

# Análisis inverso de señales ultrasónicas aplicado a la caracterización de materiales en capas

**Ing. María Gabriela Messineo**

Trabajo de Tesis presentado como requisito para la obtención del título de  
Doctora en Ciencia de Materiales

**Directora: Dra. Gloria Lía Frontini**

**Co-Director: Dr. Guillermo E. Eliçabe**

**Facultad de Ingeniería**  
**Universidad Nacional de Mar del Plata**  
*Mar del Plata, Argentina*  
*Noviembre de 2014*



RINFI se desarrolla en forma conjunta entre el INTEMA y la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tiene como objetivo recopilar, organizar, gestionar, difundir y preservar documentos digitales en Ingeniería, Ciencia y Tecnología de Materiales y Ciencias Afines.

A través del Acceso Abierto, se pretende aumentar la visibilidad y el impacto de los resultados de la investigación, asumiendo las políticas y cumpliendo con los protocolos y estándares internacionales para la interoperabilidad entre repositorios



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-  
NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

## Agradecimientos

A mi directora, la Dra. Gloria Frontini, por haber confiado en mi capacidad, alentado mi curiosidad y cuestionado mis certezas. Por la infinidad de “¿Por qué...?” que generaron varios “Porque...”. Por su calidez y la energía que contagia.

A mi co-director, el Dr. Guillermo Eliçabe, por sus valiosos aportes y su buena predisposición.

A la UNMdP y a CONICET por el apoyo económico.

Al Dr. Fernando Otero, la Prof. Teresa Codagnone y el Ing. Carlos Chiuro, por escuchar, alentar y compartir durante gran parte de este camino.

Al Dr. Luis Gaete, de la Universidad de Santiago de Chile, y a todas las personas lindas que trabajan junto a él. Por su entusiasmo y su invaluable colaboración en el aspecto experimental de esta tesis. Por compartir su sabiduría y por hacerme sentir como en casa.

Al Dr. Guillermo Rus, de la Universidad de Granada, por su generosidad al compartir las mediciones experimentales y sus conocimientos, aportados a lo largo de muchas consultas transatlánticas.

A mis padres, por enseñarme que siempre se puede lograr algo más.

A “mis muchachos”, por ser y estar.

# Índice

---

<b>Resumen</b> .....	i
<b>Introducción</b> .....	vi
<b>Capítulo 1. Ondas Mecánicas. Modelo físico</b> .....	<b>1</b>
1.1 Modos de propagación.....	2
1.2 Reflexión y transmisión de ondas.....	4
1.3 La ecuación de onda para un medio elástico no atenuador.....	6
1.4 Atenuación de ondas en sólidos.....	8
1.5 La ecuación de ondas en derivadas fraccionarias para un medio atenuador.....	10
<b>Capítulo 2. Materiales compuestos y su evaluación con ultrasonido</b>	<b>12</b>
2.1 Materiales compuestos.....	12
2.2 Técnicas no destructivas.....	14
2.3 Ultrasonido.....	15
2.4 La generación de la onda ultrasónica.....	16
2.5 Configuraciones de ensayos.....	17
2.6 Aspectos prácticos.....	19
2.7 Evaluación no destructiva cuantitativa.....	20
<b>Capítulo 3. El Modelo Equivalente y el Problema Directo</b> .....	<b>21</b>
3.1 Modelo equivalente.....	22

3.2 Modelo de la línea de transmisión para un material atenuador.....	27
3.3 Simulación del problema directo en materiales no atenuadores.....	30
3.4 Simulación del problema directo en materiales atenuadores.....	25
<b>Capítulo 4. Problema Inverso: bases teóricas.....</b>	<b>38</b>
4.1. Introducción.....	38
4.2 Problemas de regresión no lineal.....	39
4.3 Etapas previas a la resolución de un problema inverso.....	40
4.3 Características del problema inverso.....	41
<b>Capítulo 5. Problema inverso. Estudio previo y metodología de resolución con datos simulados.....</b>	<b>43</b>
5.1 Metodología de resolución.....	43
5.2 Selección del rango de frecuencias.....	46
5.3 Selección de valores iniciales de los parámetros.....	48
5.4 Resultados del problema inverso con datos simulados.....	51
5.5 Análisis de la estabilidad del problema inverso.....	55
5.6 Error de modelado.....	56
5.7 Simulación del problema inverso considerando atenuación.....	57
5.8 La impedancia de carga, ¿medirla o estimarla?.....	60
<b>Capítulo 6. Metodología experimental y de cálculo.....</b>	<b>63</b>
6.1 Diseño de los experimentos.....	63
6.2 Metodología de cálculo.....	66
<b>Capítulo 7. Resultados experimentales.....</b>	<b>70</b>
7.1 Propiedades físicas medidas en forma directa sobre las piezas homogéneas...	71
7.2 Atenuación: análisis y caracterización.....	73
7.3 Análisis inverso aplicado a las muestras homogéneas.....	80
7.4 Materiales de dos capas.....	83
7.5 Materiales de tres capas.....	86

7.6 Posibles causas de los errores en la estimación los parámetros de la atenuación en materiales en capas.....	88
<b>Conclusiones.....</b>	<b>91</b>
<b>Apéndice. Algoritmo de Levenberg-Marquardt.....</b>	<b>98</b>
<b>Notación.....</b>	<b>100</b>
<b>Referencias bibliográficas.....</b>	<b>101</b>

# Resumen

La caracterización de un material puede consistir en identificar propiedades del mismo, o bien, detectar discontinuidades, localizarlas y dar a conocer su naturaleza (poros, fracturas, etc.) para así poder predecir su comportamiento. Existen diferentes técnicas de caracterización y, en general, buscan obtener información acerca del material a partir de su respuesta ante ciertos estímulos. Este tipo de estudios suele requerir técnicas de evaluación no destructivas que permiten obtener información acerca de una pieza o muestra sin afectar su integridad. La técnica no destructiva por excelencia, debido a su amplia utilización y a los costos relativamente bajos que conlleva, entre otras ventajas, es la evaluación con ondas ultrasónicas. Las ondas de ultrasonido son no invasivas y no ionizantes y su propagación por un medio está gobernada por leyes mecánicas.

En esta tesis se presenta una metodología para identificar propiedades mecánicas de un material compuesto por capas a partir de la información obtenida de ensayos de ultrasonido. El marco para llevar a cabo esta identificación es brindado por la teoría de los Problemas Inversos (PI). En este caso particular se plantea un PI de estimación de parámetros, en el que se procura estimar las impedancias acústicas, los tiempos de tránsito y la atenuación de las capas que forman un material compuesto por capas. Dichos parámetros están relacionados de forma directa con las propiedades que se pretende identificar. La solución del PI se halla a partir de la minimización de un funcional de costo no lineal que se plantea como el valor cuadrático medio de la diferencia entre los datos y las formas de onda simuladas a partir de un modelo que

representa el problema de la propagación de una onda por un material elástico, homogéneo e isotrópico para cada capa.

Los datos con que se cuenta provienen de ensayos de transmisión de una señal de ultrasonido a través de una muestra. El modelo que se utiliza para predecir la forma de onda teórica es un modelo equivalente que representa al material mediante una línea de transmisión eléctrica, en base a la analogía entre cantidades eléctricas (tensión eléctrica, corriente) y sus respectivas cantidades mecánicas (tensión mecánica, velocidad de las partículas). Este modelo equivalente tiene la característica de representar la propagación de ondas longitudinales o primarias (tipo P) y se deriva a partir de la suposición de que la onda que se propaga por el medio es longitudinal. Esta situación, que queda representada matemáticamente por la ecuación de onda unidimensional, es una idealización que en determinadas circunstancias puede ser una muy buena aproximación de un problema real. Es fundamental destacar que el uso de dicho modelo ofrece una importante ventaja al momento de valorar la eficiencia computacional si se lo compara con los métodos numéricos basados en la solución discreta de ecuaciones diferenciales.

El análisis del problema se dividió en etapas fundamentales:

- *Estudio del Problema Directo (PD)*. Se evaluó la precisión del modelo equivalente para representar al problema físico planteado, comparando las simulaciones realizadas a partir de dicho modelo con las obtenidas aplicando el método de los elementos finitos. Este último método es ampliamente utilizado y su eficacia ha sido repetidamente probada para todo tipo de simulaciones que implique el cálculo de alguna cantidad física en las más diversas geometrías.
- *Estudio de las características del PI*. Se analizaron la existencia y la unicidad de la solución del PI así como también su estabilidad. En esta instancia se resolvió el PI a partir de datos obtenidos de experimentos simulados, procurándose la identificación de propiedades de materiales de prueba. Como resultado del estudio de existencia y unicidad se concluyó que el problema tiene solución única pero presenta una importante cantidad de mínimos locales. En cuanto a la estabilidad, se encontró que el

incremento en el nivel de error en los datos produce un incremento del mismo orden en el error de la solución. Para llevar a cabo el estudio de estabilidad se simularon casos con error en las mediciones. También se evaluó la influencia que determinados errores de modelado tendrían en las estimaciones de los parámetros buscados.

- *Desarrollo de una metodología de solución.* Se diseñó una estrategia que permite encontrar la solución que converge al mínimo global, basada en la selección de los valores iniciales de los parámetros y considerando el rango de frecuencias utilizado para hacer los cálculos.
- *Adecuación del modelo equivalente.* Debido a que la mayoría de los materiales reales provocan la atenuación de la onda y como el modelo equivalente, en principio, no tiene en cuenta este efecto, fue necesario incluir el fenómeno de la atenuación en las ecuaciones. Para esto se efectuó nuevamente el *Estudio del PD* con el modelo que incluye la atenuación, proponiendo para la misma una relación con la frecuencia que sigue una ley de potencia. Posteriormente se evaluó que el PI resuelto a partir del modelo ampliado tuviese características similares a las del modelo para el material no atenuador, siendo posible aplicar la metodología desarrollada también a materiales atenuadores, en cuyo caso el número de parámetros a estimar es mayor.
- *Validación del modelo equivalente y de la metodología desarrollada.* La etapa final del estudio consiste en obtener propiedades de distintos materiales a partir de experimentos reales. Se utilizaron dos configuraciones de medición diferentes: una con las muestras inmersas en un tanque con agua, colocadas a mitad de camino entre el transductor emisor y el receptor, y la otra con los transductores en contacto con la muestra, acoplados mediante un gel.

Al resolver el problema con datos experimentales se sumaron varias fuentes de error. Por un lado ocurren los errores de medición, inevitables aunque en su mayoría poco significativos. Los más destacables son: la falta de alineación de los transductores, el error que produce la presencia del

acoplante cuando se mide con los transductores en contacto con la pieza y el que introduce el aire o el agua que puede quedar atrapado entre las capas. Además, los errores en el modelo cobran aquí mayor significación, ya que se generan otros tipos de ondas además de las longitudinales y, por otro lado, en la mayoría de los casos no se cumple la hipótesis de una atenuación constante sino que la misma depende de la frecuencia, lo que hizo necesaria una posterior modificación del modelo.

Estas etapas de estudio del problema permitieron:

- Conocer las dificultades y características del problema numérico.
- Diseñar estrategias para afrontarlas.
- Proponer una metodología que permita llevar a cabo una identificación de las propiedades buscadas con un nivel de error aceptable y que sea aplicable a determinados tipos de materiales.

En cuanto a la aplicabilidad de la metodología puede decirse que el nivel de error en la estimación es mayor a medida que aumenta el número de capas, como era presumible. A partir de los datos experimentales se han obtenido estimaciones de los parámetros con alto grado de precisión para materiales de hasta tres capas. Sin embargo, el método puede ser aplicado a materiales compuestos por más capas.

En los materiales reales, debido a que las interfases no siempre son planas y paralelas, ocurre cierta dispersión de la onda emitida, es decir, ésta se propaga en ángulos diferentes al ángulo de emisión del rayo. Como consecuencia de esta dispersión, la incidencia de la onda en los bordes no es normal y ocurre la denominada conversión de modo, que consiste en la conversión de ondas longitudinales en ondas transversales, y a la inversa. La velocidad de las ondas transversales es de alrededor de la mitad de la de las ondas longitudinales y al utilizar la metodología basada en el modelo equivalente se espera que esas ondas no estén presentes. Pero cuando las dimensiones de la muestra en el sentido perpendicular a la propagación de la onda son pequeñas comparadas con la longitud de onda y el material no es muy atenuador, las ondas de corte generadas por la conversión de modo no llegan a atenuarse antes de alcanzar el extremo de la muestra cercano al receptor. Dado que el modelo predice

únicamente la presencia de ondas longitudinales se incurre en mayor error cuando se estudian materiales con baja atenuación o alta velocidad de propagación.

Si tenemos que evaluar las dimensiones de los materiales que pueden estudiarse con el método propuesto en esta tesis debemos decir que existen relaciones de compromiso que condicionan el uso del mismo. Por un lado podemos preguntarnos cuál es el mínimo espesor que puede inspeccionarse, y en este caso es necesario considerar la longitud de la onda, que relaciona la frecuencia con la velocidad de propagación de la onda en el material. Como norma general se sabe que, para tener una buena resolución en la señal temporal, a menores espesores se requieren transductores de mayor frecuencia central y mayor ancho de banda. En cuanto al máximo espesor posible, depende de cuán atenuador sea el material, hecho que condiciona la detectabilidad de la onda propagada. En algunos casos esto puede solucionarse amplificando la potencia de la onda transmitida, aunque manteniéndose dentro del rango de linealidad del problema.

La metodología propuesta permite la caracterización de materiales compuestos por capas mediante la identificación de los parámetros acústicos del modelo: impedancia acústica y tiempo de tránsito. Éstos están relacionados con propiedades físicas y mecánicas tales como velocidad de propagación, densidad y módulo de onda longitudinal, lo que completa la caracterización del material. Se ha podido probar que la metodología permite caracterizar con precisión aceptable materiales en capas, incrementándose el error al aumentar el número de las mismas. En los materiales homogéneos, además, se ha logrado hacer una identificación de la relación de la atenuación con la frecuencia.

---

---

# Introducción

En esta tesis se procura la identificación de propiedades mecánicas de materiales compuestos por capas. Los materiales compuestos ofrecen un campo de estudio muy amplio que se halla en continuo crecimiento. Son cada vez más las aplicaciones que requieren materiales con características particulares que no se encuentran en la naturaleza. Es por ello que la investigación y el desarrollo se abocan a la obtención y estudio de materiales especialmente diseñados en los que se combinan propiedades que les permite cumplir con requisitos específicos. Los materiales compuestos por capas aparecen en un sinnúmero de aplicaciones de ingeniería. También en la naturaleza se encuentran estructuras, tales como las rocas, los dientes, los huesos, o algunos tejidos biológicos (piel, grasa, músculo), que pueden verse como compuestos formados por capas.

Cuando se trata de estudiar las características o el desempeño de estos materiales son adecuadas las técnicas de evaluación no destructiva cuantitativa, que están basadas en el uso de los modelos teóricos y procuran extraer información precisa de los datos obtenidos a partir de ensayos no destructivos [1]. Estas técnicas se emplean cada vez más ampliamente en detección de fallas y caracterización de materiales y en ellas se unen las técnicas de medición, los modelos físicos para análisis computacional, el diseño de los sistemas de medición, así como también su validación y el estudio de confiabilidad de su desempeño.

La técnica de evaluación no destructiva elegida para llevar a cabo los experimentos en este trabajo es el ultrasonido. Las ondas ultrasónicas son ondas mecánicas de alta frecuencia (20 KHz a 100 MHz) adecuadas para la inspección de materiales con diversas geometrías y que permiten su caracterización cuando otros ensayos no son posibles. La naturaleza compleja de las ondas ultrasónicas ha llevado en las últimas décadas a dedicar gran cantidad de recursos al estudio de los aspectos teóricos y numéricos del problema físico de propagación de las mismas [2, 3]. Se han establecido métodos para analizar y simular la generación, propagación e interacción de las ondas en un medio [4, 5, 6]. Estos métodos pueden utilizarse tanto para predecir el comportamiento de un determinado material como para encontrar la solución a un problema de caracterización.

Los métodos computacionales usuales, tales como el Método de Elementos Finitos (FEM), el Método de Elementos de Contorno (BEM) o el Método de las Diferencias Finitas, son técnicas robustas y probadas para predecir y visualizar la propagación de ondas en estructuras de diversas geometrías y complejidad. La limitación de estos métodos reside en el tiempo de cálculo requerido para procesar el código, relacionado con la alta resolución, tanto espacial como temporal, necesarias para representar con precisión la propagación de una onda de ultrasonido.

En esta tesis los datos experimentales se obtienen de la medición de una señal de tensión mecánica transmitida a través de la muestra. Bajo ciertos supuestos, los ensayos para llevar a cabo este tipo de caracterización pueden ser bien representados por modelos equivalentes basados en circuitos eléctricos. Se emplea un modelo en el dominio de la frecuencia basado en la línea de transmisión eléctrica tipo T [7]. Se ha reportado previamente que este modelo puede ser usado para representar la propagación de una onda plana longitudinal (tipo P) dentro de un material elástico isotrópico [8]. Además las líneas T se han usado para modelar transductores piezoeléctricos con pérdidas [9, 10] a partir de un modelo unidimensional basado en el modelo de transductor de Mason [11]. El modelo implementado permite la determinación de las tensiones mecánicas en cualquier interfaz del material, que desde el punto de vista de la analogía electro-mecánica, corresponden a las tensiones eléctricas en una cascada de líneas de transmisión T.

Debido a la complejidad de los modelos físicos que representan las situaciones estudiadas es necesaria una comparación directa de los datos experimentales con los resultados teóricos y los PI brindan un marco de resolución adecuado para este tipo de situaciones.

Se propone diseñar y refinar una metodología inversa de resolución numérica que pueda ser aplicada a diversos tipos de materiales en capas. Para esto se siguen las etapas necesarias para el estudio de un PI:

- Simulación de la propagación de una onda de ultrasonido a través de un material en capas utilizando el modelo equivalente propuesto y también a partir de la resolución de la ecuación de onda mediante métodos numéricos, tales como FEM. Esta instancia es la denominada resolución del problema directo (PD).
- Análisis de las características del PI, tales como la unicidad, la estabilidad y la necesidad de regularización.
- Resolución del PI a partir de datos provenientes de mediciones sintéticas obtenidas al resolver el PD y perturbadas con ruido aditivo de diversa intensidad. También se usaron datos que contenían errores provenientes de otra fuente: el error de modelado. Estos fueron obtenidos a partir de simulaciones hechas con elementos finitos en geometrías que no cumplen con las hipótesis del modelo.
- Resolución del PI a partir de datos provenientes de señales experimentales obtenidas de ensayos de transmisión.

## **Motivación**

Los experimentos que se pueden llevar a cabo sobre una muestra de material se dividen en dos grandes grupos: los ensayos destructivos y los ensayos no destructivos (END). Dentro del primer grupo se hallan todas aquellas pruebas que deforman o alteran de alguna manera la muestra a estudiar: ensayos de tracción, de dureza, de flexión, de torsión, de fatiga, indentación, etc. Los ensayos no destructivos, en cambio, no modifican la pieza o estructura de interés, y por lo tanto son muy apropiados cuando el objeto de la prueba se halla en servicio. Entre los métodos no destructivos pueden

mencionarse los rayos X, los rayos  $\gamma$ , las corrientes de inducción, el penetrante líquido, las partículas magnéticas y, por supuesto, el ultrasonido. Estos ensayos permiten tanto la identificación de propiedades del material como la localización de defectos. También pueden dar una idea del grado de deterioro que ha sufrido un objeto sin alterarlo.

Hoy en día se desarrollan permanentemente nuevos materiales en busca de determinadas características requeridas para las más diversas aplicaciones. El estudio de estos materiales tiene gran importancia en la etapa de diseño así como también durante la evaluación de su desempeño y el monitoreo del cambio en sus propiedades con el paso del tiempo

Un tipo particular de materiales, los compuestos formados por capas, se hallan en varias aplicaciones de ingeniería. Las capas que los constituyen pueden ser materiales homogéneos, como metales, polímeros, cerámicos, elastómeros o vidrios [12, 13, 14], o materiales reforzados con fibras o partículas. También en investigación biomédica suelen tratarse a ciertas estructuras formadas por tejidos como si fuesen materiales en capas, como es el caso de los dientes, el de los huesos y estructuras mixtas formadas por diferentes tipos de tejidos. [15]

## **Estado del arte**

Algunos métodos muy utilizados para identificar propiedades de materiales en capas suelen involucrar experimentos destructivos, como la indentación en el caso de los films [16] o algunos ensayos de tensión [17] de los que se infiere directamente el valor de las constantes elásticas a partir del ajuste de curvas experimentales.

Entre los trabajos que emplean técnicas no destructivas para realizar los ensayos puede mencionarse uno en el que, con conocimiento previo de los transductores y de la atenuación del medio, se obtiene un perfil de impedancias acústicas de un medio en capas a partir de la respuesta al impulso de la reflexión de una onda de ultrasonido [18]. La aplicación que se propone en ese trabajo es la detección de la formación de placas en las arterias, aunque en el mismo se usan muestras construidas especialmente a partir de capas de plástico y líquido.

Los polímeros reforzados con fibras de carbono son materiales ampliamente utilizados en la industria, sobre todo en la aeronáutica y en la automotriz, debido a la excelente relación peso-resistencia. Estos materiales también han probado ser muy apropiados para algunos usos de ingeniería civil, tanto para mejorar la resistencia de una estructura ya construida o como alternativa al acero en una estructura nueva. En su tesis de maestría [19], N. Bochud presenta un método para evaluar daño en polímeros reforzados con fibras de carbono, y a su vez ordenado en capas de un espesor del orden de las décimas de milímetro, ubicadas en forma simétrica. En este caso se resuelve un PI para identificar las propiedades mecánicas que caracterizan el nivel de daño sufrido por el material utilizando como dato la onda propagada por el mismo en un ensayo de transmisión. El modelo utilizado para representar la propagación de la onda es, como en la presente tesis, un modelo equivalente basado en el Formalismo de la Matriz de Transferencia [20].

Hägglund et al. [21] llevan a cabo un estudio de una capa de adhesivo de alrededor de 0,5 mm entre dos platos de vidrio Pirex, uno de 1,8 mm y otro de 3,8 mm, para evaluar la integridad de la misma. El método utilizado para realizar el ensayo de ultrasonido es el de pulso-eco y el modelo de propagación de la onda en dicho ensayo permite extraer una serie de parámetros a partir de un estimador de máxima verosimilitud. Estos parámetros son los coeficientes de reflexión de la onda en las interfaces de las capas, los tiempos de tránsito y los coeficientes de atenuación en cada capa, los que son ingresados luego a un clasificador estadístico que determina si la capa de adhesivo está intacta o contiene aire o agua.

En cuanto a los materiales biológicos hay varios trabajos que los modelan con estructuras formadas por capas. Por ejemplo, Leite et al. [22] hacen un estudio computacional de la propagación de una onda de ultrasonido a través de tres capas, grasa, músculo y hueso, que se suponen homogéneas. En el trabajo mencionado se hace un estudio teórico de la propagación de la onda a partir de parámetros conocidos utilizando diferencias finitas. Esta estructura es de particular interés en aplicaciones terapéuticas, en especial la interfaz músculo-hueso donde puede sufrirse un calentamiento excesivo durante la terapia de ultrasonido para heridas en tejidos blandos.

Otro uso interesante del ultrasonido como ensayo no destructivo en tejidos biológicos se presenta en [23], donde se trata el monitoreo de la adhesión de implantes ortopédicos con  $\text{TiO}_2$  nanoestructurado. El esquema de medición está compuesto por un receptor ultrasónico que se construye en el mismo implante. El transmisor se coloca sobre la piel del paciente, emite una onda de ultrasonido de tipo P y se registra la forma de onda transmitida por las sucesivas capas de grasa, músculo, hueso original y hueso alterado por el implante. Luego se resuelve un PI para realizar la caracterización de módulos elásticos de cada capa en base a un modelo en elementos finitos, que a pesar de ser un método robusto se sabe que tiene un alto costo computacional.

El uso de un modelo equivalente puede ser beneficioso cuando se trata de optimizar los recursos de cálculo. La desventaja de estos modelos es que, en general, suelen tener restricciones que no siempre se cumplen para el problema físico real, con lo que los resultados obtenidos tienen errores. El modelo de la línea de transmisión acústica que se usa en esta tesis fue utilizado en [8] para representar la propagación de una onda de ultrasonido a través de un diente. Este trabajo utiliza datos simulados obtenidos mediante un software de simulación de circuitos eléctricos. Se comparan los resultados del modelo equivalente con resultados obtenidos a partir de elementos finitos aunque no se presentan resultados con experimentos reales.

El objetivo de esta tesis es desarrollar una metodología para caracterizar un material compuesto por capas mediante ensayos no-destructivos con ondas ultrasónicas resolviendo un PI de identificación de parámetros. Como resultado del PI se identifica un conjunto de parámetros que se relacionan con propiedades mecánicas de cada una de las capas del material, tales como velocidad de propagación, densidad y módulo elástico. También se estiman parámetros relacionados con la atenuación de la onda al propagarse por el material.

La metodología propuesta ofrece la ventaja, frente a los métodos numéricos convencionales, de un importante ahorro en recursos de cálculo. Por otro lado, si se hacen las consideraciones apropiadas en cuanto a la frecuencia de los transductores y el espesor de las capas, es aplicable a materiales de diversas dimensiones.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se dan los fundamentos teóricos de ondas mecánicas, el Capítulo 2 trata sobre materiales

compuestos y ensayos no destructivos, haciendo foco especialmente en ultrasonido. En el Capítulo 3 se detalla la formulación del modelo equivalente empleado en esta tesis y se estudia el PD. El Capítulo 4 ofrece una síntesis de aspectos teóricos de la formulación y solución de los problemas inversos, el Capítulo 5 explica la metodología de resolución propuesta y en él se dan resultados obtenidos a partir de mediciones simuladas, junto con consideraciones prácticas para llegar a una correcta solución del PI. Finalmente, en los Capítulos 6 y 7 se presentan la metodología experimental y los resultados obtenidos a partir de las mediciones registradas en los ensayos. Por último, se ofrecen las conclusiones a las que se ha arribado luego del análisis de los resultados.

---

---

# Capítulo 1

## Ondas Mecánicas

### Modelo físico

Este trabajo se ocupa de la caracterización de materiales a partir de ensayos no destructivos con ultrasonido. Este tipo de experimentos consiste, a modo general, en la propagación de una onda ultrasónica por un material y el registro de la respuesta generada por el mismo.

Las ondas ultrasónicas son ondas mecánicas que, a diferencia de las ondas electromagnéticas, necesitan de un medio para propagarse y tienen su origen en las oscilaciones de las partículas que lo conforman. Cuando el medio es elástico cada una de estas partículas puede verse como una masa conectada a otras masas por medio de resortes, y la propagación de la onda se rige por la oscilación armónica de esas partículas. Si estuviesen conectadas rígidamente el movimiento sería simultáneo, es decir, todas las masas se moverían en fase. En cambio, en un medio elástico el movimiento necesita de cierto tiempo para propagarse y, si se observa en un momento determinado diferentes puntos del material, las oscilaciones se presentan desfasadas. Una onda puede caracterizarse por cuatro parámetros: amplitud, frecuencia, longitud de onda y atenuación. La amplitud es la máxima separación de una partícula del material de su punto de equilibrio, la frecuencia es la cantidad de oscilaciones de las partículas en un segundo y se mide en Hertz (Hz), la longitud de la onda es la distancia entre dos

partículas del material que se encuentran desfasadas  $2\pi$  radianes, y la atenuación es una medida de la cantidad de energía que pierde la onda mientras se propaga por el material.

