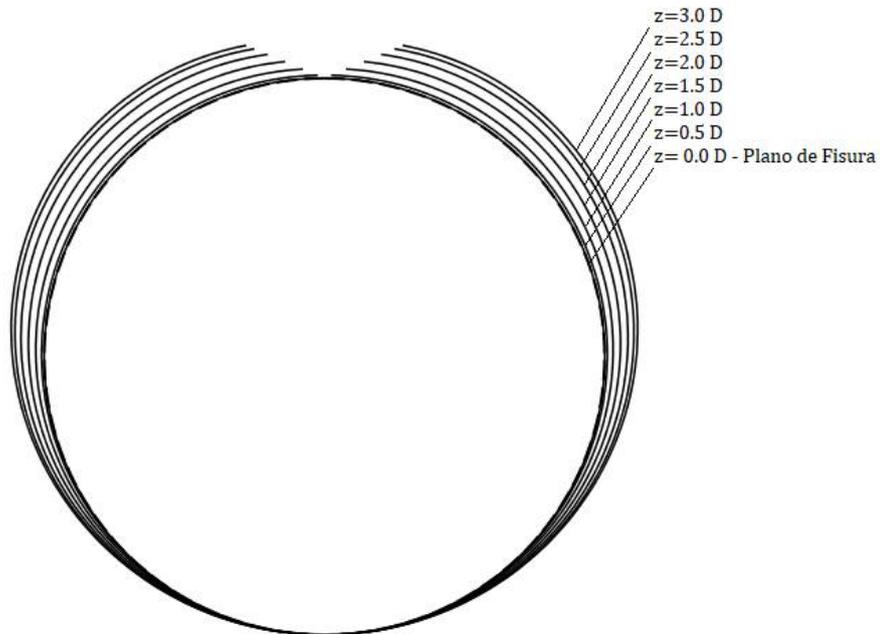


Fig. 5.23 Secciones de la tubería fracturada.

En esta última gráfica puede apreciarse que los resultados cumplen con las características de la deformación de las paredes del tubo fracturado mencionadas en la Sección 3.3.1.

5.3.1.2. Cálculo de la Energía de Deformación y del Vínculo s_1

La energía potencial de cada anillo ($E_{INT}[z_j]$) se muestra en la gráfica de la Fig. 5.24 como una curva de trazo continuo que une puntos discretos. Esta magnitud incluye todas las fuentes de energía de deformación (extensión, flexión y vínculos s_o , t_o y r_o) junto con la componente asociada al vínculo s_1 .

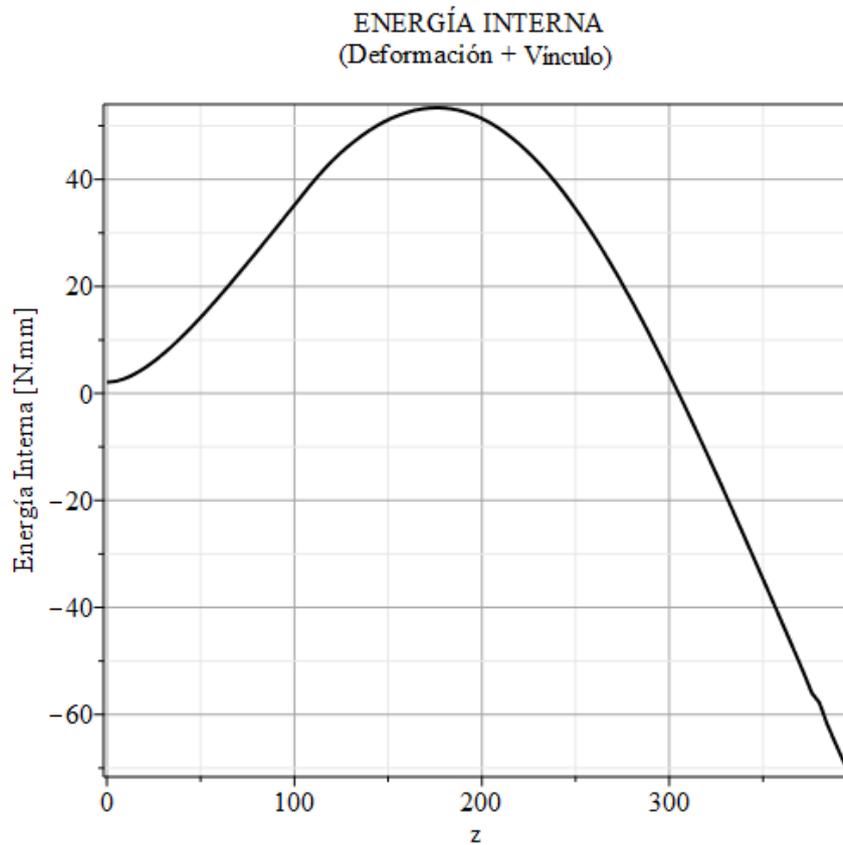


Fig. 5.24 Energía interna total (deforcación y vínculo s_1).

El total acumulado dentro del volumen de control, ec. (5.23), se observa en la Fig. 5.25, y su valor se indica en la Tabla 5.4.

$$E_{INT,acumulada}(z_i) = \int_0^{z_i} E_{INT}(z) dz \approx \sum_{j=1}^{j=i} E_{INT,j} \tag{5.23}$$

$$E_{INT,total} = \sum_{j=1}^{N_a} E_{INT,j}$$

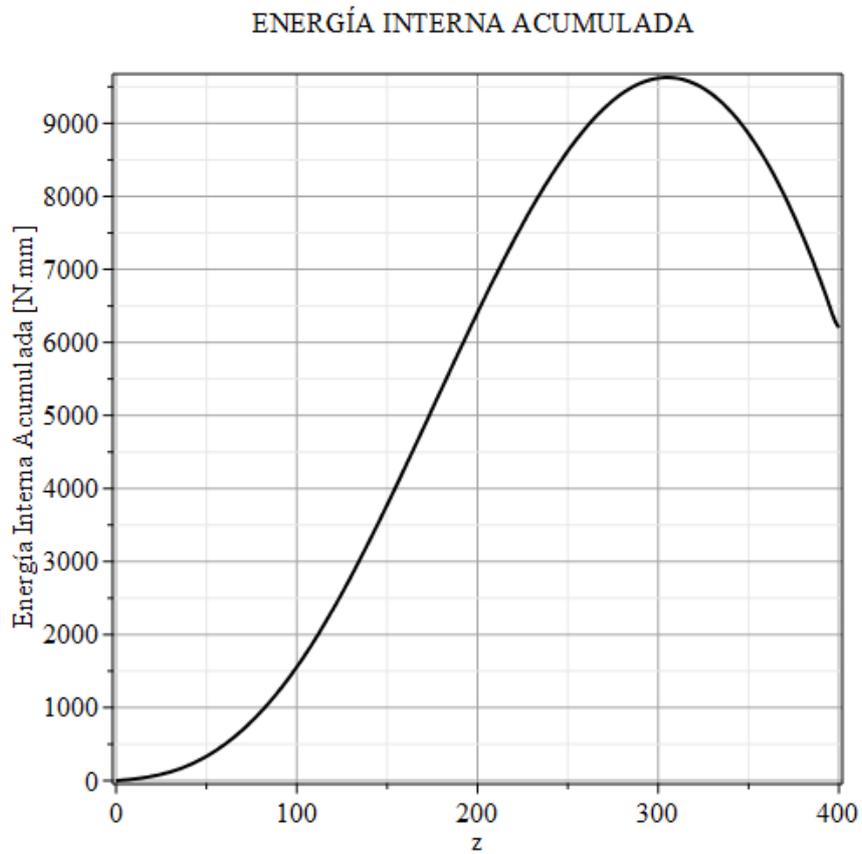


Fig. 5.25 Energía interna total acumulada en el VC.

Tabla 5.4 Resultado de energía interna acumulada [modelo modificado].

| Energía Interna Acumulada en VC $E_{INT,total} [N \cdot mm]$ |
|---|
| 6202.81 |

Para facilitar el posterior análisis de los resultados, se realizó la descomposición de la energía potencial en las contribuciones de energía de deformación pura U_S y energía del vínculo $s_1 U_V(s_1)$, Fig. 5.26-29. La ecuación (5.24) expresa esta distinción de energías para el anillo j –ésimo.

$$E_{INT}[z_j] = U_S[z_j] + U_V(s_1)[z_j] \tag{5.24}$$

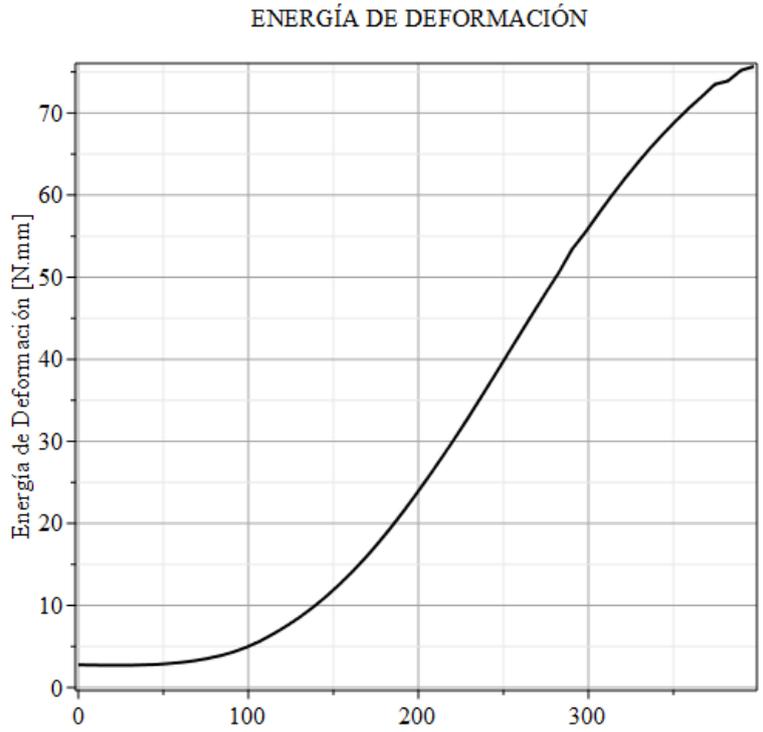


Fig. 5.26 Componente de energía de deformación (aislada).

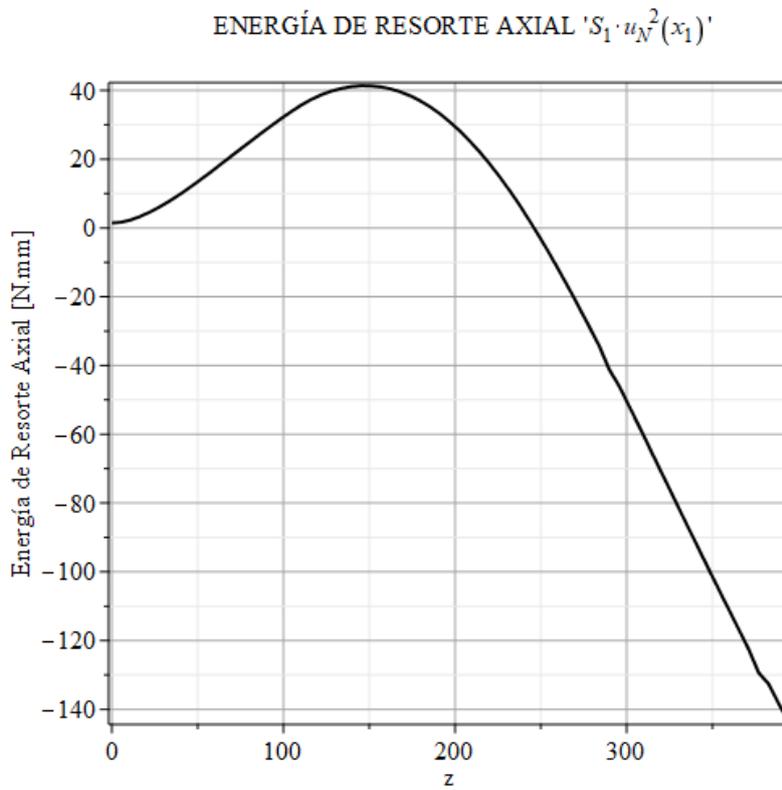


Fig. 5.27 Componente de energía del resorte tangencial de variación axial.

Las funciones $\mathcal{U}_{s,acumulada}[z_i]$ y $\mathcal{U}_{V,acumulada}(s_1)[z_i]$ se calcularon de la misma manera que fueron obtenidas las demás magnitudes acumuladas.

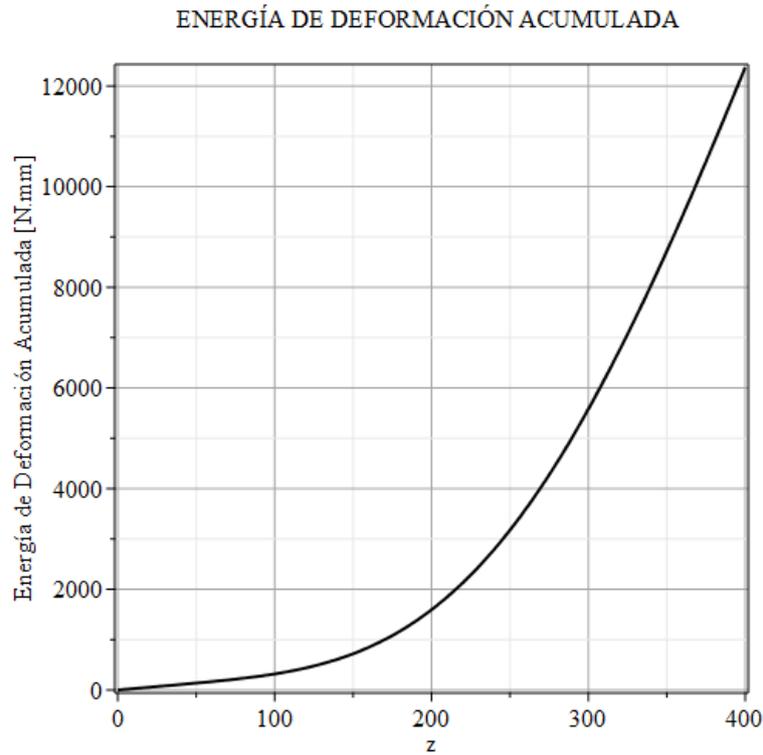


Fig. 5.28 Componente de energía de deformación acumulada en el VC (aislada).

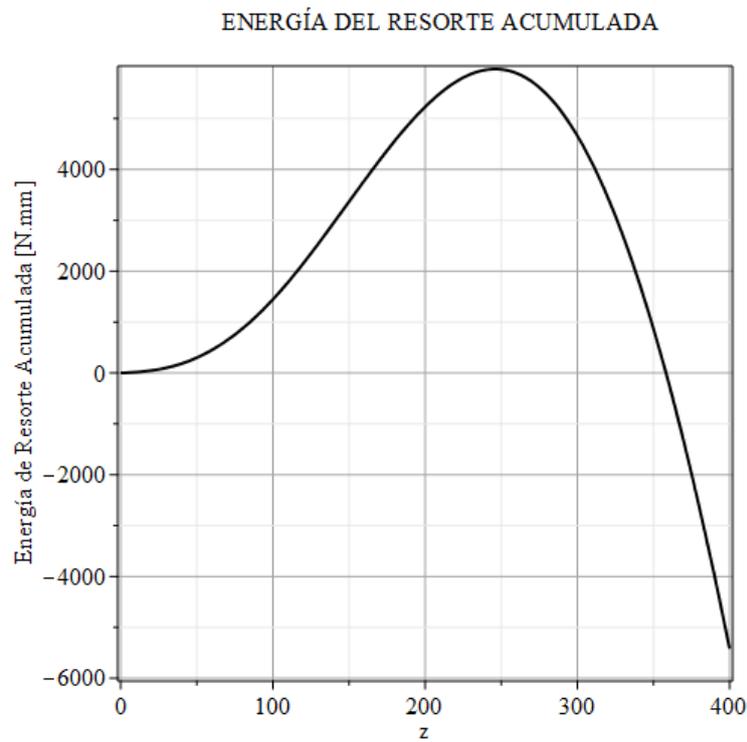


Fig. 5.29 Componente de energía del resorte tangencial s_1 acumulada en el VC.

Tabla 5.5 Resultados de la descomposición de la energía interna acumulada [modelo modificado].

| Energía de Deformación Pura Acumulada en VC $u_{S,total} = u_{E,total} + u_{F,total} + u_{V,total}$ $[N \cdot mm]$ | | | Energía del Vínculo s_1 Acumulada en VC $u_{V,total}(s_1)$ $[N \cdot mm]$ |
|---|---------------------------------------|---|--|
| 12368.64 | | | -6165.83 |
| Extensión $u_{E,total} [N \cdot mm]$ | Flexión $u_{F,total} [N \cdot mm]$ | Vínculos s_o, t_o y r_o $u_{V,total} [N \cdot mm]$ | |
| 939.53 | 11429.11 | $8.4 \times 10^{-93} \sim 0$ | |

5.3.1.3. Trabajo de las Fuerzas Externas

El trabajo realizado por la presión se observa en la *Fig. 5.30* mientras que la contribución acumulada de energía en el la *Fig. 5.31*.

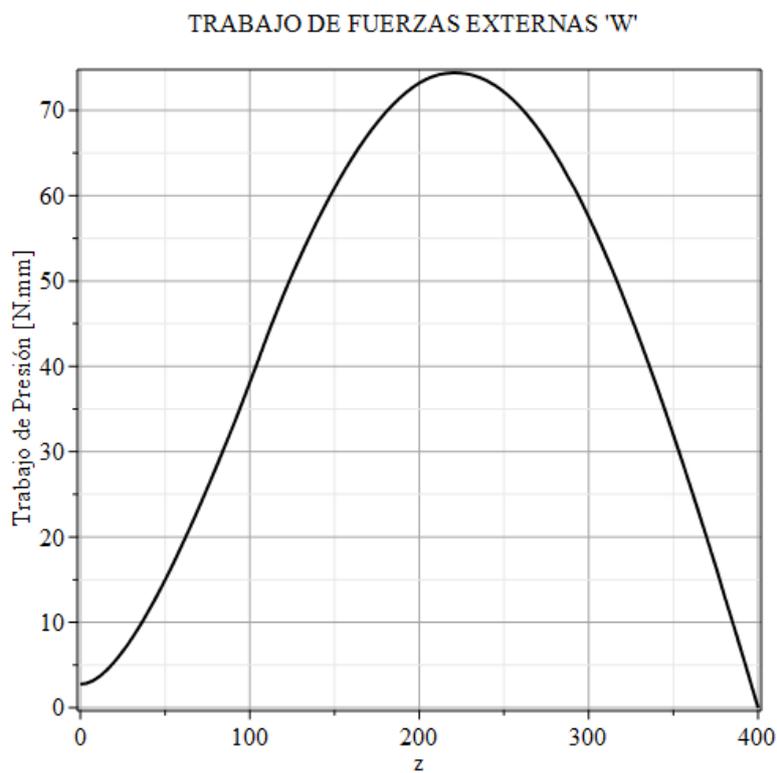


Fig. 5.30 Trabajo de las fuerzas externas [presión].