### 1.1 Modos de propagación

La propagación de la onda no involucra un desplazamiento de las partículas del material, sino tan solo una desviación con respecto a su posición de equilibrio siguiendo un movimiento armónico en el caso de una onda elástica.

Las ondas que se propagan en un material pueden tomar diferentes formas o modos de acuerdo a la dirección de la oscilación de las partículas. Cuando éstas oscilan en la dirección de la propagación (Fig. 1.1.a) se generan ondas de presión que se denominan también longitudinales o primarias (ondas P). En el caso en que las partículas vibran perpendicularmente a la propagación de la onda (Fig. 1.1.b) ésta se denomina onda de corte o secundaria (ondas S) y se transmite sólo en sólidos, ya que los líquidos y los gases son incapaces de generar efectos de corte. Tanto las ondas P como las S son las denominadas ondas planas, debido a que la fase de la oscilación es la misma en un plano dado del medio.

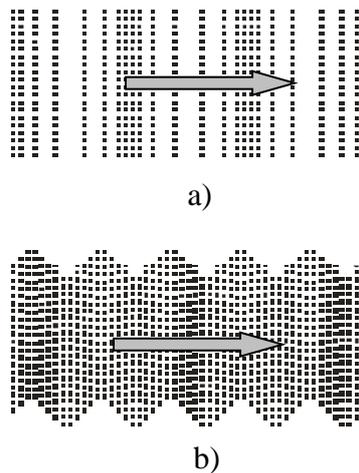


Figura 1.1. Esquema de onda P (a) y de onda S (b).

En los dos casos anteriores se supone que el medio es infinitamente grande en relación a la longitud de la onda. En los cuerpos limitados, tales como platos, columnas,

o un terreno, las ondas alcanzan la superficie y aparecen las denominadas ondas superficiales. Entre estas ondas se incluyen las de Rayleigh, en las que las partículas realizan un movimiento elíptico en el plano de propagación y que tienen su máxima amplitud en la superficie libre, amplitud que disminuye con la profundidad ([Fig. 1.2.a](#)). Otro tipo de ondas superficiales son las de Love, en las cuales las partículas producen un movimiento de corte pero horizontal y se generan siempre que haya una capa superficial blanda sobre un subsapacio más duro. ([Fig. 1.2.b](#)).

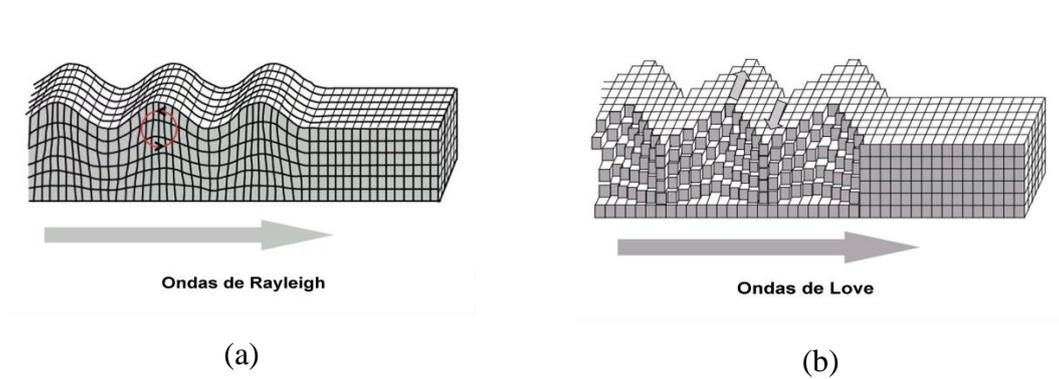


Figura 1.2. Onda de Rayleigh (a) y onda de Love (b).

En láminas delgadas o varillas con espesores de aproximadamente una longitud de onda se generan otra clase de ondas superficiales: las ondas de Lamb, en sus modos antisimétrico o de flexión ([Fig. 1.3.a](#)) y simétrico o de compresión ([Fig. 1.3.b](#)).

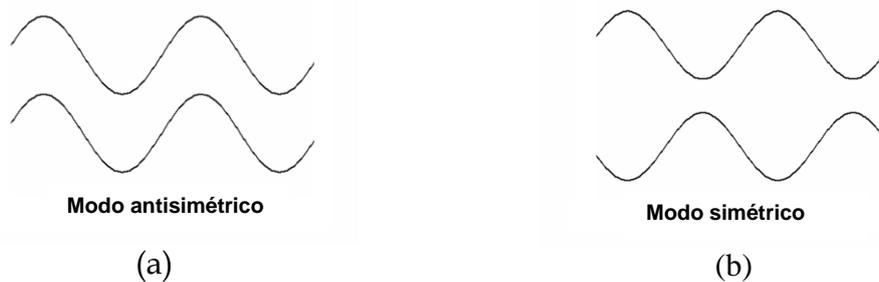


Figura 1.3. Ondas de Lamb antisimétrica (a) y simétrica (b).

Este breve resumen de los tipos de ondas que pueden presentarse en un material nos permite tener una idea de la complejidad que implica la transmisión de una onda en un medio finito, donde tendrá gran influencia la geometría de los bordes.

## 1.2 Reflexión y transmisión de ondas

En la práctica no hay medios infinitos, por lo tanto no es posible considerar la propagación de una onda sin tener en cuenta los límites, donde la onda se ve perturbada de acuerdo a las características geométricas y acústicas del borde.

Si se considera un borde perfectamente plano en el que una onda longitudinal o de presión incide normalmente, que es el caso más sencillo que puede estudiarse ([Fig. 1.4](#)), una parte de la potencia de la onda se transmite y otra parte se refleja en la misma dirección de incidencia. Las porciones de onda transmitida y reflejada dependen de la impedancia acústica del medio,  $Z$ , que es un valor característico del material y está relacionada, a su vez, con la densidad,  $\rho$ , y la velocidad de propagación de la onda en el mismo,  $c$ , mediante la siguiente ecuación:

$$Z = \rho c. \quad (1)$$

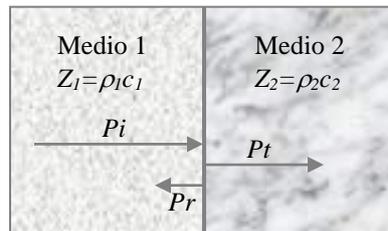


Figura 1.4. Reflexión y transmisión de una onda en una interfaz plana.

La relación entre la onda de presión incidente y la transmitida en una interfaz,  $P_i$  y  $P_t$  respectivamente, define el coeficiente de transmisión,  $T$ , que a su vez depende de una relación entre las impedancias acústicas de los medios a uno y otro lado de dicha interfaz:

$$\frac{P_t}{P_i} = T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}, \quad (2)$$

De la misma forma el coeficiente de reflexión,  $R$ , relaciona la potencia incidente en el borde con la reflejada,  $P_r$ :

$$\frac{P_r}{P_i} = R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (3)$$

De acuerdo a la condición de contorno en la interfaz existen dos casos extremos. El primer caso es aquel en que el borde del material se considera libre, es decir, que el segundo medio es vacío, cuya impedancia acústica es cero. Cuando se da esta situación la onda se refleja y se invierte ( $R = -1$ ) y no hay presión transmitida ya que no hay medio sobre el cual ejercerla (Fig. 1.5.a). El otro caso límite es el que se da cuando el extremo del material está fijo, es decir,  $Z_2 = \infty$ . Aquí la onda transmitida duplica su intensidad y la que se refleja lo hace sin invertirse (Fig. 1.5.b).

La relación entre las presiones incidente, reflejada y transmitida es siempre:

$$P_t = P_r + P_i, \quad (4)$$

o, lo que es lo mismo, la relación entre coeficientes es  $T=R+1$ .

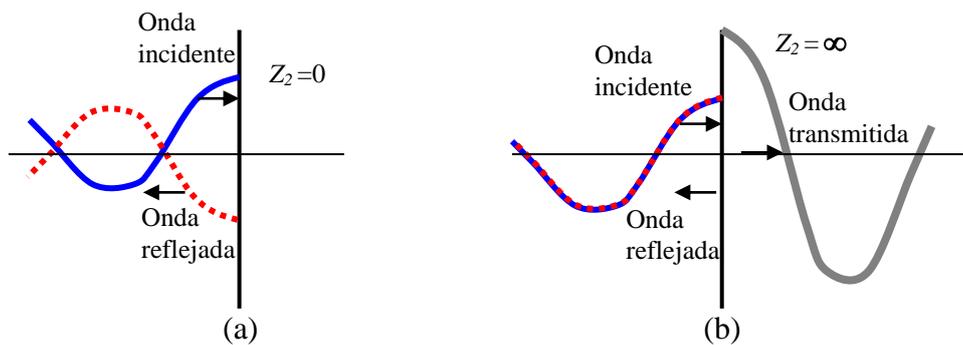


Figura 1.5. Reflexión y transmisión de una onda en interfaz con borde libre (a) y con borde fijo (b).

Cuando la onda incide con cierto ángulo con respecto a la normal, la transmisión de un medio a otro es un poco más complicada. En este caso hay reflexión y transmisión de acuerdo a la ley de Snell, pero cuando los medios son sólidos también ocurre otro fenómeno: la conversión de modo. Este efecto se refiere a la conversión de parte de la onda P en onda S en la interfaz (Fig. 1.6), tanto de la componente transmitida como de la reflejada.

La conversión de modo también se da de onda S a onda P. En interfaces con medios líquidos o gaseosos la componente transversal no aparece, ya que estas ondas necesitan medios con resistencia a la flexión para propagarse, es decir, que puedan

soportar efectos de corte. Por lo tanto, los gases y los líquidos no transmiten ondas transversales.

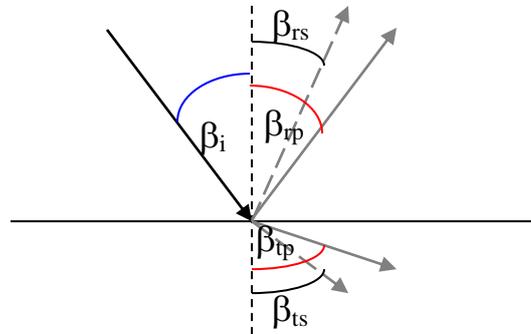


Figura 1.6. Conversión de modo en una interfaz cuando la incidencia no es normal.

La propagación de una onda por un medio tiene una representación matemática dada por una ecuación en derivadas parciales que se obtiene haciendo uso de la teoría de la Mecánica del Continuo.

### 1.3 La ecuación de onda para un medio elástico no atenuador

Las fuerzas de tensión o compresión aplicadas a un material con comportamiento elástico son causa de deformaciones en el mismo. Igualmente, al deformarse un material se generan tensiones en su interior. Un medio elástico posee la capacidad de recuperar absolutamente su estado inicial luego de haber sufrido una deformación y, por otro lado, la tensión es función únicamente de la deformación aplicada.

Si se considera un elemento diferencial del material, la componente  $ij$  del tensor de deformación diferencial de dicho elemento es [24]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5)$$

donde  $u_i$  es la componente del desplazamiento en la dirección  $i$  y  $x_i$  es la coordenada euleriana correspondiente a la dirección  $i$ .

La ecuación constitutiva para el comportamiento elástico queda determinada por la Ley de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (6)$$

donde  $\sigma_{ij}$  es la componente  $ij$  del tensor de tensiones y  $C_{ijkl}$  es el tensor de componentes elásticos, que tiene 81 coeficientes. Pero de acuerdo a la simetría de los tensores de deformación y de tensión queda claro que

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (7)$$

y se reducen a 36 coeficientes diferentes como máximo. Si el comportamiento del medio, además de ser elástico es isotrópico, su ecuación constitutiva posee sólo dos constantes elásticas. Puede mostrarse que en este caso el tensor de constantes elásticas queda dado por:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (8)$$

siendo  $\lambda$  y  $\mu$  escalares y  $\delta_{ij}$ , la delta de Kronecker [25]. Luego, haciendo uso de las propiedades de sustitución de la delta, la Ley de Hooke para comportamiento elástico isotrópico puede escribirse:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (9)$$

Por otro lado, de acuerdo a la segunda Ley de Newton,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (10)$$

Combinando las Ec. (9) y (10) obtenemos la ecuación de movimiento o ecuación de onda en tres dimensiones para un medio elástico, homogéneo, isotrópico y no atenuador:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (11)$$

que también puede escribirse de forma vectorial:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (12)$$

donde  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  y  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  es el operador Laplaciano. Esta ecuación

contempla la propagación de ondas tanto longitudinales como de corte.

Cuando se trata de una onda plana tipo P, todos los movimientos ocurren en una dirección y la ecuación de onda que describe esta situación es la unidimensional:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (13)$$

La solución de la Ec. (13) está dada por funciones del tipo

$$u(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)}, \quad (14)$$

donde  $A$  es la amplitud de la onda que se propaga,  $\omega$  es su frecuencia y  $k = \omega/c$  es el número de onda. La velocidad de propagación de la onda plana,  $c$ , está dada por:

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (15)$$

#### 1.4 Atenuación de ondas en sólidos

Si consideramos que las ondas se propagan de acuerdo al modelo de masas y resortes mencionado antes, éstas continuarán con su movimiento oscilatorio de manera indefinida. Sin embargo, en los materiales reales, la intensidad de la onda decrece a medida que la misma se propaga por el medio. Esto se debe principalmente a dos causas: dispersión (scattering) y absorción, efectos que suelen unirse en el concepto de *atenuación*.

El scattering es el resultado de la falta de homogeneidad del material, que puede contener defectos, granos o poros, donde la impedancia acústica cambia abruptamente y

por lo tanto se producen reflexiones en diferentes ángulos. Esto hace que parte de la energía de la onda se disperse y la amplitud transmitida se vea atenuada.

La absorción se relaciona directamente con la conversión de energía cinética de la onda en energía calórica. Los procesos que provocan este efecto caen más allá de los propósitos de este trabajo.

En la mayoría de los materiales la atenuación depende de la frecuencia, aunque en algunos casos no aporta errores de importancia el considerar un coeficiente de atenuación constante. Hay diferentes modelos para la atenuación que serán abordados en el apartado siguiente. En general estos modelos predicen el hecho de que a mayores frecuencias la onda sufre mayor atenuación.

También de acuerdo al tipo de material de que se trate y a los procesos involucrados en el fenómeno de atenuación, existen distintos modelos para representarlo. Estos procesos pueden ser pérdidas viscosas, absorción por conducción de calor, absorción por relajación molecular o una combinación de todos esos fenómenos. Es usual incluir su efecto en el módulo elástico del material, que queda así dependiente de la frecuencia.

Otra forma de incluir la atenuación en las ecuaciones que modelan la propagación de una onda es considerar un número de onda complejo:

$$\hat{k} = \frac{\omega}{c} - i\alpha(\omega), \quad (16)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la onda,  $c$  es la velocidad de propagación y  $\alpha$  es la atenuación en función de la frecuencia.

En cuanto a la forma que toma  $\alpha(\omega)$ , en algunos materiales no se incurre en error al considerarla constante, mientras que en otros, como los líquidos, presentan una atenuación con dependencia cuadrática de la frecuencia, y en muchos metales la atenuación puede aproximarse mediante una ley lineal.

En una gran variedad de medios, incluidos algunos líquidos, tejidos animales, algunas rocas en capas así como también en polímeros sólidos, la atenuación de las ondas de ultrasonido parece ser bien modelada por una dependencia potencial de la frecuencia. Esta es una ley empírica que puede expresarse como:

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \omega^\eta. \quad (17)$$

En la Ec. (17)  $\alpha_0$  y  $\eta$  son dos parámetros que dependen del material y se obtienen de un ajuste a las curvas experimentales. Para muchos materiales se ha observado que  $0 < \eta < 2$ , y suele llamarse a esta atenuación, atenuación anómala. Este modelo abarca los casos de atenuación constante ( $\eta=0$ ), atenuación lineal ( $\eta=1$ ) y atenuación cuadrática ( $\eta=2$ ).

### 1.5 La ecuación de ondas en derivadas fraccionarias para un medio atenuador

A partir del modelo experimental de atenuación de acuerdo a una ley potencial (Ec. (17)) se han desarrollado trabajos que procuran la representación del problema físico mediante una ecuación de onda que incluya una atenuación de este tipo. Entre los esfuerzos realizados en este sentido debe destacarse el trabajo de Szabo [26, 27], que ha servido como referencia a otros [28, 29] que continuaron el estudio y arribaron a ecuaciones de ondas en derivadas fraccionarias generalizadas.

El análisis de Szabo parte de la ecuación de onda termoviscosa, que modela la propagación de una onda a través de un fluido:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2) u, \quad (18)$$

donde  $\nu$  es una constante que involucra los coeficientes de atenuación viscosos, la densidad del material, la conductividad térmica, el calor específico a presión constante y la relación de calores específicos. Esta ecuación fue generalizada posteriormente por Chen et al. utilizando el Laplaciano fraccionario para obtener:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha_0}{c^{1-\eta}} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2)^{\eta/2} u. \quad (19)$$

donde  $\alpha_0$  es el parámetro de atenuación que se da en la Ec. (17). Cuando  $\eta=2$  este modelo es equivalente al de la Ec. (18) y representa bien el comportamiento de un fluido.

Además, con  $\eta=0$  la Ec. (19) se reduce a la ecuación para medios con atenuación constante (Ec. (20)) y con  $\eta=l$  representa atenuación lineal (Ec. (21)).

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha_0}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (20)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\alpha_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (21)$$

Puede mostrarse que, luego de algunas aproximaciones, la ecuación de onda hallada se ajusta a la ley de potencia para la atenuación y de esta manera hallamos un marco formal que justifica el uso de la Ec. (17) para representar la relación de la atenuación con la frecuencia.

---

---

## Capítulo 2

# Materiales compuestos y su evaluación con ultrasonido

### 2.1 Materiales compuestos

Los materiales compuestos son aquellos en los que pueden diferenciarse dos o más fases. En la naturaleza se encuentran diversos tipos de materiales que presentan estructuras en las que pueden distinguirse fases. Ejemplos de ello son las rocas con sus sucesivas capas de sedimentos o con inclusiones de diferentes tipos de piedras o, en biología, algunas estructuras que están formadas por capas de distintos tejidos. También en la industria se sintetizan materiales compuestos por dos o más fases de diferentes características físicas, con el fin de que cumplan con ciertos requerimientos que no están presentes en materiales naturales. Una clasificación de este tipo de materiales se muestra en la [Fig. 2.1](#).

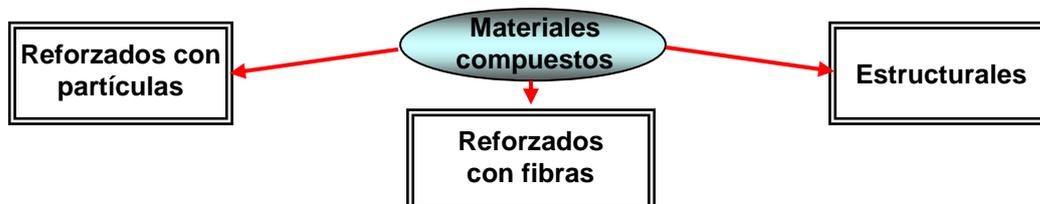


Figura 2.1. Clasificación de materiales compuestos.

Los materiales reforzados con partículas están compuestos, en general, por partículas duras dispersas uniformemente y rodeadas de una matriz más blanda y dúctil. En los materiales reforzados con fibras el refuerzo suele ser una fibra fuerte, como la fibra de vidrio, el kevlar, o las fibras de carbono, rodeadas de una matriz polimérica que liga las fibras. La función de las fibras es resistir la tracción mecánica y la de la matriz es resistir las deformaciones, lográndose así que el material compuesto tenga mejores propiedades que cada material por separado. En cuanto a los materiales estructurales, pueden estar formados también por otros compuestos o por materiales homogéneos y sus propiedades dependen de su geometría. Los más usuales son los laminares, en los que se unen capas de diferentes materiales mediante algún adhesivo, y los tipo sándwich, donde dos láminas de alta dureza encierran a una tercera menos densa y resistente.

Los materiales de interés para esta tesis, los compuestos formados por capas, están dentro de los materiales estructurales. El análisis de estos materiales es de suma importancia debido al amplio uso que se hace actualmente de los mismos en la industria, utilizándose como aislantes térmicos o sonoros en la construcción y en las industrias automotriz y aeronáutica. Suelen encontrarse estructuras formadas por capas en diversas áreas de estudio y en escalas muy variadas. Se puede hallar este tipo de estructuras tanto cuando se estudia la propagación de ondas sísmicas [30, 31], donde las frecuencias son muy bajas, como así también en casos donde las dimensiones son milimétricas, o incluso micrométricas, y requieren la utilización de altas frecuencias para su estudio [32, 33].

Naturalmente, las piezas fabricadas con estos materiales sufren el desgaste del paso del tiempo, alterándose sus características ya sea por delaminación, fracturas o aparición de defectos, y es necesario monitorear el estado de las mismas, lo que usualmente debe hacerse con las piezas o las estructuras en servicio. Por lo tanto, la utilización de técnicas no destructivas es muy apropiada cuando se trata de realizar este tipo de inspecciones. Estas técnicas pueden emplearse también para llevar a cabo una caracterización mecánica de estos materiales y así poder conocer, por ejemplo, la evolución de alguna propiedad que se vea alterada por el paso del tiempo.

## 2.2 Técnicas no destructivas

Los ensayos no destructivos hacen usos de técnicas no invasivas para determinar integridad, propiedades o características de un material, componente o estructura. Las técnicas más usadas son: la inspección visual, los rayos X, el penetrante líquido, las corrientes de inducción, las partículas magnéticas y el ultrasonido.

La primera de estas técnicas es la que natural e inevitablemente se utiliza en cualquier evaluación que hace un observador, pero es evidente que es muy limitada en cuanto a la información que de ella puede obtenerse.

Los rayos X son utilizados ampliamente debido a la forma relativamente sencilla y rápida en que se obtiene la información. Mediante esta técnica se localizan fracturas, defectos o discontinuidades o variaciones de espesor. Su principal desventaja es la radiación emitida, por lo que los operadores del equipo deben trabajar con protección.

Los líquidos penetrantes son sustancias fluorescentes que se utilizan para detectar grietas o fracturas en piezas metálicas o no metálicas, es decir, tiene una aplicación muy específica y no permite realizar un estudio más completo del material.

En los ensayos con corrientes de inducción se genera un campo magnético que induce corriente en la superficie de la pieza a evaluar. Permite detectar defectos superficiales y sub-superficiales, y también medir dimensiones y propiedades del material. Una importante desventaja es que la preparación de la muestra debe hacerse para cada aplicación en particular.

Las partículas magnéticas también permiten detectar defectos superficiales y sub-superficiales pero sólo en materiales ferromagnéticos.

El ultrasonido emplea ondas sonoras de alta frecuencia, desde del orden del MHz hasta los cientos de MHz, para inspeccionar cualquier tipo de material, ya sean sólidos o líquidos y permite obtener, a partir del estudio de la onda propagada, información sobre diversos aspectos de la muestra estudiada.

## 2.3 Ultrasonido

El ultrasonido se utiliza clásicamente para la detección de defectos, fracturas, poros y discontinuidades en general. Un uso más avanzado de esta técnica, desde el punto de vista de que requiere una evaluación más sofisticada de los datos, es la determinación de valores de constantes elásticas, aspecto de interés de la presente tesis. El ultrasonido requiere relativamente poco equipamiento y esa es una causa de su uso extensivo. Por otro lado, debido a la ausencia de radiación electromagnética, un área de aplicación muy importante de ensayos de ultrasonido es la medicina, donde son particularmente apropiados.

El análisis de materiales por métodos ultrasónicos se basa en un principio sencillo de la física: el movimiento de cualquier onda será afectado por el medio por el que viaja. En consecuencia, esas ondas, luego de atravesar el material, contienen información útil para identificar algunas propiedades físicas, mecánicas, estructurales o composicionales de sólidos y líquidos.

Las ondas de ultrasonido quedan incluidas dentro de las ya mencionadas ondas mecánicas. El espectro completo de estas ondas se muestra en la [Fig. 2.2](#), donde se ve el rango señalado para los ensayos no destructivos (END), que corresponde a longitudes de onda,  $l$ , que en un sólido típico van desde 1 mm hasta unos 10  $\mu\text{m}$ , tomando una velocidad de propagación promedio  $c=5000$  m/s [\[34\]](#). Estos valores sirven como aproximación inicial, pero para cada aplicación en particular es necesario analizar qué valor de frecuencia,  $f$ , se debe utilizar en el ensayo. Para ello hay que tener en cuenta que la interacción entre la onda y el medio es mayor cuando menor es la longitud de onda,  $l$ . Por lo tanto, y de acuerdo a la relación

$$l = \frac{c}{f}, \quad (22)$$

cuanto mayor es la velocidad de propagación en el material, mayor será la frecuencia necesaria para tener una buena resolución en la detección de la onda.

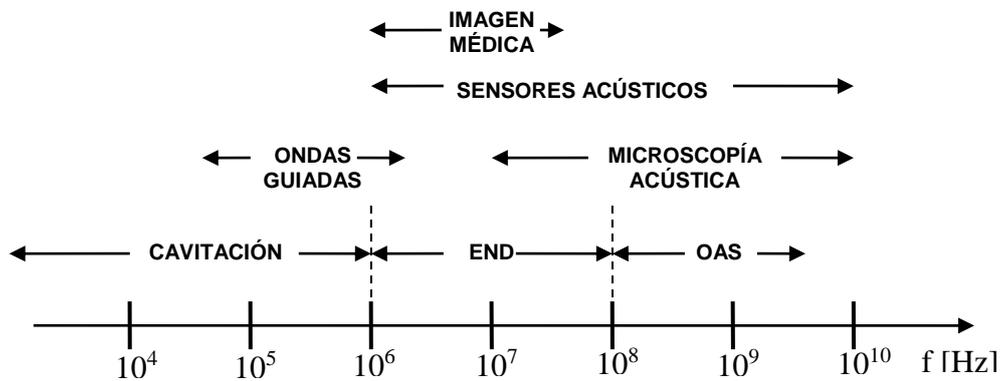


Figura 2.2. Espectro de ondas sonoras.

Por otro lado, las altas frecuencias son las que sufren mayor atenuación al atravesar el material, y por lo tanto existe una relación de compromiso entre la resolución y relación señal/ruido de la onda recibida al momento de seleccionar la frecuencia del ensayo.

#### 2.4 La generación de la onda ultrasónica.

La onda mecánica ultrasónica que se propaga por el material es generada por transductores piezoeléctricos. En la [Fig. 2.3](#) se muestra un transductor piezoeléctrico de incidencia normal, es decir que las ondas ultrasónicas se emiten perpendicularmente a la cara del mismo. Este tipo de transductor es uno de los más utilizados en los ensayos de ultrasonido clásicos. Emiten ondas longitudinales con frecuencias que van de 0,5 a 10 MHz y en general se usan en contacto con la pieza.



Figura 2.3. Transductor piezoeléctrico de incidencia normal [\[34\]](#).