TRABAJO DE FUERZAS EXTERNAS ACUMULADO

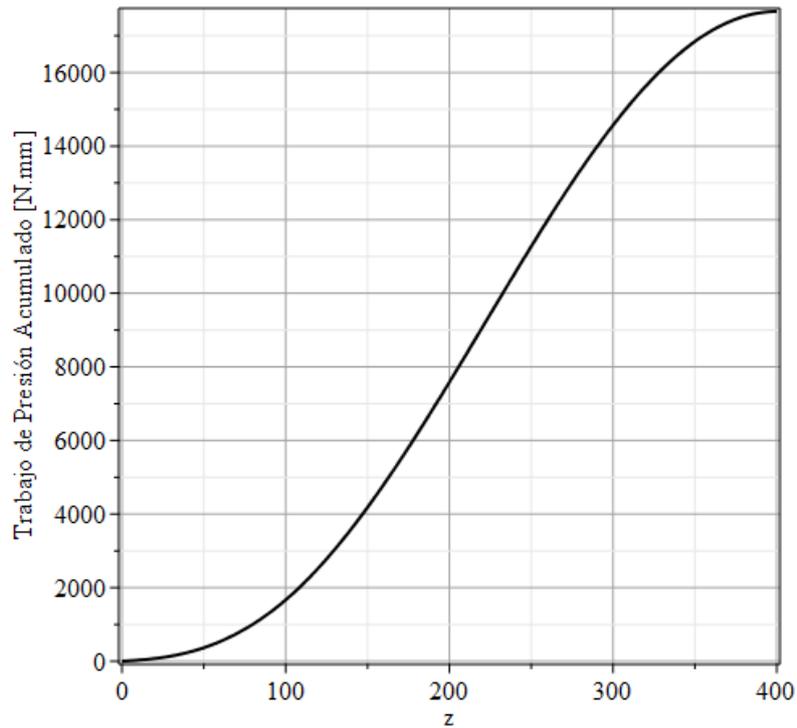


Fig. 5.31 Trabajo de fuerzas externas acumulado en el VC.

Tabla 5.6 Resultado del trabajo de presión acumulado [modelo modificado].

| Trabajo de Fuerzas Externas Acumulado en VC $W_{total} [N \cdot mm]$ |
|---|
| 17660.64 |

5.3.2. Análisis de Resultados

5.3.2.1. Interpretación mecánica y energética del resorte $s_1(z)$

El modelo de anillos inicial no es capaz de reproducir los resultados de un evento real de propagación rápida de fisuras. La causa principal de ello se asocia al hecho de representar un fenómeno axial con una serie de anillos contiguos cuya deformación se limita en el plano transversal a la dirección principal del crecimiento. Como se dijo anteriormente, esto se traduce en una ausencia de condiciones de transición entre secciones transversales adyacentes.

La introducción del vínculo elástico tangencial s_1 fuerza al modelo original a capturar el comportamiento y la forma real de la grieta. Este elemento actúa como modelo mecánico equivalente y guarda información no solo de las características geométricas de la deformación, sino que también introduce nuevos términos energéticos que deben ser interpretados físicamente.

Desde el punto de vista mecánico, el vínculo sirve de “comunicación” entre anillos contiguos. El hecho de que su constante de rigidez varíe axialmente hace que existan restricciones de transición en la deformación. Es decir, hace que la deformación experimentada por una sección de tubería se vea influenciada por el comportamiento de sus vecinas y que esta, a su vez, influya sobre las demás. En consecuencia, la configuración que adopta cada una de estas secciones es el resultado del balance de tres magnitudes que gobiernan el equilibrio estructural: la **rigidez propia del anillo** (de la viga de eje curvo y del material), la **fuerza ejercida por la presión** y la **rigidez global de la estructura** (resumida en la magnitud de s_1).

Esto último puede interpretarse con la ayuda de la *Fig. 5.21* y la *Fig. 5.32* que sigue a continuación. En ella, se divide el intervalo $[0 ; L_D]$ en dos, en función del signo que adopta $s_1(z)$. Se denomina z_S a la posición en la cual la constante del resorte es cero, $s_1 = 0$. Si se observa en la *Fig. 5.20*, esto ocurre a una distancia de aproximadamente 250 mm o $2D$. El volumen de control queda así dividido en una región $[0 ; 2D)$ con s_1 positivo, y otra $(2D ; 3.2D]$ con s_1 negativo.

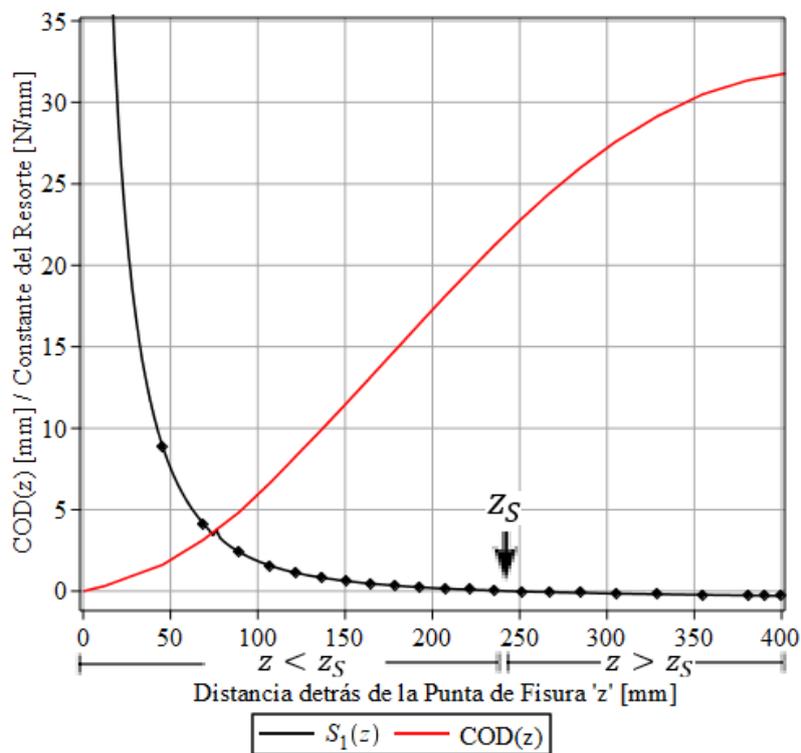


Fig. 5.32 Gráfico en conjunto de $s_1(z)$ y $COD(z)$, con división según $sign[s_1(z)]$.

(i) $z < z_S$ [$s_1(z) > 0$]: esta zona está caracterizada por una constante de resorte positiva. Esto implica que el vínculo actúa en oposición a la presión interna y limita la deformación de los anillos. Es decir, la fuerza sola de la presión llevaría a las paredes del tubo a deformarse más de lo que realmente se observa, porque la rigidez individual de estos anillos es insuficiente para sostener esa carga.

La influencia de la rigidez estructural de la tubería se hace más significativa en posiciones cercanas al vértice de la grieta y disminuye a medida que z aumenta. Esto se representa con el valor extremo $s_1 \rightarrow \infty$ en $z = 0$, que luego se reduce de manera asintótica a medida que z crece y ocurre la descompresión del gas.

(ii) $z = z_S$ [$s_1(z) = 0$]: en esta posición la influencia de las secciones aledañas se ausenta debido a que la fuerza de la presión y la rigidez del anillo están en completo equilibrio. Es otras palabras, el nivel de presión produce una deformación que coincide con la observada experimentalmente y, en consecuencia, la constante del resorte es nula.

Además, cabe destacar que $z = z_S$ coincide aproximadamente con el punto de inflexión de la curva $COD(z)$ de la *Fig. 5.32*. Allí se produce un cambio en la concavidad de las paredes de la tubería, desde una curvatura que apunta al interior de la tubería hacia una curvatura que apunta a su exterior (*Fig. 5.22*).

(iii) $z > z_S$ [$s_1(z) < 0$]: en esta última región, s_1 toma valores negativos apenas desviados del cero. Esto quiere decir que, el vínculo promueve la apertura de los anillos en vez de restringirla. La presión es insuficiente para generar la deformación observada y la rigidez del anillo tiende a cerrarlo. Es el vínculo quien aleja los extremos de las paredes fracturadas entre sí. El significado físico de este fenómeno no solo se asocia a la componente estructural de la tubería representada por s_1 , sino que también a su aporte energético.

Por último, debe mencionarse que, el modelar la rigidez estructural faltante durante el crecimiento de una grieta mediante una serie de resortes distribuidos axialmente es una herramienta que se ha probado efectiva, y se ha utilizado exitosamente en otras geometrías [4].

5.3.2.2. Análisis de las Energías

Energía Interna (Deformación y del Vínculo)

Las siguientes dos gráficas condensan la información presentada en la Sección 5.3.1.2. referente a las energías del sistema.

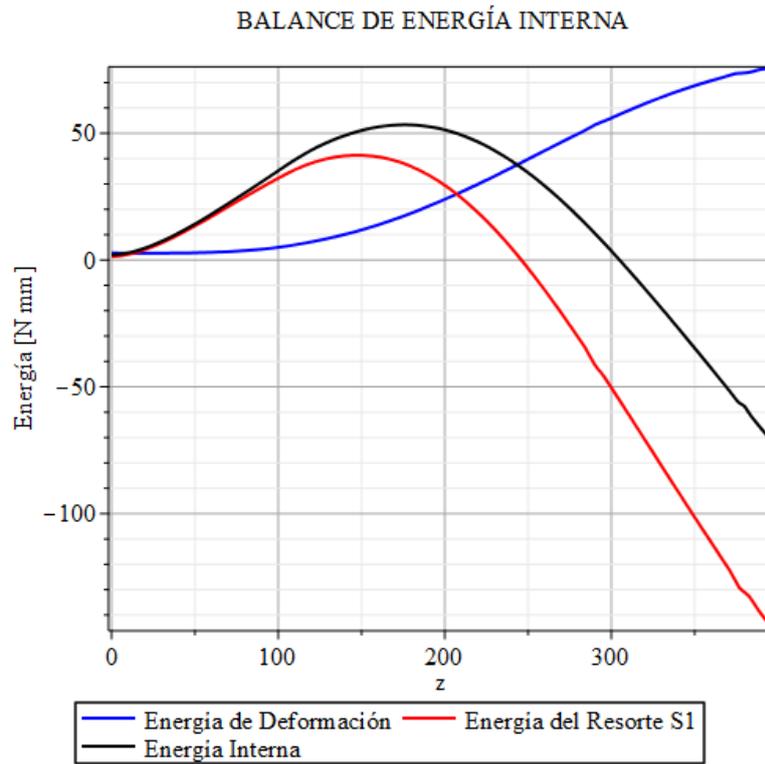


Fig. 5.33 Balance de energía interna (energía de deformación + energía del vínculo s_1).

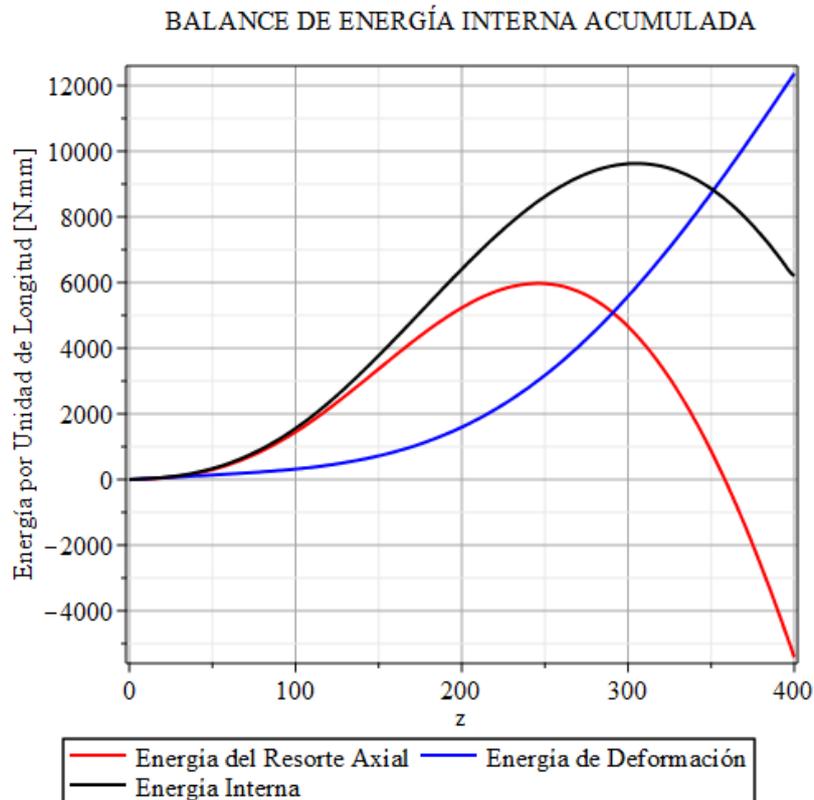


Fig. 5.34 Balance de energía interna acumulada en el VC.

En la *Fig. 5.33* puede observarse que la energía interna (curva negra) tiene un valor distinto de cero en el primer anillo, $E_{INT}[0] \neq 0$. Esta sección contiene la singularidad del vértice de la fisura y acumula únicamente energía de deformación, cuyo origen es el aumento del diámetro que causa la presión interna p_t . Es decir, en $z = 0$ el único tipo de energía existente es de deformación, porque que el resorte, a pesar de tener rigidez “infinita”, no contribuye a $E_{INT}[0]$. Esto último se debe a que la componente tangencial del campo de desplazamientos $u_N(x, 0)$ en el plano axial de la grieta $x_1 = L_x$ es nula.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_V(s_1)[0] &= s_1(0) \cdot u_N^2(x_1, 0) = \infty \cdot 0 \rightarrow 0 \\ E_{INT}[0] &= \mathcal{U}_S[0] + \underbrace{\mathcal{U}_V(s_1)[0]}_{=0} = \mathcal{U}_S[0] \end{aligned} \quad (5.25)$$

$E_{INT}[0]$ resultó de $2.08 \text{ N} \cdot \text{mm}$. Según el modelo de Irwin-Corten esta magnitud debería ser considerada como la única contribución a la fuerza impulsora. La ec. **(A.10)** utilizada por esta teoría conduce a valores del mismo orden de magnitud. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que Irwin y Corten solo consideraron la energía de extensión proveniente de la tensión circunferencial, mientras que en el presente modelo se le suma el aporte de la flexión.

La curva $E_{INT}[z]$ aumenta progresivamente hasta alcanzar un máximo y luego disminuye hasta alcanzar valores negativos. La forma que adopta es el resultado del balance entre $\mathcal{U}_S[z]$ y $\mathcal{U}_V(s_1)[z]$.

La energía de deformación (curva azul) parte del valor distinto de cero mencionado y es siempre positiva. Además, aumenta monótonicamente cuando las secciones se alejan de la punta de la fisura. Esto lo hace a un ritmo acelerado pero que decae a medida que la presión disminuye y las paredes del tubo adquieren una configuración estable. La *Tabla 5.5* demuestra que, en el modelo mecánico, el modo de deformación por flexión es la componente que más aporta a la energía \mathcal{U}_S .

Por otro lado, $\mathcal{U}_V(s_1)[z]$ contribuye positivamente a la energía interna cuando $s_1(z) > 0$, pero lo hace negativamente cuando $s_1(z)$ cambia de signo. En el punto z_S se cumple que $\mathcal{U}_V(s_1)[z_S] = 0$ y las curvas negra y azul se cruzan, es decir $E_{INT}[z_S] = \mathcal{U}_S[z_S]$.

La energía del vínculo $\mathcal{U}_V(s_1)$, calculada como $s_1(z) \cdot u_N^2(x_1, z)$, puede dividirse en dos componentes: una de energía de deformación $\mathcal{U}_{V,S}(s_1)$ y otra de energía cinética $\mathcal{U}_{V,K}(s_1)$.

$$\mathcal{U}_V(s_1)[z] = s_1(z) \cdot u_N^2(x_1, z) = \mathcal{U}_{V,S}(s_1)[z] + \mathcal{U}_{V,K}(s_1)[z] \quad (5.26)$$

Formalmente, $s_1(z) \cdot u_N^2(x_1, z)$ corresponde a una energía potencial pura. La distinción que propone la ec. **(5.26)** es una interpretación de la energía de este elemento mecánico ficticio, la cual surge de comparar el fenómeno RCP real con lo que los modelos inicial y modificado representan.

Como expresa el párrafo anterior, $\mathcal{U}_V(s_1)$ condensa energía de deformación y cinética. En posiciones cercanas a la punta de la fisura, en donde el movimiento de las paredes es despreciable y la restricción estructural de la tubería es significativa, la componente de deformación $\mathcal{U}_{V,S}(s_1)$ predomina. Por el contrario, a medida que la fisura se traslada, las paredes se aceleran al deformarse detrás de ella y la restricción de las secciones contiguas disminuye. En consecuencia, la componente cinética $\mathcal{U}_{V,K}(s_1)$ se hace más significativa y prevalece sobre $\mathcal{U}_{V,S}(s_1)$ hacia el final del volumen de control.

$$\begin{aligned}
 z \rightarrow 0, & \begin{cases} \text{restricción estructural significativa} \\ \text{movimiento de las paredes despreciable} \end{cases} \Rightarrow u_{V,S}(s_1) \gg u_{V,K}(s_1) \\
 z \rightarrow L_D, & \begin{cases} \text{restricción estructural despreciable} \\ \text{aceleración de las paredes de la tubería} \end{cases} \Rightarrow u_{V,S}(s_1) \ll u_{V,K}(s_1)
 \end{aligned}
 \tag{5.27}$$

En la Fig. 5.34 puede apreciarse el balance positivo de las magnitudes u_S y $u_V(s_1)$. El sistema acumula una determinada cantidad de energía interna pero que, a causa de los efectos cinéticos, resulta menor al total de energía de deformación que podría almacenar. Este proceso causa que una porción de la energía contenida en el volumen se disipe. Necesariamente este flujo de energía restante debe ser dirigido al vértice de la grieta y contribuir a la creación de nueva superficie.