Existen otros tipos de transductores, como los de incidencia angular, que generan ondas de corte, de superficie y de placa, y que son indicados para detectar discontinuidades que sean perpendiculares a la superficie de inspección. Tanto los transductores de incidencia normal como los de incidencia angular se utilizan para inspecciones manuales. También se encuentran en el mercado transductores para utilizar en ensayos de inmersión, en los cuales la ubicación y sus desplazamientos para inspeccionar diferentes áreas de la muestra son automatizados. Al margen de esto, el principio de funcionamiento es el mismo que el de los transductores de contacto. Los métodos de inmersión ofrecen mejores condiciones de acoplamiento entre la muestra y los transductores.

Los transductores piezoeléctricos se ocupan de convertir energía eléctrica en mecánica, es decir, producen fuerzas mecánicas a partir de campos eléctricos, y a la inversa [35]. Esto es posible gracias al denominado efecto piezoeléctrico, que es una propiedad de ciertos cristales que tienen una asimetría en su estructura, la cual está caracterizada por la aparición de ejes polares.

El efecto piezoeléctrico directo fue descubierto por los hermanos Curie en 1880 y describe la propiedad que tienen ciertos cristales de generar cargas eléctricas en su superficie al ser deformados [36]. El efecto inverso, es decir, la capacidad de un material piezoeléctrico de deformarse ante la aplicación de un campo eléctrico, fue descubierto poco después.

Los transductores piezoeléctricos pueden actuar tanto como emisores de ondas mecánicas, haciendo uso del efecto piezoeléctrico inverso, como así también pueden convertir ondas mecánicas en tensiones eléctricas gracias al efecto piezoeléctrico directo y actuar, de esta manera, como receptores.

## **2.5 Configuraciones de ensayos**

La configuración seleccionada para realizar el ensayo de ultrasonido es de vital importancia y depende de la información que se pretende obtener. Las dos configuraciones más utilizadas son la de pulso-eco ([Fig. 2.4.a](#)) y la de transmisión ([Fig. 2.4.b](#)). Con cualquiera de las dos es posible medir espesores, detectar fracturas o

defectos y medir atenuación, aunque cada una tiene su ventaja y desventaja para una aplicación dada.

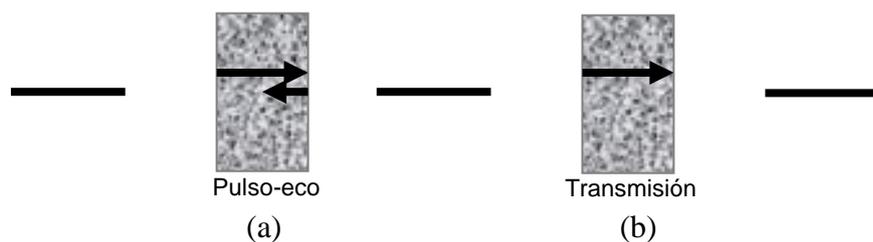


Figura 2.4. Configuración pulso-eco (a); Configuración de transmisión (b).

En la configuración pulso-eco un único transductor hace las veces de emisor y receptor y permite detectar discontinuidades en la pieza, las que generan cambios de impedancias acústicas, ya sea por la presencia de defectos o fracturas o por algún cambio abrupto en la consistencia del material. Este método permite detectar, no sólo la presencia de una discontinuidad, sino también su ubicación. Además, como se necesita acceso a una sola cara de la pieza, es el método indicado para evaluar piezas que se hallan en servicio. Una desventaja es que, como la onda debe recorrer el camino de ida y vuelta por el material, cuando el mismo es muy atenuador puede ocurrir que no se reciba eco en absoluto. Este inconveniente tiene relación con la resolución de la detección. Cuando el espesor de la pieza es muy delgado o las velocidades de propagación son muy altas pueden aparecer ecos solapados que dificultan mucho su identificación. La posible solución en este caso es incrementar la frecuencia de la onda, lo que a su vez hará que la misma sufra mayor atenuación.

La configuración de transmisión requiere dos transductores, uno que actúa como emisor y otro como receptor. Este método también sirve para detectar defectos, ya que la amplitud de la onda se ve modificada por la porción reflejada en el defecto que no llega el receptor. Sin embargo, no permite la localización precisa de la discontinuidad. Otro inconveniente que presenta esta configuración es que se necesita acceso a dos caras del material, por lo que no siempre puede emplearse para inspecciones in situ. Por otro lado, como la onda recorre el material una sola vez antes de alcanzar el receptor, la misma sufre mucha menos atenuación que en los ensayos con pulso-eco, lo que permite trabajar a mayores frecuencias y con potencias más bajas.

## 2.6 Aspectos prácticos

En esta tesis se utiliza un modelo equivalente para representar el problema físico de la propagación de la onda de ultrasonido por el material compuesto por capas. Este modelo se basa en la restricción de que la onda transmitida es de tipo P, por lo que no predice la conversión de modo ni la posible dispersión que puedan ocasionar las rugosidades en los bordes o alguna inclusión en el interior del material, entre los muchos efectos que pueden aparecer durante el experimento. Por todo esto, cuando se realizan los ensayos experimentales es de fundamental importancia la consideración de algunos aspectos prácticos. Deben tenerse en cuenta factores tales como el estado de la superficie de la muestra, la forma de dicha superficie, el medio de acople con los transductores, la alineación de los mismos y las condiciones ambientales.

En general, si la pieza ha sido mecanizada es necesario considerar que el tamaño de las rugosidades debe ser menor que una décima parte de la longitud de onda, por lo que se la debe pulir cuidadosamente. La forma de la muestra presenta otro conjunto de inconvenientes, ya que puede distorsionar el rayo ultrasónico o introducir ecos espurios. Otras complicaciones aparecen debidas a la conversión de modo longitudinal a modo transversal que ocurre en los bordes cuando la incidencia de la onda no es normal.

En cuanto al medio acoplante, es muy importante que sea adecuado, sobre todo cuando se trabaja con señales de alta frecuencia o de baja potencia, ya que dadas las bajas impedancias acústicas de los geles, éstos suelen ser muy atenuadores. Debe tenerse en cuenta, por lo tanto, que la capa de acoplante tiene que ser delgada. Otro inconveniente que introduce el uso de un acoplante es que es muy difícil manejar el espesor de la capa, por lo que su misma utilización genera errores.

Todos estos aspectos deben ser tenidos en cuenta al momento de evaluar los resultados del problema estudiado, y deben considerarse como fuentes de error si no son contemplados por el modelo utilizado.

## **2.7 Evaluación no destructiva cuantitativa.**

Los equipamientos estándar utilizados en ensayos no destructivos generan mediciones que se relacionan en base a la experiencia con los obtenidos en bancos de datos, tablas o curvas de experimentos previos y las conclusiones que se extraen dependen del criterio de un operador y son, por supuesto, subjetivas. Esta forma de trabajar es efectiva y ha permitido obtener buenos resultados en ciertas aplicaciones simples, pero cuando se trata de problemas más complejos es necesario recurrir, junto a las técnicas de medición, a modelos físicos para análisis computacional, consideraciones estadísticas y diseños cuantitativos de sistemas de medición. Todos estos factores quedan abarcados por los ensayos no destructivos cuantitativos. [1]

En este trabajo se realiza una evaluación no destructiva cuantitativa, llevando a cabo una estimación de parámetros que se relacionan con propiedades mecánicas de las capas que conforman un material compuesto para caracterizarlo resolviendo un PI.

---

---

## Capítulo 3

### El modelo equivalente y el problema directo

En este capítulo se introduce un modelo equivalente empleado para representar la propagación de una onda de ultrasonido por un material elástico, isotrópico y homogéneo. Dicho modelo representa exactamente la propagación de una onda plana tipo P, lo que reduce el problema a una dimensión. Si bien esta simplificación es una restricción importante, el modelo equivalente puede ser utilizado para reproducir sin errores significativos una variedad de situaciones reales en las que, aunque el supuesto de onda longitudinal no se cumple por completo, el uso del modelo aporta economía de cálculo.

La representación de la propagación de una onda tipo P mediante el modelo equivalente es exacta en los bordes del material, ya que el mismo se obtiene en forma directa a partir de la solución de la ecuación de onda en dichos puntos. Sin embargo, a fin de evaluar la precisión con la que el modelo equivalente reproduce la situación física en comparación con otros métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales, se realizaron simulaciones de la transmisión de una onda de ultrasonido tipo P por un material en capas utilizando el modelo y el método de los elementos finitos. Esta comparación también tiene como objetivo cuantificar el ahorro computacional que se logra al emplear el modelo equivalente.

### 3.1 Modelo equivalente

La propagación de una onda plana tipo P por un medio elástico, homogéneo, isotrópico y no atenuador queda representada por la ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad (23)$$

donde  $c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  es la velocidad de onda plana en el medio y  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé, que son características de cada material. La relación entre la velocidad de propagación y las constantes de Lamé surge de la Ec. (15).

Bajo ciertas condiciones, el comportamiento de algunas estructuras finitas frente a la propagación de una onda acústica puede ser bien representado, utilizando las equivalencias electro-mecánicas, mediante el modelo de una línea de transmisión eléctrica. Las analogías en las que se basa el análisis son:

Tensión mecánica  $\longrightarrow$  Tensión eléctrica  
 Velocidad de las partículas  $\longrightarrow$  Corriente eléctrica

La tensión en el material,  $\sigma$ , originada por una deformación,  $\varepsilon$ , está dada por la ley de Hooke generalizada (Ec. (9)), que en un caso unidimensional se reduce a:

$$\sigma(x,t) = -M \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (24)$$

donde  $M$  es la constante elástica y  $\varepsilon = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  es la deformación unidimensional.

Consideremos un trozo de material de espesor  $d=x_2-x_1$ , velocidad de propagación  $c$  y densidad  $\rho$ , delimitado por dos planos,  $x=x_1$  y  $x=x_2$ , por el que se propaga una onda longitudinal en la dirección  $x$  (Fig. 3.1). Debido a las reflexiones en los bordes, dentro del material habrá ondas propagándose en ambos sentidos, por lo que en los bordes habrá ondas incidentes y ondas reflejadas. Además, se supone que las dimensiones del material en la dirección perpendicular a la propagación de la onda son infinitas.

El desplazamiento de las partículas dentro del material es entonces:

$$u(x,t) = ae^{j(\omega t - kx)} + be^{j(\omega t + kx)} \quad (25)$$

Los coeficientes  $a$  y  $b$  son las amplitudes de las ondas que viajan en uno y otro sentido y dependen de la diferencia de impedancia acústica en los bordes,  $k = \omega / c$  es el número de onda del material.

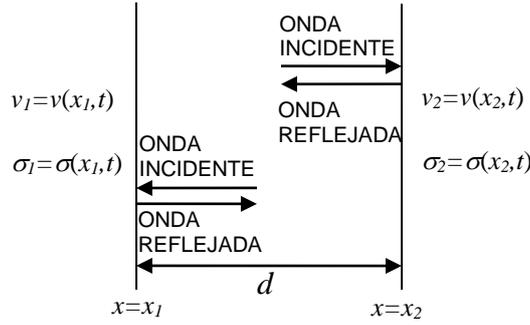


Figura 3.1. Esquema del comportamiento de una onda P en un medio finito

Por otro lado, la velocidad de las partículas se obtiene derivando el desplazamiento con respecto al tiempo. Así, en  $x=x_1$ :

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{x=x_1} = v_1 = j\omega (ae^{-jkx_1} + be^{jkx_1}) e^{j\omega t}, \quad (26)$$

y en  $x=x_2$ :

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{x=x_2} = v_2 = j\omega (ae^{-jkx_2} + be^{jkx_2}) e^{j\omega t}. \quad (27)$$

Dejando los coeficientes  $a$  y  $b$  en función de  $v_1$  y  $v_2$  se obtiene:

$$j\omega a = \frac{v_1 e^{jkx_2} - v_2 e^{jkx_1}}{2j \sin(kd)} \quad (28)$$

y

$$j\omega b = \frac{v_2 e^{-jkx_1} - v_1 e^{-jkx_2}}{2j \sin(kd)}. \quad (29)$$

Utilizando la definición de tensión dada en la Ec. (24) se encuentran  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , es decir, las tensiones en cada una de las caras del material, en función de  $v_1$  y  $v_2$ .

Además  $M = \lambda + 2\mu = \rho c^2$  y sustituyendo la Ec. (25) en la (24) se obtiene:

$$\sigma = \rho c^2 jk(ae^{-jkx} - be^{jkx}) = \rho c^2 j \frac{\omega}{c} (ae^{-jkx} - be^{jkx}) = Z(j\omega a e^{-jkx} - j\omega b e^{jkx}), \quad (30)$$

donde  $Z = \rho c$  es la impedancia acústica característica del material.

Sustituyendo en la Ec. (30) con (28) y (29) y especializando en ambos extremos se tiene:

$$\sigma_1 = Z \left( \frac{v_1}{j \tan(kd)} - \frac{v_2}{j \sin(kd)} \right) \quad (31)$$

y

$$\sigma_2 = Z \left( \frac{v_1}{j \sin(kd)} - \frac{v_2}{j \tan(kd)} \right) \quad (32)$$

Ahora, usando la igualdad trigonométrica  $\frac{1}{\tan(kd)} = \frac{1}{\sin(kd)} - \tan\left(\frac{kd}{2}\right)$  se

obtienen las expresiones finales:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{Z}{j \sin(kd)} (v_1 - v_2) + jZ \tan\left(\frac{kd}{2}\right) v_1 & (a) \\ \sigma_2 &= \frac{Z}{j \sin(kd)} (v_1 - v_2) - jZ \tan\left(\frac{kd}{2}\right) v_2 & (b) \end{aligned} \quad (33)$$

Recordando que las velocidades pueden equipararse a la corriente y las fuerzas a las tensiones, es posible representar las ecuaciones anteriores mediante el circuito que se muestra en la [Fig. 3.2](#) [37]. Este circuito es una representación válida para las ecuaciones acústicas de un medio no piezoeléctrico, y es el mismo circuito que representa una línea de transmisión de longitud acústica  $kd$ .

La impedancia acústica del material,  $Z = \rho c$ , es análoga a la impedancia de una línea de transmisión eléctrica y  $\tau = d/c$ , el tiempo de tránsito de la onda por el material, es análogo al retardo en la línea de transmisión.

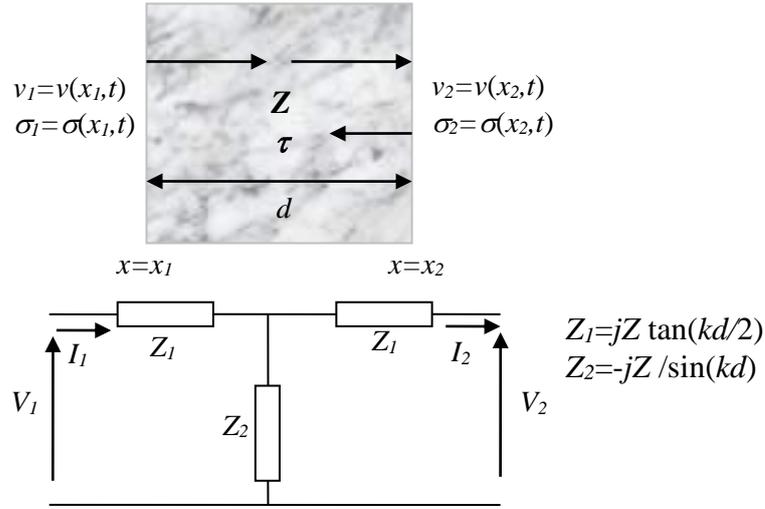


Figura 3.2. Modelo equivalente de la línea de transmisión para un material homogéneo.

Las Ec. (33.a) y (33.b) pueden reescribirse poniendo a  $\sigma_1$  y  $v_1$  en función de  $\sigma_2$  y  $v_2$ , las que a su vez pueden expresarse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_2(\omega) \\ v_2(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) & -jZ \sin(\omega\tau) \\ -j \sin(\omega\tau)/Z & \cos(\omega\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1(\omega) \\ v_1(\omega) \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde  $\omega\tau = kd$ .

En medios con discontinuidades las leyes generales de continuidad de tensión y velocidad en la interfaz permiten que una muestra compuesta por  $N$  capas de materiales homogéneos, pueda ser representada usando el modelo equivalente. Por lo tanto la sucesión de capas se modela como una conexión en cascada de líneas de transmisión eléctrica, cada una de las cuales representa una capa de material de espesor  $d_i$ , velocidad de propagación  $c_i$  y densidad  $\rho_i$ . En la Fig. 3.3, donde se muestra dicha representación, se ha agregado una impedancia  $Z_L$ , que es la denominada impedancia de carga del circuito eléctrico equivalente. Para su sistema mecánico análogo representa la impedancia acústica del medio que hay más allá de la capa  $N$  y se mide en  $\text{Rayls} = \text{Ns/m}^3$ .

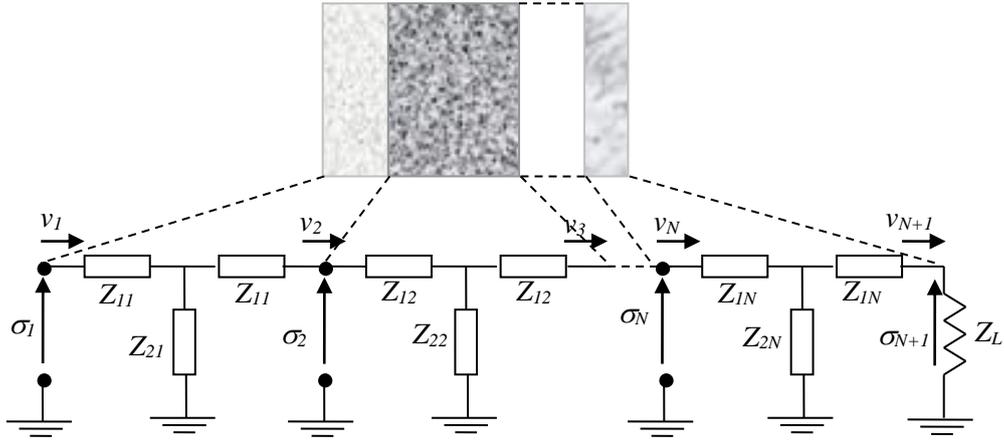


Figura 3.3. Material compuesto por N capas y su representación equivalente.

Puede mostrarse que si el material es no atenuador

$$\begin{aligned} Z_{1i} &= jZ_i \cdot \tan(\omega\tau_i / 2) \\ Z_{2i} &= -jZ_i / \sin(\omega\tau_i) \end{aligned} \quad (35)$$

Matemáticamente el modelo queda expresado como una relación entre la transformada de Fourier de la tensión mecánica,  $\sigma^*(\omega)$ , y la velocidad de las partículas,  $v^*(\omega)$ , en un extremo del material y las mismas cantidades en el otro extremo.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{N+1}^*(\omega) \\ v_{N+1}^*(\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_N) & -jZ_N \sin(\omega\tau_N) \\ -j \sin(\omega\tau_N)/Z_N & \cos(\omega\tau_N) \end{bmatrix} \cdots \\ \cdots \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_1) & -jZ_1 \sin(\omega\tau_1) \\ -j \sin(\omega\tau_1)/Z_1 & \cos(\omega\tau_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^*(\omega) \\ v_1^*(\omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

$Z_i = \rho_i c_i$  y  $\tau_i = d_i / c_i$  son, respectivamente, la impedancia acústica y el tiempo de tránsito de la capa  $i$ -ésima. Estos parámetros pueden relacionarse directamente con el módulo de onda P, que se define como  $M = \lambda + 2\mu$ , y que relaciona la tensión en la dirección de propagación de la onda con la deformación,  $\epsilon$ , en esa misma dirección, considerando deformación plana:

$$\sigma_{xx} = M \epsilon_{xx} \quad (37)$$

A partir de los parámetros estimados, y mediante la Ec. (38) puede calcularse un valor de  $M$  para cada capa.

$$M_i = c_i^2 \rho_i = c_i^2 \frac{Z_i}{c_i} = \frac{d_i}{\tau_i} Z_i. \quad (38)$$

El módulo  $M$  es equiparable al módulo de Young,  $E$ , sólo que éste último se calcula a partir de la velocidad de propagación de ondas medidas en columnas o barras delgadas, donde hay deformaciones en direcciones perpendiculares a la de la propagación<sup>1</sup>. En los casos en que el material es extenso con respecto a la longitud de onda en las direcciones perpendiculares a la propagación de la misma, las deformaciones en esas direcciones son despreciables y la velocidad de onda es mayor que en el caso de una barra. Por lo dicho, el valor del módulo  $M$  es siempre algo mayor que el valor de  $E$ .

La principal ventaja de este modelo es que brinda la posibilidad de representar materiales en capas haciendo un producto matricial en lugar de resolver ecuaciones diferenciales de forma numérica, ya que, debido a la forma en que está planteado el problema, no es necesaria una discretización geométrica del material. Esto lo hace muy eficiente desde el punto de vista computacional frente a los métodos numéricos tradicionales empleados para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Por estar basado en la ecuación de onda unidimensional (23), posee la limitación de tener aplicación sólo en problemas de propagación de onda plana tipo P, por lo que se introduce error de modelado en los casos en que no se cumple estrictamente este supuesto.

### 3.2 Modelo de la línea de transmisión para un material atenuador

La mayoría de los materiales sufren efectos más o menos pronunciados que provocan el debilitamiento de la onda transmitida. Esto puede estar causado por dos fuentes: dispersión o absorción, que pueden combinarse en el concepto de atenuación.

La dispersión aparece en aquellos materiales que no son estrictamente homogéneos y que contienen bordes donde la impedancia acústica cambia abruptamente. Los bordes pueden deberse a inclusiones, granos o poros. Este fenómeno

---

<sup>1</sup> <http://spaceflight.esa.int/impress/text/education/Mechanical%20Properties/MoreModuli.html>

podría visualizarse geoméricamente: en un borde oblicuo la onda se divide en varias ondas reflejadas y transmitidas con diferentes ángulos, y el proceso se repite en los bordes vecinos, lo que produce la división del rayo original en ondas parciales y sólo una porción del mismo llega en forma directa al receptor. En el caso en que el tamaño de las inclusiones es entre una milésima y una centésima de la longitud de onda la dispersión es despreciable a los propósitos prácticos.

En cuanto a la absorción, es una conversión directa de energía de sonido en calor y puede verse como una suerte de efecto de “frenado” de la oscilación de las partículas.

Tanto la absorción como la dispersión son mayores a mayores frecuencias, aunque la absorción usualmente aumenta con la frecuencia en mucho menor medida que la dispersión.

Considerando estos efectos, el desplazamiento en función del tiempo y la posición de una onda plana de frecuencia  $\omega$  que se propaga en un medio atenuador puede escribirse de la forma:

$$u(x,t) = ae^{j(\omega t - x/c)} e^{-\alpha x}, \quad (39)$$

donde  $a$  es la amplitud de la onda y  $\alpha$  es el coeficiente de atenuación que para una frecuencia determinada puede calcularse como 0,499 del valor de atenuación medido en Np/m.

En la Ec. (36) se observa que cuando el material es no atenuador el argumento de las funciones trigonométricas es:

$$\omega \tau_i = k_i d_i \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (40)$$

donde  $k_i = \omega/c_i$  es el número de onda de la capa  $i$ -ésima.

El efecto de la atenuación puede incluirse en el modelo considerando un número de onda complejo:

$$\hat{k}_i = \frac{\omega}{c_i} - j\alpha_i. \quad (41)$$

Si retomamos la deducción del modelo equivalente considerando ahora un medio atenuador, podemos partir de la Ec. (30) que se verá modificada por incluir el número de onda complejo:

$$\sigma = j\rho c^2 \hat{k} (ae^{-j\hat{k}x} - be^{j\hat{k}x}) = jZ(\omega - j\alpha c) (ae^{-j\hat{k}x} - be^{j\hat{k}x}), \quad (42)$$

y por lo tanto las Ec. (31) y (32) se transformarán en:

$$\sigma_1 = Z \left( 1 - j \frac{\alpha c}{\omega} \right) \left( \frac{v_1}{j \tan(\hat{k}d)} - \frac{v_2}{j \sin(\hat{k}d)} \right) \quad (43)$$

y

$$\sigma_2 = Z \left( 1 - j \frac{\alpha c}{\omega} \right) \left( \frac{v_1}{j \sin(\hat{k}d)} - \frac{v_2}{j \tan(\hat{k}d)} \right). \quad (44)$$

Entonces, siguiendo con la deducción del modelo resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{N+1}^*(\omega) \\ v_{N+1}^*(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_N - j\alpha_N d_N) & -\frac{jZ_N}{\omega} \left( \omega - j \frac{\alpha_N d_N}{\tau_N} \right) \sin(\omega\tau_N - j\alpha_N d_N) \\ \frac{j\omega}{Z_N \left( \omega - j \frac{\alpha_N d_N}{\tau_N} \right)} \sin(\omega\tau_N - j\alpha_N d_N) & \cos(\omega\tau_N - j\alpha_N d_N) \end{bmatrix} \dots \\ \dots \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau_1 - j\alpha_1 d_1) & -\frac{jZ_1}{\omega} \left( \omega - j \frac{\alpha_1 d_1}{\tau_1} \right) \sin(\omega\tau_1 - j\alpha_1 d_1) \\ \frac{j\omega}{Z_1 \left( \omega - j \frac{\alpha_1 d_1}{\tau_1} \right)} \sin(\omega\tau_1 - j\alpha_1 d_1) & \cos(\omega\tau_1 - j\alpha_1 d_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^*(\omega) \\ v_1^*(\omega) \end{bmatrix} \quad (45)$$

donde las impedancias de la línea de transmisión  $i$ -ésima,  $Z_{1i}$  y  $Z_{2i}$ , que se muestran en la [Fig. 3.3](#), son:

$$\begin{aligned} Z_{1i} &= \frac{jZ_i}{\omega} (\omega - j\alpha_i c_i) \tan\left(\frac{(\omega - j\alpha_i c_i)\tau_i}{2}\right) \\ Z_{2i} &= -\frac{jZ_i}{\omega} \frac{(\omega - j\alpha_i c_i)}{\sin((\omega - j\alpha_i c_i)\tau_i)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Obsérvese que en las Ec. (45) y (46) se han modificado los argumentos de las funciones trigonométricas con respecto a las Ec. (43) y (44). Esto se debe a la siguiente relación:

$$\hat{k}d_i = \left( \frac{\omega}{c_i} - j\alpha_i \right) d_i = \omega\tau_i - j\alpha_i d_i, \quad (47)$$

y además:

$$\left(1 - j \frac{\alpha_i c_i}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \left(\omega - j \frac{\alpha_i d_i}{\tau_i}\right). \quad (48)$$

Teniendo en cuenta la atenuación de la onda en el modelo de la línea de transmisión los parámetros involucrados serán tres por cada capa de material,  $Z$ ,  $\tau$  y  $\alpha$ , cuando se supone que la atenuación no depende de la frecuencia.

### 3.3 Simulación del problema directo en materiales no atenuadores

Cuando se procura representar y analizar un problema físico es necesario tener un completo conocimiento del mismo para poder elegir un modelo matemático adecuado que represente el problema. Asimismo, debe hacerse un estudio detallado del modelo para verificar si los resultados que de él se obtienen se ajustan a la situación física que se busca representar. Cumpliendo con este requisito se lleva a cabo un análisis de las características del modelo equivalente propuesto para determinar si es válido o no utilizarlo para representar el problema físico de interés y obtener la solución buscada. En primer lugar se simula el problema directo de la propagación de una onda de ultrasonido a través de un material en capas. Los resultados de la simulación se contrastan con los obtenidos a partir de la simulación del mismo problema empleando el método de los elementos finitos.