Trabajo de la Presión

La Fig. 5.35 resume el perfil de presión y el trabajo que realiza sobre cada anillo, junto con el perfil de apertura de fisura.

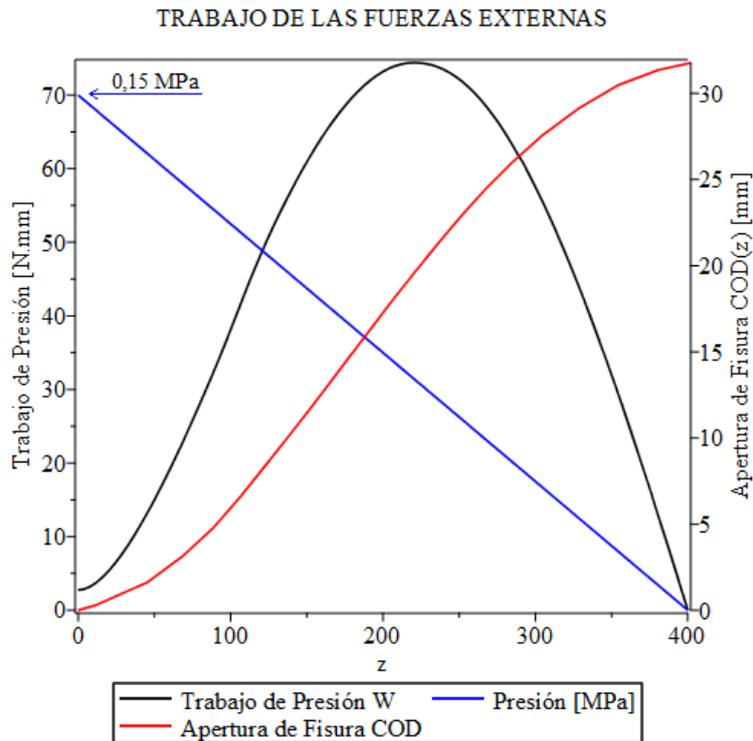


Fig. 5.35 Gráfico en conjunto de $W(z)$, $p(z)$ y $COD(z)$.

La distribución del trabajo de presión $W(z)$ adopta una forma de campana similar a la obtenida por el modelo de P. S. Leever [2]. De igual manera lo hace la curva del trabajo acumulado de la Fig. 5.30. La forma de campana se debe a que el trabajo se calcula como el producto de la fuerza de presión y el desplazamiento de las paredes de la tubería. La primera es una función decreciente, que resulta proporcional al perfil $p(z)$ (curva azul), mientras que la segunda es siempre creciente, lo que puede verse con la apertura de la fisura $COD(z)$ (curva roja). El comportamiento de estas dos magnitudes provoca un máximo en $W(z)$ a una distancia aproximada de $1.7 D$ del vértice de la grieta.

Como lo indica la *Fig. 5.31* la contribución energética del trabajo de presión es siempre positiva. Aumenta rápidamente en el inicio, pero se asienta en un valor casi constante hacia el final del volumen de control. Así, la presión actúa como la principal fuente externa que introduce energía al sistema.

5.3.2.3. La Fuerza Impulsora para la Propagación

Para implementar el cálculo de la fuerza impulsora dentro del algoritmo desarrollado se adaptó el balance propuesto por la ec. (2.23) a este caso particular.

$$\mathcal{G} = \frac{dW}{dA} - \frac{d\mathcal{U}_S}{dA} - \frac{dE_K}{dA} \quad (2.23)$$

Si el diferencial de área nueva creada dA se expresa como el producto del espesor constante h y el incremento diferencial de longitud de fisura da , resulta:

$$dA = h \cdot da \quad (5.28)$$

Como el avance de la fisura ocurre a velocidad constante, da es igual al producto de esta velocidad \dot{a} y el diferencial de tiempo dt asociado a este incremento:

$$da = \dot{a} \cdot dt \quad (5.29)$$

Al reemplazar estas dos últimas expresiones en la ecuación de \mathcal{G} se obtiene:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\dot{a}} \cdot \frac{d}{dt} [W - (\mathcal{U}_S + E_K)] \quad (5.30)$$

donde la suma $\mathcal{U}_S + E_K$ es lo que antes se definió como energía interna E_{INT} .

En el contexto de este modelo, la ec. (5.30) no representa un balance de energías localizado alrededor de la singularidad del vértice de la fisura, sino que se trata de un balance realizado sobre todo el volumen de control. No solo es relevante lo que ocurre localmente en el vértice, sino que también lo son todos los procesos que tienen lugar entre los límites (f) y (e) de dicho volumen, *Fig. 4.1*. Esto mismo permite reemplazar los diferenciales por deltas que involucran estos extremos (f) y (e):

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1}{h\dot{a}\Delta t} \cdot \Delta [W - (\mathcal{U}_S + E_K)] \\ &= \frac{1}{h\dot{a}\Delta t} \cdot [W + (\mathcal{U}_S + E_K)_{(f)} - (\mathcal{U}_S + E_K)_{(e)}] \\ &= \frac{1}{h\dot{a}\Delta t} \cdot [W + E_{INT(f)} - E_{INT(e)}] \end{aligned} \quad (5.31)$$

en donde W es el trabajo total realizado por la presión W_{total} ; $E_{INT(f)}$ es la energía interna que almacena la estructura en la sección transversal que contiene la punta de la fisura

$E_{INT}[0]$, y por último, $E_{INT(e)}$ es la energía interna total de la tubería en el extremo final del volumen, es decir, la suma de $\mathcal{U}_{S,total}$ y $\mathcal{U}_{V,total}(s_1)$. El intervalo de tiempo Δt sobre el cual se realiza este balance debe ser necesariamente el tiempo que tarda la fisura en atravesar la longitud L_D , el tiempo de descarga t_D . Entonces, la ec. (5.31) puede reescribirse como:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{h\dot{a}t_D} \cdot \{W_{total} + E_{INT}[0] - [\mathcal{U}_{S,total} + \mathcal{U}_{V,total}(s_1)]\} \quad (5.32)$$

Para interpretar lo que la ec. (5.32) propone, debe pensarse como si la propagación ocurriera en pasos discretos bajo las condiciones de estado cuasi-estacionario. En cada intervalo de tiempo Δt , cierta cantidad de energía provista por el fluido como fuente externa ingresa al volumen de control. Este aporte se produce de dos maneras: (i) en forma de energía de deformación inicial $E_{INT}[0]$ y (ii) en forma de trabajo de presión W_{total} . Como se fue mencionado, la primera de ellas se asocia al pequeño aumento de diámetro de la tubería y se almacena como energía potencial. La segunda forma, relacionada con la acción de la presión sobre las aletas de la tubería detrás de la fisura, es la contribución más significativa y la principal causa de la fractura. Los valores de la *Tabla 5.6*, en comparación con los de la *Tablas 5.4-5*, confirman esto último y coinciden con lo afirmado al respecto por otros autores [5]. Toda esta energía se transforma en energía de deformación y cinética, y el resultante de ese balance se disipa al crear nueva superficie y sostener la propagación. Es decir, la fisura crece si resta un excedente suficiente entre la energía que entra y la que reside almacenada como energía interna. En consecuencia, cada término de la ec. (5.23) juega un rol importante como se describe a continuación:

- W_{total} y $E_{INT}[0]$ contribuyen siempre al crecimiento, pues son magnitudes positivas que se encuentran sumando.
- $\mathcal{U}_S[z]$ es siempre positiva y da como resultado una energía $\mathcal{U}_{S,total}$ también positiva. Sin embargo, al estar restando en (5.23) y al contrario de los términos anteriores, se opone al crecimiento. Es decir, cuanto mayor sea la energía de deformación almacenada en las paredes menor será la energía restante y disponible para la propagación.
- La influencia de $\mathcal{U}_V(s_1)[z]$ es algo más compleja debido a su cambio de signo. Una posible explicación de su comportamiento es la siguiente: cercano al vértice de la fisura los efectos de inercia (representados por $\mathcal{U}_{V,K}(s_1)[z]$) y la restricción estructural (principalmente $\mathcal{U}_{V,S}(s_1)[z]$) resisten la apertura de las paredes. Sin embargo, a distancias algo más alejadas, cuando se invierte la curvatura de estas paredes, es la inercia nuevamente la que previene su cierre. La combinación de estos dos mecanismos da como resultado un valor de $\mathcal{U}_{V,total}(s_1)$ negativo que causa un aumento de la fuerza impulsora [3].
- El balance global de $\mathcal{U}_S[z]$ y $\mathcal{U}_V(s_1)[z]$ conducen a una energía interna $E_{INT,total}$ positiva que almacena la estructura. Entonces, $E_{INT,total}$ representa la cantidad no contribuyente a la propagación.

Como resultado, se crea un área de $2hL_D$ y la grieta avanza en pasos de longitud igual al tamaño del volumen de control. Con cada incremento $\Delta a = L_D$, \mathcal{G} se calcula del total de energía contenida en el volumen y que fluye entre (f) y (e) [6]. Este parámetro mide la energía que se disipa en la fractura por unidad de área creada. Según la condición de propagación (3.10), si los datos ingresados al modelo representan las condiciones mínimas

de presión y temperatura (p_c y T_c) capaces de sostener el RCP, la tasa de liberación calculada de esta manera coincidirá con la resistencia dinámica a la fractura G_D del polímero. Este método de determinación de G_D se conoce como *modo de generación* del análisis de RCP, y difiere del denominado *modo de propagación* que requiere conocer la dependencia de G con \dot{a} [7].

Utilizando los resultados de las *Tablas 5.4-6* se calculó G para este caso de estudio:

Tabla 5.7 Resultado de la fuerza impulsora para la propagación.

| Fuerza Impulsora o Tasa de Liberación de Energía G [$N \cdot mm/mm^2$] o [kJ/m^2] |
|---|
| 2.3 |

Este resultado es del orden de magnitud y está de acuerdo con aquellos obtenidos por otros autores que han estudiado casos similares utilizando otros métodos numéricos [2].

REFERENCIAS: CAPÍTULO (5)

- [1] C. W. Lim, C. M. Wang, and S. Kitipornchai, "Timoshenko curved beam bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions," *Arch. Appl. Mech.*, vol. 67, no. 3, pp. 179–190, 1997, doi: 10.1007/s004190050110.
- [2] P. Leever, "An engineering model for rapid crack propagation along fluid pressurized plastic pipe," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 96, pp. 539–557, 2012, doi: 2012.09.001.
- [3] A. Ivankovic and G. P. Venizelos, "Rapid crack propagation in plastic pipe: Predicting full-scale critical pressure from S4 test results," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 59, no. 5, pp. 607–622, 1998.
- [4] M. F. Kanninen, "An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest," *Int. J. Fract.*, vol. 9, no. 1, pp. 83–92, 1973, doi: 10.1007/BF00035958.
- [5] P. Venizelos and C. J. Greenshields, "Fast Brittle Fracture of Plastic Pipes Part 2 - Gas pressurised," vol. 26, no. 9, pp. 394–403, 1998.
- [6] A. Ivankovic, I. Demirdzic, J. G. Williams, and P. S. Leever, "Application of the finite volume method to the analysis of dynamic fracture problems," *Int. J. Fract.*, vol. 66, no. 4, pp. 357–371, 1994, doi: 10.1007/BF00018439.
- [7] Z. Zhuang and P. E. O'Donoghue, "Material fracture toughness determination for polyethylene pipe materials using small scale test results," *Acta Mech. Sin. Xuebao*, vol. 13, no. 1, pp. 78–80, 1997, doi: 10.1007/bf02487832.

CAPÍTULO N° VI

CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO

ESTUDIO Y MODELADO DEL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS

6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO

6.1. Conclusiones Generales

En este trabajo se abordó el estudio de la propagación rápida de fisuras asistido por el desarrollo de una herramienta computacional.

En un principio, se realizó una extensiva revisión de la bibliografía pertinente. Su objetivo fue comprender la naturaleza del fenómeno desde el punto de vista teórico y experimental, para representarlo numéricamente de manera correcta. La lectura se enfocó también en la revisión de los principales modelos semi-analíticos, modelos de elementos y de volúmenes finitos preexistentes.

Se estudiaron los dos métodos experimentales diseñados para reproducir el RCP en tuberías plásticas y determinar las condiciones críticas de presión y temperatura que lo inducen: el test a escala completa y a escala laboratorio. De la descripción y del protocolo de los ensayos se comprendió que la presencia de los baffles internos y la jaula de contención en el S4T son algunos de los factores principales que modifican la dinámica del gas, y que influyen en la falta de correlación con los resultados del FST. De esta manera, se identificó la relevancia que tiene la asistencia computacional en el análisis de la información obtenida por estos medios.

Desde un punto de vista teórico, y basado en la documentación del gran número de ensayos realizados, se abordaron los tres aspectos principales del RCP: la *dinámica del fluido*, la *deformación de las paredes de la tubería*, y *el comportamiento a la fractura del material*, así como también su interacción mutua.

En cuanto a la dinámica del fluido, se distinguieron dos procesos diferentes: el flujo de retroceso del gas, que genera la descompresión parcial en la punta de la fisura, y el flujo de escape a través de la grieta, el cual se extiende sobre una longitud característica y descomprime totalmente a la tubería. Basado en la comprobación experimental, se optó por representar el primer fenómeno con una ecuación algebraica que vincula la presión inicial y la presión en el vértice de la grieta a través de las propiedades físicas del gas. A su vez, se adoptó un perfil lineal de descompresión para representar el segundo proceso. Esto se lo hizo motivado por la facilidad que implica utilizar funciones lineales, y apoyado también por resultados experimentales.

En segundo lugar y relacionado con la configuración fracturada de la tubería, se hizo especial énfasis en las características que debe cumplir el campo de desplazamientos que describe a sus paredes deformadas. Se determinó que la *inextensibilidad* es una restricción principal que debe cumplir cualquier modelo mecánico que la represente.

En lo que respecta a la fractura del material, se revisaron los conceptos fundamentales de la Mecánica de Fractura haciendo hincapié en la descripción de los procesos dinámicos. Se seleccionó la formulación energética y el parámetro conocido como *fuerza impulsora de la propagación* o *tasa de liberación de energía* para representar el comportamiento del polímero. A su vez, se identificó la necesidad de incluir los efectos de inercia dentro del balance de energías que se realiza para el cálculo de dicho parámetro.

Se logró distinguir entre los dos estadios principales que caracterizan al RCP: el transitorio inicial y la propagación *cuasi-estacionaria* subsiguiente. Se concluyó que, este segundo estado es el de mayor relevancia y que caracteriza a una fisura que crece a velocidad constante y a una configuración deformada de la tubería que se traslada con ella a la misma

velocidad. Por último, se estudiaron los principales factores que influyen sobre el comportamiento de la tubería durante el agrietamiento a velocidad constante: el relleno de la zanja, las tensiones residuales, el patrón del crecimiento de la fisura, la temperatura, el espesor de pared, la velocidad de propagación, las propiedades del gas y la presión, el módulo elástico, la densidad y la no linealidad mecánica del material.

Una vez identificados todos los procesos físicos relevantes y determinada la manera de representarlos matemáticamente, se desarrolló una herramienta novedosa que utiliza los métodos formales del Cálculo de Variaciones para reproducir el RCP dado un conjunto de datos de entrada: *dimensiones de la tubería, propiedades del material, velocidad de propagación, presión, longitud característica de decaimiento y perfil de apertura de fisura*. Este modelo se basó en la naturaleza cuasi-estacionaria del fenómeno para concentrar el análisis a una región acotada de la tubería libre de los efectos transitorios iniciales. Se definió un volumen de control que se extiende desde el vértice de la fisura hasta el punto donde se produce la descompresión completa del gas. Se consideró que esta porción de tubería se traslada junto con la fisura y que su geometría deformada no cambia en el tiempo. El análisis mecánico se basó en la división del volumen en una serie de anillos contiguos, cuya deformación causada por la presión interna obedece el comportamiento de una viga de eje curvo bajo las hipótesis de Euler-Bernoulli. Sus ecuaciones de movimiento fueron obtenidas aplicando las técnicas del cálculo de variaciones, y se implementó el método variacional de Ritz para resolver numéricamente el caso estático.

Se comprobó la correcta implementación del método en Maple Software contrastando los resultados así obtenidos con soluciones analíticas conocidas. Se concluyó que las aproximaciones no difieren significativamente de la solución exacta cuando son construidas con polinomios de grado ≥ 7 .

La factibilidad del modelo para representar el RCP se puso a prueba analizando su capacidad de reproducir los resultados experimentales y de simulación de un caso de estudio tomado como referencia. De una primera simulación se detectaron dos problemas principales: la falta de condiciones de transición en la deformación entre anillos vecinos que lleva a que se comporten de manera independiente, y la dificultad del cálculo de la energía cinética. Para resolver estos problemas se modificó el sistema mecánico inicial a través de la inclusión de un resorte tangencial ubicado en el plano axial de la fisura, y cuya constante de rigidez varía axialmente. Esta variación se ajustó a una función matemática de manera de reproducir la geometría real observada de la fisura.

Se realizó una segunda simulación con el modelo modificado y se calcularon todas las energías puestas en juego en el volumen de control. Se determinó que la acción de la presión sobre las paredes de la tubería fracturada es la principal fuerza que impulsa el agrietamiento. Se identificó la energía de deformación almacenada como una fuente de energía interna que resta energía disponible para la creación de nueva superficie. Por otro lado, se realizó un análisis e interpretación del significado mecánico y energético del vínculo mecánico introducido. Se concluyó que éste representa la rigidez estructural de la tubería y la interacción faltante entre anillos vecinos que modula la apertura de la fisura. Se propuso dividir su energía en dos componentes: una de deformación y otra cinética. Estos dos aportes varían su magnitud a lo largo del eje de la tubería y contribuyen finalmente de manera negativa a la energía interna.