Los métodos numéricos que permiten resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales implican una discretización de la geometría de la pieza. En particular, el método de los elementos finitos permite obtener el campo de tensiones para todo el material y para cada instante de tiempo. A partir de esto también pueden obtenerse los campos de desplazamiento y velocidad de manera directa. La precisión de las funciones obtenidas depende del grado de discretización, tanto espacial como temporal. En cambio, utilizando el modelo equivalente la tensión, la velocidad y el desplazamiento pueden conocerse sólo en las interfaces de las capas, donde se espera que coincidan con aquellas calculadas con otros métodos numéricos, lo que no

constituye una limitación, ya que las funciones obtenidas tienen toda la información necesaria para caracterizar al material.

Otro de los motivos para llevar a cabo este estudio, aunque la derivación del modelo de la línea de transmisión es exacta, es que vale la pena comparar el esfuerzo computacional requerido para obtener la solución utilizando el modelo equivalente con el empleado para resolver la ecuación diferencial de forma numérica.

Los cálculos para la resolución de la ecuación diferencial se hicieron con el método de los elementos finitos utilizando COMSOL<sup>®</sup> Multiphysics<sup>2</sup>, mientras que la simulación utilizando el modelo equivalente se llevó a cabo con programas desarrollados con MATLAB<sup>®3</sup>.

Como un primer ejemplo de una situación en la que puede requerirse el estudio de un material en capas se simuló un problema relacionado con la detección y caracterización de un tejido biológico. Se llama Material 1 al caso particular de una muestra de tres capas, de longitud total  $D$  que representa parte de la estructura de un diente, con valores de parámetros físicos tomados de la literatura [8] y que se muestran en la [Tabla 3.1](#). Vale la pena destacar que este es un caso de estudio teórico, ya que la geometría que representa al diente ha sido simplificada.

Tabla 3.1. Propiedades del Material 1.

	Material 1		
	Esmalte	Dentina	Pulpa
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	3000	2000	1000
$c$ [m/s]	6250	3800	1570
$d$ [mm]	1,88	2,36	3,76

En la [Tabla 3.2](#) se muestran los valores verdaderos de los parámetros de los tres materiales que conforman el diente y que van a estimarse resolviendo el PI.  $Z^v$  es el valor verdadero de la impedancia acústica característica, definida en la Ec. (1).

Tabla 3.2. Parámetros del Material 1.

	Esmalte	Dentina	Pulpa
$Z^v$ [MRayl]	18,75	7,6	1,57
$\tau^v$ [ $\mu$ s]	0,3008	0,62105	2,395

<sup>2</sup> © 2014 by COMSOL Inc. <http://www.comsol.com>

<sup>3</sup> © 1994-2014 The MathWorks, Inc. <http://www.mathworks.com>

El esquema simulado se muestra en la [Fig. 3.4.a](#), y la [Fig. 3.4.b](#) muestra los perfiles de tensión,  $\sigma(x,t_0)$ , debidos al paso de la onda a través de las capas dentro del material en cuatro instantes,  $t=t_0$ , diferentes.

Para obtener las curvas con COMSOL<sup>®</sup> se usaron las siguientes condiciones de contorno: continuidad de tensión y velocidad en las interfaces y velocidad normal nula en las caras paralelas a la propagación de la onda para asegurar la validez de la suposición de onda longitudinal. La tensión generada en el material es consecuencia de un tren de ondas ([Fig. 3.5.a](#)) aplicado como condición de contorno en uno de los extremos de la muestra, es decir, en  $x=0$ . En el otro extremo ( $x=D$ ) se impuso una condición de impedancia igual 1,5 MRayls.

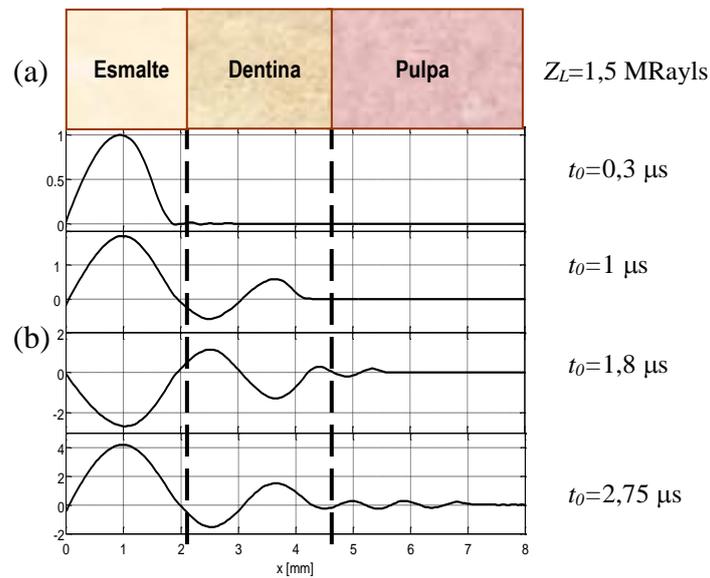


Fig. 3.4 (a) Esquema del material simulado.  
(b) Perfiles de tensión en diferentes instantes. ( $\sigma(x,t_0)$  [Pa])

Las formas de onda de las tensiones mecánicas en las interfaces de esa misma estructura, obtenidas mediante el modelo equivalente, son las señales en líneas llenas azules que se ven en la [Fig. 3.5](#), prácticamente idénticas a las obtenidas con COMSOL<sup>®</sup>, en líneas punteadas negras en los gráficos, tal como se esperaba.

En cuanto a la obtención de las tensiones en las interfases a partir del modelo equivalente, se desarrollaron programas para poner en práctica una metodología híbrida que consiste en los siguientes pasos:

1. El cálculo analítico de acuerdo a la Ec. (36).
2. El cálculo numérico de la tensión temporal, que puede llevarse a cabo aproximando el cálculo directo de la transformada inversa de Fourier como:

$$\sigma_{N+1}(t) \cong \frac{1}{\pi} \sum_{\omega_i=W_1}^{W_2} \text{Re}\{\sigma_{N+1}^*(\omega_i)\} \cos(\omega_i t) \Delta\omega - \frac{1}{\pi} \sum_{\omega_i=W_1}^{W_2} \text{Im}\{\sigma_{N+1}^*(\omega_i)\} \sin(\omega_i t) \Delta\omega \quad (49)$$

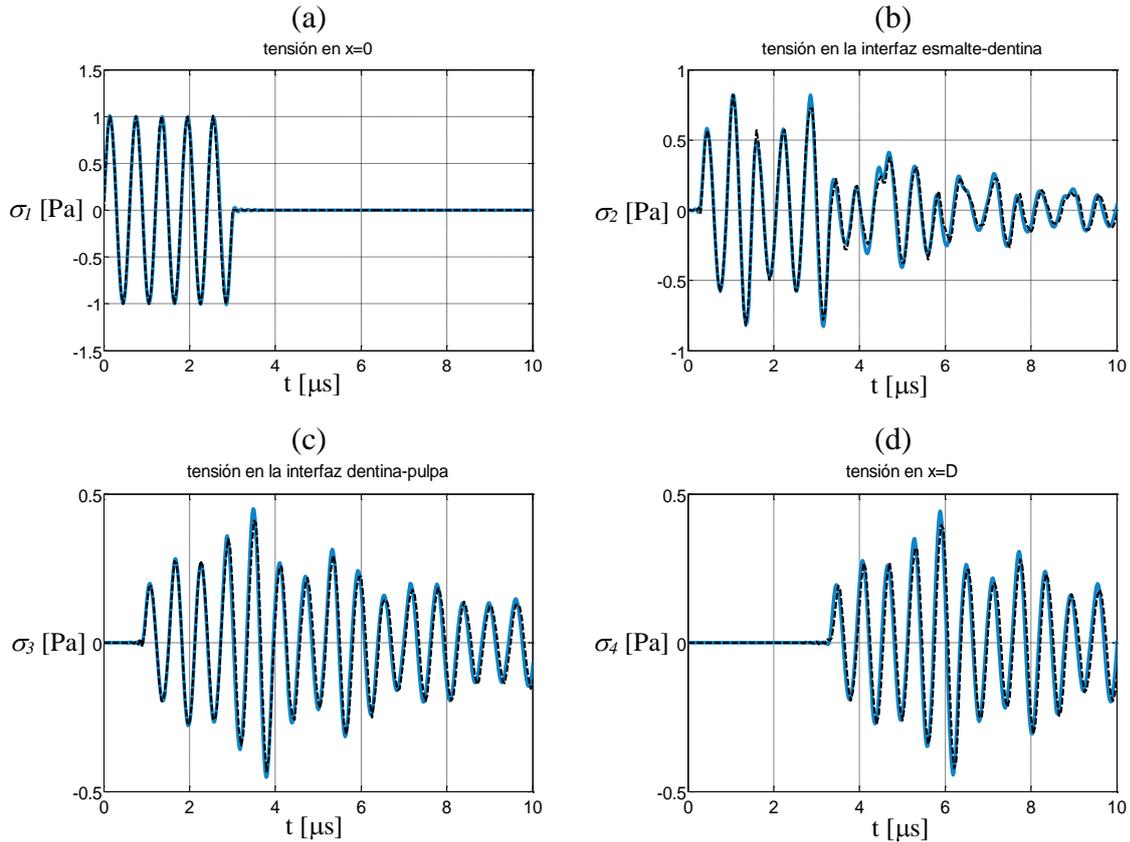


Fig. 3.5. Tensiones en las interfaces [Pa]: (a)  $x=0$ ; (b) interfaz esmalte-dentina; (c) interfaz dentina-pulpa; (d)  $x=D$ .

Obsérvese para llevar adelante el paso 1 antes mencionado es necesario calcular  $v^*_I(\omega)$ . Esto se hace a partir de la definición de una impedancia de entrada equivalente de la cascada de líneas de transmisión,  $Z_{in}$ , (Fig. 3.6) que se calcula como:

$$Z_{in} = Z_{I1} + Z_{p1}, \quad (50)$$

con

$$Z_{pi} = \frac{Z_{2i}(Z_{1i} + Z_{1(i+1)} + Z_{p(i+1)})}{Z_{2i} + Z_{1i} + Z_{1(i+1)} + Z_{p(i+1)}} \quad \text{con } i=1,2,\dots,N-1, \quad (51)$$

y

$$Z_{pN} = \frac{Z_{2N}(Z_{1N} + Z_L)}{Z_{2N} + Z_{1N} + Z_L}. \quad (52)$$

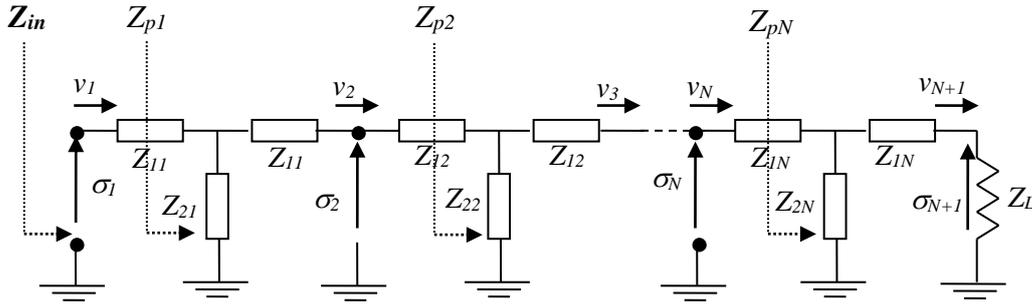


Figura 3.6. Impedancia de entrada en el modelo equivalente de un material de N capas.

Luego, el cálculo de la velocidad se hace de acuerdo a la conocida relación de teoría de circuitos:

$$v^*(\omega) = \sigma^*(\omega) / Z_{in}(\omega). \quad (53)$$

Una buena aproximación de la Ec. (49) se obtiene, asintóticamente, a medida que los valores de  $W_1$  y  $\Delta\omega$  se hacen más pequeños, y el valor de  $W_2$  se hace tan grande como sea posible. Particularmente, para el caso de la Fig. 3.5, se fijó  $\Delta\omega=2 \times 10^4$  rad,  $W_1=0.001$  rad,  $W_2=2 \times 10^7$  rad, y las diferencias pueden despreciarse ya que las curvas son prácticamente coincidentes. Los valores cuadráticos medios del error para las tensiones en las interfaces y el extremo  $x=D$  son, respectivamente,  $6.19 \times 10^{-5}$ ,  $5.66 \times 10^{-5}$  y  $1.05 \times 10^{-4}$ .

La verificación de que el modelo equivalente, simulado utilizando MATLAB, brinda predicciones similares al modelo completo es tan importante como el hecho de que la ganancia en tiempo computacional es muy alta. Para el caso considerado, el tiempo de procesamiento necesario es entre 30 y 50 veces menor que el requerido por

FEM. La eficiencia en el cómputo numérico es esencial en el problema directo, dado que la resolución del PI requiere la repetida solución del mismo.

### 3.4 Simulación del problema directo en materiales atenuadores

En vistas a las modificaciones introducidas el modelo equivalente para contemplar materiales atenuadores, se llevaron a cabo simulaciones en muestras de materiales de este tipo con el objetivo de comprobar que el modelo modificado representa los distintos casos de atenuación, es decir, atenuación constante, lineal y potencial.

En la [Tabla 3.3](#) se dan las propiedades de un material que luego fue medido experimentalmente. Se simuló la transmisión de la onda por ese material sin atenuación, y también suponiendo atenuación constante, lineal y potencial. Los valores de atenuación simulados se dan en la [Tabla 3.4](#) y en la [Fig. 3.7](#) se muestran las formas de ondas temporales y sus respectivos espectros para los cuatro casos estudiados.

Tabla 3.3. Propiedades físicas del material atenuador simulado.

Material	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c$ [m/s]	$D$ [mm]
Acrílico (Acr-3)	1168	2612,9	3

Tabla 3.4. Parámetros de atenuación simulados ( $\alpha = \alpha_0 \omega^\eta$ )

$\eta$	0	1	0,5387
$\alpha_0$	165	$5,2521e^{-6}$	0,0122

En la [Fig. 3.7\(b\)](#) se observa que el espectro que corresponde a la atenuación constante (rojo) se ve atenuado en todo el rango de frecuencias por igual con respecto al que no contempla atenuación, mientras que los espectros que corresponden a la atenuación constante y a la lineal presentan menor atenuación en bajas frecuencias y mayor atenuación en altas, como podía esperarse.

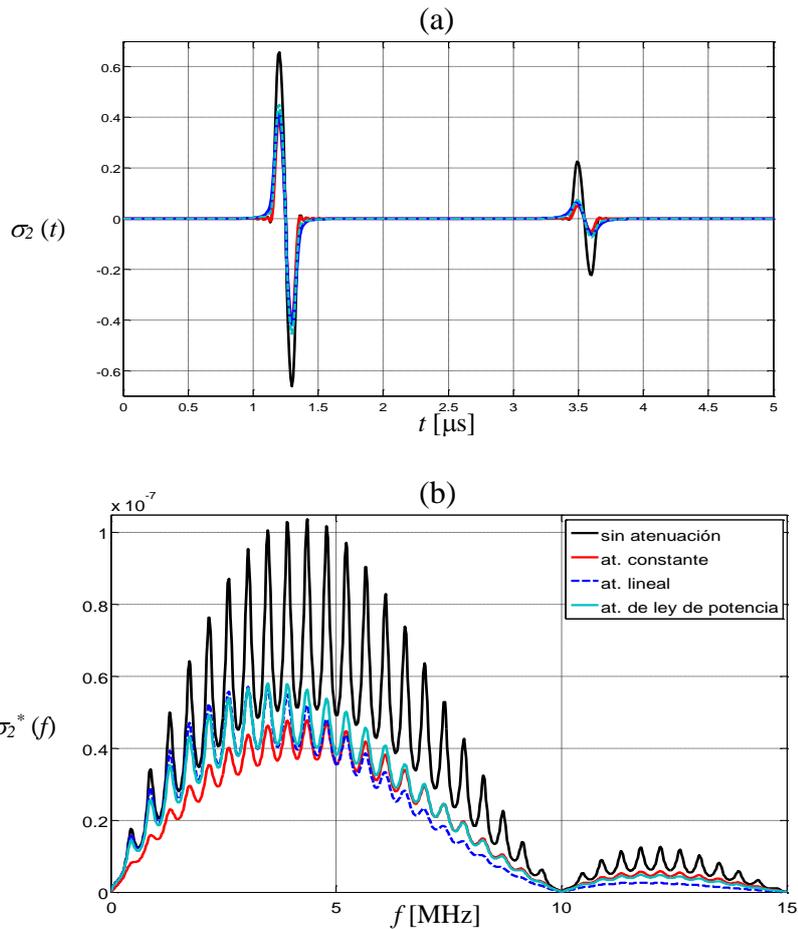


Figura 3.7. Tensión transmitida por un material homogéneo considerando diferentes modelos de atenuación.

También se hicieron simulaciones de muestras formadas por distintas combinaciones de varias capas. Como ejemplo se muestra un caso de un material compuesto por cuatro capas, cuyas propiedades se muestran en la [Tabla 3.5](#). La simulación, cuyos resultados se muestran en la [Fig. 3.8](#), se hizo considerando atenuación independiente de la frecuencia ( $\eta=0$ )

Tabla 3.5. Propiedades físicas de las capas de una muestra compuesta.

Material	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c$ [m/s]	$d$ [mm]	$\alpha$ [Np/m]
Aluminio (Alu-3)	2876	6213,1	4	82,3
Acrílico (Acr-3)	1168	2612,9	3	165,0
Aluminio (Alu-10b)	2663	6387,1	10	54,5
Acrílico (Acr-10)	1190	2685,0	10	87,2

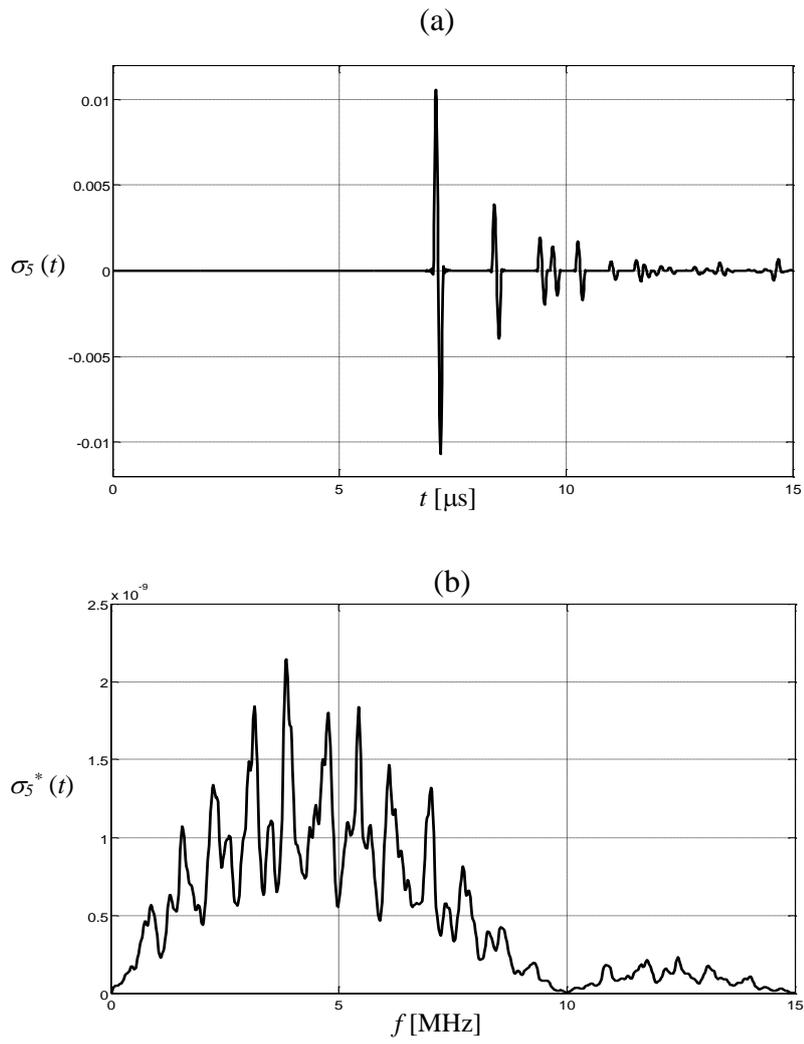


Figura 3.8. Tensión transmitida por un material compuesto por cuatro capas considerando atenuación constante.

---

---

## Capítulo 4

### Problema inverso: bases teóricas

#### 4.1. Introducción

Muchos problemas de ingeniería se pueden formular como PI. En general, resolver un PI consiste en hacer inferencias acerca de un sistema físico a partir de datos que se obtienen de mediciones. Su resolución podría verse como la tarea de un detective: a partir de un conjunto de pistas (los datos) se trata de encontrar un sospechoso (los parámetros), que de alguna manera tiene una relación (el modelo) con las pistas.

Si llevamos esto al ámbito de los problemas físicos nos encontramos con que cualquiera de ellos puede estudiarse relacionando una serie de parámetros, insertos en un modelo, con los datos u observaciones. Esta relación está dada mediante una función específica,  $G$ , y se expresa en la siguiente ecuación:

$$G(p) = d . \tag{54}$$

Al estudiar problemas físicos estamos naturalmente familiarizados con los problemas directos. Estos problemas tratan de encontrar los resultados u observaciones,  $d$ , conociendo  $G$  y  $p$ . Es decir, se parte de una entrada y un modelo conocidos y se llega a los resultados.

En cambio, la formulación de un PI resulta: dados los datos,  $d$ , encontrar los parámetros,  $p$ , tal que se verifique la Ec. (54).

El operador  $G$  puede tomar formas diversas. Puede ser una o varias ecuaciones diferenciales ordinarias, o bien ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones integrales, así como también puede tratarse de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Los PI pueden clasificarse en lineales o no lineales, según sea la relación del operador  $G$  con los parámetros. Por otro lado, la formulación puede ser paramétrica o no paramétrica. La primera de ellas consiste en identificar un determinado número de parámetros del modelo, que tiene una forma funcional conocida. La identificación no paramétrica o de forma libre procura conocer la forma en que los datos se relacionan con los parámetros, es decir, trata de identificar  $G$ .

Volviendo a la Ec. (54), tanto  $d$  como  $p$  pueden ser funciones continuas o discretas. Cuando son funciones continuas se hace referencia a  $G$  como un operador, en cambio, cuando son cantidades discretas  $G$  es una función. De la misma manera, el conjunto de datos también está compuesto por valores discretos y pueden expresarse como un vector  $\mathbf{d}$ . De esta manera, el problema directo queda expresado por la ecuación:

$$G(\mathbf{p}) = \mathbf{d}, \quad (55)$$

y el PI relacionado es el denominado **problema de estimación de parámetros o PI discreto**, que consiste en identificar el vector de parámetros  $\mathbf{p}$  tal que satisfagan la Ec. (55)

## 4.2 Problemas de regresión no lineal

Los problemas inversos de interés para esta tesis son los de regresión no lineal. En este tipo de problemas la relación entre los parámetros del modelo y los datos está dada por una transformación no lineal. Consideramos el problema de ajustar  $n$  parámetros,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  a un conjunto de  $K$  puntos de datos,  $(x_1, d_1), (x_2, d_2), \dots, (x_K, d_K)$ , con desviaciones estándar asociadas a las mediciones  $\text{std}_1, \text{std}_2, \dots, \text{std}_K$ . Hay una transformación no lineal,  $G(\mathbf{p}, x)$ , que predice la observación  $d_i$  dados los parámetros del modelo,  $\mathbf{p}$ , y un punto  $x_i$ . El objetivo es hallar el vector  $\mathbf{p}$  que mejor se ajusta a los

datos. En esta tesis las observaciones,  $d_i$ , se dan para en una determinada frecuencia,  $\omega_i$ . Por lo tanto, la transformación no lineal queda expresada como  $G(\mathbf{p}, \omega)$ .

Si se supone que los errores de medición tienen una distribución normal, entonces el principio de máxima verosimilitud nos lleva a minimizar una suma de errores cuadráticos [38]. La función a minimizar es:

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^K \left( \frac{G(\mathbf{p}, \omega_i) - d_i}{\text{std}_i} \right)^2. \quad (56)$$

Existen distintos métodos para minimizar la función  $J(\mathbf{p})$ . En este trabajo se utilizó el algoritmo de Levenberg-Marquardt [39] (Apéndice 1), que es una modificación del método de Newton.

### 4.3 Etapas previas a la resolución del PI

Antes de resolver un PI es necesario tener un conocimiento completo del problema físico involucrado y hacer un correcto diseño del experimento, de manera que los datos sean de utilidad. También es necesario un manejo apropiado de las herramientas matemáticas existentes que puedan ayudar en la resolución [38]. Como norma general, los pasos a seguir son:

- Análisis del problema. Debe tenerse un conocimiento detallado de los procesos físicos involucrados y sus restricciones, los procedimientos de medición y las dificultades propias al proceso de medición. Además deben tenerse claras las metas y expectativas.
- Diseño de la configuración experimental. Se tienen en cuenta dos aspectos críticos: las mediciones, que deben proporcionar información suficiente para cubrir todo el espacio de soluciones, y la instrumentación, para que los datos sean de calidad. También hay que tener presente que la resolución de PI tiene un alto costo de cálculo, por lo tanto, la configuración del experimento debe evitar la duplicación innecesaria de datos.
- Registro de datos de buena calidad. Las mediciones son inherentemente ruidosas, por lo tanto se debe tratar de no agregar ruido de medición. Este punto

se relaciona con el anterior, ya que además de contar con un buen instrumental para adquirir los datos, debe hacerse un diseño cuidadoso de los experimentos.

- Pre-procesamiento de datos. Esta etapa puede referirse a varias técnicas de procesamiento, como por ejemplo la conversión de las señales al dominio de la frecuencia, el filtrado o el ventaneo. El propósito del pre-procesamiento es, en general, realzar la información de interés y suprimir o disminuir el ruido que pueda haber, incluso eliminando la presencia de artefactos de medición.
- Selección de un adecuado modelo matemático que relacione los datos con los parámetros incógnita. El modelo debe capturar las características esenciales del problema físico. Una elección inapropiada agrega error de modelado, lo que impide hallar una solución significativa. Además, la importancia de la selección del modelo también reside en que la resolución del PI requiere la repetida solución del PD, por lo tanto es fundamental que el modelo no incremente el costo computacional inherentemente alto de resolver un PI.

#### 4.4 Características del PI

Es de suma importancia la caracterización de un PI para saber cuán buena es la solución en términos del problema físico y en qué grado se ajusta a los datos. Las características que deben considerarse son:

- *Existencia.* Puede ser que el modelo no se ajuste exactamente a los datos, ya sea porque el mismo es una representación aproximada del sistema físico que implica algún tipo de simplificación, o porque los datos son muy ruidosos.
- *Unicidad.* Aunque exista una solución del PI, puede ser que no sea única, sino que haya varios modelos o valores de parámetros que se ajusten al problema físico.
- *Estabilidad.* Un pequeño cambio en las mediciones puede involucrar un cambio muy grande en la estimación de los parámetros implicados en el modelo. Los problemas de este tipo son los denominados mal condicionados y es necesario incorporar un criterio de regularización para estabilizar la solución. Las técnicas

de regularización consisten en aproximar la solución mediante una familia de problemas estables cercanos [40, 41].