El cálculo del parámetro \mathcal{G} fue implementado dentro del algoritmo como el resultado de un balance energético entre el trabajo de la presión y la energía interna almacenada en el volumen de control. Para este caso de estudio se obtuvo un resultado de 2.3 kJ/mm^2 que está de acuerdo con otros resultados reportados en bibliografía.

El modelo así desarrollado no es predictivo, sino que brinda asistencia en la interpretación de los resultados obtenidos por ensayos experimentales como el S4. Esto lo logra al permitir

obtener la distribución de las energías puestas en juego durante el proceso y hacer posible el cálculo de la tasa de liberación de energía y parámetros del material, algo que no podría realizarse de otra manera. Finalmente cabe mencionar que el algoritmo es una pieza complementaria fundamental del proyecto de construcción del equipamiento necesario para realizar test S4 de la División “Ciencia e Ingeniería de Polímeros” del Instituto Nacional de Tecnología y Ciencia de Materiales (INTEMA).

6.2. Trabajos a Futuro

A continuación, se proponen algunas actividades a desarrollar como trabajo futuro.

➤ Sobre el modelo actual:

- Realizar una verificación y validación más extensiva con un mayor número de casos de estudio.
- Adimensionalizar la formulación del modelo: lograr una resolución independiente de las dimensiones del problema traería ciertas ventajas, por ejemplo, sería posible utilizar la función $s_1(z)$ de manera casi universal para todos los casos en donde la geometría de la fisura no varíe apreciablemente.
- Considerar otras fuentes de disipación de energía: el modelo considera la creación de nueva superficie como única causa de disipación energética, sin embargo, se ha detectado que la tubería se calienta apreciablemente durante su fractura. La incorporación de la energía térmica al volumen de control permitiría estudiar la relevancia de esta componente y hacer el cálculo más completo.

➤ Pasos hacia un modelo predictivo:

- Reemplazar la resolución del caso estático simple por una formulación puramente dinámica desde las ecuaciones diferenciales.
- Ampliar el modelo a una representación tridimensional del volumen de control: esto permitiría capturar la influencia axial de la deformación sin tener que incluir un vínculo mecánico equivalente. Se sugiere, utilizar el cálculo de variaciones aplicado a elementos cilíndricos tipo cáscara.

ANEXOS

ESTUDIO Y MODELADO DEL FENÓMENO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS

ANEXOS

ANEXO 'A' – Deducción de las Ecuaciones (3.11) y (3.12)

Para hallar la expresión de la fuerza impulsora (3.11) es necesario, en una primera instancia, encontrar la forma de los campos tensionales y de deformaciones que representan al sistema mecánico. Conociendo las tensiones y deformaciones es posible calcular la energía de deformación almacenada por unidad de volumen de tubería; e integrando en todo el sistema, puede calcularse la energía total almacenada. Por último, la expresión de la tasa de liberación de energía se halla evaluando el cambio de energía interna por incremento de área de fisura, según indican las ecuaciones de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica presentadas en el Capítulo 2.

Campos tensionales y de deformación.

Se considera un sistema compuesto por una tubería de diámetro D y espesor h , sometida a una presión interna inicial p_0 . Se trata de un sólido de revolución formado por dos superficies concéntricas separadas por una distancia h , y que se encuentra cargado simétricamente respecto de su eje central. En él se generan tensiones que se distribuyen uniformemente. Si su espesor es despreciable respecto de su diámetro o longitud ($D \gg h$), puede aplicarse la Teoría de Membranas para describir el estado tensional del sistema. Se trata entonces, de un tubo de pared delgada.

Según esta teoría, un sólido solicitado por una presión interna p está sometido a un estado plano de tensiones, pues la tensión normal a su superficie es cero. Si bien esta tensión normal (σ_3) varía a lo largo del espesor desde el valor de la presión p hasta 0 en la superficie libre, la hipótesis de la membrana permite despreciar su influencia local y considerarla como nula, $\sigma_3 = 0$. Las tensiones en las otras dos direcciones principales (σ_1 y σ_2 contenidas en el plano de la superficie) también varían en el espesor. Sin embargo, como el espesor es pequeño en comparación con las demás dimensiones del sólido, puede asumirse que se distribuyen uniformemente a lo largo de dicha distancia. Teniendo en cuenta estas consideraciones, el equilibrio del sistema queda descrito por la siguiente expresión conocida como ecuación de Laplace:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \quad (\text{A.1})$$

Esta expresión relaciona las tensiones en las direcciones principales contenidas en el plano de la superficie de revolución (direcciones 1 y 2) en función de la presión, el espesor y los radios geométricos que describen al sólido (ρ_i radio que describe la revolución en la dirección i). Cabe destacar que al considerar todas las tensiones constantes a lo largo del espesor, las deformaciones así calculadas son también constantes [1].

En el caso particular de un cilindro, las direcciones principales 1 y 2 coinciden con la dirección circunferencial (denominada C o $\theta\theta$) y longitudinal (denominada L o zz). El radio circunferencial coincide con el radio del cilindro $\rho_1 = R$, mientras que el radio longitudinal es igual a infinito $\rho_L = \infty$. Si el cilindro sometido a presión interna está abierto en sus extremos, la única componente de tensión distinta de cero es la circunferencial, y resulta:

$$\sigma_c = \sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{h} \quad (\text{A.2})$$

Si se define $D^* \equiv D/h$ y considera el radio interno $R_i = (D - 2h)/2 = h(D^*/2 - 1)$, en el caso particular modelo de Irwin-Corten, la presión circunferencial resulta [2]:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_o R_i}{h} = p_o \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right] \quad (\text{A.3})$$

El tensor de tensiones $\underline{\sigma} = \sigma_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$ en coordenadas cilíndricas $\{r, \theta, z\}$ es entonces:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_o \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

donde \otimes denota el producto tensorial de los vectores de base \underline{e}_i y \underline{e}_j . Nuevamente, la tensión en la dirección radial $\sigma_{rr} = \sigma_3$ es cero al considerar al tubo como un sólido de pared delgada. También es cero la tensión en la dirección longitudinal σ_{zz} , pues de lo contrario el cociente σ_{zz}/ρ_L de la ec. (A.1) tendería a infinito.

Si el material se comporta de manera lineal elástica, puede adoptarse la Ley de Hooke Generalizada como ley constitutiva

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} [\underline{\sigma} - \nu \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{I}] \quad (\text{A.5})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}]$$

donde $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$ representa el tensor de pequeñas deformaciones; ν y E las constantes elásticas ingenieriles; el operador $\text{tr}(\cdot)$ la traza del tensor; e $\underline{I} = \delta_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$ el tensor identidad de segundo orden. El símbolo σ_{kk} representa la suma de las componentes diagonales del tensor de tensiones según la convención de Einstein, $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, y δ_{ij} el símbolo de Kronecker;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Dado el estado tensional descrito por (A.4), el tensor de deformaciones resulta;

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{p_o}{E} \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_o}{E} \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_o}{E} \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Energía de deformación acumulada.

Una vez halladas las expresiones del estado de tensiones y deformaciones de las paredes de la tubería, es necesario encontrar la energía de deformación \mathcal{U}_S que acumula el sistema y

que se libera durante el evento de fractura. La densidad de energía de deformación u_s , energía por unidad de volumen, se calcula como:

$$du_s = \underline{\sigma} : d\underline{\varepsilon} \quad (\text{A.7})$$

donde el operador $d(\cdot)$ denota el diferencial y $(\cdot) : (\cdot)$ denota una doble contracción entre los tensores. Considerando que $d\varepsilon = d\sigma / E$ en este caso simplificado, la integración resulta:

$$u_s = \int \underline{\sigma} : d\underline{\varepsilon} = \int \sigma \frac{d\sigma}{E} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{p_o^2}{2E} \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right]^2$$

Cabe aclarar que solo un término resulta distinto de cero de efectuar el producto de la doble contracción. De manera ilustrativa:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} &= \sigma_{ij} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) : \varepsilon_{kl} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) = \sigma_{ij} \varepsilon_{kl} (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k) (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_l) = \sigma_{ij} \varepsilon_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

según la definición de la operación de doble contracción de tensores y el producto escalar entre vectores de base $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$. Luego, para el caso dado por los tensores (A.4) y (A.6) el único término no nulo es $\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} = \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta}$.

La energía de deformación se halla integrando la magnitud u_s en el volumen V de la tubería, que en coordenadas cilíndricas resulta:

$$u_s = \int u_s dV = \iiint u_s r dr d\theta dz \quad (\text{A.8})$$

siendo $dV = r dr d\theta dz$ el elemento de volumen diferencial y $|J| = r$ el Jacobiano.

Ahora, es necesario evaluar los límites de integración. La coordenada radial r varía entre el radio interno $R_i = (D - 2h)/2$ y el radio externo $R_e = D/2$. Si se define el radio medio R como:

$$R = \frac{R_i + R_e}{2} = \frac{D - h}{2} = \frac{D(D^* - 1)}{2D^*} \quad (\text{A.9})$$

los límites de integración para esta coordenada resultan $R \pm h/2$ respectivamente. La coordenada angular θ varía entre 0 y 2π . Por último, si se tiene en cuenta que únicamente interesa la energía de deformación almacenada en una longitud de tubería igual a la extensión de la fisura, la coordenada longitudinal z varía entre 0 y a , donde a representa la longitud de fisura. Es decir, solo se calcula la energía que se encontraba almacenada previo a la fractura, y que se libera completamente cuando la fisura crece una longitud a . La integración resulta entonces:

$$\begin{aligned} u_s &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{R-h/2}^{R+h/2} \frac{p_o^2}{2E} \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right]^2 r dr d\theta dz \\ &= \frac{p_o^2}{2E} \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right]^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{R-h/2}^{R+h/2} r dr d\theta dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p_o^2}{2E} \left[\frac{D^*}{2} - 1 \right]^2 z \Big|_0^a \theta \Big|_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{R-h/2}^{R+h/2} \\
 &= \frac{\pi p_o^2 a}{2E} \frac{[D^* - 2]^2}{4} \left\{ (R + h/2)^2 - (R - h/2)^2 \right\} \\
 &= \frac{\pi p_o^2 a}{8E} [D^* - 2]^2 \{2Rh\}
 \end{aligned}$$

Al reemplazar el radio medio R por $\frac{D(D^*-1)}{2D^*}$ y el diámetro normalizado por D/h :

$$U_S = \frac{\pi p_o^2 a}{8Eh} [D - 2h]^2 [D - h] \quad (\text{A.10})$$

Tasa de liberación de energía

Las hipótesis del modelo antes mencionadas indican que es la relajación de las tensiones y la liberación de la energía almacenada lo que impulsa la propagación de la fisura y la creación de nueva superficie. La tasa de liberación de energía puede calcularse como:

$$G = -\frac{1}{h} \frac{\partial [\Delta U_S]}{\partial a} = \frac{1}{h} \frac{\partial U_S}{\partial a} \quad (\text{A.11})$$

El cambio de energía de deformación es la diferencia entre la energía luego de la fractura y aquella almacenada en la tubería sin fisura. En otros términos, $\Delta U_S = U_S(\text{fisura}) - U_S(\text{sin fisura})$, donde el valor $U_S(\text{fisura})$ resulta nulo si toda la energía acumulada es liberada y la presión detrás de la punta de fisura es cero.

Si se ignora la expansión del fluido, el diámetro de la tubería detrás del frente de fisura permanece igual al de una sección frente a la fisura. Si las superficies de fractura se separan para mantener dicho diámetro a medida que las paredes se contraen de manera circunferencial, es posible usar como parámetro el diámetro D (sin tener que considerar un diámetro deformado y un diámetro sin deformar) [2]. De esta manera, al derivar la expresión (A.11) respecto de a y dividirla por el espesor h , resulta la expresión cerrada buscada:

$$G = \frac{\pi p_o^2}{8Eh^2} (D - 2h)^2 (D - h) \quad (\text{3.11})$$

Al resolver para la presión, resulta:

$$p_o = \frac{1}{(D^* - 2)} \sqrt{\frac{8EG}{\pi D} \frac{D^*}{D^* - 1}} \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, la ecuación (3.12) surge de la ecuación (A.12) reemplazando E por el valor dinámico del material y G por el valor de resistencia dinámica del material a la propagación de fisuras.

ANEXO 'B' – Relaciones Cinemáticas en Coordenadas Polares (4.7)

El uso de las coordenadas polares $\{r, \theta\}$ facilita el abordaje matemático para describir el comportamiento mecánico de vigas de eje curvo de geometría circular. Para ello, es necesario expresar las magnitudes vectoriales y tensoriales, inicialmente en coordenadas cartesianas $\{x, y\}$, en este nuevo sistema coordenado. Cabe aclarar que esta coordenada x corresponde al sistema cartesiano y es diferente de la x utilizada en el análisis del Capítulo 4 para representar la coordenada que recorre la línea media de la viga curva. Aquí, la x será utilizada simplemente para hallar las expresiones (4.7) adoptando la convención ampliamente aceptada de llamar x e y a las coordenadas rectangulares en el plano (Fig. B.1).

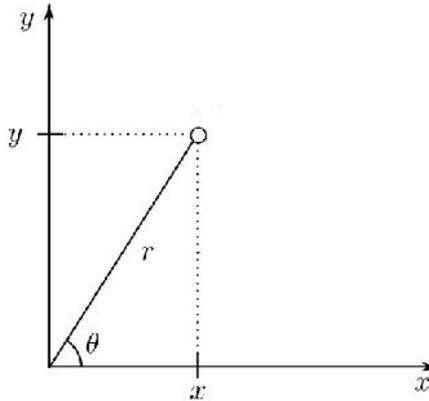


Fig. B.1 Transformación de coordenadas.

La transformación del sistema de referencia $\{x, y\} \leftrightarrow \{r, \theta\}$ responde a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\theta) \quad ; \quad y = r \cdot \sin(\theta) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

De ellas pueden calcularse las matrices Jacobianas que caracterizan la transformación lineal:

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix} \wedge |J| = r \\ J_{ij}^{-1} &= \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} & y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ -y/(x^2 + y^2) & x/(x^2 + y^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Los operadores diferenciales $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ resultan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Transformación de Vectores

En este contexto, los vectores, como por ejemplo el campo de desplazamientos \underline{U} , deben representar entidades físicas independientemente del sistema de referencia adoptado. Debido a esto, responden a determinadas reglas de transformación de coordenadas al cumplir la restricción de invarianza impuesta por la ec. (B.4).

$$\underline{U} = u_x \cdot \underline{e}_x + u_y \cdot \underline{e}_y = u_r \cdot \underline{e}_r + u_\theta \cdot \underline{e}_\theta \quad (\text{B.4})$$

donde u_i es la componente del vector en la dirección i y \underline{e}_i su vector de base.

Los vectores de base están relacionados por las expresiones (B.5), que dan lugar a las reglas de transformación de las componentes (B.6).

$$\begin{cases} \underline{e}_r = \cos(\theta) \cdot \underline{e}_x + \sin(\theta) \cdot \underline{e}_y \\ \underline{e}_\theta = -r \cdot \sin(\theta) \cdot \underline{e}_x + r \cdot \cos(\theta) \cdot \underline{e}_y \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\underline{U}^{(x,y)} = \underline{J} \cdot \underline{U}^{(r,\theta)} \rightarrow u_i^{(x,y)} = J_{ij} u_j^{(r,\theta)} \quad (\text{B.6})$$

$$\underline{U}^{(r,\theta)} = \underline{J}^{-1} \cdot \underline{U}^{(x,y)} \rightarrow u_i^{(r,\theta)} = J_{ij}^{-1} u_j^{(x,y)}$$

Finalmente, la transformación de las componentes del vector \underline{U} pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot u_r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot u_\theta = \cos(\theta) \cdot u_r - \sin(\theta) \cdot u_\theta \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial r} \cdot u_r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot u_\theta = \sin(\theta) \cdot u_r + \cos(\theta) \cdot u_\theta \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Transformación de Tensores de Segundo Orden (Tensor de Deformación $\underline{\epsilon}$)

Al igual que las magnitudes vectoriales, los tensores de orden superior como el tensor de deformaciones $\underline{\epsilon}$, deben representar entidades físicas invariantes respecto de la referencia adoptada. En este caso, las reglas de transformación de sus componentes resultan:

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}^{(x,y)} &= \underline{J} \cdot \underline{\epsilon}^{(r,\theta)} \cdot \underline{J}^T \rightarrow \epsilon_{ij}^{(x,y)} = J_{ij} \epsilon_{ij}^{(r,\theta)} J_{ij}^T \\ \underline{\epsilon}^{(r,\theta)} &= \underline{J}^{-1} \cdot \underline{\epsilon}^{(x,y)} \cdot \underline{J}^{-1T} \rightarrow \epsilon_{ij}^{(r,\theta)} = J_{ij}^{-1} \epsilon_{ij}^{(x,y)} J_{ij}^{-1T} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde $(\cdot)^T$ implica la transposición de la matriz Jacobiana.

Para hallar las componentes del tensor $\underline{\epsilon}^{(r,\theta)}$ en función de las componentes de $\underline{U}^{(r,\theta)}$ es necesario realizar tres pasos sucesivos. En el primero de ellos, debe expresarse $\underline{\epsilon}^{(x,y)}$ en términos de u_r y u_θ , con la ayuda de las ec. (B.3) y (B.7). Luego, debe hallarse $\underline{\epsilon}^{(r,\theta)}$ en términos de ϵ_{xx} , ϵ_{yy} y ϵ_{xy} a través de (B.8). Finalmente, deben combinarse las expresiones resultantes de los pasos anteriores y encontrar así, las ecuaciones matemáticas buscadas.