Otro aspecto que suele estudiarse en los PI es el de la sensibilidad, factor que indica cuánto se modifica la solución calculada ante cambios en los valores de los parámetros. Estos valores, así como también las suposiciones que se hacen en el modelo, están sujetos a errores. Es por eso que suele ser de utilidad realizar un análisis de sensibilidad para predecir el impacto que los errores potenciales pueden tener en las conclusiones extraídas de los resultados del PI [42].

---

---

## Capítulo 5

# Problema Inverso. Estudio previo y metodología de resolución con datos simulados

Además del análisis del modelo equivalente empleado, para verificar que cumple con los supuestos del problema físico, es necesario evaluar las características del PI de minimización que se propone resolver para determinar si es posible hallar la solución buscada. Con este fin se resolvió el PI con datos simulados y se hizo un estudio de la existencia, unicidad y estabilidad de la solución.

### 5.1 Metodología de resolución

El PI se plantea como un problema de minimización de un funcional de costo expresado como el valor cuadrático medio de la diferencia entre los datos y las formas de onda que predice el modelo equivalente. Los datos para la resolución del problema de interés provienen de la señal de tensión registrada en un extremo de la muestra, dado que estamos considerando mediciones de transmisión. Como el modelo equivalente está planteado en el dominio de la frecuencia, los datos, que denominaremos  $\sigma_m^*$ , se hallarán haciendo la transformada de Fourier de la señal registrada. En la instancia de simulación del PI las mediciones se generan perturbando con ruido aditivo,  $\varepsilon(t)$ , a la tensión temporal,  $\sigma_{N+1}(t, \mathbf{p}_t)$ . La perturbación está representada por un proceso gaussiano de ruido blanco, y  $\sigma_{N+1}(t, \mathbf{p}_t)$  se obtiene analíticamente resolviendo de forma teórica el

problema definido en la Ec. (49), donde  $\sigma_{N+1}(\omega)$  se obtiene con las Ec. (36) ó (45), de acuerdo a si el que se estudia es un material no atenuador o atenuador, respectivamente.

Así, la medición simulada en el dominio temporal es:

$$\sigma_m(t, \mathbf{p}_t) = \sigma_{N+1}(t, \mathbf{p}_t) + \varepsilon(t) \quad (57)$$

La Transformada de Fourier de las mediciones simuladas,  $\sigma_m^*(\omega) = F\{\sigma_m(t, \mathbf{p}_t)\}$ , se calcula numéricamente utilizando el bien conocido algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Para obtener el vector de parámetros,  $\mathbf{p}$ , debe resolverse un problema de minimización formulado como un funcional de mínimos cuadrados. Considerando que las mediciones son discretas y se registran para  $K$  diferentes frecuencias, el funcional se escribe como:

$$J(\mathbf{p}) = \frac{1}{K} \sum_{\omega_i=\omega_1}^{\omega_K} (\sigma_{N+1}^*(\mathbf{p}, \omega_i) - \sigma_m^*(\omega_i))^2 \quad (58)$$

donde  $\sigma_{N+1}^*(\mathbf{p}, \omega_i)$  es la tensión obtenida a partir del modelo equivalente para cada vector de parámetros y para cada frecuencia. En el caso ideal de un material no atenuador el vector buscado contiene el tiempo de tránsito y las impedancias acústicas características de cada capa.

Para evaluar  $J(\mathbf{p})$  son necesarios el cálculo de  $\sigma_{N+1}^*(\mathbf{p}, \omega)$ , y también de la velocidad  $v_I^*(\omega)$ , calculada a partir de la Ec.(53). Por otro lado, la relación no lineal entre los parámetros desconocidos y  $\sigma_{N+1}^*(\mathbf{p}, \omega)$  es obvia al observar las Ec.(36) y (45). Entonces, dado que no es posible evaluar de forma directa la unicidad y existencia de la solución del problema de mínimos cuadrados para casos en los que la formulación del problema directo es no lineal, se analizan estas características considerando casos particulares.

En primer lugar el estudio se enfoca en diferentes materiales, compuestos por tres capas no atenuadoras. Por lo tanto, se espera obtener, como solución del PI, la estimación de  $\mathbf{p}$ , que se denomina  $\tilde{\mathbf{p}} = [Z_1 Z_2 Z_3 \tau_1 \tau_2 \tau_3]^T$ .

El problema de mínimos cuadrados no lineal puede, en principio, resolverse implementando una metodología de optimización numérica, como el bien conocido



El bloque denominado “Estimación a priori” en la [Fig. 5.2](#) representa el proceso propuesto para realizar una estimación previa de los tiempos de tránsito de modo de poder elegir el valor inicial de estos parámetros y así lograr la convergencia del algoritmo de minimización a un mínimo global. Esta etapa debe cumplirse necesariamente ya que se ha detectado la presencia de múltiples mínimos locales en el funcional, debido al carácter cíclico de las funciones trigonométricas involucradas en el modelo que tienen a los tiempos de tránsito en el argumento. La metodología para seleccionar los valores iniciales de los parámetros se basa en la identificación de los ecos de la señal transmitida y es explicada en detalle en la sección 5.3.

## 5.2 Selección del rango de frecuencias

El rango de frecuencias que se usa para calcular la Ec. (58) determina las características del espacio de parámetros, al igual que lo hace el tipo de señal de excitación aplicada.

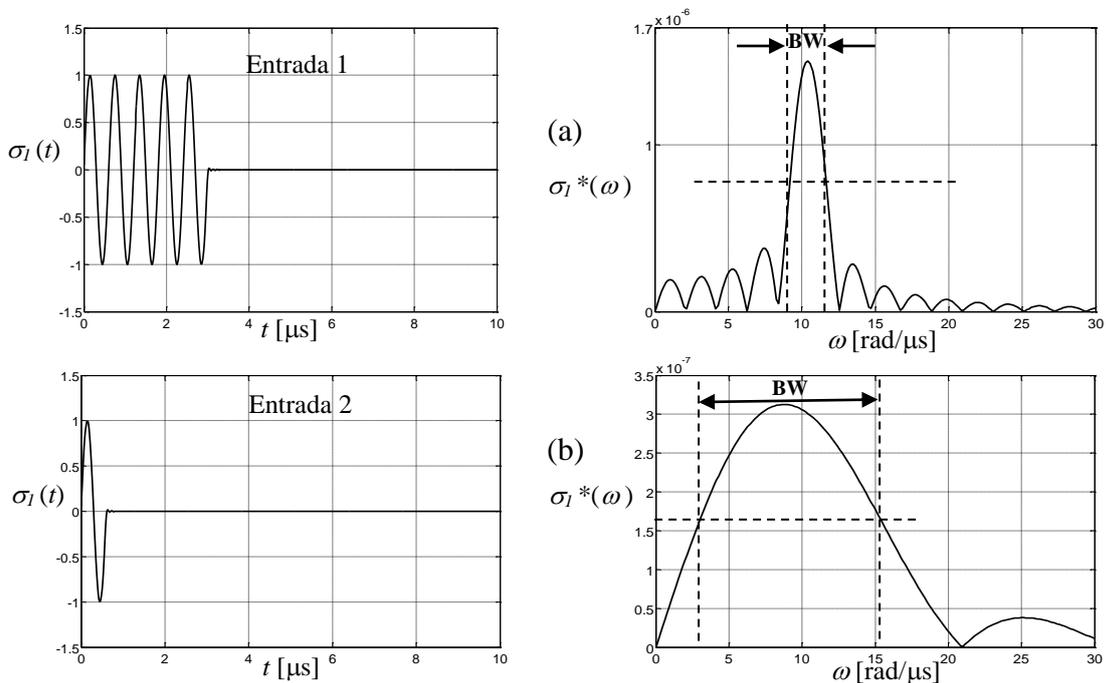


Fig. 5.3. Formas de onda de la tensión transmitida y sus respectivos espectros

En cuanto a las formas de onda de las tensiones aplicadas a las muestras simuladas, se proponen dos casos. La primera de ellas, denominada Entrada 1 en la [Fig.](#)

[5.3](#), es una señal con ancho de banda (BW) angosto. La Entrada 2 que se muestra en la misma [Fig. 5.3](#), en cambio, es una señal de mayor BW y menor duración temporal que la Entrada 1, lo que la hace más apropiada cuando se busca una buena resolución en la detección de los ecos temporales. En la misma figura se grafican los respectivos espectros de amplitud. El ancho de banda (BW) indicado corresponde a la banda de frecuencias donde se concentra el mayor contenido de potencia de la señal, y es usual tomar como límites del mismo las frecuencias donde la amplitud del espectro es la mitad del máximo (-3 dB).

A su vez, de acuerdo al rango de frecuencias utilizado para calcular la Ec. (58), los valores del funcional definen las características de una superficie. Esto se ilustra en la [Fig. 5.4](#), donde se muestra la superficie y las curvas de nivel obtenidas cuando  $J(\mathbf{p})$  se calcula en función de los tiempos de tránsito de dos de las capas, por ejemplo,  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , dejando fijos todos los demás parámetros en sus verdaderos valores ( $\tau_3^v, Z_1^v, Z_2^v, Z_3^v$ ) para el caso del Material 1 presentado en la [Tabla 3.1](#). Puede apreciarse que la superficie no es independiente del rango de frecuencias utilizado para obtener  $\sigma_m^*(\omega)$ .

En base a los espectros de las tensiones aplicadas se ha determinado la banda de frecuencia (BW) que se utilizará para resolver el PI. La [Fig. 5.4\(a\)](#), en la que se observa una gran cantidad de mínimos, se obtiene cuando el BW está centrado en el máximo del espectro de potencia de la tensión aplicada. En este caso el cálculo de la Ec. (58) se hace con  $K=1000$ . La superficie más suave que se ve en la [Fig. 5.4\(b\)](#), en cambio, corresponde a las bajas frecuencias de  $\sigma_m^*(\omega)$  y  $K=300$ . En ambos caso  $\Delta\omega=9,5874e^4$  rad/s. Una potencial mejora en la evolución del algoritmo en este caso, debido a que hay menor cantidad de mínimos locales, es contrarrestada por una convergencia muy lenta y la baja relación señal/ruido.

El problema relacionado con el hecho de que la superficie tiene múltiples mínimos puede abordarse seleccionando valores iniciales para los tiempos de tránsito que no estén muy alejados de sus verdaderos valores.

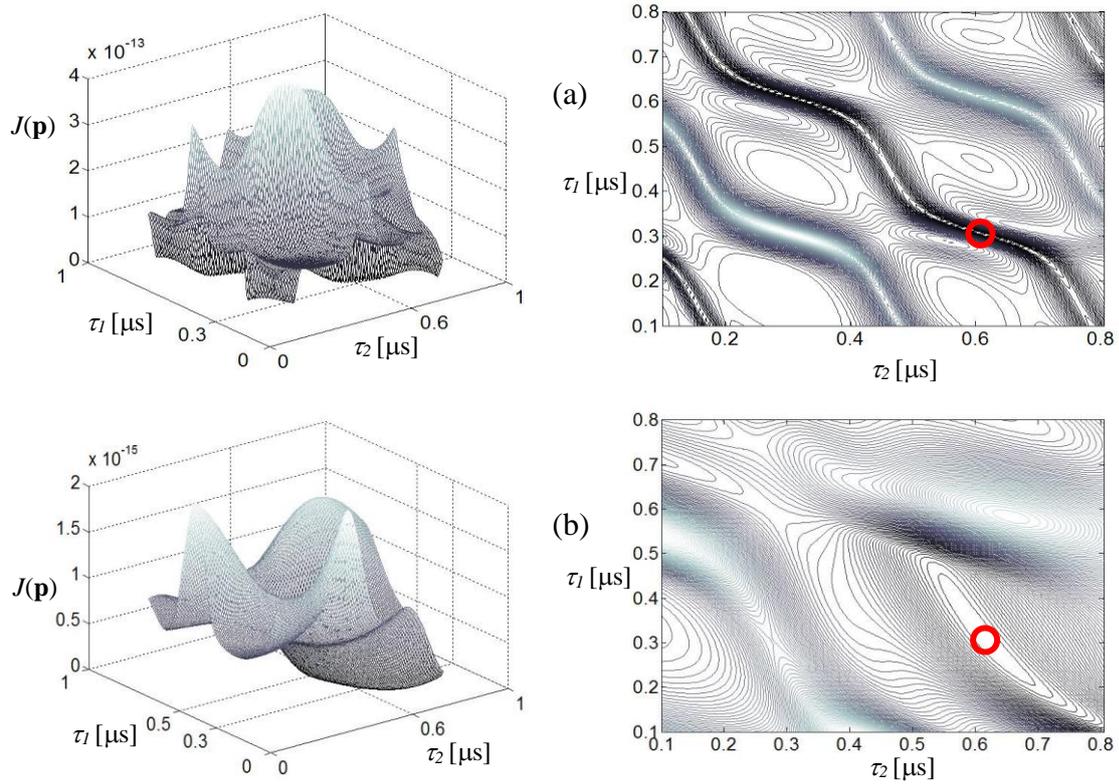


Fig. 5.4.  $J(Z_1^v, Z_2^v, Z_3^v, \tau_1, \tau_2, \tau_3^v)$  para dos bandas de frecuencias diferentes con Entrada 1.

### 5.3 Selección de valores iniciales de los parámetros

La completa incertidumbre sobre las impedancias características no implica un incremento en la dificultad de resolver el problema inverso; en realidad, a partir de valores iniciales arbitrarios, la solución correcta es hallada. Esta característica del problema se ilustra en la Fig. 5.5, donde se grafican las curvas de nivel de  $J(\mathbf{p})$  en función de dos de las impedancias acústicas, con todos los demás parámetros en sus valores verdaderos, y claramente se observa un único mínimo.

En cambio, observando la superficie de la Fig. 5.4 es fácil predecir que ciertos valores iniciales de los tiempos de tránsito pueden hacer que el algoritmo de minimización converja a un mínimo local. En particular, los tiempos de tránsito no pueden inicializarse arbitrariamente ya que los mismos aparecen en el argumento de las funciones trigonométricas en el problema directo (Ecs. (36) y (45)) y estas relaciones cíclicas no lineales tienen relación con los mínimos locales del funcional, como se

estableció anteriormente. Por lo tanto es crucial obtener estimaciones a priori de estos parámetros para alcanzar la esperada eficiencia del algoritmo de optimización.

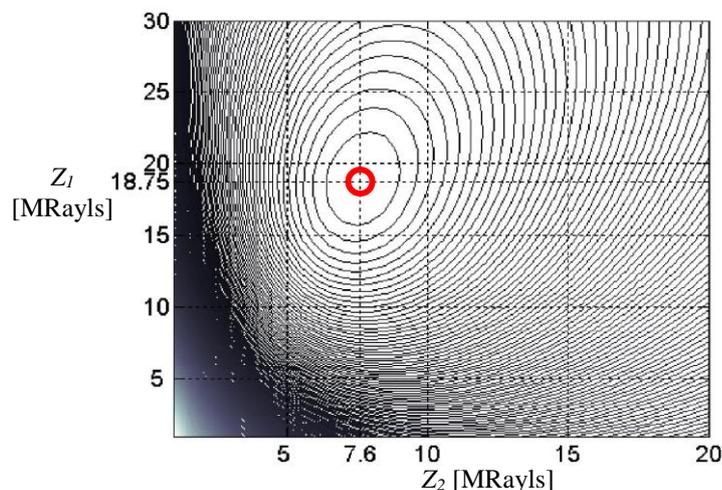


Fig. 5.5.  $J(Z_1, Z_2, Z_3^v, \tau_1^v, \tau_2^v, \tau_3^v)$  con Entrada 1.

Basándonos en la señal de transmisión medida proponemos detectar los ecos correspondientes a las diferentes capas. Esto es posible para diversos tipos de materiales en capas con combinaciones de espesores y tiempo de tránsito tales que los tiempos de llegada de las reflexiones de la onda en las capas no se hallen solapados. Los tiempos de llegada se relacionan con los tiempos de tránsito por simples ecuaciones. Entonces, para el caso de tres capas puede obtenerse una primera estimación midiendo el tiempo total de tránsito,  $\tau_\alpha$ , el tiempo para el primer eco,  $\tau_\alpha + 2\tau'_1$  y el segundo eco,  $\tau_\alpha + 2\tau'_2$  (Fig. 5.6). Para N capas es necesario identificar N-1 tiempos de llegada. En realidad, estos valores no pueden ser asignados a la reflexión de una capa en particular, ya que esto depende del espesor de cada capa y de la velocidad de propagación de la onda dentro de la misma, pero pueden utilizarse como valores de prueba iniciales. Si el orden de los ecos es diferente del verdadero, el procedimiento de minimización probablemente fallará, pero será exitoso para el correcto ordenamiento.

Esta identificación es más factible cuanto menor es la duración de la señal, es decir, si se trabaja con señales de mayor ancho de banda, como es el caso de denominada Entrada 2 en la Fig. 5.3. Si se observa la superficie del funcional en función de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  que se obtiene en este caso y se muestra en la Fig. 5.7, se la puede

comparar con la obtenida a partir del espectro de banda más angosta mostrada en la [Fig. 5.4](#) y concluir que el mínimo global se localiza con mayor claridad, aunque subsiste la presencia de los mínimos locales. Por otro lado, la porción del espectro que se utiliza para el cálculo es considerablemente mayor que en el caso de la Entrada 1, lo que implica un mayor costo computacional.

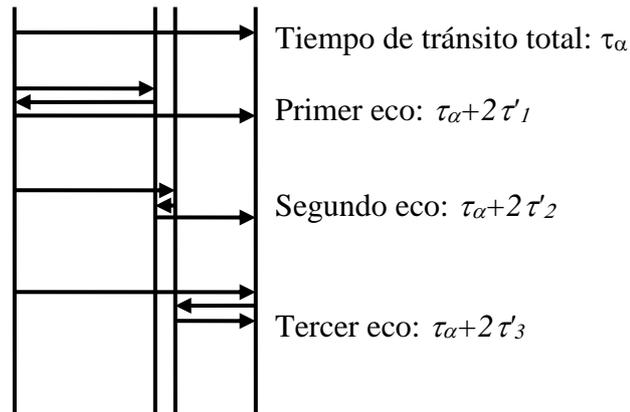


Fig. 5.6. Ecos primarios.

Cuando la duración temporal del pulso transmitido es mayor que los tiempos de tránsito la identificación de los ecos sucesivos se hace una tarea casi imposible debido a su superposición. En [\[43\]](#) se presenta una metodología para separar las contribuciones que aportan cada una de las capas a la señal total transmitida. Una vez lograda esta separación la identificación de las reflexiones es mucho más sencilla y puede hacerse a simple vista o utilizando alguna herramienta de procesamiento de señales como cepstrum. Vale la pena aclarar que la utilización de esta metodología implica la resolución de otro PI.

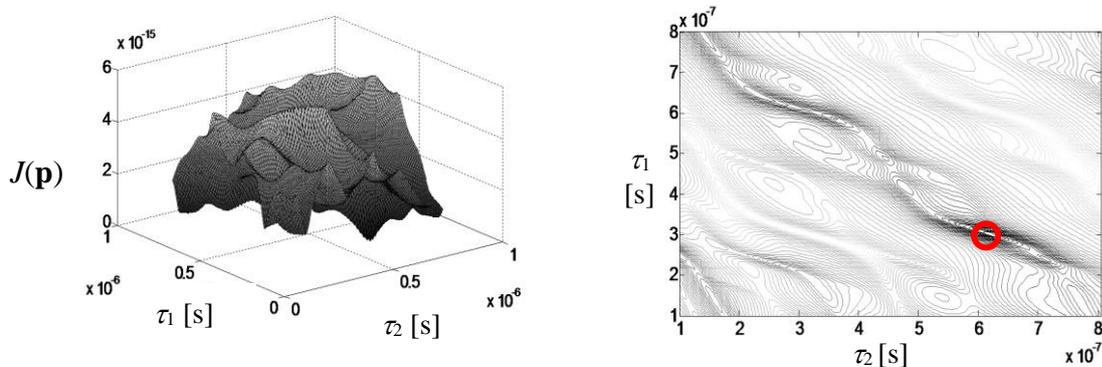


Fig. 5.7.  $J(\tau_1, \tau_2, \tau_3^v, Z_1^v, Z_2^v, Z_3^v)$  con Entrada 2.

## 5.4 Resultados del problema inverso con datos simulados

La metodología propuesta se probó en primer lugar en ejemplos simulados para tres materiales compuestos por tres capas no atenuadoras. Además del material presentado en la [Tabla 3.1](#) se simularon otras configuraciones de capas cuyas propiedades y valores verdaderos de los parámetros son transcriptos en la [Tabla 5.1](#).

Tabla 5.1. Propiedades y parámetros de materiales simulados.

	Material 2			Material 3		
	Acrílico	Aluminio	Acero	Aluminio	HDPE	LDPE
$\rho^v$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1190	2795	7870	2700	950	920
$c^v$ [m/s]	2654	6419	5960	6419	1124	1950
$d^v$ [mm]	12,14	6,05	6,05	10	1	6
$Z^v$ [MRayl]	3,158	17,941	46,905	17,333	1,0678	1,7941
$\tau^v$ [μs]	4,5742	0,9425	1,0151	1,5577	0,8896	3,0768

Por otro lado, se consideraron dos casos de acuerdo al pulso de excitación aplicado: el caso 1 se refiere a la Entrada 1 ([Fig. 5.3\(a\)](#)), con una banda estrecha de frecuencias, y el caso 2 corresponde a la Entrada 2 de mayor ancho de banda ([Fig. 5.3\(b\)](#)). Las mediciones se simularon resolviendo el problema directo, de acuerdo a las ecuaciones (36) y (49) para luego ser perturbadas con diferentes niveles de ruido con el objetivo de considerar situaciones más realistas. Las [Fig. 5.8](#) y [5.9](#) muestran, para cada caso, la representación de la forma de onda de tensión transmitida en el extremo de las diferentes muestras y sus respectivos espectros. Esas curvas se obtuvieron sumando una realización de ruido de desviación estándar  $\text{std}_\varepsilon=1\%$  del máximo valor de la señal temporal. La banda de frecuencia seleccionada para utilizar en el algoritmo de optimización (BW) se destaca en los gráficos y abarca todo el contenido de frecuencias de la señal desde el máximo del espectro hasta los primeros cruces por cero.

La selección de los valores iniciales de los parámetros, necesaria para iniciar la optimización, se llevó a cabo a partir de cada forma de onda transmitida. Los gráficos de esas formas de onda, que pueden observarse con mayor resolución en la [Fig. 5.10](#), muestran que los ecos pueden ser detectados con una muy buena estimación a priori de los tiempos de tránsito en el caso del Material 3. Se muestra en gris la onda transmitida cuando se usa como excitación la Entrada 1 y en negro la que corresponde a la Entrada

2. Es menester hacer notar que, como podía esperarse por lo dicho en el apartado anterior, cuanto menor es la duración del pulso de excitación, más fácil es la identificación de los ecos. En los casos de los materiales 1 y 2, cuyos tiempos de llegada también se señalan en la [Fig. 5.10](#), puede observarse que, aún en el caso de la entrada de menor duración hay superposición de las reflexiones. En un caso práctico este inconveniente podría solucionarse, si estuviera dentro de las posibilidades técnicas, usando una señal de excitación de mayor ancho de banda.

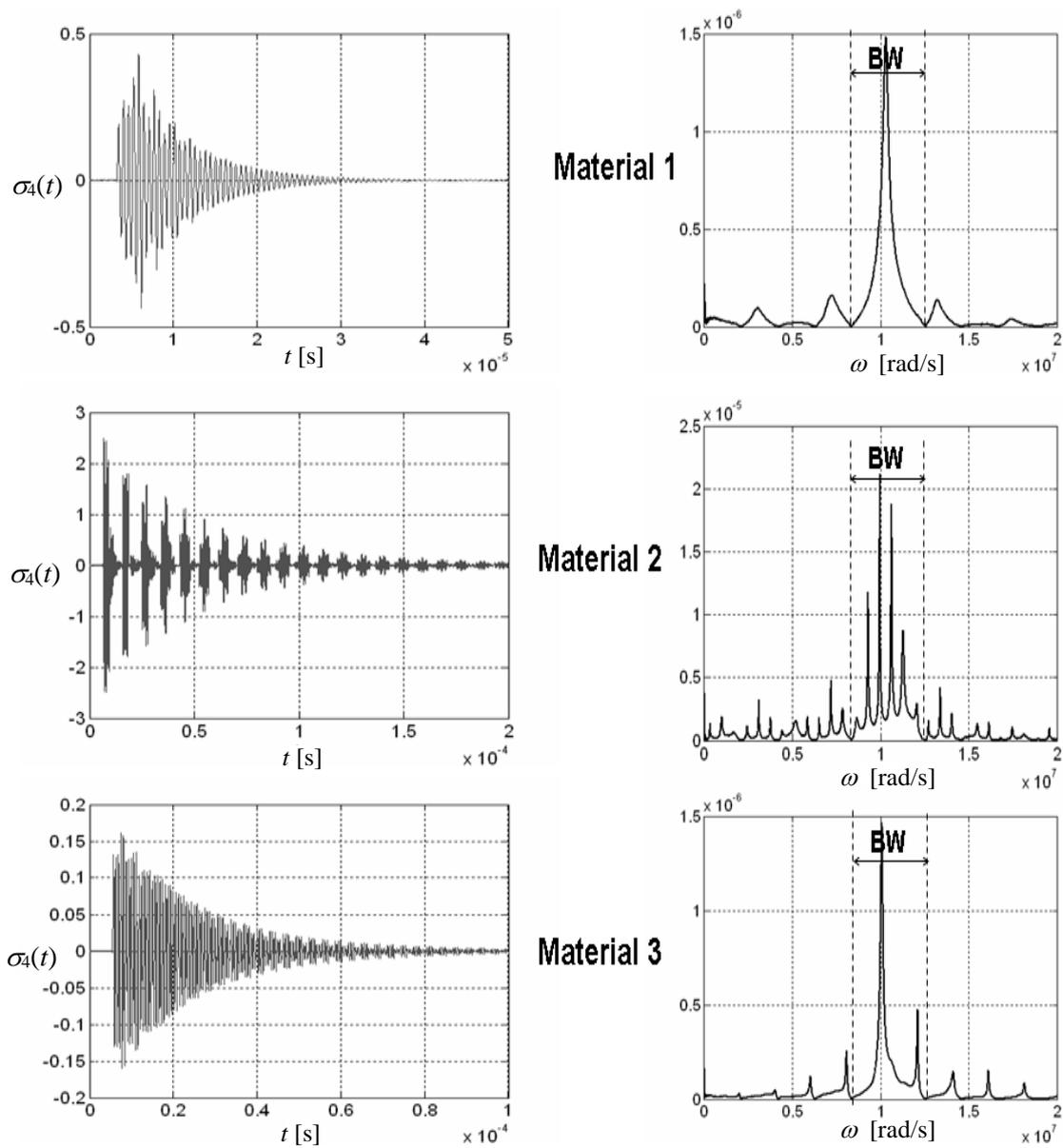


Fig. 5.8. Señales transmitidas y espectros de amplitud en el caso 1.