(i) Paso (1)

Para la componente ε_{xx} del tensor $\underline{\varepsilon}^{(x,y)}$ expresado en $\{x, y\}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot (u_x) = \left(\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot (\cos(\theta) \cdot u_r - \sin(\theta) \cdot u_\theta) \\ &= \dots = \cos^2(\theta) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) + \sin^2(\theta) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Luego, para la componente ε_{yy} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (u_y) = \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot (\sin(\theta) \cdot u_r + \cos(\theta) \cdot u_\theta) \\ &= \dots = \cos^2(\theta) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \sin^2(\theta) \frac{\partial u_r}{\partial r}\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

Finalmente, para las componentes $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (u_x) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot (u_y)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot (\cos(\theta) \cdot u_r - \sin(\theta) \cdot u_\theta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot (\sin(\theta) \cdot u_r + \cos(\theta) \cdot u_\theta)\right] \\ &= \dots = \frac{\cos^2(\theta)}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \\ &\quad + \frac{\sin^2(\theta)}{2} \left(\frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

(ii) Paso (2)

Las reglas de transformación **(B.8)** permiten expresar las componentes ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ y $\varepsilon_{r\theta}$ a partir de ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{xy} .

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \frac{-\sin(\theta)}{r} \\ \sin(\theta) & \frac{\cos(\theta)}{r} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \cos(\theta) + \varepsilon_{xy} \sin(\theta) & -\varepsilon_{xx} \frac{\sin(\theta)}{r} + \varepsilon_{xy} \frac{\cos(\theta)}{r} \\ \varepsilon_{yx} \cos(\theta) + \varepsilon_{yy} \sin(\theta) & -\varepsilon_{yx} \frac{\sin(\theta)}{r} + \varepsilon_{yy} \frac{\cos(\theta)}{r} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

Lo que resulta en:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{xx} \cos^2(\theta) + \varepsilon_{yy} \sin^2(\theta) + 2\varepsilon_{xy} \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{xx} \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} + \varepsilon_{yy} \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} - 2\varepsilon_{xy} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2} \\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r} + \varepsilon_{xy} \frac{(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{r} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

(iii) Paso (3)

Por último, resta reemplazar las expresiones (B.9-11) en (B.13).

Por ejemplo, para la componente ε_{rr} resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = & \left[\cos^2(\theta) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \sin^2(\theta) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \cos^2(\theta) \\ & + \left[\cos^2(\theta) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right. \\ & \left. + \sin^2(\theta) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] \sin^2(\theta) \\ & + 2 \left[\frac{\cos^2(\theta)}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2(\theta)}{2} \left(\frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right] \cos(\theta) \sin(\theta) = \\ & = \dots = \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Análogamente para $\varepsilon_{\theta\theta}$ y $\varepsilon_{r\theta}$ y operando algebraicamente resulta:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \dots = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{B.15})$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \dots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (\text{B.16})$$

Al identificar u_r y u_θ como las componentes w y u del campo de desplazamientos definidas en la Sección 4.1.2., las expresiones (B.14-16) se reducen a la ecuación (4.7) expresada en $\{r, \theta\}$ (donde se omite la variable adicional del tiempo).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \cdot w(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot u(r, \theta) \right] \end{aligned} \quad (\text{4.7})$$

ANEXO 'C' – Conceptos Básicos del Cálculo de Variaciones

El Cálculo de Variaciones constituye una formidable herramienta de uso en la física matemática y en la ingeniería que permite obtener las ecuaciones diferenciales y las correspondientes condiciones de contorno que definen el problema cerrado de una manera sistemática, rigurosa y eficaz [3].

Este problema matemático se trata de buscar máximos y mínimos relativos (extremos relativos) de funcionales continuos definidos sobre algún espacio vectorial. Es decir, a diferencia del problema de búsqueda de extremos de una función $\mathbf{u}(x)$ del cálculo diferencial (valor de x que maximiza o minimiza localmente $\mathbf{u}(x)$), en el Cálculo Variacional, se busca hallar la función $\mathbf{u}(x)$ para la cual el funcional $I[\mathbf{u}(x)]$ alcanza un valor extremo [4].

En este apartado se utiliza la función $\mathbf{u}(x)$ como un vector genérico, dependiente de la coordenada espacial x genérica. En el caso particular del problema de contorno definido para representar el RCP $\mathbf{u}(x)$ es reemplazado por las componentes del campo de desplazamiento $w(x, t)$ y $u(x, t)$.

El Operador Variacional

El *operador variacional* δ (delta) se utiliza para denotar la variación (o cambio) de cierta magnitud.

Sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ una componente genérica del campo de desplazamientos $\underline{\mathbf{U}}(x)$ definida en el dominio Ω y que cumple $\mathbf{u}(x) = u_o$ en el contorno $\partial\Omega$. La función $\mathbf{u}(x)$ caracteriza un sistema mecánico en equilibrio. Una configuración admisible o posible estado en el cual este sistema puede existir adopta la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{u}(x) + \alpha \cdot \mathbf{v}(x) \quad (\text{C.1})$$

donde \mathbf{v} es una función arbitraria que satisface las condiciones geométricas de contorno (*condiciones esenciales* impuestas sobre las variables principales).

$$\mathbf{v}(x) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (\text{C.2})$$

La magnitud $\alpha \cdot \mathbf{v}$ es una variación respecto de la configuración $\mathbf{u}(x)$. Estas variaciones son lo suficientemente pequeñas para no perturbar el estado de equilibrio del sistema, y son compatibles con las restricciones geométricas que $\mathbf{u}(x)$ satisface en el contorno. La ec. (C.1) define un número infinito de configuraciones para una variación fija de $\mathbf{v}(x)$ dependiendo del valor asignado al parámetro α . Aquellas que satisfacen las restricciones mencionadas representan una familia de *configuraciones admisibles*.

Para un valor fijo de x , $\alpha \cdot \mathbf{v}$ puede ser visto como una pequeña alteración del estado actual del sistema $\mathbf{u}(x)$, y se denota como:

$$\delta \mathbf{u}(x) = \alpha \cdot \mathbf{v}(x) \quad \text{con} \quad \delta \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) = \alpha \left(\frac{d\mathbf{v}}{dx} \right) = \left(\frac{d(\alpha \mathbf{v})}{dx} \right) = \left(\frac{d(\delta \mathbf{u})}{dx} \right) \quad (\text{C.3})$$

δu se denomina *primera variación* de $u(x)$.

Ahora bien, sea F una función de la variable dependiente $\mathbf{u}(x)$ y su primera derivada $\mathbf{u}'(x) = d\mathbf{u}/dx$

$$F = F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') \quad (\text{C.4})$$

Para un valor fijo de x , el cambio en F asociado a la variación de \mathbf{u} (y por lo tanto de \mathbf{u}') es:

$$\Delta F = F(x, \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}, \mathbf{u}' + \alpha \mathbf{v}') - F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') \quad (\text{C.5})$$

Si el término $F(x, \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}, \mathbf{u}' + \alpha \mathbf{v}')$ se expande en una serie de Taylor alrededor de la configuración de equilibrio $\mathbf{u}(x)$:

$$\begin{aligned} F(x, \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}, \mathbf{u}' + \alpha \mathbf{v}') &= F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \alpha \mathbf{v} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \alpha \mathbf{v}' + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u}^2} \frac{(\alpha \mathbf{v})^2}{2!} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u}'^2} \frac{(\alpha \mathbf{v}')^2}{2!} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}'} \frac{2(\alpha \mathbf{v})(\alpha \mathbf{v}')}{2!} + \dots = \\ &= F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \alpha \mathbf{v} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \alpha \mathbf{v}' + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

donde $O(\alpha^2)$ denota los términos cuadráticos de α y de orden superior. Si se reemplaza en (C.5) resulta:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \alpha \mathbf{v} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \alpha \mathbf{v}' + O(\alpha^2) \quad (\text{C.7})$$

Así como se definió la primera variación de $\mathbf{u}(x)$, la *primera variación* de $F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$ puede hallarse como:

$$\begin{aligned} \delta F &= \alpha \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\alpha} \right] = \alpha \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{v} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \mathbf{v}' \right) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \alpha \mathbf{v} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \alpha \mathbf{v}' \\ &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \delta \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

O, lo que es lo mismo

$$\delta F = \alpha \left[\frac{F(x, \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}, \mathbf{u}' + \alpha \mathbf{v}')}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} \quad (\text{C.9})$$

De esta manera, δ actúa análogamente a un operador diferencial con respecto a las variables dependientes, y cumple con las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2 \\ (ii) \delta(F_1 \cdot F_2) = \delta F_1 \cdot F_2 + F_1 \cdot \delta F_2 \\ (iii) \delta(F_1/F_2) = \frac{\delta F_1 \cdot F_2 - F_1 \cdot \delta F_2}{F_2^2} \\ (iv) \delta(F_1)^n = n(F_1)^{n-1} \delta F_1 \end{array} \right. \quad (\text{C.10})$$

para $F_1 = F_1(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$ y $F_2 = F_2(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$.

Si además, una función $G = G(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ depende de más de una variable dependiente (y sus derivadas), la variación total será la suma de las variaciones parciales.

$$\delta G(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}') = \delta_u G + \delta_v G + \delta_w G \quad (\text{C.11})$$

Por último, el operador δ puede ser intercambiado con el operador diferencial e integral como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \delta \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) = \alpha \left(\frac{d\mathbf{v}}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\alpha \mathbf{v}) = \frac{d}{dx} (\delta \mathbf{u}) \\ (ii) \delta \left(\int_a^b \mathbf{u} dx \right) = \alpha \left(\int_a^b \mathbf{v} dx \right) = \int_a^b \alpha \mathbf{v} dx = \int_a^b \delta \mathbf{u} dx \end{array} \right. \quad (\text{C.12})$$

Funcionales

En la formulación variacional de problemas continuos, se denomina *funcional* a las funciones de variables dependientes y posiblemente sus derivadas, las cuales son a su vez funciones de otros parámetros (posición, tiempo, etc.).

Un funcional I es un mapeo (u operador) que actúa desde un espacio vectorial \mathcal{V} al campo de los reales \mathcal{R} . Si $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, entonces $I[\mathbf{u}(x)]$ es un número real tal que $I: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}$. La magnitud $I[\cdot]$ es el operador y $I[\mathbf{u}(x)]$ el funcional. El valor de este depende de la elección de $\mathbf{u}(x)$ y se denomina lineal si cumple que:

$$I[\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}] = \alpha I[\mathbf{u}] + \beta I[\mathbf{v}]; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R} \quad (\text{C.13})$$

En el caso que $I[\mathbf{u}(x)]$ esté dado por una expresión integral:

$$I[\mathbf{u}(x)] = \int_a^b F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') dx \quad (\text{C.14})$$

con $F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$ función y límites de integración a, b independientes de \mathbf{u} ; la *primera variación* de un funcional de \mathbf{u} (y sus derivadas) puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta I[\mathbf{u}(x)] &= \delta \int_a^b F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') dx = \int_a^b \delta F(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \delta \mathbf{u}' \right) dx \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

teniendo en cuenta las las ec. (C.8-9) y las propiedades (C.12).

Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones

El *Lema Fundamental* del cálculo variacional permite obtener las ecuaciones diferenciales de problemas expresados en forma de integral. El lema dice: “para cada función integrable G , si la expresión

$$\int_a^b G \cdot \eta \, dx = 0 \quad (\text{C.16})$$

se cumple para cualquier función continua y arbitraria $\eta(x) \forall x \in (a, b)$, entonces se cumple que $G = 0$ en (a, b) ”.

Extremo de un Funcional

Como se mencionó anteriormente, la resolución del problema variacional implica hallar el extremo de una expresión integral o una función de funciones (funcional). Si este funcional está dado por (C.14), debe hallarse la función $u(x)$ tal que $u(a) = u_a$ y $u(b) = u_b$ (condiciones de contorno esenciales) y hace que la ec. (C.14) sea un mínimo en el dominio $\Omega = [a, b]$. De todas las funciones posibles, solo son interesantes aquellas que cumplen las condiciones de contorno y forman un conjunto \mathcal{C} de funciones admisibles. La función buscada $u(x)$ es el elemento de \mathcal{C} que minimiza I . Si $u \in \mathcal{C}$, se cumple que $(u + \alpha v) \in \mathcal{C}$ para cada v que satisface $v(a) = v(b) = 0$ (espacio de variaciones admisibles \mathcal{H}), Fig. C.1.

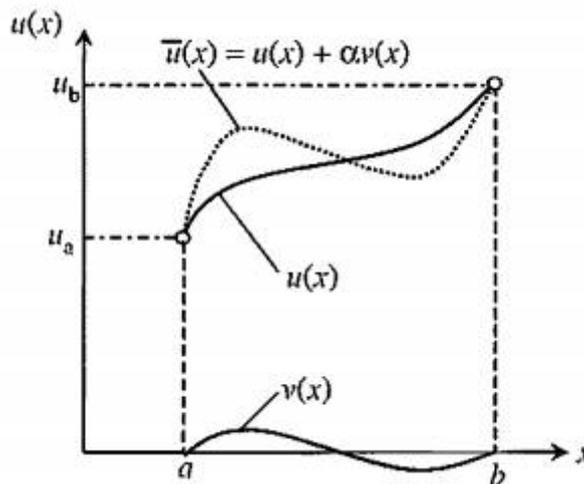


Fig. C.1. Variaciones de $u(x)$. (Basado en [4])

Sea $I[u(x)]$ un funcional diferenciable tal que $dI[u + \alpha v, u' + \alpha v'] / d\alpha$ existe, entonces un elemento $u \in \mathcal{C}$ produce un valor mínimo (o máximo) para $I[\bar{u}]$ en \mathcal{C} si

$$I[\bar{u}] - I[u] \geq 0 \quad (o \leq 0) \quad (\text{C.17})$$

siendo $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ todos los elementos que dan lugar a configuraciones admisibles. Entonces, si $I[\bar{\mathbf{u}}]$ asume un mínimo (o máximo) relativo en $I[\mathbf{u}]$, relativo a los elementos $\bar{\mathbf{u}}$, de la definición del espacio \mathcal{H} :

$$I[\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}] - I[\mathbf{u}] \geq 0 \quad (o \leq 0) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \|\mathbf{v}\| < \epsilon \text{ (pequeño)}, y \alpha \in \mathcal{R} \quad (\text{C.18})$$

Como \mathbf{u} es la función minimizante, toda otra función $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}$ debe ser de la forma $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}$ y \mathbf{u} se halla evaluando $\alpha = 0$. Si se fijan $\mathbf{u}(x)$ y $\mathbf{v}(x)$, $I[\bar{\mathbf{u}}(x)]$ es una función únicamente de α , $I[\alpha]$. Entonces, la condición necesaria para que el funcional $I[\bar{\mathbf{u}}] = \bar{I}[\alpha]$ alcance un mínimo es que:

$$\frac{d\bar{I}[\alpha]}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(I[\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}]) = 0 \quad (\text{C.19})$$

Por otro lado, $I[\bar{\mathbf{u}}(x)]$ adopta dicho mínimo en \mathbf{u} cuando $\alpha = 0$. Estas dos condiciones definen en conjunto la ecuación que permite hallar el extremo del funcional y resolver el problema variacional:

$$\delta I[\mathbf{u}] = \left(\frac{d\bar{I}[\alpha]}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{C.20})$$

Para terminar, la última condición necesaria para que el funcional adopte el valor mínimo (o máximo), es que su segunda variación $\delta^2 I[\mathbf{u}]$ sea mayor (o menor) que cero.

$$\delta^2 I[\mathbf{u}] = \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} I[\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}] \right) > 0 \quad (o < 0) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H} \text{ y } \alpha \in \mathcal{R} \quad (\text{C.21})$$

El Principio de Hamilton

El *principio de Hamilton* constituye una generalización del *principio de trabajos virtuales* para sistemas dinámicos, como los conjuntos de partículas, los cuerpos rígidos y sólidos deformables. Asume que el sistema bajo consideración es caracterizado por dos funciones, su **energía cinética** E_K y su **energía potencial** Π . En el caso de sistemas continuos, como los sólidos deformables, el número de grados de libertad no es finito, por lo que E_K y Π se representan con funciones continuas. A su vez, la energía potencial Π suele ser reemplazada por la **energía de deformación** \mathcal{U}_S que el sólido adquiere durante su cambio de forma.

Se define la *función Lagrangiana* \mathcal{L} como la diferencia entre las energías cinética y potencial:

$$\mathcal{L} = E_K - \Pi \quad (\text{C.22})$$

\mathcal{L} es una función escalar definida sobre un cierto espacio de posibles estados del sistema, $\bar{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{u}(x, t) + \delta \mathbf{u}(x, t) \in \mathcal{C}$ de configuraciones admisibles dependientes de la posición x y del tiempo t , y que cumplen con las restricciones (C.23). Entonces, \mathcal{L} resulta una función tanto de $\bar{\mathbf{u}}$, como de sus derivadas, así como también de la variable independiente, t (en vez de x): $\mathcal{L}(t, \bar{\mathbf{u}}(x, t), \bar{\mathbf{u}}'(x, t), \bar{\mathbf{u}}''(x, t), \dots)$. Esta magnitud escalar es el operador más

importante del sistema físico dado que, a partir de ella, puede obtenerse su evolución temporal.

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}(x, t) &= 0, \text{ en el contorno } \partial \Omega \text{ y } \forall t \\ \delta \mathbf{u}(x, t_1) &= \delta \mathbf{u}(x, t_2) = 0, \forall x\end{aligned}\tag{C.23}$$

Se define la *acción física* \mathcal{S} (o I , dado que se trata de un funcional) como la integral de línea sobre la trayectoria de movimiento definida por \mathcal{L} :

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(t, \bar{\mathbf{u}}(x, t), \bar{\mathbf{u}}'(x, t), \bar{\mathbf{u}}''(x, t), \dots) dt\tag{C.24}$$

El principio de Hamilton indica que “*el movimiento de un sistema entre dos instantes de tiempo arbitrarios t_1 y t_2 , cuando sobre este actúan fuerzas conservativas, es aquel que extremiza la integral de línea sobre la función Lagrangiana (acción física) para la trayectoria del movimiento*”. En otras palabras, establece que de todas las configuraciones posibles que el sistema puede tener $\bar{\mathbf{u}}(x)$, al pasar de una configuración inicial dada en un instante t_1 a otra dada en el instante t_2 , la que realmente adopta el sistema $\mathbf{u}(x)$ es la que hace estacionario al funcional $\mathcal{S}[\mathbf{u}]$ (o $I[\mathbf{u}]$), en el espacio de funciones admisibles [5]. Entonces, el enunciado resulta:

$$\delta \mathcal{S}[\mathbf{u}] = \delta I[\mathbf{u}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, \bar{\mathbf{u}}(x, t), \bar{\mathbf{u}}'(x, t), \bar{\mathbf{u}}''(x, t), \dots) dt = 0\tag{C.25}$$

La ec. (C.25) es la expresión fundamental de la formulación variacional, dado que permite hallar las ecuaciones diferenciales gobernantes sobre la evolución del sistema físico junto con las condiciones de contorno correspondientes.

ANEXO 'D' – Descripción del Método Variacional de Ritz

A continuación, se resumen los conceptos principales del Método Variacional de Ritz [4].

Formas Lineales y Bilineales

Dentro del conjunto de *transformaciones lineales*, transformaciones $\mathcal{T}(\cdot): \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ que asignan a cada elemento $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ un único elemento $\mathbf{v} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{u} \in \mathcal{W}$ y cumplen con (D.1), existen las denominadas *formas lineales*.

$$\begin{cases} (i) \mathcal{T}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \mathcal{T}(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \wedge \alpha \in \mathfrak{R} \text{ (homogénea)} \\ (ii) \mathcal{T}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathcal{T}(\mathbf{u}_1) + \mathcal{T}(\mathbf{u}_2), \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{V} \text{ (aditiva)} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

\mathcal{V}, \mathcal{W} espacios vectoriales definidos sobre el mismo campo de escalares

Una forma lineal $l(\cdot): \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una transformación que mapea vectores (funciones) al campo de los números reales, es decir, es un tipo de funcional. De manera similar, una transformación que opera sobre un par de vectores $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ y lo lleva al campo de los reales \mathfrak{R} se denomina *forma bilineal*, y se denota como $\mathcal{B}(\cdot, \cdot): \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$.

Formulación del Método

Se considera un problema de condiciones de frontera dado por la ecuación diferencial (D.2), expresada en función del operador lineal $\mathcal{A}(\cdot)$.

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = f \quad \text{en } \Omega \quad (\text{D.2})$$

\mathcal{A} es un operador perteneciente al espacio vectorial $\mathbf{H}_A \subset \mathbf{H}$ y $f \in \mathbf{H}$. \mathbf{H} es un *espacio de Hilbert* formado por el conjunto completo de funciones $\mathbf{u}(x)$ de integrabilidad cuadrática sobre el dominio Ω , donde está definida la *norma* $\|\cdot\|: \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$ (D.3) y el *producto interno* $(\cdot, \cdot)_H: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$ (D.4).

$$\|\cdot\|: \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R} \text{ tal que } \begin{cases} (i) \|\mathbf{u}\| > 0 \forall \mathbf{u} \wedge \|\mathbf{u}\| = 0 \leftrightarrow \mathbf{u} = 0 \\ (ii) \|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\ (iii) \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

$$\|\mathbf{u}\| = \left[\int_{\Omega} |\mathbf{u}(x)|^2 dx \right]^{1/2} < \infty$$

$$(\cdot, \cdot)_H: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R} \text{ tal que } \begin{cases} (i) \text{ simétrico: } (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = (\mathbf{v}, \mathbf{u})_H \\ (ii) \text{ homogéneo: } (\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H \\ (iii) \text{ aditivo: } (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v})_H = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v})_H + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_H \\ (iv) \text{ positivo definido: } (\mathbf{u}, \mathbf{u})_H > 0 \forall \mathbf{u} \neq 0 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx \text{ y además } \|\mathbf{u}\|_H = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_H}$$

Se dice que \mathbf{H} es completo dado que cada sucesión de Cauchy $\{\mathbf{u}_j\}$ de elementos del espacio tiene un límite $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$. Siendo \mathbf{H} un espacio vectorial normado, una secuencia de Cauchy es de la forma $\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k\| \rightarrow 0$ a medida que $j, k \rightarrow \infty$ y la completitud implica:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_j\| \rightarrow 0 \text{ a medida que } j \rightarrow \infty \quad (\text{D.5})$$

$\mathbf{H}_{\mathcal{A}}$ es simplemente un subespacio de \mathbf{H} donde está definido el producto $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

La solución $\mathbf{u}_o(x)$ de (D.2) es el elemento $\mathbf{u}_o \in \mathbf{H}_{\mathcal{A}}$ que minimiza el funcional $I[\mathbf{u}]$ asociado a la ecuación:

$$I[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{A}} + l(\mathbf{u}) \quad (\text{D.6})$$

donde $l(\cdot)$ es una forma lineal. Si se presta atención, $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{A}}$ es análogo al término de energía del sistema descrito por el Lagrangiano (C.22) y $l(\mathbf{u})$ corresponde a la acción de las fuerzas externas (por ejemplo, la presión de la tubería). Entonces, $I[\mathbf{u}]$ representa el total de la energía del sistema y $\delta I[\mathbf{u}] = 0$ el problema variacional equivalente que conduce a la solución $\mathbf{u}_o(x)$.

El método consiste en hallar una función $\mathbf{u}_N(x)$ que aproxime $\mathbf{u}_o(x)$ para un determinado valor de N , de la forma:

$$\mathbf{u}_o(x) \approx \mathbf{u}_N(x) = \phi_o(x) + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) \quad (\text{D.7})$$

donde $\phi_i(x)$ son elementos de una base que expande el espacio $\mathbf{H}_{\mathcal{A}}$ y c_i son las constantes indeterminadas del método. Esta expresión puede verse como la representación de $\mathbf{u}_o(x)$ en forma de componentes, en la cual c_i son los coeficientes que pesan las *funciones coordenadas o de aproximación* $\phi_i(x)$, también llamadas *funciones auxiliares*.

Los parámetros $\{c_i\}$ se determinan bajo la condición de que $I[\mathbf{u}_N(x)]$ es un mínimo. Por otro lado, como el conjunto $\{\phi_i(x)\}$ es una base de $\mathbf{H}_{\mathcal{A}}$, la solución $\mathbf{u}_o(x)$ puede aproximarse con la precisión que se desee agregando más términos de la combinación lineal (D.7). La convergencia hacia la solución está asegurada porque $\mathbf{H}_{\mathcal{A}}$ es un subespacio completo y la secuencia de Cauchy $\|\mathbf{u}_o(x) - \mathbf{u}_N(x)\|$ tiende a 0 a medida que $N \rightarrow \infty$ según (D.5).

Para determinar las constantes $\{c_i\}$ se debe reemplazar la ec. diferencial (D.2) (o *formulación fuerte*) por su problema variacional asociado (o *formulación débil*). Esto se hace multiplicando la ecuación por la primera variación de la función $\delta\mathbf{u}$ e integrando sobre el dominio Ω .

$$\int [\mathcal{A}(\mathbf{u}) - f] \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad (\text{D.8})$$

La formulación débil así construida resulta idéntica al problema variacional expresado como:

$$0 = \delta I[\mathbf{u}] = B(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\delta\mathbf{u}) \quad \text{o bien} \quad B(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = l(\delta\mathbf{u}) \quad (\text{D.9})$$

donde la forma bilineal es $\mathcal{B}(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{A}}$. Luego, debe reemplazarse tanto $\mathbf{u}(x)$ como $\delta\mathbf{u}(x)$ por sus formas aproximadas como combinaciones lineales de $\phi_i(x)$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x) &\rightarrow \mathbf{u}_N(x) = \phi_o(x) + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) \\ \delta\mathbf{u}(x) &\rightarrow \delta\mathbf{u}_N(x) = \sum_{j=1}^N \delta c_j \phi_j(x)\end{aligned}$$

lo que resulta en $\mathcal{B}(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = l(\delta\mathbf{u}) \rightarrow \mathcal{B}(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_j)$. Así, el funcional $I[\mathbf{u}(x)]$ se transforma en una función única de los parámetros $\{c_i\}$, es decir, $I = I(c_1, c_2, \dots, c_N)$ y debe tener que ser minimizado respecto de ellos:

$$0 = \delta I[c_i] = \frac{\partial I}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial I}{\partial c_2} \delta c_2 + \dots + \frac{\partial I}{\partial c_N} \delta c_N = \sum_{j=1}^N \frac{\partial I}{\partial c_j} \delta c_j \quad (\text{D.10})$$

aplicando la propiedad (C.11). Como el conjunto $\{c_i\}$ es linealmente independiente por definición y δc_j son arbitrarios, la expresión anterior conforma un sistema de N ecuaciones lineales (SEL) sobre las incógnitas c_1, c_2, \dots, c_N .

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial c_j} &= 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \\ [K]\{c\} &= \{f\} \rightarrow \sum_{j=1}^N K_{ij} c_j = f_i\end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

con $[K]$ la matriz de coeficientes, $\{c\}$ el vector de incógnitas y $\{f\}$ el vector de términos independientes. Este sistema representa el conjunto de *ecuaciones para los parámetros de Ritz* $\{c_i\}$, cuya resolución permite construir la solución aproximada (D.7).

En resumen, el método de Ritz permite resolver un problema de condiciones de frontera transformando la formulación fuerte en su formulación débil (integral). Reemplaza la resolución de las ec. diferenciales por la resolución de un sistema de ecuaciones lineales para los N coeficientes utilizados en la construcción de la solución aproximada.

Requerimientos de las Funciones de Aproximación

Por último, deben mencionarse aquellas restricciones que deben ser impuestas sobre las funciones de aproximación $\phi_o(x)$ y $\phi_i(x)$, para garantizar que $\mathbf{u}_N(x)$ satisfaga de manera aproximada $\mathcal{A}\mathbf{u} = f$ y que el sistema de ecuaciones resultante tenga solución.

- (i) ϕ_o debe satisfacer las condiciones de contorno esenciales impuestas sobre $u(x)$. Cuando estas condiciones son homogéneas, entonces $\phi_o = 0$
- (ii) $\phi_i \in \mathbf{H}_{\mathcal{A}}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) deben cumplir:
 - (a) ser continuas
 - (b) satisfacer la forma homogénea de las condiciones esenciales
 - (c) el conjunto $\{\phi_i(x)\}$ debe ser linealmente independiente y completo

(D.12)

REFERENCIAS: ANEXOS

- [1] M. D. Chapetti, *Mecánica de Materiales - Teorías de Elasticidad, Plasticidad y Mecánica de Fractura*, Tercera Ed. La Plata - Argentina: Ediciones Al Margen, 2015.
- [2] C. J. Greenshields and P. S. Leever, "Rapid crack propagation in plastic water pipes: Measurement of dynamic fracture resistance," *Int. J. Fract.*, vol. 79, no. 1, pp. 85–95, 1996, doi: 10.1007/BF00017714.
- [3] R. O. Grossi and A. Aranda, "Formulación variacional de problemas de contorno para vigas Timoshenko," *Rev. Int. métodos numéricos para cálculo y diseño en Ing.*, vol. 9, no. 3, pp. 313-324–324, 1993.
- [4] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, College Station, Texas: John Wiley & Sons, INC.
- [5] J. L. Raffo and A. F. Saavedra Calambás, "Vibraciones de una Viga de Eje Curvo con una Rótula Elástica Intermedia y Condiciones de Extremo Elásticas," *Mecánica Comput.*, vol. XXXVI, pp. 195–304, 2018.

APÉNDICE: ALGORITMO DEL MODELO

APÉNDICE

ALGORITMO de MAPLESOFT: "MODELO INICIAL"

VIGA DE EJE CURVO : SECCIÓN TRANSVERSAL DE TUBERÍA PLÁSTICA DE TRANSPORTE DE GAS - "RAPID CRACK PROPAGATION"(Modelo Inicial)

```
> restart; dig:=80: Digits=dig:
> with(linalg): with(CurveFitting):
```

▼ Número de Polinomios en la aproximación

$$w_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(x) \text{ [Transversal]}$$

$$u_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \beta_k \psi_k(x) \text{ [Tangencial]}$$

```
> N:=8: #Dirección 'x' en la Longitud de Arco.
>
```

▼ Datos del Problema.

```
>
```

▼ Dimensiones de la Viga de Sección Rectangular Constante / Dimensiones de la Tubería.

```
Parámetros Básicos.
> SDR:= 11: #Standard Dimensional Ratio (SDR=1 + Dext/H).
> Dext:= 125: #Diámetro Externo Dext [mm].
> DZ:=0.5: #Espesor.
Parámetros Derivados (Calculados).
> H:= Dext/(SDR-1.0): #Espesor de Pared 'H' [mm].
> Dnorm:= Dext/H: #Diámetro Externo Adimensional D*=Dext/H.
> Rm:=(0.5) * Dext * ((Dnorm)-1)/(Dnorm): #Radio Medio [mm].
> Phi:=Pi: #Ángulo de recorrido de Longitud de Arco.
> Lx:=Phi*Rm: #Longitud de Arco Lx=Pi*Rm [mm].
> Izz:=(H^3)*DZ/12.0: #Momento de Área[mm^4].
> Ar:=H*DZ: #Área[mm^2].
```

▼ Propiedades del Material.

```
> Ed:=1500: #Módulo de Young Dinámico Ed [MPa].
> Rho:= 940e-9: #Densidad del Material [kg/mm^3].
```

▼ Módulo de Flexión y Módulo Axial (en 'x').

```
> Mf:=Ed*Izz: #Módulo de Flexión Ed*Izz [MPa*mm^4].
> Ma:=Ed*Ar: #Módulo Axial Ed*Ar [MPa*mm^2].
```

▼ Presión Interna Pr

```
> Pt:= 0.15: #Presión en la Punta de Fisura [MPa].
> Po:= 0.0: #Presión Externa [MPa].
> LD:= (3.2)*Dext: #Longitud de Decaimiento [mm].
> #Pr:=z->(Po-Pt)/(LD)*z + Pt: #Perfil de Presión Lineal Pr(z).
> #Pr:= 0.0001875:
```

▼ Constantes de Resorte en Extremos.

Constante de Resortes en (x=0) / Extremo Empotrado.

```
> t0:=1e100: t1:=0.0: #Constante de Resorte Transversal t*(w(x))^2.
> s0:=1e100: s1:=0.0: #Constante de Resorte Axial s*(u(x))^2.
> r0:=1e100: r1:=0.0: #Constante de Resorte Torsional r*(dw(x)/dx)^2.
```

▼ Cálculo de Polinomios Simples.

Definición

```
> W:=array(1..N) : Wx:=array(1..N) : Wxx:=array(1..N) : Wxxx:=array(1..N) :
> U:=array(1..N) : Ux:=array(1..N) : Uxx:=array(1..N) : Uxxx:=array(1..N) :
```

Subrutina para armar los Polinomios Simples $w_N(x)$ y $u_N(x)$.

```
> calcps := proc (x,NN,V,Vx,Vxx,Vxxx,x1,x2) global i : #V hace referencia a W(x) o U(x).
> V[1]:=1 : #El primer término vale (1).
> for i from 2 by 1 to NN do:
> V[i]:= expand(V[i-1]*x) :
> end do:
> for i from 1 by 1 to NN do:
> Vx[i]:= diff(V[i],x) :
> Vxx[i]:= diff(V[i],x$2) :
> Vxxx[i]:= diff(V[i],x$3) :
> end do:
> return V,Vx,Vxx,Vxxx
> end proc:
```

Generación de los Polinomios.

Límites de Variable (x).

```
> x1:=0 : x2:=Lx :
```

Polinomio $w_N(x)$.

```
> calcps (x,N,W,Wx,Wxx,Wxxx,x1,x2) :
```

Polinomio $u_N(x)$.

```
> calcps (x,N,U,Ux,Uxx,Uxxx,x1,x2) :
```

```
> #print(W,Wx,Wxx,Wxxx) ; print(U,Ux,Uxx,Uxxx) ;
```

▼ Energía (Forma Bilineal) $\beta(v,\delta v)$.

Definición de Matriz Bilineal [K](i,j).

```
> K:=array(1..2*N,1..2*N) :
> for i from 1 by 1 to 2*N do:
> for j from 1 by 1 to 2*N do:
> K[i,j]:= 0 :
> end do:
> end do:
```

Sub-Matriz [A] $i=1..N / j=1..N$ donde [A] = {i= índice para la Función Coordinada y j= índice para el Término de la Función } - Coeficientes Transversal(i)/Transversal(j).

```
> for i from 1 by 1 to N do:
> for j from 1 by 1 to N do:
> K[i,j] := int(Wxx[i]*Wxx[j]*Mf + W[i]*W[j]*(Ma/(Rm^2)),x=0..Lx) + subs(x=0,t0*W[i]*W[j] +
> r0*Wx[i]*Wx[j]) + subs(x=Lx,t1*W[i]*W[j] + r1*Wx[i]*Wx[j]) :
> end do:
> end do:
```

Sub-Matriz [B] $i=1..N / j=(N+1)..2*N$ donde [B] = {i= índice para la Función Coordinada y j= índice para el Término de la Función } - Coeficientes Transversal(i)/Tangencial(j).

```
> for i from 1 by 1 to N do:
> for j from 1 by 1 to N do:
> K[i,j+N] := int(Wxx[i]*Ux[j]*(-Mf/Rm) + W[i]*Ux[j]*(Ma/Rm),x=0..Lx) :
> end do:
> end do:
```

Sub-Matriz [C] $i=(N+1)..2*N / j=1..N$ donde [C] = {i= índice para la Función Coordinada y j= índice para el Término de la Función } - Coeficientes Tangencial(i)/Transversal(j).

```
> for i from 1 by 1 to N do:
> for j from 1 by 1 to N do:
> K[i+N,j] := int(Ux[i]*W[j]*(Ma/Rm) + Ux[i]*Wxx[j]*(-Mf/Rm),x=0..Lx) :
> end do:
> end do:
```

Sub-Matriz [D] $i=(N+1)..2*N / j=(N+1)..2*N$ donde [D] = {i= índice para la Función Coordinada y j= índice para el Término de la Función } - Coeficientes Tangencial(i)/Tangencial(j).

```
> for i from 1 by 1 to N do:
> for j from 1 by 1 to N do:
> K[i+N,j+N] := int(Ux[i]*Ux[j]*Ma + Ux[i]*Ux[j]*(Mf/(Rm^2)),x=0..Lx) + subs(x=0,s0*U[i]*U[j]
> ) + subs(x=Lx,s1*U[i]*U[j]) :
> end do:
> end do:
```

Comprobación de Simetría $K^T = K$

```
> is(K[1,N+1]=K[N+1,1]) ;
```

(5.1)

Comentario : U(x) y W(x) tienen únicamente N componentes, de esta manera para llenar la Matriz K cuando (i,j) exceden N, no puede hacerse la asignación U[i] porque podría pasar que se pide U[N+1] que no existe. Entonces, la asignación debe hacerse como $K[i+N,j] := U[i]$. (Ejemplo válido para las demás componentes).