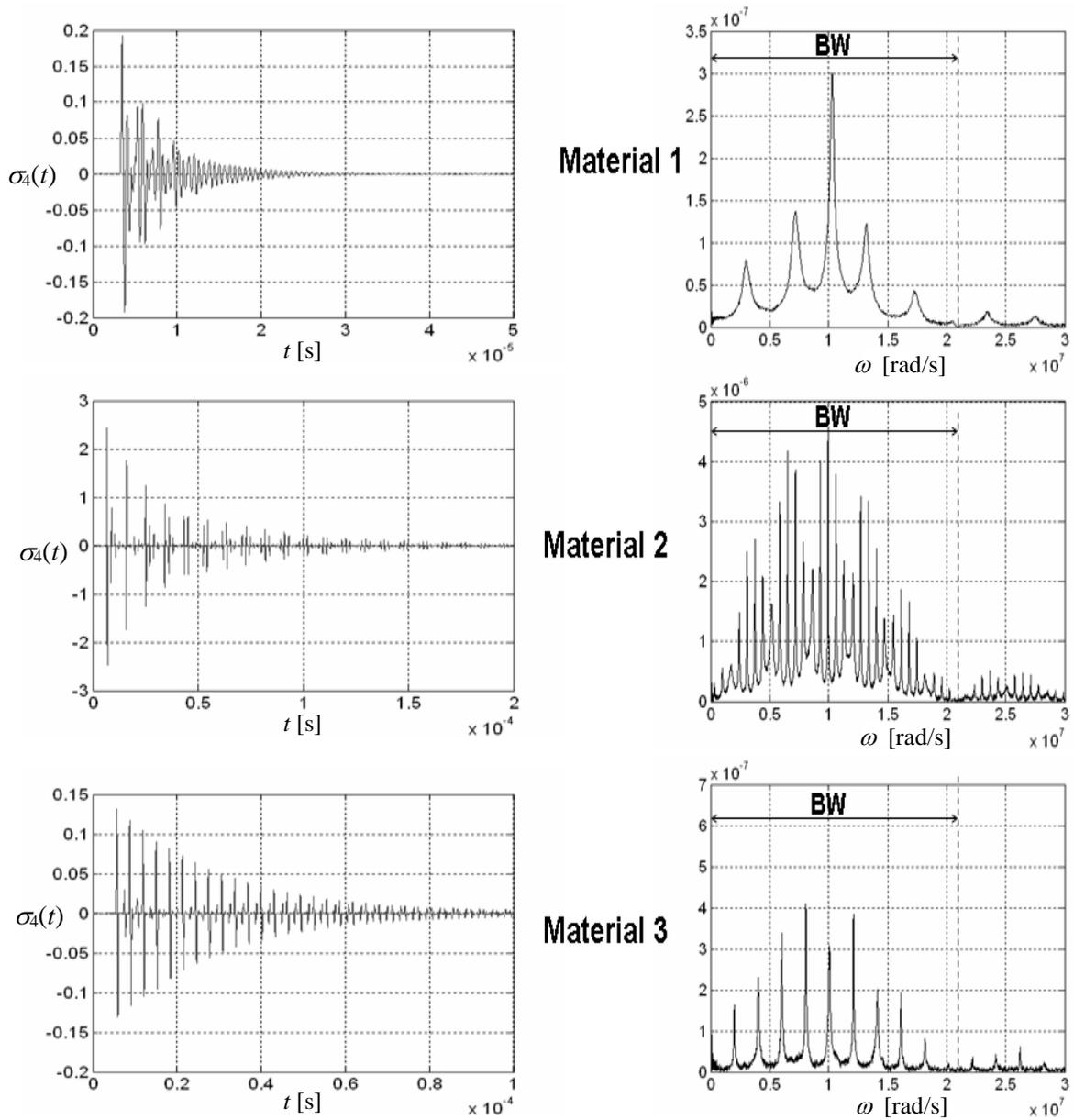


Fig. 5.9. Señales transmitidas y espectros de amplitud en el caso 2.

A partir de los valores iniciales hallados, transcritos en la [Tabla 5.2](#), y varios juegos de valores iniciales de impedancias características,  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$ , elegidos arbitrariamente, la minimización del funcional de costo de la Ec. (58) se llevó a cabo exitosamente. Los valores estimados para las tres capas correspondientes a los tres materiales analizados se muestran en las últimas dos columnas de la [Tabla 5.2](#).

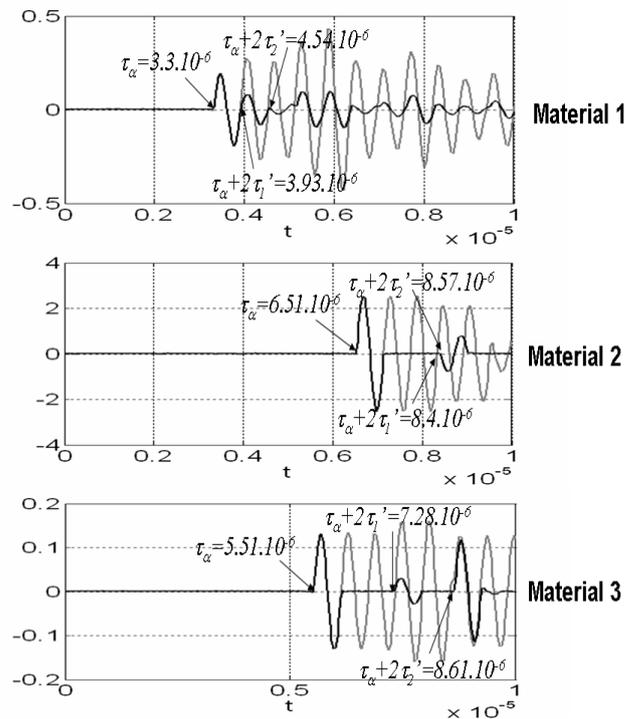


Fig. 5.10. Detalle de las formas de onda y las reflexiones en cada material.

Tabla 5.2. Resultados del problema inverso con datos simulados

		Estimación Inicial	Entrada 1	Entrada 2
<b>Material 1</b>	$Z_1$ [MRayl]	--	18,7425	18,7507
	$Z_2$ [MRayl]	--	7,5997	7,6112
	$Z_3$ [MRayl]	--	1,5700	1,5745
	$\tau_1$ [ $\mu$ s]	0,2625	0,3008	0,3008
	$\tau_2$ [ $\mu$ s]	0,7225	0,6211	0,6211
	$\tau_3$ [ $\mu$ s]	2,3150	2,3949	2,3950
<b>Material 2</b>	$Z_1$ [MRayl]	--	3,1609	3,1677
	$Z_2$ [MRayl]	--	17,9519	17,9608
	$Z_3$ [MRayl]	--	46,9777	46,9884
	$\tau_1$ [ $\mu$ s]	4,5350	4,5742	4,5742
	$\tau_2$ [ $\mu$ s]	0,9450	0,9425	0,9425
	$\tau_3$ [ $\mu$ s]	1,0300	1,0153	1,0153
<b>Material 3</b>	$Z_1$ [MRayl]	--	17,3364	17,2352
	$Z_2$ [MRayl]	--	1,0690	1,0634
	$Z_3$ [MRayl]	--	1,7943	1,7849
	$\tau_1$ [ $\mu$ s]	1,5475	1,5577	1,5577
	$\tau_2$ [ $\mu$ s]	0,8825	0,8895	0,8897
	$\tau_3$ [ $\mu$ s]	3,0850	3,0770	3,0762

## 5.5 Análisis de la estabilidad del PI

Aunque a menudo los problemas inversos son inestables debido a su mal condicionamiento, el problema abordado en esta tesis no lo es. De hecho, a medida que se incrementa el nivel de ruido, el error en las estimaciones se incrementa pero se mantiene dentro del rango del error de medición. Como ejemplo, en la [Fig. 5.11](#) se muestran los valores de impedancia estimados para el caso del Material 1 con tres niveles de ruido. En dicha figura se muestran en puntos rojos los valores de impedancias estimados para cada nivel ruido aditivo en las mediciones simuladas, y en línea negra punteada se grafica el valor verdadero de las impedancias.

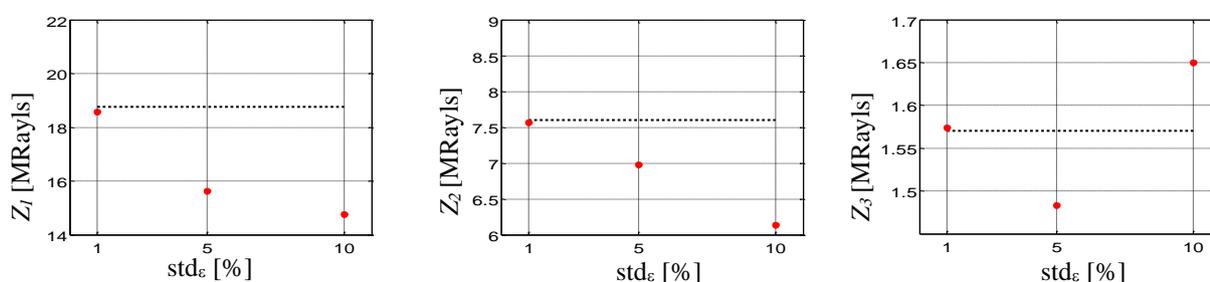


Figura 5.11. Valores de impedancias estimadas para el material 1 con tres niveles de ruido.

Por otro lado, se llevó a cabo un estudio de convergencia del algoritmo analizando la evolución del funcional de costo para diferentes valores iniciales de la impedancia característica y diferentes niveles de ruido. En particular, en la [Fig. 5.12](#) se muestra la evolución en 1000 iteraciones para los tres materiales estudiados usando la Entrada 1, con tres niveles de ruido y un valor inicial para las impedancias de  $Z_1=Z_2=Z_3=5$  MRayls. Como era de esperarse, el funcional de costo converge a un valor que es acorde al nivel de ruido.

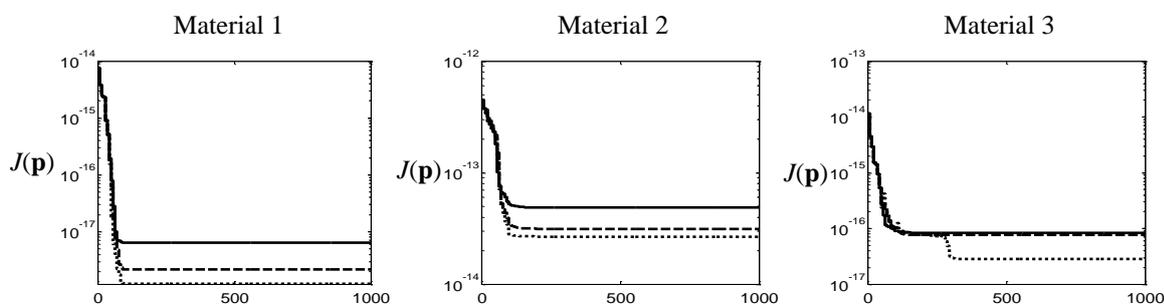


Fig. 5.12. Funcional de costo para diferentes niveles de ruido para los tres materiales considerados. ( $\text{std}_\epsilon=1\%$  ..... ,  $\text{std}_\epsilon=5\%$  - - - ,  $\text{std}_\epsilon=10\%$  — )

## 5.6 Error de modelado

El modelo de la línea de transmisión representa exactamente la propagación de una onda tipo P, entonces es adecuado para representar sin error materiales con interfaces perfectamente paralelas. Cuando no se cumple este requisito, la aplicación de este modelo equivalente para predecir la forma de onda transmitida introduce errores. Con el objetivo de tener una idea cualitativa de la influencia de este error de modelado se llevó a cabo el estudio de algunos casos particulares donde las interfaces son planas pero no paralelas y en las que la onda sufre difracción y conversión de modo. Las geometrías consideradas son como las que se muestran en la [Fig. 5.13](#) para tres casos diferentes (A:  $\beta=1,14^\circ$  y B:  $\beta=2,52^\circ$  en la interfaz 1; C:  $\beta=1,14^\circ$  en la interfaz 2).

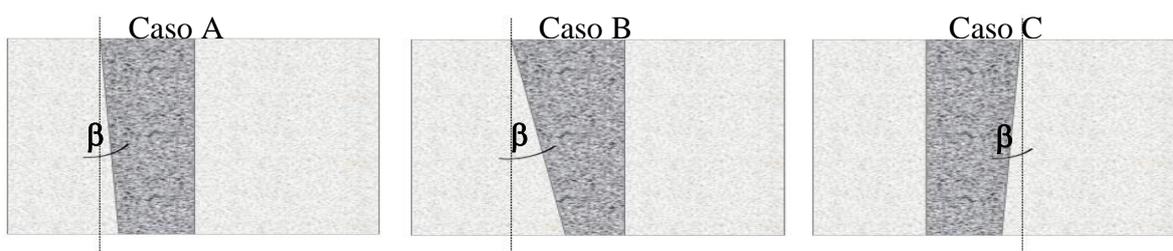


Fig. 5.13. Material compuesto con interfaces no paralelas.

Se simularon muestras compuestas por capas como las del Material 1 y el pulso de excitación usado fue la Entrada 1. La simulación del ensayo de transmisión permite obtener la tensión mecánica en el extremo de la muestra. Utilizando los valores verdaderos de todos los parámetros del compuesto se resolvió el PD tanto para el modelo exacto, formulado con la ecuación en derivadas parciales (Ec. (23)), resuelto aplicando elementos finitos, como para el aproximado, resuelto en base al modelo equivalente. Las funciones obtenidas difieren, como era de esperar. Sus espectros de amplitud se muestran en la [Fig. 5.14](#).

El problema inverso se resolvió en base al modelo equivalente y se siguió el mismo proceso iterativo ilustrado en las [Fig. 5.1](#) y [5.2](#), considerando como datos disponibles las tensiones generadas a partir del modelo exacto. Las estimaciones de los parámetros obtenidas se muestran en la [Tabla 5.3](#). Aunque puede verse que los errores son mayores que cuando no hay error en el modelo, los valores obtenidos son buenas

aproximaciones y dan información útil sobre las impedancias acústicas de cada capa. El error de modelado es inherente al problema físico real, ya que difícilmente la propagación de una onda de ultrasonido en un material formado por capas sea un fenómeno estrictamente unidimensional.

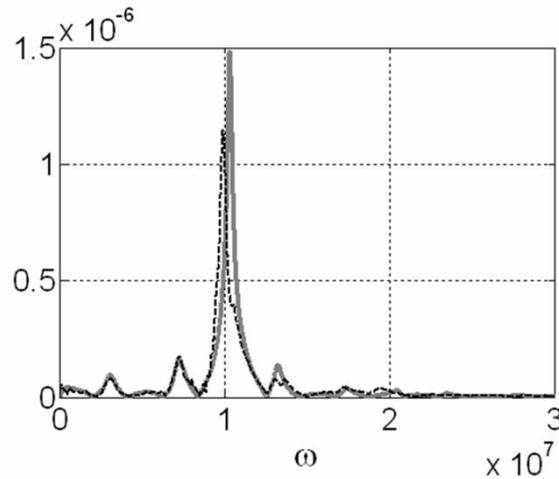


Fig. 5.14. Comparación de espectros de amplitud de la tensión registrada.

Tabla 5.3. Parámetros estimados considerando error en el modelo.

		Caso A	Caso B	Caso C
<b>Material 1</b>	$Z_1$ [MRayl]	19,1760	20,5590	18,9920
	$Z_2$ [MRayl]	6,6468	7,2173	6,9716
	$Z_3$ [MRayl]	1,4750	1,4750	1,3979
	$\tau_1$ [ $\mu$ s]	0,3206	0,3271	0,3103
	$\tau_2$ [ $\mu$ s]	0,6343	0,6105	0,6300
	$\tau_3$ [ $\mu$ s]	2,4449	2,3712	2,5140

### 5.7 Problema inverso con datos simulados considerando atenuación

Teniendo en cuenta que la mayoría de los materiales producen atenuación de las ondas mecánicas que por ellos se propagan, una representación más realista del modelo es la que se muestra en la Ec. (45), donde se considera la atenuación,  $\alpha$ , que queda expresada por la Ec. (17). A pesar de que la atenuación es una función de la frecuencia, en una primera instancia se simuló el PI en casos de materiales con atenuación constante, y de esa manera el número de parámetros a estimar en un material de N capas se eleva de 2N parámetros a 3N parámetros. El vector de parámetros en el caso de un

material de 3 capas será  $\tilde{\mathbf{p}} = [Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$ , donde se supone conocido el espesor de cada capa.

Se llevaron a cabo simulaciones sobre los tres materiales estudiados anteriormente suponiéndolos atenuadores y agregando ruido de  $\text{std}_\varepsilon=1\%$ . La señal de excitación es la denominada Entrada 1 y se utilizaron los mismos valores iniciales para los tiempos de tránsito que para la simulación sin atenuación. Los valores iniciales de las impedancias y la atenuación se establecieron arbitrariamente. La banda de frecuencias se extendió a todo el rango en el que el espectro toma valores significativos, haciendo el problema ligeramente más costoso desde el punto de vista computacional, pero aún manteniendo una gran ventaja en este aspecto sobre el método de los elementos finitos. Los valores estimados para los tres materiales se muestran en la [Tabla 5.4](#).

Tabla 5.4. Valores estimados en materiales con atenuación.

		$Z_1$ [MRayls]	$Z_2$ [MRayls]	$Z_3$ [MRayls]	$\tau_1$ [μs]	$\tau_2$ [μs]	$\tau_3$ [μs]	$\alpha_1$ [Np/m]	$\alpha_2$ [Np/m]	$\alpha_3$ [Np/m]
<b>Material 1</b>	Real	18,75	7,60	1,57	0,3008	0,6210	2,3949	34,52	50,42	57,55
	Std $_\varepsilon=1\%$	<b>18,57</b>	<b>7,56</b>	<b>1,57</b>	<b>0,3007</b>	<b>0,6213</b>	<b>2,3949</b>	<b>33,83</b>	<b>50,76</b>	<b>60,08</b>
	Std $_\varepsilon=5\%$	<b>14,77</b>	<b>6,14</b>	<b>1,61</b>	<b>0,3010</b>	<b>0,6209</b>	<b>2,3940</b>	<b>31,38</b>	<b>27,58</b>	<b>127,66</b>
<b>Material 2</b>	Real	3,16	17,94	46,90	4,5742	0,9425	1,0151	73,66	13,82	11,50
	Std $_\varepsilon=1\%$	<b>3,13</b>	<b>17,85</b>	<b>46,85</b>	<b>4,5744</b>	<b>0,9427</b>	<b>1,0149</b>	<b>73,85</b>	<b>13,80</b>	<b>11,60</b>
	Std $_\varepsilon=5\%$	<b>3,01</b>	<b>17,49</b>	<b>46,59</b>	<b>4,5750</b>	<b>0,9433</b>	<b>1,0140</b>	<b>74,55</b>	<b>13,73</b>	<b>11,93</b>
<b>Material 3</b>	Real	17,33	1,07	1,79	1,5577	0,8896	3,0765	13,81	46,00	57,55
	Std $_\varepsilon=1\%$	<b>17,32</b>	<b>1,07</b>	<b>1,79</b>	<b>1,5579</b>	<b>0,8897</b>	<b>3,0768</b>	<b>13,81</b>	<b>48,10</b>	<b>57,22</b>
	Std $_\varepsilon=5\%$	<b>17,27</b>	<b>1,07</b>	<b>1,79</b>	<b>1,5579</b>	<b>0,8898</b>	<b>3,0764</b>	<b>13,79</b>	<b>56,80</b>	<b>55,87</b>

También se estudió la convergencia de la solución del problema inverso, resolviéndolo con diferentes niveles de ruido aditivo tal como se hizo en los casos sin atenuación. Los valores de los parámetros estimados a partir de una señal con ruido de  $\text{std}_\varepsilon=5\%$  del valor máximo de la señal temporal se muestran en la [Tabla 5.4](#), donde se aprecia que en el Material 1 la estimación presenta, en general, mayor error pero sigue siendo muy buena. En la [Fig. 5.15](#) se observa la evolución del funcional de costo para el Material 2 dada una cierta condición inicial y dos niveles de ruido.

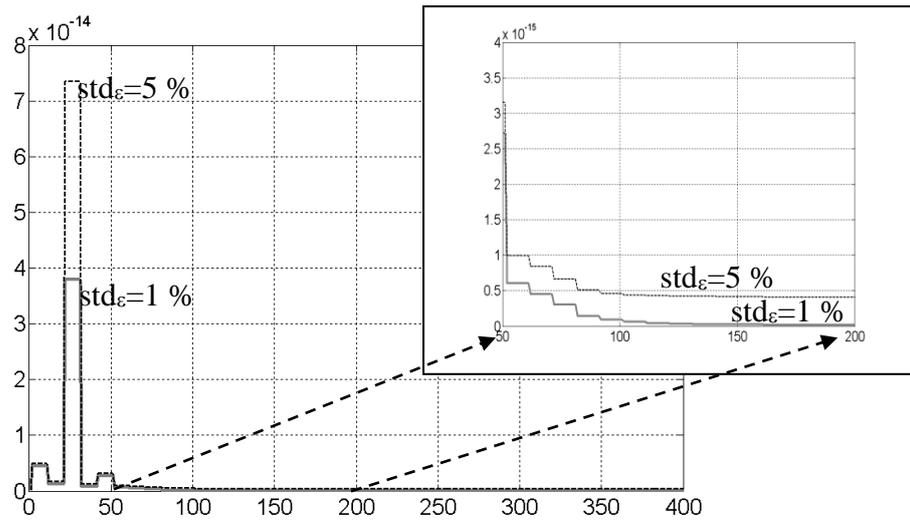


Fig. 5.15. Funcional con diferentes niveles de ruido en el caso de materiales atenuadores.

Para completar la etapa del estudio de la metodología inversa basada en el modelo equivalente, se resolvió el PI para materiales atenuadores con atenuación que sigue a una ley de potencia (Ec. (17)). En este caso el vector de parámetros a estimar tiene  $4N$  componentes:  $\tilde{\mathbf{p}} = [Z_1 Z_2 \dots Z_N \tau_1 \tau_2 \dots \tau_N \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N \eta_1 \eta_2 \dots \eta_N]$ . Se simularon casos de materiales homogéneos, y casos de 2, 3 y 4 capas. Los materiales empleados para estas simulaciones tienen las propiedades y valores de parámetros de algunos de los materiales que se midieron luego experimentalmente. Los valores verdaderos simulados se dan en la [Tabla 5.5](#).

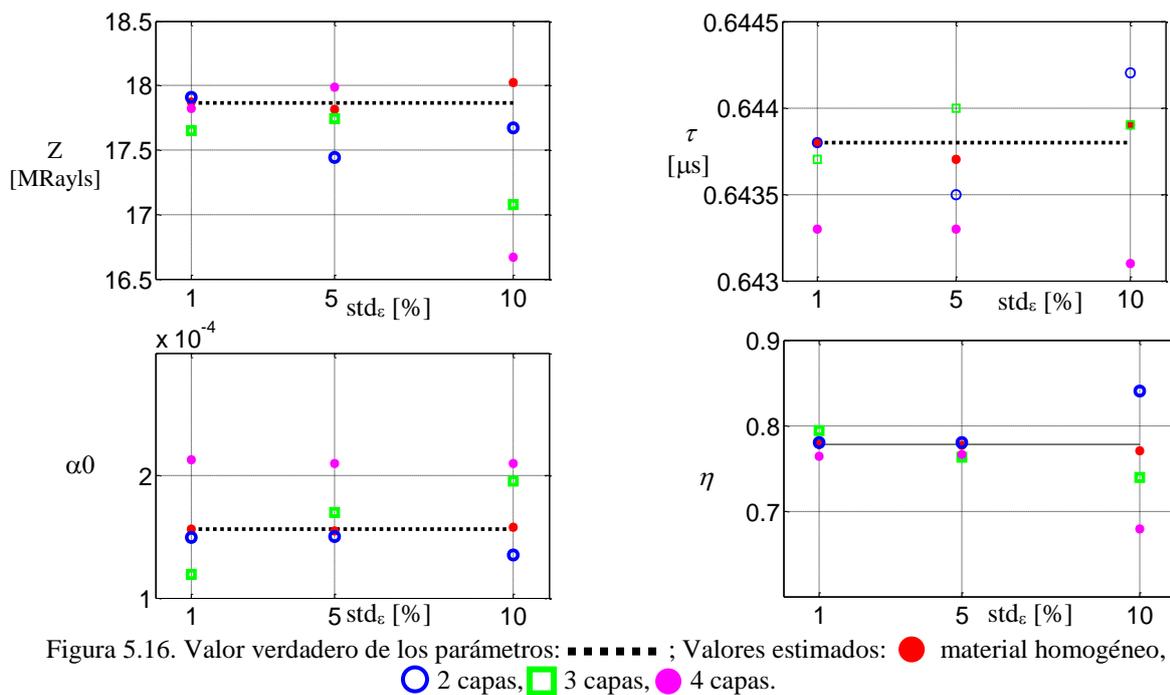
La señal de excitación utilizada tiene la misma forma que la entrada 2, pero para evitar la superposición y así permitir la identificación de ecos, su duración es de  $0,2 \mu\text{s}$ . Las mediciones se obtuvieron, al igual que en los casos anteriores, agregando ruido aditivo con distribución gaussiana y diferentes niveles de desviación estándar.

Tabla 5.5. Valores verdaderos de los parámetros de materiales atenuadores.

Material	Aluminio (Alu-3)	Acrílico (Acr-3)	Aluminio (Alu-10b)	Acrílico (Acr-10)
$Z^v$ [MRayl]	17,869	3,052	17,009	3,193
$\tau^v$ [ $\mu\text{s}$ ]	0,6438	1,1481	1,5660	3,7270
$\alpha_0^v$	$1,563e^{-4}$	$1,220e^{-2}$	$8,100e^{-3}$	$8,180e^{-4}$
$\eta^v$	0,7777	0,5387	0,4863	0,6660

La relación entre  $\alpha_0$  y  $\eta$  está dada por una ecuación potencial:  $\alpha = \alpha_0 \omega^\eta$ , y podría suponerse que puede haber múltiples valores de estos dos parámetros que se ajusten a una misma curva de atenuación. Sin embargo, los cuatro parámetros de cada capa se estimaron correctamente con errores acordes al ruido en las mediciones y partiendo de valores iniciales arbitrarios.

Se resolvió el PI con materiales formados hasta por 4 capas y se estimaron los 16 parámetros. Aquí pudo comprobarse que, además de aumentar con el nivel de ruido de las mediciones, el error en las estimaciones también se incrementa al analizar materiales con un mayor número de capas. En la [Fig. 5.16](#) se muestran los valores estimados de los 4 parámetros de Alu-3 vs. nivel de ruido aditivo para mediciones simuladas sobre el material homogéneo y cuando el mismo es parte de un compuesto formado por 2, 3 y 4 capas sucesivamente.



### 5.8 La impedancia de carga, ¿medirla o estimarla?

El modelo de la línea de transmisión acústica considera la relación entre tensiones y velocidades de las partículas en los extremos del material. Para resolverlo matemáticamente es necesario considerar condiciones de contorno. En el extremo donde

se supone que está el transductor emisor la condición de contorno es la tensión de excitación aplicada. En el otro extremo, si se considera la analogía eléctrica del modelo, la condición estaría representada por una impedancia de carga,  $Z_L$ . Considerando las cantidades acústicas, esa impedancia equivale a la impedancia acústica que hay más allá del extremo del material, y como tal se ha incluido en las simulaciones, tanto en las realizadas con el modelo equivalente como con elementos finitos. De esta manera  $Z_L$  es un parámetro más del modelo. Cuando se trabaja con mediciones reales es necesario conocer esa impedancia o tener la posibilidad de estimarla en el problema de minimización.

Se evaluó la posibilidad de estimar el valor de la impedancia de carga simulando el problema inverso para un caso en que se supone desconocida. La cantidad de parámetros a estimar en un material de  $N$  capas, cada una con atenuación constante, será ahora  $3N+1$ .