▼ Energía (Forma Lineal) $l(\delta v)$.

Definición Forma Lineal M[i].

```
> M:=array(1..2*N):
> for i from 1 by 1 to (2*N) do:
>   M[i]:=0:
> end do:
```

Forma Lineal dependiente de la Presión Interna Pr.

```
> for i from 1 by 1 to N do:
>   M[i]:= int(W[i]*Pr*DZ,x=0..Lx):           #Para un valor definido de Pr.
> end do:
```

▼ Resolución del Sistema Lineal $[K]\{c\}=[M]$ para los Coeficientes $\{c_j\}$ α $[j=1..N]$ y β $[j=(N+1)..2N]$.

Resolución del Sistema Lineal por Factorización 'LU'.

```
> with(LinearAlgebra):
> KK:= convert(K, Matrix, datatype=float):
>   type(KK,Matrix):
> MM:= convert(M, Vector[column]): #Sin 'datatype=float' para que resuelva con Pr.
>   type(MM,Vector):
> Coef:=LinearSolve(KK,MM,method='LU'):
```

Armado de las Funciones de Aproximación.

Definición de los Arreglos.

```
> Warr:=array(1..N): Uarr:=array(1..N): #Warr arreglo del prod. (Coef.)*(Func. Coord)
>
> for i from 1 by 1 to N do:
>   Warr[i]:=0: Uarr[i]:=0:
> end do:
```

Asignación de los Valores al Arreglo.

```
> for i from 1 by 1 to N do:
>   Warr[i]:= W[i]*Coef[i]:
>   Uarr[i]:= U[i]*Coef[i+N]:
> end do:
```

Armado de las Funciones.

```
> Wn:=0: Un:=0:           #Vn Función Wn(x) / Un(x).
> for i from 1 by 1 to N do:
>   Wn:= Wn + Warr[i]:
>   Un:= Un + Uarr[i]:
> end do:
```

Reemplazo del Perfil de Presiones.

```
> Wn:= subs(Pr=((Po-Pt)/(LD)*z + Pt), Wn):
> Un:= subs(Pr=((Po-Pt)/(LD)*z + Pt), Un):
```

▼ Cálculo de Energía Externa [Entre (f) y (e) Volumen de Control].

Trabajo de Fuerzas Externas

Cálculo de la Suma (Integral realizada de manera discreta).

```
> NumDivZ:= convert(LD/DZ,'integer'):
>
> TrFArray:= array(1..NumDivZ,1..2):
> DeltaZ:= LD/NumDivZ:
> Zi:= DZ/2.0:
> TrSuma:= 0.0:
> for i from 1 by 1 to NumDivZ do:
>   Aux:= int(subs(Pr=((Po-Pt)/(LD)*z + Pt), z=Zi, Pr*Wn*DZ), x=0..Lx):
>   TrSuma:= TrSuma + Aux:
>   TrFArray[i,1]:= Zi:
>   TrFArray[i,2]:= Aux:
>   Zi:= Zi + DeltaZ:
> end do:
```

Gráfico del Trabajo de Presión.

```
> plot(TrFArray,z=0..LD, axes=boxed, labels=["z", "Trabajo de Presión [N.mm]"],
>   labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=1, title="TRABAJO DE LAS
>   FUERZAS EXTERNAS 'W' \n", gridlines=true):
```

Ajuste de la Curva del Trabajo de Presión.

```
> EqZ:= 1: #Espaciamiento de Puntos para Suavizar la Curva:
> TrFList:= convert(TrFArray, list):
> TrFZList:= [seq(EqZ*DZ*i,i=0..NumDivZ/EqZ)]:
> CurvaTrabajoPresion:= ArrayInterpolation(TrFList,TrFZList):
```

```

> PlotTrFExt:= plot(TrFZList,2*CurvaTrabajoPresion, axes=boxed, labels=["z", "Trabajo de
Presión [N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=2, title=
"TRABAJO DE FUERZAS EXTERNAS 'W' \n", gridlines=true);
Interpolación de Curva.
> PolTrPresion:= Spline(TrFZList,CurvaTrabajoPresion,z):
> #plot(PolTrPresion, z=0..LD);
> FuncionIntTrF:= Lim-> int(PolTrPresion,z=0..Lim):
> plot((2)*FuncionIntTrF(Lim),Lim=0..LD, axes=boxed, labels=["z", "Trabajo de Presión
Acumulado [N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=2,
title="TRABAJO DE FUERZAS EXTERNAS \n (Acumulado) \n", gridlines=true);

> IntTrFExt:= int(PolTrPresion,z=0..LD):
Cálculo del Trabajo de Presión.
> WTOT:= (2)*TrSuma;

```

▼ Cálculo de Energía Interna [Entre (f) y (e) Volumen de Control].

```
>
```

▼ Energía de Deformación

```

Cálculo de Puntos.
> NumDivZ:= convert(LD/DZ,'integer'):
> EnPotArray:= array(1..NumDivZ,1..2):
> DeltaZ:= LD/NumDivZ:
> Zi:= DZ/2.0:|
> EnPotSuma:= 0.0:
> for i from 1 by 1 to NumDivZ do:
AuxFlex:= (1/2) * Mf * int(subs(z=Zi, ((diff(Wn,x$2) - (1/Rm)*diff(Un,x))^2)),x=0..Lx):
AuxAx:= (1/2) * Ma * int(subs(z=Zi, ((1/Rm)*Wn + diff(Un,x))^2),x=0..Lx):
AuxVinc:= subs(z=Zi,x=0, s0*(Un)^2 + t0*(Wn)^2 + r0*(diff(Wn,x))^2) + subs(z=Zi,x=Lx, s1*
(Un)^2 + t1*(Wn)^2 + r1*(diff(Wn,x))^2):
EnPotArray[i,1]:= Zi:
EnPotArray[i,2]:= AuxFlex + AuxAx + AuxVinc:
EnPotSuma:= EnPotSuma + AuxFlex + AuxAx + AuxVinc:
Zi:= Zi + DeltaZ:
end do:
Gráfico de Energía de Deformación.
> plot(EnPotArray,z=0..LD, axes=boxed, labels=["z", "Energía de Deformación [N.mm]"],
labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=1, title="Energía de
Deformación 'Us' \n");
Ajuste de la Curva de Energía.
> EqZ:= 1: #Espaciamiento de Puntos para Suavizar la Curva:
> EnPotList:= convert(EnPotArray, list):
> EnPotZList:= [seq(EqZ*DZ*i,i=0..NumDivZ/EqZ)]:
> CurvaEnPotencial:= ArrayInterpolation(EnPotList,EnPotZList):
> PlotEnInt:= plot(EnPotZList,2*CurvaEnPotencial, axes=boxed, labels=["z", "Energía Interna
[N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=2, title="ENERGÍA
INTERNA \n (Deformación + Cinética) \n", gridlines=true);
Interpolación de Curva.
> PolEnPot:= Spline(EnPotZList,CurvaEnPotencial,z):
> plot(PolEnPot, z=0..LD):
> FuncionIntEnPot:= Lim-> int(PolEnPot,z=0..Lim):
> PlotEnIntAc:= plot((2/LD)*FuncionIntEnPot(Lim),Lim=0..LD), axes=boxed, labels=["z",
"Energía Interna Acumulada [N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black,
thickness=2, title="ENERGÍA INTERNA \n (Acumulada) \n", gridlines=true);
> IntEnPot:= int(PolEnPot,z=0..(LD-5)):
Cálculo de la Energía de Deformación
> EnIntTOT:= (2)*EnPotSuma;
>

```

ALGORITMO de MAPLESOFT: "MODELO MODIFICADO"

VIGA DE EJE CURVO : SECCIÓN TRANSVERSAL DE TUBERÍA PLÁSTICA DE TRANSPORTE DE GAS - "RAPID CRACK PROPAGATION" (Modelo Modificado)

```
> restart; dig:=80: Digits=dig:
> with(linalg):
```

▼ **Número de Polinomios en la aproximación**

$$w_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(x) \text{ [Transversal]}$$

$$u_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \beta_k \psi_k(x) \text{ [Tangencial]}$$

```
> N:=8: #Dirección 'x' en la Longitud de Arco.
```

▼ **Datos del Problema.**

```
>
```

▼ **Dimensiones de la Viga de Sección Rectangular Constante / Dimensiones de la Tubería.**

```
Parámetros Básicos.
> SDR:= 11: #Standard Dimensional Ratio (SDR=1 + Dext/H).
> Dext:= 125: #Diámetro Externo Dext [mm].
> DZ:=1.0: #Espesor de Anillo [mm].
Parámetros Derivados (Calculados).
> H:= Dext/(SDR-1.0): #Espesor de Pared 'H' [mm].
> Dnorm:= Dext/H: #Diámetro Externo Adimensional D*=Dext/H.
> Rm:=((0.5) * Dext * ((Dnorm)-1))/(Dnorm): #Radio Medio [mm].
> Phi:=Pi: #Ángulo de recorrido de Longitud de Arco.
> Lx:=Phi*Rm: #Longitud de Arco Lx=Pi*Rm [mm].
> Izz:=((H^3)*DZ)/12.0: #Momento de Área [mm^4].
> Ar:=H*DZ: #Área [mm^2].
```

▼ **Propiedades del Material.**

```
> Ed:=1500: #Módulo de Young Dinámico Ed [MPa].
> Rho:= 940e-9: #Densidad del Material [kg/mm^3].
```

▼ **Módulo de Flexión y Módulo Axial (dirección 'x').**

```
> Mf:=Ed*Izz: #Módulo de Flexión Ed*Izz [MPa*mm^4].
> Ma:=Ed*Ar: #Módulo Axial Ed*Ar [MPa*mm^2].
```

▼ **Presión Interna Pr.**

```
> Pt:= 0.15: #Presión en la Punta de Fisura [MPa].
> Po:= 0.0: #Presión Externa [MPa].
> LD:= (3.2)*Dext: #Longitud de Decaimiento [mm].
> #Pr:=z->(Po-Pt)/(LD)*z + Pt: #Perfil de Presión Lineal Pr(z).
> #Pr:= 0.15:
```

▼ **Velocidad de Propagación y Tiempo de Descompresión.**

```
Cálculo del Tiempo de Descompresión to.
> Co:= 340 * (1000): #Velocidad de Propagación de Ondas en Sólidos [mm/s].
> To:= 0.0162 * Dext * ((Rho/Pt) * (1/SDR) * (1/Co))^(1/3) * (1/0.001)^(1/3):
> V:= LD/To:
```

Constantes de Resorte en Extremos.

Curva S1(z).

```
> with(CurveFitting):
> PuntosS1:= [[0.00,100],[11.76,54.0],[45.43,8.9],[69.00,4.12],[89.05,2.425],[106.76,1.577],
[122.11,1.1175],[136.29,0.8335],[150.46,0.6245],[164.63,0.465],[178.81,0.34],[192.99,0.24],
[207.16,0.159],[221.33,0.0925],[235.50,0.03635],[250.85,-0.015125],[267.38,-0.0619],[285.07,
-0.10435],[305.12,-0.1457],[328.69,-0.1875],[354.60,-0.2279],[380.83,-0.2649],[390.0,
-0.27740],[399.5,-0.29002]]:
```

Constante de Resortes en (x=0) / Extremo Empotrado y (x=Lx) / Extremo Libre con Resorte Variable S1(z).

```
> t0:=1e100: t1:=0.0: #Constante de Resorte Transversal t*(w(x))^2.
> s0:=1e100: #s1:=0.0: #Constante de Resorte Axial s*(u(x))^2.
> r0:=1e100: r1:=0.0: #Constante de Resorte Torsional r*(dw(x)/dx)^2.
```

Cálculo de Polinomios Simples.

Definición

```
> W:=array(1..N): Wx:=array(1..N): Wxx:=array(1..N): Wxxx:=array(1..N):
> U:=array(1..N): Ux:=array(1..N): Uxx:=array(1..N): Uxxx:=array(1..N):
```

Subrutina para armar los Polinomios Simples $w_N(x)$ y $u_N(x)$.

```
> calcps := proc (x,NN,V,Vx,Vxx,Vxxx,x1,x2) global i: #V hace referencia a W(x) o U(x).
> V[1]:=1: #El primer término vale (1).
> for i from 2 by 1 to NN do:
> V[i]:= expand(V[i-1]*x):
> end do:
> for i from 1 by 1 to NN do:
> Vx[i]:= diff(V[i],x):
> Vxx[i]:= diff(V[i],x$2):
> Vxxx[i]:= diff(V[i],x$3):
> end do:
> return V,Vx,Vxx,Vxxx
> end proc:
```

Generación de los Polinomios.

Límites de Variable (x).

```
> x1:=0: x2:=Lx:
```

Polinomio $w_N(x)$.

```
> calcps (x,N,W,Wx,Wxx,Wxxx,x1,x2):
```

Polinomio $u_N(x)$.

```
> calcps (x,N,U,Ux,Uxx,Uxxx,x1,x2):
```

```
> print(W,Wx,Wxx,Wxxx): print(U,Ux,Uxx,Uxxx):
```

Energía (Forma Bilineal) $\beta(v,\delta v)$.

Definición de Matriz Bilineal [K](i,j).

```
> K:=array(1..2*N,1..2*N):
> for i from 1 by 1 to 2*N do:
> for j from 1 by 1 to 2*N do:
> K[i,j]:= 0:
> end do:
> end do:
```

Sub-Matriz [A] $i=1..N / j=1..N$ donde [A] = $\beta(\phi_i, \phi_j)$ {i= índice para la Función Coordenada $\phi_i(x)$ y j= índice para el Término $\phi_j(x)$ de la Función $w_N(x)$ } - Coeficientes Transversal(i)/Transversal(j).

```
> for i from 1 by 1 to N do:
> for j from 1 by 1 to N do:
> K[i,j]:= int(Wxx[i]*Wxx[j]*Mf + W[i]*W[j]*(Ma/(Rm^2)),x=0..Lx) + subs(x=0,t0*W[i]*W[j] +
r0*Wx[i]*Wx[j]) + subs(x=Lx,t1*W[i]*W[j] + r1*Wx[i]*Wx[j]):
> end do:
> end do:
```

Sub-Matriz [B] $i=1..N / j=(N+1)..2*N$ donde [B] = $\beta(\phi_i, \psi_j)$ {i= índice para la Función Coordenada $\phi_i(x)$ y j= índice para el Término $\psi_j(x)$ de la Función $u_N(x)$ } - Coeficientes Transversal(i)/Tangencial(j).

```
> for i from 1 by 1 to N do:
> for j from 1 by 1 to N do:
> K[i,j+N]:= int(Wxx[i]*Ux[j]*(-Mf/Rm) + W[i]*Ux[j]*(Ma/Rm),x=0..Lx):
> end do:
> end do:
```

```

Sub-Matriz [C] i=(N+1)..2*N / j=1..N donde [C] =  $\beta ( \psi_i, \phi_j )$  {i= índice para la Función Coordenada  $\psi_i(x)$  y j=
índice para el Término  $\phi_j(x)$  de la Función  $w_N(x)$ } - Coeficientes Tangencial(i)/Transversal(j).

```

```

> for i from 1 by 1 to N do:
>   for j from 1 by 1 to N do:
>     K[i+N,j] := int(Ux[i]*W[j] * (Ma/Rm) + Ux[i]*Wxx[j] * (-ME/Rm), x=0..Lx) :
>   end do:
> end do:

```

```

Sub-Matriz [D] i=(N+1)..2*N / j=(N+1)..2*N donde [D] =  $\beta ( \psi_i, \psi_j )$  {i= índice para la Función Coordenada
 $\psi_i(x)$  y j= índice para el Término  $\psi_j(x)$  de la Función  $u_N(x)$ } - Coeficientes Tangencial(i)/Tangencial(j).

```

```

> for i from 1 by 1 to N do:
>   for j from 1 by 1 to N do:
>     K[i+N,j+N] := int(Ux[i]*Ux[j]*Ma + Ux[i]*Ux[j]*(ME/(Rm^2)), x=0..Lx) + subs(x=0,s0*U[i]*U[j]
) + subs(x=Lx, s1*U[i]*U[j]):
>   end do:
> end do:

```

```

Comprobación de Simetría  $K^T = K$ 

```

```

> is(K[1,N+1]=K[N+1,1]);

```

▼ Energía (Forma Lineal) $U(\delta v)$.

```

Definición Forma Lineal M[i].

```

```

> M:=array(1..2*N):
> for i from 1 by 1 to (2*N) do:
>   M[i]:=0:
> end do:

```

```

Forma Lineal dependiente de la Presión Interna Pr.

```

```

> for i from 1 by 1 to N do:
>   M[i] := int(W[i]*Pr*DZ, x=0..Lx) : #Para un valor definido de Pr.
> end do:

```

▼ Resolución del Sistema Lineal $[K]\{c\}=[M]$ para los Coeficientes $\{c_j\}$ α $[j=1..N]$ y β $[j=(N+1)..2N]$.

```

Resolución del Sistema Lineal por 'Solve'.

```

```

> with(LinearAlgebra):
> KK:= convert(K, Matrix): #Sin 'datatype=float'.
type(KK,Matrix);
> MM:= convert(M, Vector[column]): #Sin 'datatype=float' para que resuelva con Pr.
type(MM,Vector);
> Coef:=LinearSolve(KK,MM,method='solve'):

```

```

Armado de las Funciones de Aproximación.

```

```

Definición de los Arreglos.

```

```

> Warr:=array(1..N): Uarr:=array(1..N): #Warr arreglo del prod. (Coef.)*(Func. Coord)
>
> for i from 1 by 1 to N do:
>   Warr[i]:=0: Uarr[i]:=0:
> end do:

```

```

Asignación de los Valores al Arreglo.

```

```

> for i from 1 by 1 to N do:
>   Warr[i] := W[i]*Coef[i]:
>   Uarr[i] := U[i]*Coef[i+N]:
> end do:

```

```

Armado de las Funciones.