En la [Tabla 5.6](#) se muestran los valores obtenidos para el Material 1 considerando diferentes condiciones iniciales para la impedancia de carga y las impedancias acústicas de los materiales. Puede verse que, tanto los valores de los tiempos de tránsito como los de la atenuación se han estimado correctamente. En cambio, no ha sido posible estimar un único valor de impedancias acústicas ni de impedancias de carga, sino que los valores de estos parámetros dependen de los valores iniciales asignados a los mismos.

Tabla 5.6. Valores estimados para diferentes valores iniciales de la impedancia de carga.

$Z_1$ [MRayl]	$Z_2$ [MRayl]	$Z_3$ [MRayl]	$\tau_1$ [μs]	$\tau_2$ [μs]	$\tau_3$ [μs]	$\alpha_1$ [Np/m]	$\alpha_2$ [Np/m]	$\alpha_3$ [Np/m]	$Z_L$ [MRayl]
13,53	5,51	1,18	0,3008	0,6210	2,3949	33,83	47,67	68,32	1,1230
17,16	6,99	1,50	0,3008	0,6210	2,3949	33,83	47,67	68,32	1,4240
20,76	8,45	1,82	0,3008	0,6210	2,3949	33,83	47,67	68,32	1,7228
24,22	9,86	2,12	0,3008	0,6210	2,3949	33,83	47,67	68,32	2,0093

La imposibilidad de obtener estos valores correctamente se debe a que la relación de impedancias determina la proporción de la onda que se transmite y la que se refleja en la interfaz entre las capas  $i$  e  $i+1$ , de impedancias  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$  respectivamente:

$$T_{i,i+1} = \frac{2Z_{i+1}}{Z_{i+1} + Z_i}; \quad R_{i,i+1} = \frac{Z_{i+1} - Z_i}{Z_{i+1} + Z_i}, \quad (59)$$

y no hay un único par de  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$  que hagan que se cumplan estas igualdades, ya que las ecuaciones son linealmente dependientes y, por lo tanto, habrá infinitos pares de impedancia que las satisfagan. A partir de los valores obtenidos puede verificarse que en todos los casos los coeficientes de transmisión son:  $T_{12}=0,5788$ ,  $T_{23}=0,3537$  y  $T_{3L}=0,9734$ .

Por todo esto, la impedancia de carga debería determinarse experimentalmente con la mayor precisión posible, ya que su desconocimiento es un factor más de error en la estimación del resto de los parámetros.

---

---

## Capítulo 6

# Metodología experimental y de cálculo

### 6.1 Diseño de los experimentos.

Con el fin de completar la validación de la metodología se aplica la misma para caracterizar materiales a partir de datos obtenidos de ensayos sobre muestras reales. Los experimentos llevados a cabo consistieron en ensayos de transmisión de una onda ultrasónica a través de muestras formada por capas de distintos materiales. Las muestras analizadas están conformadas por discos de metales y acrílico que han sido cuidadosamente mecanizados con la finalidad de tener superficies sin imperfecciones y para satisfacer el supuesto de capas paralelas lo más exactamente posible. Las mediciones se tomaron en cada disco y luego sobre distintas combinaciones de los mismos.

Se emplearon dos configuraciones experimentales para registrar los datos. La primera de ellas, que llamaremos Configuración I, se muestra en la [Fig. 6.1](#). y consiste en un apilamiento de discos unidos por simple contacto. Los transductores fueron acoplados con glicerina para favorecer la transmisión y recepción de la onda ultrasónica. La señal de excitación eléctrica aplicada a los transductores es un pulso de 100 V de frecuencia central nominal de 7,5 MHz, aunque se midió una frecuencia central de alrededor de 5 MHz. En la [Fig. 6.2](#) se muestra la forma de onda eléctrica de

excitación, que se adquirió con una ganancia de -20 dB, y el correspondiente espectro de amplitud obtenido con la FFT. En todos los casos se registraron 200  $\mu$ s de señal transmitida con una frecuencia de muestreo de 500 MHz.



Fig. 6.1. Configuración con transductores en contacto directo con la muestra.

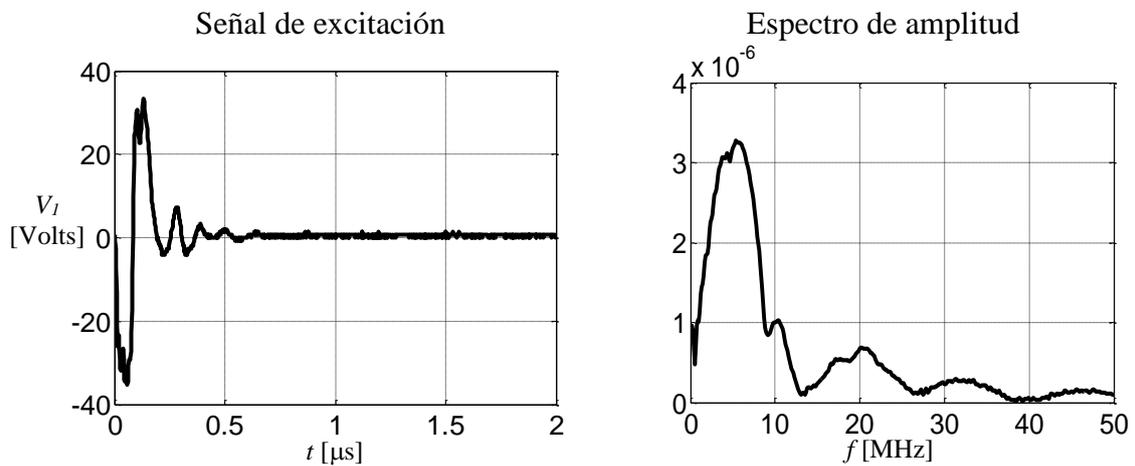


Fig. 6.2. Pulso de excitación eléctrico y su espectro de amplitud.

La capa de material acoplante suele ser un problema en este tipo de ensayos, ya que es imposible controlar su espesor y homogeneidad. Una alternativa que permite evadir este inconveniente es el método que realiza mediciones ultrasónicas en un tanque

de inmersión. Una disposición experimental de estas características, que llamaremos Configuración II, se muestra en la [Fig. 6.3](#). Allí se ve la muestra inmersa en un tanque de agua desgasificada y un único transductor no focalizado actuando como emisor. Para recibir se utilizó un hidrófono, separado del emisor por 124 mm, con la muestra ubicada en el centro. Los discos están sujetos entre sí mediante mordazas que se han aplicado lo más cercanas posibles al lugar de medición, de manera de evitar que quedara agua entre las capas, otro factor que puede distorsionar muchísimo los datos obtenidos. En este caso la señal eléctrica es un pulso de un ciclo de un seno de 8 Vpp amplificado 40 dB (100 veces), con frecuencias centrales de 5,5 y 6 MHz. En el receptor, la señal recibida por el hidrófono se amplifica 37,5 dB (75 veces). La muestra se exploró en un plano paralelo a la cara del material de 2 mm cuadrados, en tres pasos de 1 mm en cada dirección, con lo que se tienen 9 mediciones por cada muestra. Esto brinda la posibilidad de promediar las señales o trabajar con las señales por separado promediando luego los resultados que se obtienen.

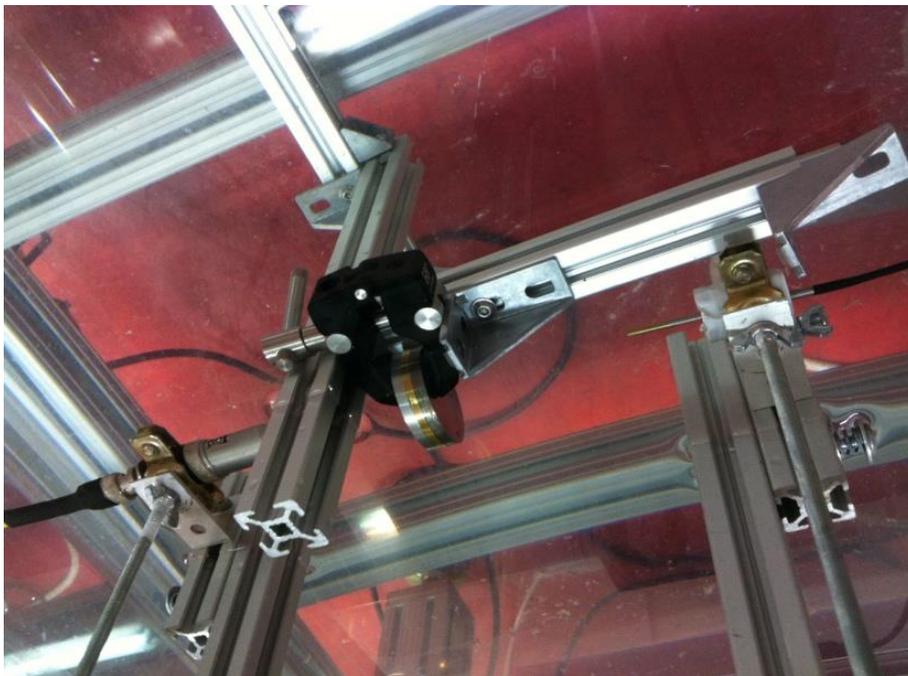


Fig. 6.3. Configuración en tanque de inmersión.

Esta última configuración de medición elimina algunos de los errores que se presentan al tener los transductores en contacto además de permitir enfocar la onda de

ultrasonido, pero sin embargo sólo es factible realizar este tipo de ensayos en un ambiente de laboratorio. Cuando se trata de evaluar un material en su lugar de uso es aplicable la configuración con los transductores acoplados a la muestra, con la correspondiente consideración de los errores que aparecen en ese caso.

## 6.2 Metodología de cálculo.

La forma de onda que llega al material no es la misma que la emitida por el generador de funciones sino que se ve alterada por la respuesta de los transductores y de todo el circuito eléctrico involucrado en la generación y recepción de la señal [44]. Por lo mismo, la señal eléctrica recibida en el receptor no tendrá la misma forma que la tensión mecánica que se genera en el extremo del material luego de la propagación de la onda.

Para estudiar las características del material puede optarse por dos caminos: hacer una caracterización del sistema completo, lo que involucra el conocimiento exacto de una gran cantidad de parámetros adicionales relacionados con los circuitos de generación y recepción, o bien, eliminar el efecto de los transductores y los circuitos de los sistemas emisor y receptor haciendo uso de los fundamentos de sistemas lineales.

Un diagrama en bloques de la Configuración I se muestra en la [Fig. 6.4](#):

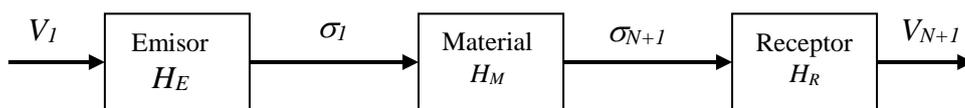


Fig. 6.4. Diagrama en bloques Configuración I.

$H_M$ ,  $H_E$  y  $H_R$  son las funciones de transferencia del material, del circuito de emisión y del circuito de recepción respectivamente,  $V_I$  representa la tensión eléctrica aplicada y  $V_{N+I}$  es la recibida, mientras que  $\sigma_I$  y  $\sigma_{N+I}$  son las tensiones mecánicas en los extremos de un material de N capas. La relación entre las transformadas de Fourier de estas cantidades es:

$$V_{N+I}(\omega) = V_I(\omega)H_E(\omega)H_M(\omega)H_R(\omega), \quad (60)$$

donde lo que interesa identificar es  $H_M$ , es decir, la función que caracteriza al material y que contiene los parámetros del modelo a estimar.

Al utilizar la Configuración I es de utilidad contar con la señal registrada al poner los transductores en contacto, con el objetivo de independizar el problema de los sistemas emisor y receptor. En la [Fig. 6.5](#) se muestra la forma de onda recibida en este caso y su espectro de amplitud.

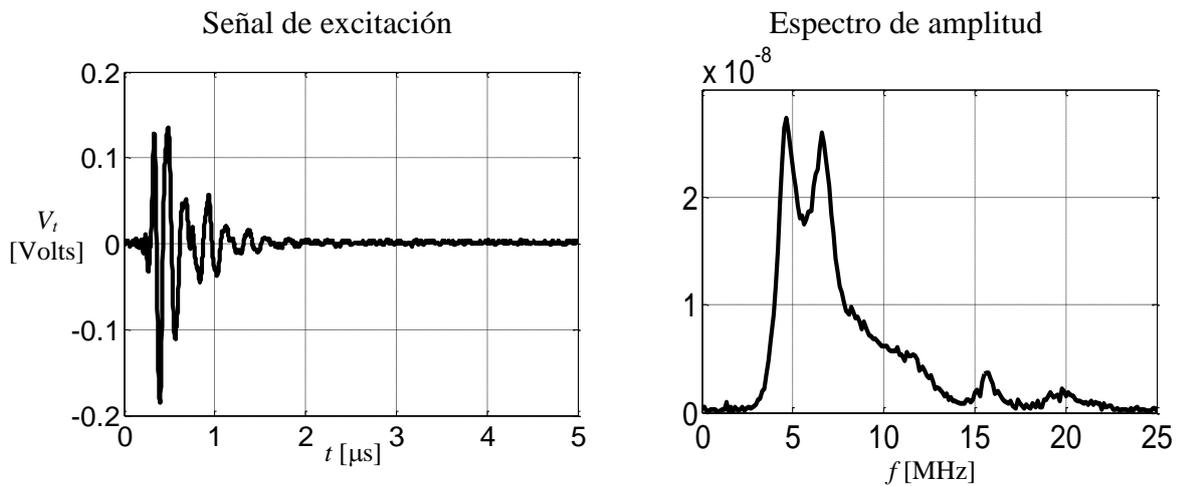


Fig. 6.5. Señal en el transductor receptor con los transductores en contacto.

El diagrama en bloques que ilustra esta última situación es el de la [Fig. 6.6](#),

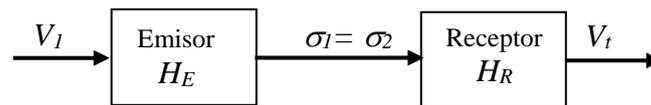


Fig. 6.6. Diagrama en bloques Configuración I sin muestra.

donde se ve que la tensión medida con los transductores en contacto es:

$$V_t(\omega) = V_1(\omega)H_E(\omega)H_R(\omega). \quad (61)$$

Comparando las Ec. (60) y (61) es posible escribir una relación entre las mediciones disponibles,  $V_t$  y  $V_{N+1}$ , y el modelo equivalente:

$$V_{N+1}(\omega) = V_t(\omega)H_M(\omega), \quad (62)$$

sin necesidad de identificar los parámetros del sistema de medición. Así, la señal considerada como excitación en el modelo de la Ec. (34) será  $V_t$ , la forma de onda mostrada en la Fig. 6.5, en lugar de  $\sigma_I$ . La señal medida,  $\sigma_m$ , de la Ec. (58) es la transformada de Fourier de la señal registrada en el receptor luego de la propagación de la onda a través del material, la que deberá ser igual a  $V_{N+1}$ . Por lo tanto, el modelo equivalente relaciona directamente la forma de onda medida con los transductores en contacto con la obtenida al medir la muestra del material.

Cuando los experimentos se llevan a cabo en el tanque de inmersión, como muestra la Fig. 6.3, el principio a emplear es el mismo, considerando la influencia del agua. En este caso se tomará como señal de excitación del modelo la onda propagada por el agua, sin interponer la muestra en el medio (Fig. 6.7). El diagrama en bloques que representa esta situación puede verse en la Fig. 6.8.

La relación entre  $V_I$  y  $V_t$  es ahora:

$$V_t(\omega) = V_I(\omega)H_E(\omega)H_A(\omega)H_R(\omega), \quad (63)$$

donde  $H_A$  es la función de transferencia que considera el volumen de agua que atraviesa la onda desde el emisor hasta el hidrófono receptor. En esta distancia la onda pierde energía de acuerdo a la atenuación del agua,  $\alpha_a = 5.4967e^{-17} \omega^2$  [dB/cm]<sup>4</sup>.

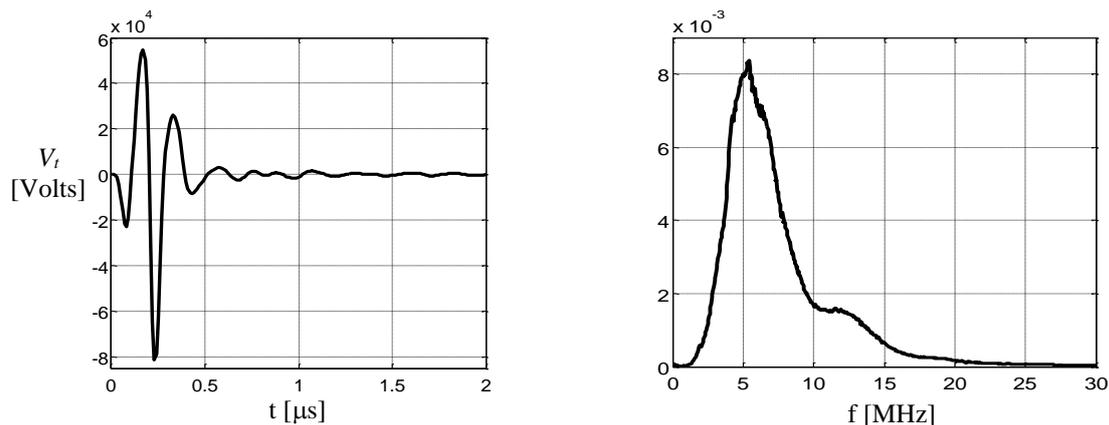


Figura 6.7. Señal en el transductor emisor en el agua sin muestra.

<sup>4</sup> <http://www.astm.org/BOOKSTORE/DS68/pg41.pdf>

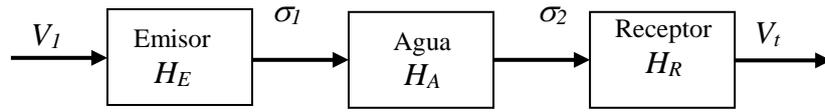


Fig. 6.8. Diagrama en bloques Configuración II sin muestra.

Cuando se coloca la muestra del material entre el emisor y el receptor el diagrama en bloques que representa la situación es:

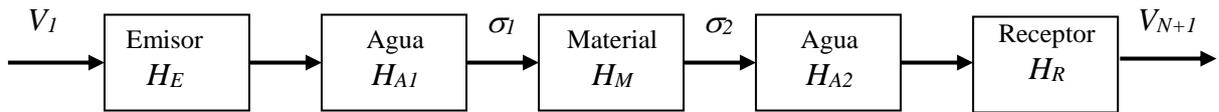


Fig. 6.9. Diagrama en bloques Configuración II.

y la ecuación que relaciona a  $V_{N+1}$  con  $V_I$  es:

$$V_{N+1}(\omega) = V_I(\omega) H_E(\omega) H_{A1}(\omega) H_M(\omega) H_{A2}(\omega) H_R(\omega). \quad (64)$$

$H_{A1}$  y  $H_{A2}$  representan la función de transferencia de las porciones de agua que la onda recorre antes y después de atravesar la muestra. Al pasar por la muestra la onda es atenuada por el material, y en esa parte del trayecto no sufre la atenuación del agua, por lo tanto debe considerarse ese efecto antes de utilizar la forma de onda de la [Fig. 6.7](#) como entrada.

Otro aspecto que debe tenerse en cuenta es la diferencia de impedancia entre el agua y el material, lo que hará que la amplitud de la onda que penetra en el medio a evaluar dependa del coeficiente de transmisión,  $T_{am}$ , en la interfaz agua-muestra.

Si se consideran los efectos mencionados antes en el acondicionamiento de la señal que se usa como excitación, entonces puede afirmarse, sin incurrir en errores de importancia, que  $H_{A1}(\omega)H_{A2}(\omega) = T_{am}H_A(\omega)e^{j\alpha_a d}$ . De acuerdo a esto puede escribirse:

$$V_{N+1}(\omega) = V_I(\omega) H_M(\omega) T_{am} e^{j\alpha_a d} \quad (65)$$

donde  $T_{am}$  es función de la impedancia del agua y de uno de los parámetros del modelo (la impedancia del material que compone la primera capa).

---

---

## Capítulo 7

### Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados de la validación de la metodología, que surgen de la resolución del PI utilizando datos experimentales. Las mediciones experimentales utilizadas como datos se obtuvieron a partir de las dos configuraciones presentadas en el capítulo anterior y los materiales en capas estudiados se construyeron apilando discos de materiales homogéneos que se unieron entre sí a presión.

Para comprobar la bondad de las estimaciones de los parámetros que se obtienen como resultado del PI se llevó a cabo en primer lugar una caracterización de los materiales homogéneos que conformaron las capas. La descripción de estos materiales está dada por las propiedades mecánicas medidas de forma directa en cada una de las muestras y el correspondiente cálculo de los valores verdaderos de los parámetros. Para completar la caracterización de cada muestra homogénea se hizo un estudio completo de la atenuación, identificándose la relación de la misma con la frecuencia. Este estudio se llevó a cabo siguiendo la metodología inversa. La identificación de la atenuación acústica y su relación con la frecuencia es importante cuando se trata de caracterizar un material, ya que al despreciarse su influencia, que en muchos casos es considerable, se incurre en errores en la obtención de los valores del resto de los parámetros.

Una vez caracterizadas las muestras de forma individual se resolvió el PI en materiales de dos y tres capas, que se midieron en ambos sentidos de propagación de la onda para probar la repetibilidad de los resultados.

Cuando se trabaja con mediciones experimentales, a los inconvenientes en la resolución del PI mencionados en el Capítulo 5, fundamentalmente en relación a la presencia de múltiples mínimos del funcional y la imposibilidad de identificar  $Z_L$ , se les suman los errores de medición, que en general son difíciles de cuantificar. Entre estos errores se cuenta la falta de alineación de los transductores o, en el caso de la Configuración I, el efecto de la capa de acoplante entre transductores y muestra, que es de espesor desconocido y no homogénea y hace que las señales registradas sean muy ruidosas.

Además, las capas de material no están adheridas entre sí, sino unidas por simple contacto y es posible que queden atrapados en las interfaces, aire o agua. Esta capa de fluido, que puede tener un espesor de apenas unos micrones, le agrega a las mediciones errores que pueden ser de importancia.

### 7.1 Propiedades físicas medidas en forma directa sobre las piezas homogéneas

Los materiales homogéneos se pesaron y midieron para determinar su espesor y densidad. Además, a partir del tiempo de tránsito observado en las mediciones de ultrasonido realizadas sobre cada muestra, se calculó la velocidad de propagación en el material. Las muestras son cilíndricas de 40 mm de diámetro y de diferentes espesores, éstas se mecanizaron cuidadosamente para asegurar que las caras fueran paralelas y que la superficie fuera lo menos rugosa posible, tratando de esta manera de minimizar los errores de modelado.

Los materiales evaluados usando el ensayo presentado como Configuración I son los que se muestran en la [Tabla 7.1](#), donde se dan sus propiedades físicas.

Tabla 7.1. Materiales evaluados utilizando la Configuración I.

Material	$d$ [mm]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c$ [m/s]
Acero (Ace-10)	9,67	7821	5964,24
Latón (Lat-20)	20,67	8428	4431,82
Aluminio (Alu-10a)	9,93	2781	6390,00
Acrílico (Acr-14)	14,39	1180	2731,90

Con la Configuración II se estudiaron muestras diferentes, cuyas propiedades físicas se detallan en la [Tabla 7.2](#).

Tabla 7.2. Materiales evaluados utilizando la Configuración II.

Material	$d$ [mm]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c$ [m/s]
Acrílico 3 (Acr-3)	2,61	1168	2613-2614,4
Acrílico 10 (Acr-10)	9,98	1190	2685-2685,2
Aluminio 3 (Alu-3)	3,79	2876	6213,1-6213,1
Aluminio 10 (Alu-10b)	9,90	2663	6387,1-6387,1

Las muestras llamadas Acr-10 y Acr-14 están fabricadas a partir del mismo tipo de acrílico, mientras que la llamada Acr-3 es de uno diferente. Las muestras de aluminio están fabricadas todas a partir de la misma barra de aluminio.

Las discrepancias en los valores de las propiedades físicas obtenidas,  $\rho$  y  $c$ , pueden atribuirse a que las medidas fueron tomadas en distintos momentos y bajo distintas condiciones ambientales.

Las propiedades mostradas en las [Tablas 7.1](#) y [7.2](#) se relacionan con los parámetros de interés por medio de las siguientes ecuaciones:

$$Z = \rho c$$

$$\tau = d/c,$$

cuyos valores se listan junto con el módulo de onda longitudinal,  $M = c^2 \rho$ , en la [Tabla 7.3](#), y son los que se consideran como verdaderos en este trabajo. En todos los casos las celdas con dos valores indican los que corresponden a mediciones con los transductores de dos frecuencias centrales diferentes ( $f_c = 5,5$  MHz y  $f_c = 6$  MHz) en la Configuración II.

Tabla 7.3. Valores verdaderos de los parámetros y el módulo elástico.

Material	$Z^v$ [MRayls]	$\tau^v$ [ $\mu$ s]	$M^v$ [GPa]
Ace-10	46,65	1,622	278
Lat-20	37,35	4,53	165,53
Alu-10a	17,77	1,55	113,55
Acr-14	3,22	5,27	8,80
Acr-3	3,052-3,054	0,999-0,998	7,97-7,98
Acr-10	3,195-3,196	3,717-3,716	8,58-8,58
Alu-3	17,87	0,61	111,02
Alu-10b	17,01	1,55	108,64

## 7.2 Atenuación: análisis y caracterización

Los valores de atenuación pueden encontrarse en tablas para una gran cantidad de materiales, pero ocurre que la dependencia de la frecuencia no siempre está documentada y los valores tabulados son para una determinada frecuencia o para cierto rango y, por lo tanto, deben ser tomados sólo como valores típicos.

Por otro lado, materiales tales como el acrílico, por tratarse de un polímero, tiene propiedades que dependen del peso molecular, los aditivos y la temperatura a la que se realiza el ensayo. Incluso en los metales los valores teóricos de atenuación son aproximados y en su caso influye el proceso de templado, que determina la textura, el tamaño de grano, las tensiones residuales y el endurecimiento, y también deben considerarse el envejecimiento y la exposición a determinados factores que modifican progresivamente las propiedades del material. Valores teóricos de atenuación para los materiales estudiados en este trabajo, obtenidos de la bibliografía, se muestran en la [Tabla 7.4](#).

Tabla 7.4. Valores teóricos de atenuación.

Material	Atenuación [Np/m]
Acrílico	148-285 (5 MHz) <sup>5</sup>
Aluminio	3-20 <sup>6</sup>
Acero	4,94 <sup>6</sup>
Latón	---

Existen métodos ultrasónicos tradicionales para medir la atenuación que, en general, utilizan las señales temporales propagadas a través del material. Estos métodos se basan en la comparación de amplitudes relativas entre reflexiones sucesivas de la onda o entre onda transmitida y onda recibida en varias mediciones hechas con muestras de diferentes espesores y a distintas frecuencias [45]. A partir de estas mediciones se obtienen curvas de atenuación experimentales en función de la frecuencia. Para una

---

<sup>5</sup> <http://www.ndt.net/links/proper.htm>

<sup>6</sup> [http://www.kayelaby.npl.co.uk/general\\_physics/2\\_4/2\\_4\\_1.html](http://www.kayelaby.npl.co.uk/general_physics/2_4/2_4_1.html)

amplia gama de materiales las curvas de atenuación obtenidas se ajustan bien mediante la ley de potencia definida en la Ec. (17):

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \omega^\eta$$

La metodología desarrollada en esta tesis utiliza una única medición de transmisión para obtener los parámetros  $\alpha_0$  y  $\eta$ . Estos parámetros se obtienen simultáneamente con  $Z$  y  $\tau$  en la resolución del PI utilizando el modelo equivalente de la línea de transmisión, al que la atenuación se incorpora utilizando un número de onda complejo, tal como se explicó en la Sección 4.2.