```

```

> Wn:=0: Un:=0: #Vn Función Wn(x) / Un(x).
> for i from 1 by 1 to N do:
>   Wn := Wn + Warr[i]:
>   Un := Un + Uarr[i]:
> end do:

```

```

Reemplazo de s1(z) / Función de Resorte Axial y de Pr(z) / Perfil de Presión Axial.

```

```

> Wn := subs(Pr=(Po-Pt)/(LD)*z + Pt, s1=ThieleInterpolation(PuntosS1,z), Wn):
> Un := subs(Pr=(Po-Pt)/(LD)*z + Pt, s1=ThieleInterpolation(PuntosS1,z), Un):

```

```

Muestra de Funciones.

```

```

> #print(Wn);
> #print(Un):

```

Gráfico de las Funciones $W_n(x)$ y $U_n(x)$.

```
> with(plots):
> with(plottools):
```

Gráfico de Semi-Arco no Deformado.

```
Definición de Parámetros.
> NumDiv:= 100: #Número de Divisiones del Arco [-Pi,Pi].
> PasoPhi:= Phi/NumDiv: #Paso Angular.
> PointNonDef:= array(1..NumDiv+1,1..2):#Arreglo de Puntos No Deformado {Xo,Yo}.
> Ang:=(3/2)*Pi: #Ángulo de Parametrización.
Cálculos de Puntos del Semi-Arco no Deformado.
> for i from 1 by 1 to (NumDiv+1) do:
> PointNonDef[i,1]:= Rm*cos(Ang):
> PointNonDef[i,2]:= Rm*sin(Ang):
> Ang:= Ang + PasoPhi:
> end do:
Gráfico de Puntos de la Sección No Deformada (GrafND).
> GrafND:= plot(PointNonDef, color=black, thickness=2, linestyle=dash, scaling=constrained,
axes=normal):
> GrafNDIzq:= reflect(GrafND, [[0,0],[0,1]]):
```

Gráfico del Semi-Arco Deformado.

```
Selección del Punto de Cálculo  $0 < Zdef < LD$ .
> Zdef:=3.0*Dext:
Definición de Parámetros.
> PointDef:= array(1..NumDiv+1,1..2):
> Ang:=(3/2)*Pi:
Cálculo de Puntos del Semi-Arco Deformado.
> for i from 1 by 1 to (NumDiv+1) do:
> Arg:=evalf(Rm*(Ang - (3/2)*Pi)):
> PointDef[i,1]:= PointNonDef[i,1] + subs(z=Zdef,x=Arg, Wn)*cos(Ang) - subs(z=Zdef,x=Arg,
Un)*sin(Ang):
> PointDef[i,2]:= PointNonDef[i,2] + subs(z=Zdef,x=Arg, Wn)*sin(Ang) + subs(z=Zdef,x=Arg,
Un)*cos(Ang):
> Ang:= Ang + PasoPhi:
> end do:
Gráfico de Puntos de la Sección Deformada (GrafD).
> GrafD:= plot(PointDef, color=black, thickness=1, scaling=constrained, axes=normal):
> GrafDIzq:= reflect(GrafD, [[0,0],[0,1]]):
```

Gráfico en Conjunto.

```
> #display({GrafND, GrafNDIzq, GrafD0, GrafDIzq0, GrafD05, GrafDIzq05, GrafD1, GrafDIzq1, GrafD15,
GrafDIzq15, GrafD2, GrafDIzq2, GrafD25, GrafDIzq25, GrafD3, GrafDIzq3}, title="SECCIÓN DE TUBO
DEFORMADA \n\n", axes=none, labels=["", "Distancia de la Punta de Fisura 'z'"]); #, legend=
["z=0", "", "z=D", "", "z=0", "", "z=2D", "", "z=3D", "", "z=2.5D", "", "z=1.5D", "", "z=0.5D", ""],
color=[blue, gold, magenta, yellow, red, brown, green, black, blue, green, yellow, magenta, red, gold,
brown, black].
> display({GrafND, GrafNDIzq, GrafD, GrafDIzq}, title="SECCIÓN DE TUBO DEFORMADA \n\n", axes=
none);
```

Comprobación de la Apertura de Fisura - COD(z).

```
> Presión:= ((Po-Pt)/(LD)*z + Pt):
> subs(z=Zdef, Presión):
> ResorteAxial:= ThieleInterpolation(PuntosS1, z):
> subs(z=Zdef, ResorteAxial):
> COD:= 2*(PointDef[NumDiv+1,1] - PointNonDef[NumDiv+1,1]):
```

Gráfico de Funciones $W_n(x)$ y $U_n(x)$ en $z=Zdef$.

```
> plot(subs(z=Zdef, Wn), x=0..Lx);
> plot(subs(z=Zdef, Un), x=0..Lx);
```

Cálculo de Energías en Sección / $z=Zdef$.

```
>
```

Energía Interna.

```
> EnPotFlex:=(1/2) * Mf * int(subs(z=Zdef, ((diff(Wn,x$2) - (1/Rm)*diff(Un,x))^2)), x=0..Lx):
> EnPotAx:=(1/2) * Ma * int(subs(z=Zdef, ((1/Rm)*Wn + diff(Un,x))^2), x=0..Lx):
> EnPotVinc:=subs(z=Zdef, x=0, s0*(Un)^2 + t0*(Wn)^2 + r0*(diff(Wn,x))^2) + subs(s1=
ThieleInterpolation(PuntosS1, z), z=Zdef, x=Lx, s1*(Un)^2 + t1*(Wn)^2 + r1*(diff(Wn,x))^2):
> EnPotTot:= EnPotFlex + EnPotAx + EnPotVinc:
```

Trabajo de Fuerzas Externas.

```
> TrFExt:=int(subs(Pr=((Po-Pt)/(LD)*z + Pt), z=Zdef, Pr*Wn*DZ), x=0..Lx):
```

▼ Cálculo Energy Release Rate G [Integración en (f) y (e) / Volumen de Control].

▼ Energía Interna Frente a la Fisura.

```
[Energía de Deformación Eint[0].
> EnPotFlexIN:=(1/2) * Mf * int(subs(z=0.0, ((diff(Wn,x$2) - (1/Rm)*diff(Un,x))^2)),x=0..Lx) :
> EnPotAxIN:=(1/2) * Ma * int(subs(z=0.0, ((1/Rm)*Wn + diff(Un,x))^2),x=0..Lx) :
> EnPotVincIN:=subs(z=0.0,x=0, s0*(Un)^2 + t0*(Wn)^2 + r0*(diff(Wn,x))^2) + subs(s1=
ThieleInterpolation(PuntosS1,z),z=0.0,x=Lx, s1*(Un)^2 + t1*(Wn)^2 + r1*(diff(Wn,x))^2) :
> Eint0:= 2*(EnPotFlexIN + EnPotAxIN + EnPotVincIN);
```

▼ Energía Interna

```
[Cálculo de Puntos.
> NumDivZ:= convert(LD/DZ,'integer') :
> EnPotArray:= array(1..NumDivZ,1..2) :
> DeltaZ:= LD/NumDivZ :
> Zi:= DZ/2.0 :
> EnIntSuma:= 0.0 :
> for i from 1 by 1 to NumDivZ do :
AuxFlex:= (1/2) * Mf * int(subs(z=Zi, ((diff(Wn,x$2) - (1/Rm)*diff(Un,x))^2)),x=0..Lx) :
AuxAx:= (1/2) * Ma * int(subs(z=Zi, ((1/Rm)*Wn + diff(Un,x))^2),x=0..Lx) :
AuxVinc:= subs(z=Zi,x=0, s0*(Un)^2 + t0*(Wn)^2 + r0*(diff(Wn,x))^2) + subs(s1=
ThieleInterpolation(PuntosS1,z),z=Zi,x=Lx, s1*(Un)^2 + t1*(Wn)^2 + r1*(diff(Wn,x))^2) :
EnPotArray[i,1]:= Zi :
EnPotArray[i,2]:= AuxFlex + AuxAx + AuxVinc :
EnIntSuma:= EnIntSuma +AuxFlex + AuxAx + AuxVinc :
Zi:= Zi + DeltaZ :
end do:]
[Gráfico de Energía de Deformación.
> plot(EnPotArray,z=0..LD, axes=boxed, labels=["z", "Energía Interna [N.mm]"],
labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=1, title="ENERGÍA INTERNA
TOTAL 'Eint' \n");
[Ajuste de la Curva de Energía.
EqZ:= 2: #Espaciamiento de Puntos para Suavizar la Curva:
> EnPotList:= convert(EnPotArray, list) :
> EnPotZList:= [seq(EqZ*DeltaZ*i,i=0..NumDivZ/EqZ)]:
> CurvaEnPotencial:= ArrayInterpolation(EnPotList,EnPotZList) :
CurvaEnPotencial[1]:
> PlotEnInt:= plot(EnPotZList,2*CurvaEnPotencial, axes=boxed, labels=["z", "Energía Interna
[N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=2, title="ENERGÍA
INTERNA \n (Deformación + Cinética) \n", gridlines=true);
[Interpolación de Curva.
> PolEnPot:= Spline(EnPotZList,CurvaEnPotencial,z) :
> plot(PolEnPot, z=0..LD) :
> FuncionIntEnPot:= Lim-> int(PolEnPot,z=0..Lim) :
> PlotEnIntAc:= plot((2)*(FuncionIntEnPot(Lim)),Lim=0..(LD), axes=boxed, labels=["z",
"Energía Interna Acumulada [N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black,
thickness=2, title="ENERGÍA INTERNA \n (Acumulada) \n", gridlines=true);
> IntEnPot:= int(PolEnPot,z=0..(LD-5)) :
[Cálculo de la Energía de Deformación
> #EIntTOT:= (2)*IntEnPot;
> EintTOT:= (2)*EnIntSuma;
```

▼ Trabajo de Fuerzas Externas

```
[Cálculo de la Suma (Integral realizada de manera discreta).
> NumDivZ:= convert(LD/DZ,'integer') :
> TrFArray:= array(1..NumDivZ,1..2) :
> DeltaZ:= LD/NumDivZ :
> Zi:= DZ/2.0 :
> TrSuma:= 0.0 :
> for i from 1 by 1 to NumDivZ do :
Aux:= int(subs(Pr=((Po-Pt)/(LD)*z + Pt),z=Zi,Pr*Wn*DZ),x=0..Lx) :
TrSuma:= TrSuma + Aux :
TrFArray[i,1]:= Zi :
TrFArray[i,2]:= Aux :
Zi:= Zi + DeltaZ :
end do:]
[Gráfico del Trabajo de Presión.
> plot(TrFArray,z=0..LD, axes=boxed, labels=["z", "Trabajo de Presión [N.mm]"],
labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=1, title="Trabajo de las
Fuerzas Externas 'W' \n");
[Ajuste de la Curva del Trabajo de Presión.
EqZ:= 1: #Espaciamiento de Puntos para Suavizar la Curva:
> TrFList:= convert(TrFArray, list) :
> TrFZList:= [seq(EqZ*DeltaZ*i,i=0..NumDivZ/EqZ)]:
> CurvaTrabajoPresion:= ArrayInterpolation(TrFList,TrFZList) :
> PlotTrFExt:= plot(TrFZList,2*CurvaTrabajoPresion, axes=boxed, labels=["z", "Trabajo de
Presión [N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=2, title=
"TRABAJO DE FUERZAS EXTERNAS 'W' \n", gridlines=true);
```

```

Interpolación de Curva.
> PolTrPresion:= Spline(TrFZList,CurvaTrabajoPresion,z):
> plot(PolTrPresion, z=0..LD):
> FuncionIntTrF:= Lim-> int(PolTrPresion,z=0..Lim):
> plot((2)*FuncionIntTrF(Lim),Lim=0..LD, axes=boxed, labels=["z", "Trabajo de Presión
Acumulado [N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=2, title=
"TRABAJO DE FUERZAS EXTERNAS \n (Acumulado) \n", gridlines=true);

> IntTrFExt:= int(PolTrPresion,z=0..LD):
Cálculo del Trabajo de Presión.
> #WTOT:= (2*IntTrFExt);
> WTOT:= (2*TrSuma);
    
```

▼ Análisis de la Energía del Resorte Axial S1(z).

▼ Energía de Deformación Pura.

```

Cálculo de Puntos.
> NumDivZ:= convert(LD/DZ,'integer'):
> EnPotArraySR:= array(1..NumDivZ,1..2):
> EnS1Array:= array(1..NumDivZ,1..2):
> DeltaZ:= LD/NumDivZ:
> EnDefSRSuma:= CurvaEnPotencial[1]:
> EnResS1Suma:= 0.0:
> Zi:= DZ/2.0:
> for i from 1 by 1 to NumDivZ do:
    AuxFlex:= (1/2) * Mf * int(subs(z=Zi,((diff(Wn,x$2) - (1/Rm)*diff(Un,x))^2)),x=0..Lx):
    AuxAx:= (1/2) * Ma * int(subs(z=Zi,((1/Rm)*Wn + diff(Un,x))^2),x=0..Lx):
    AuxVinc:= subs(z=Zi,x=0, s0*(Un)^2 + t0*(Wn)^2 + r0*(diff(Wn,x))^2 + subs(z=Zi,x=Lx, (0
    *(Un)^2 + t1*(Wn)^2 + r1*(diff(Wn,x))^2):
    AuxS1:= subs(s1=ThieleInterpolation(PuntosS1,z),z=Zi,x=Lx, s1*(Un)^2):
    EnPotArraySR[i,1]:= Zi: EnS1Array[i,1]:= Zi:
    EnPotArraySR[i,2]:= AuxFlex + AuxAx + AuxVinc + CurvaEnPotencial[1]: EnS1Array[i,2]:=
    AuxS1:
    EnDefSRSuma:= EnDefSRSuma + AuxFlex + AuxAx + AuxVinc:
    EnResS1Suma:= EnResS1Suma + AuxS1:
    Zi:= Zi + DeltaZ:
end do:
Gráfico de Energía de Deformación.
> plot(EnPotArraySR,z=0..LD, axes=boxed, labels=["z", "Energía de Deformación Pura[N.mm]"],
labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=1, title="Energía de
Deformación 'Us' \n"):

Ajuste de la Curva de Energía.
> EqZ:= 15: #Espaciamiento de Puntos para Suavizar la Curva:
> EnPotListSR:= convert(EnPotArraySR, list):
> EnPotZListSR:= [seq(EqZ*DZ*i,i=0..NumDivZ/EqZ)]:
> CurvaEnPotencialSR:= ArrayInterpolation(EnPotListSR,EnPotZListSR):
> PlotEnDef:= plot(EnPotZListSR,2*CurvaEnPotencialSR, axes=boxed, labels=["z", "Energía de
Deformación [N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=2,
title="ENERGÍA DE DEFORMACIÓN 'Us' \n", gridlines=true);

Interpolación de Curva.
> PolEnPotSR:= Spline(EnPotZListSR,CurvaEnPotencialSR,z):
> plot(PolEnPotSR, z=0..LD):
> FuncionIntEnPotSR:= Lim-> int(PolEnPotSR,z=0..Lim):
> PlotEnDefAc:= plot((2)*(FuncionIntEnPotSR(Lim)),Lim=0..(LD), axes=boxed, labels=["z",
"Energía de Deformación Acumulada [N.mm]"], labeldirections=[horizontal,vertical], color=
black, thickness=2, title="ENERGÍA DE DEFORMACIÓN PURA \n (Acumulada) \n", gridlines=true)
;
> IntEnPotSR:= int(PolEnPotSR,z=0..(LD-5)):
Cálculo de la Energía de Deformación
> EnDefIntSR:= (2)*EnDefSRSuma;
    
```

▼ Energía del Resorte Axial S1(z).

```
Gráfico de Energía de Resorte.  
> plot(EnS1Array,z=0..LD, axes=boxed, labels=["z", "Energía de Resorte Axial [N.mm]"),  
  labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=1, title="Energía de Resorte  
  Axial 'S1' \n"):  
Ajuste de la Curva de Energía.  
> EqZ:= 1: #Espaciamiento de Puntos para Suavizar la Curva:  
> EnS1List:= convert(EnS1Array, list):  
> EnS1ZList:= [seq(EqZ*DZ*i,i=0..NumDivZ/EqZ)]:  
> CurvaEnResorte:= ArrayInterpolation(EnS1List,EnS1ZList):  
> PlotEnRes:= plot(EnS1ZList,2*CurvaEnResorte, axes=boxed, labels=["z", "Energía de Resorte  
  Axial [N.mm]"), labeldirections=[horizontal,vertical], color=black, thickness=2, title=  
  "ENERGÍA DE RESORTE AXIAL 'S1' \n", gridlines=true);  
Interpolación de Curva.  
> PolEnRes:= Spline(EnS1ZList,CurvaEnResorte,z):  
> plot(PolEnRes, z=0..LD):  
> FuncionIntEnRes:= Lim-> int(PolEnRes,z=0..Lim):  
> PlotEnResAc:= plot((2)*FuncionIntEnRes(Lim),Lim=0..(LD), axes=boxed, labels=["z", "Energía  
  de Resorte Acumulada [N.mm]"), labeldirections=[horizontal,vertical], color=black,  
  thickness=2, title="ENERGÍA DEL RESORTE \n (Acumulada) \n", gridlines=true);  
> IntEnRes:= int(PolEnRes,z=0..(LD-5));  
Cálculo de la Energía de Deformación  
> EnResorte:= (2)*EnResS1Suma;
```

▼ Gráfico de Energías Intera/Deformación/Resorte S1(z).

```
Gráfico de Energías de Sección.  
> display({PlotEnDef,PlotEnRes,PlotEnInt}, axes=boxed, title="BALANCE DE ENERGÍA INTERNA  
  \n", view=[0..394.5,-145..75], thickness=2, color=[blue,red,black], legend=["Energía de  
  Deformación","Energía del Resorte S1","Energía Interna"], labels=["z","Energía [N mm]"]);  
Gráfico de Energía Acumulada por Unidad de Longitud.  
> display({PlotEnDefAc,PlotEnResAc,PlotEnIntAc}, axes=boxed, title="BALANCE DE ENERGÍA  
  INTERNA \n (Acumulada) \n", view=[0..400,-20..30], thickness=2, color=[black,red,blue],  
  legend=["Energía Interna","Energía del Resorte Axial","Energía de Deformación"], labels=  
  ["z","Energía por Unidad de Longitud [N mm]"]);  
>
```