En este apartado se propone una metodología para identificar y seleccionar, entre el modelo lineal y el constante, la mejor representación de la atenuación analizando las curvas de nivel en base a mediciones experimentales. Se obtuvieron los valores de  $\alpha_0$  para todos los materiales considerando atenuación constante ( $\eta=0$ ) y atenuación lineal ( $\eta=1$ ) para comparar el ajuste de estos modelos a los datos. Los valores obtenidos se muestran en la [Tabla 7.5](#).

En la Sección 5.8 se dejó en claro que no es posible estimar la impedancia de carga del modelo,  $Z_L$ , la que es equivalente a la impedancia acústica más allá del extremo del material del lado del receptor. En el caso de la Configuración I se espera que sea de unos pocos MRayls, ya que en el extremo de la muestra la onda se encuentra con una capa de gel acoplante cuya impedancia acústica es cercana a la del agua. Sin embargo, ya se mencionó que es sumamente difícil manejar el espesor y la homogeneidad de dicha capa, por lo que se espera que el valor de impedancia acústica varíe de una medición a otra. En la Configuración II lo que hay más allá de la muestra es agua, y la impedancia acústica debería ser de alrededor de 1,5 MRayls.

El cálculo de este valor se hizo de manera simultánea con el de la atenuación a partir del espacio de soluciones para todas las muestras. En la [Fig. 7.1](#) se muestran las curvas de nivel de  $J(Z^v, \tau^v, \alpha_0, Z_L)$  para los materiales ensayados con la Configuración I y en la [Fig. 7.2](#) los ensayados con la Configuración II. En todos los casos los gráficos corresponden al modelo de atenuación constante con la frecuencia. Los valores de  $Z_L$  obtenidos a partir de esas superficies se muestran también en la [Tabla 7.5](#) y coinciden con los que se calcularon considerando atenuación lineal.

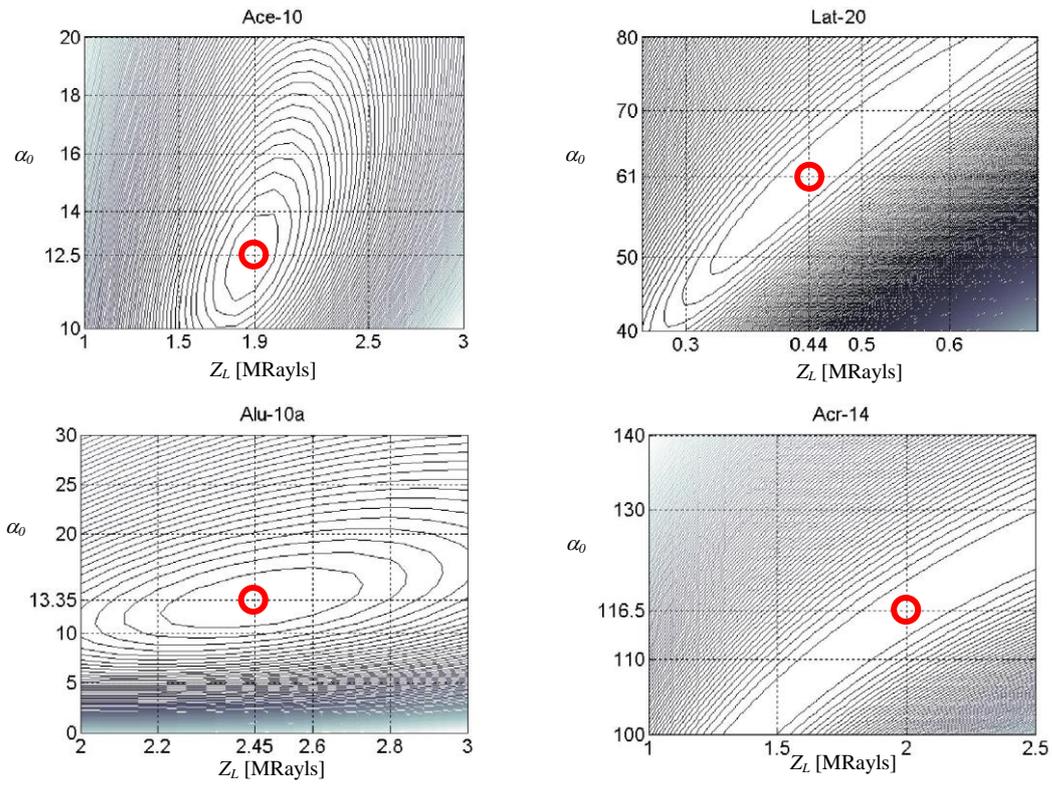


Fig. 7.1.  $J(Z', \tau^\nu, \alpha_0, \eta=0, Z_L)$  para Configuración I.

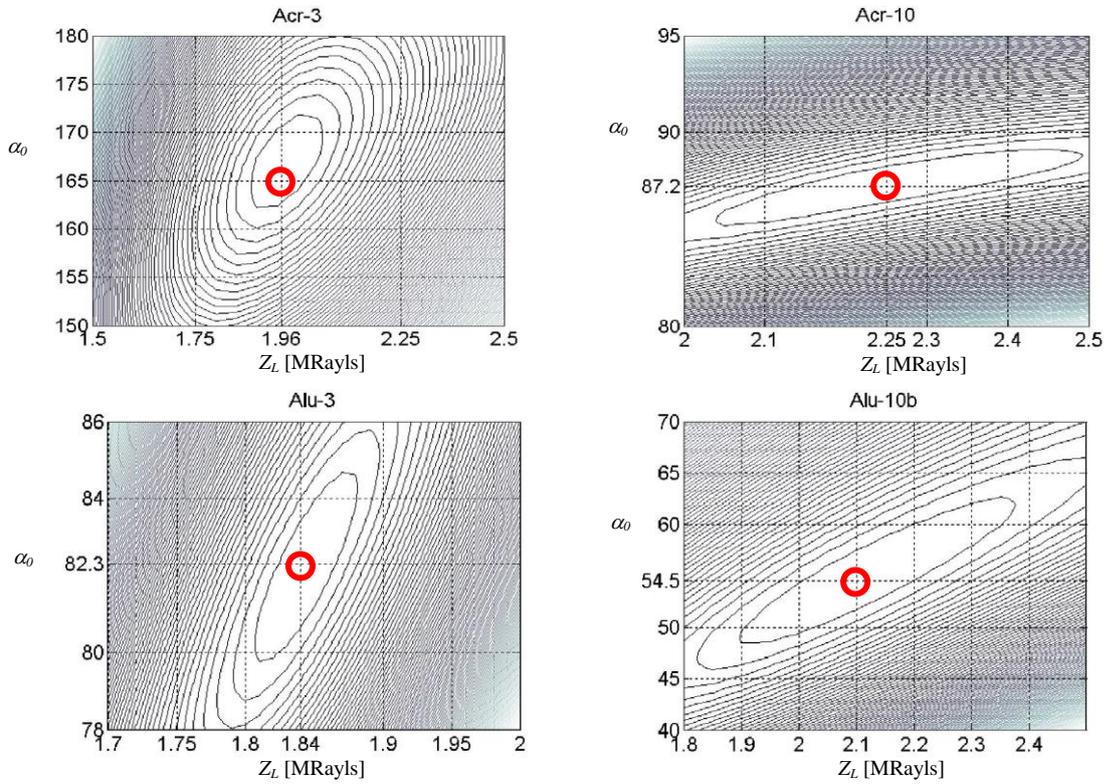


Fig. 7.2.  $J(Z', \tau^\nu, \alpha_0, \eta=0, Z_L)$  para Configuración II.

En la [Tabla 7.5](#) puede verse también que el mínimo del funcional predice valores bastante disímiles de atenuación para muestras del mismo material. Por ejemplo, para las muestras Alu-10a y Alu-10b, ambas fabricadas del mismo aluminio, los mínimos se encuentran para  $\alpha_0=13,35$  y  $\alpha_0=54,5$ , respectivamente. Si se observa la [Tabla 7.3](#) puede verse para estas muestras que, a partir de las mediciones directas hechas sobre las mismas, los valores de impedancia acústica considerados como verdaderos también son diferentes. Esta es una posible causa de la diferencia en los coeficientes de atenuación. En cuanto al acrílico, las muestras hechas por el mismo tipo de acrílico (Ac-14 y Ac-10) muestran valores algo más cercanos entre sí que los de Ac-3.

Tabla 7.5. Valores de  $\alpha_0$  y  $Z_L$  obtenidos del espacio de resultados, con  $Z^v$  y  $\tau^v$ .

Material	$\alpha_0$ ( $\eta=0$ )	$\alpha_0$ ( $\eta=1$ )	$Z_L$ [MRayls]
Ace-10	12,5	$3,5e^{-7}$	1,9
Lat-20	61	$1,6e^{-6}$	0,44
Alu-10a	13,35	$3,75e^{-7}$	2,45
Acr-14	116,5	$3,4e^{-6}$	2
Acr-3	165-176	$4,56e^{-6}$ - $4,65e^{-6}$	1,96
Acr-10	87,2-90,8	$2,3e^{-6}$ - $2,3e^{-6}$	2,25
Alu-3	82,3-84,1	$2,285e^{-6}$ - $2,26e^{-6}$	1,84
Alu-10b	54,5-55,7	$1,4e^{-6}$ - $1,38e^{-6}$	2,1

Los valores de  $Z_L$  obtenidos con la Configuración I, tal como se esperaba, varían mucho más, en general, que los obtenidos con la Configuración II que en todos los casos tiene un valor cercano a 2 MRayls.

Frecuentemente, al incluir la atenuación en los modelos se supone que la misma es constante con la frecuencia, o bien, que sigue una ley lineal, al menos dentro de cierto rango de frecuencias. Sin embargo, especialmente cuando se trata de señales con un ancho de banda amplio, suele incurrirse en errores de importancia cuando la ley que sigue la atenuación es diferente de cualquiera de las dos mencionadas. Para ver cuán bien ajustan los modelos de atenuación supuestos en este apartado se muestran las formas de onda experimentales y las formas de onda transmitidas simuladas en cada caso, así como también sus espectros de amplitud. En los gráficos se superponen las señales experimentales (rojo) y las que predice el modelo de la línea de transmisión con  $\eta=0$  (turquesa) y  $\eta=1$  (negro). La [Fig. 7.3](#) corresponde a la Configuración I y la [Fig. 7.4](#)

a la Configuración II. Las formas de onda temporales de la [Fig. 7.3](#) muestran que las señales provenientes de esos ensayos son bastante ruidosas, lo que se supone provocado por las capas de acoplante, que generan reflexiones espurias difíciles de cuantificar y, por lo tanto, de modelar.

En la [Fig. 7.4](#) se ve que en la forma de onda registrada en la muestra de aluminio más delgada, Alu-3, aparecen reflexiones que no son predichas por el modelo. Estos ecos son provocados por las reflexiones en los borde de la muestra paralelos a la dirección de la propagación de la onda y se relacionan con la conversión de modo que allí ocurre ([Fig. 7.3](#)). Como el aluminio es menos atenuador que el acrílico, las ondas tipo S generadas en el borde no llegan a atenuarse antes de alcanzar el extremo del material del lado del receptor. Esto genera ondas tipo P que se propagan por el agua hasta el receptor y llegan más tarde que las que no sufrieron la conversión de modo, debido a que la velocidad de propagación de la onda S es menor que la de la onda P.

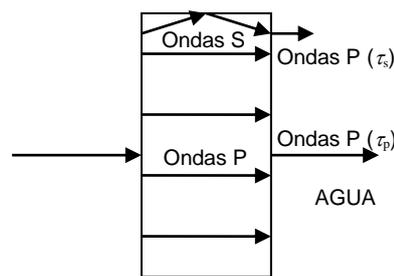


Figura 7.3. Ondas generadas por conversión de modo

Observe que las ordenadas de los espectros de amplitud de las [Fig. 7.4](#) y [7.5](#) se muestran en escala logarítmica a fin de resaltar las diferencias entre las representaciones obtenidas a partir de los diversos modelos de atenuación.

En los espectros se observa que el modelo de atenuación lineal, en general, brinda un mejor ajuste a las mediciones experimentales que el modelo de atenuación constante, especialmente dentro del rango de frecuencias de mayor contenido de potencia. Sin embargo en las señales provenientes de las muestras de acrílico tomadas con la Configuración II, que tienen mayor ancho de banda y, por otro lado, se observa que para las frecuencias altas la atenuación modelada es mayor que la real y, en ese rango ajusta mejor una atenuación constante. Esto hace suponer que para representar la atenuación en todo el rango es más adecuado el modelo de ley de potencia con  $\eta < 1$ .

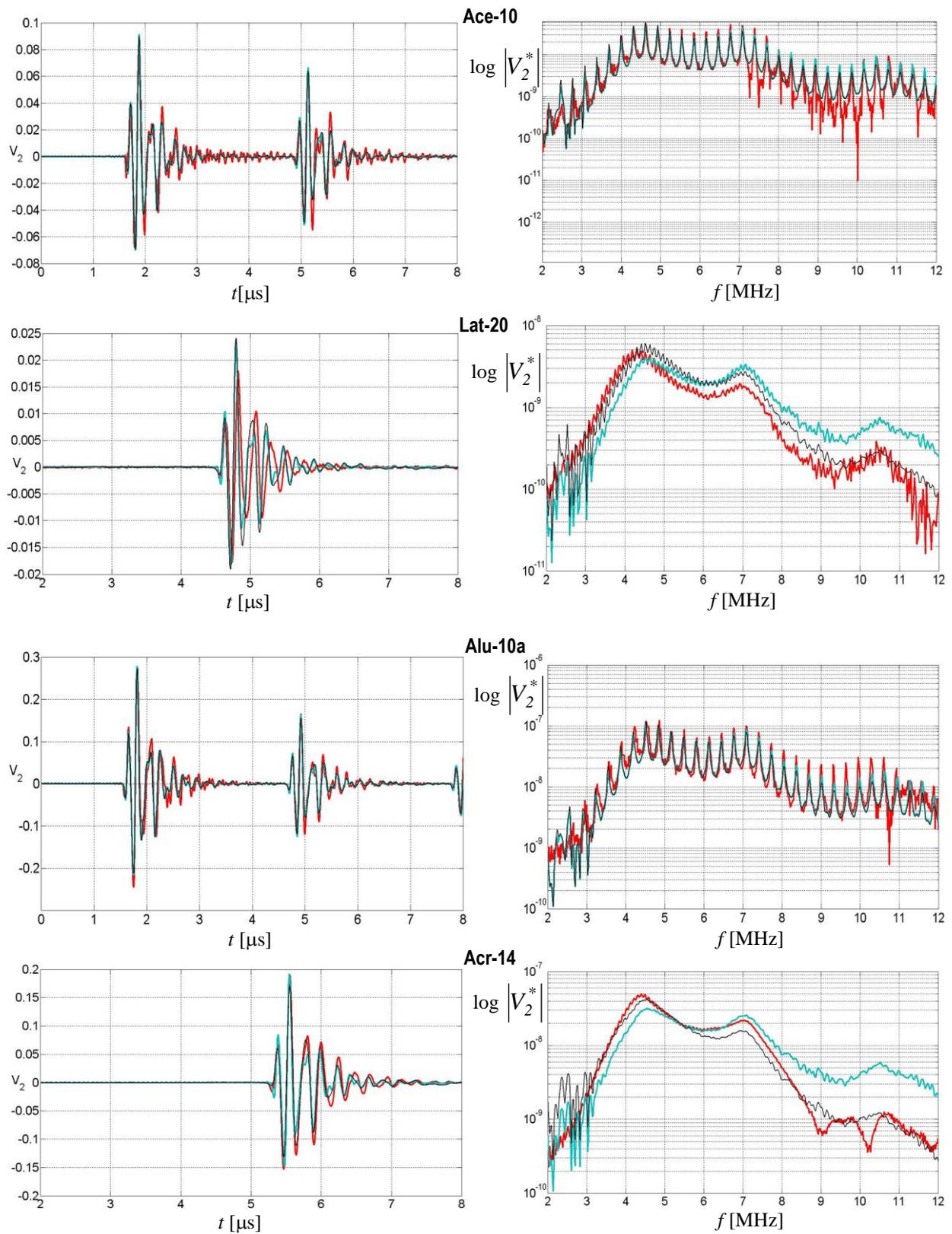


Fig. 7.4. Formas de onda experimentales (rojo), calculadas por el modelo con  $\eta=0$  (turquesa) y calculadas por el modelo con  $\eta=1$  (negra). Configuración experimental I.

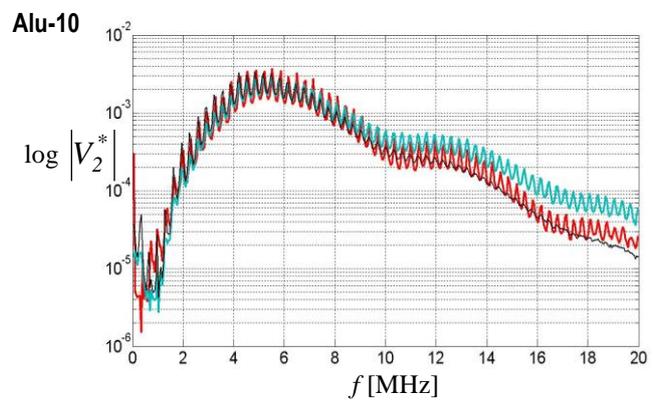
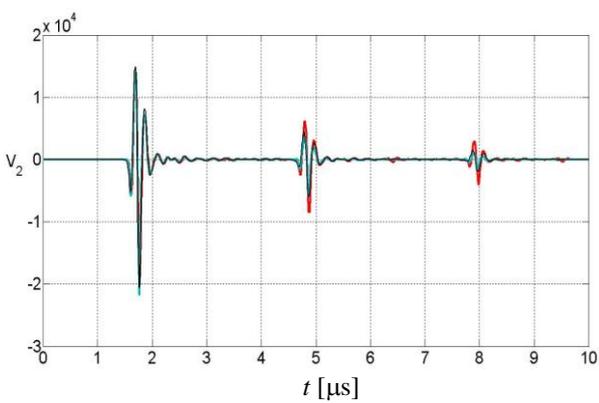
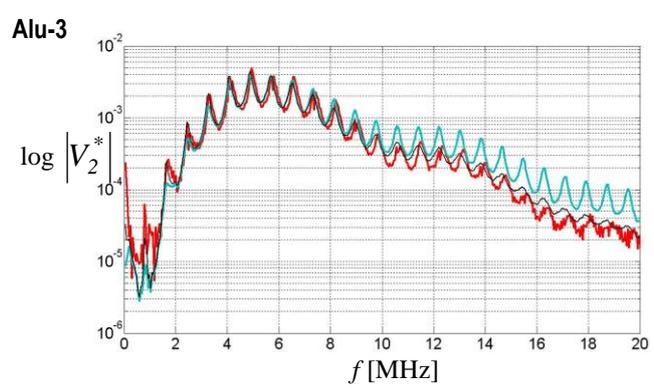
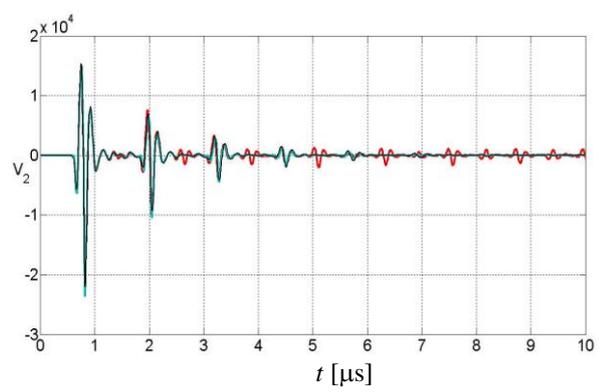
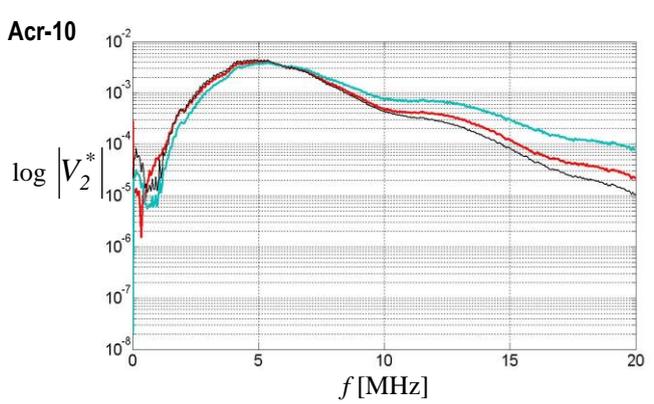
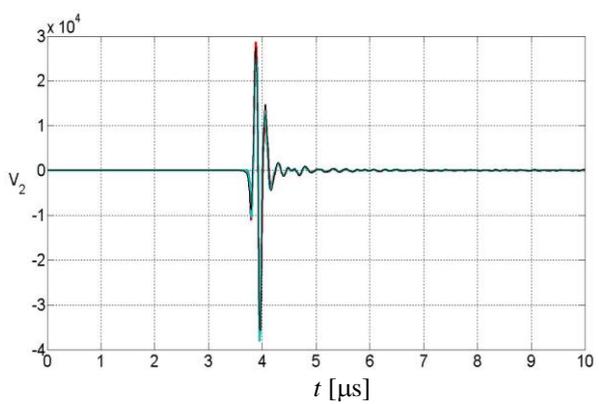
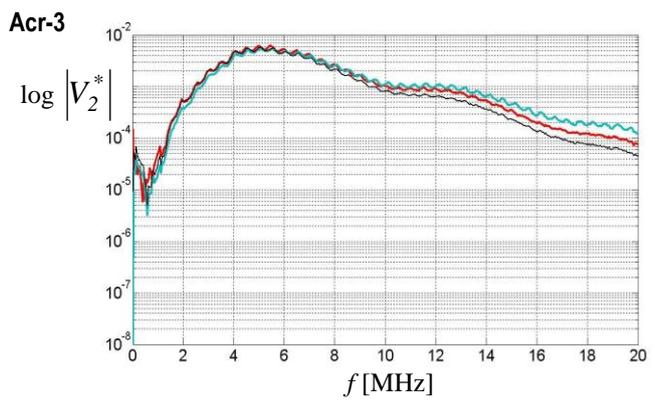
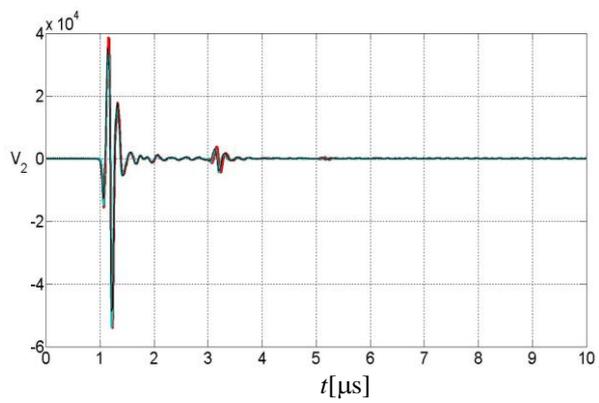


Fig. 7.5. Formas de onda experimentales (rojo), calculadas por el modelo con  $\eta=0$  (turquesa) y calculadas por el modelo con  $\eta=1$  (negro). Configuración experimental II.

### 7.3 Análisis inverso aplicado a las muestras homogéneas

Para estudiar la factibilidad de aplicar la metodología de resolución propuesta a mediciones experimentales se repite el estudio de la superficie que determina el funcional  $J$ , tal como se hizo en el Capítulo 5, pero con datos obtenidos de experimentos reales. En la [Fig. 7.6.a](#) se muestra un gráfico de curvas de nivel de  $J(\mathbf{p})$  para una muestra con atenuación conocida y cuyos valores verdaderos de los parámetros a determinar son  $Z = Z^v$  y  $\tau = \tau^v$ , siendo por consiguiente  $\mathbf{p}=[Z \ \tau]$ . Para hacer más evidentes las características de los resultados se utilizaron en los ejes desviaciones ( $\tilde{Z} = Z - Z^v$ ,  $\tilde{\tau} = \tau - \tau^v$ ), y para más detalle también se grafican dos perfiles de  $J(\mathbf{p})$  vs.  $\tilde{\tau}$  con  $Z = Z^v$  y de  $J(\mathbf{p})$  vs.  $\tilde{Z}$  con  $\tau = \tau^v$ , respectivamente en la [Fig. 7.6.b](#).

A pesar de la presencia de múltiples mínimos puede observarse claramente que el mínimo global corresponde a los valores verdaderos y es único. Como se dijo en la Sección 5.3, la existencia de múltiples mínimos puede hacer que la solución converja a algún mínimo local si los valores iniciales de los parámetros no se eligen con cuidado. Observando la [Fig. 7.6](#) se corrobora que el problema es poco sensible al valor de la impedancia acústica, y que los valores iniciales de los tiempos de tránsito deben seleccionarse no muy alejados del valor verdadero para no incurrir en la convergencia a algún mínimo local.

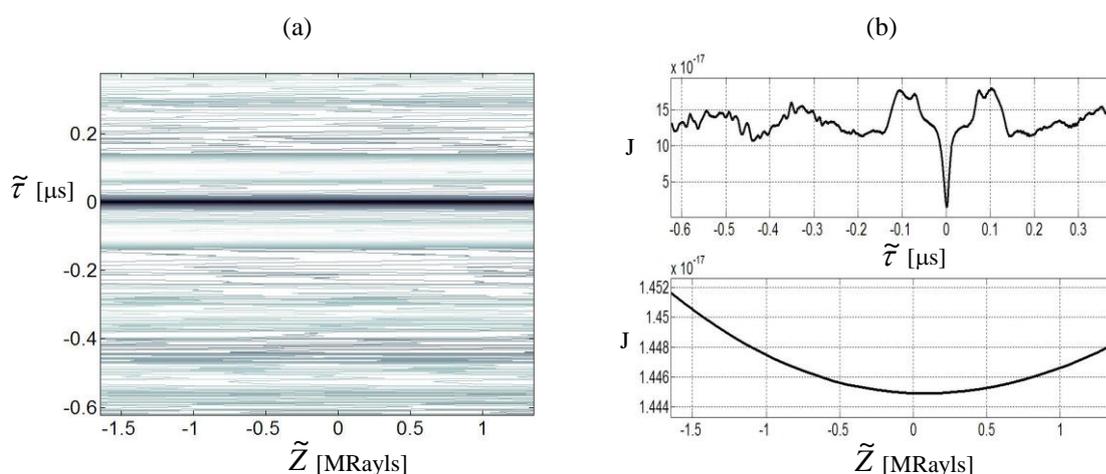


Fig. 7.6. Gráfico de nivel para un material real (Ace-10) en función de  $\tilde{Z}$  y  $\tilde{\tau}$  y curvas de perfiles en el mínimo.

Se resolvió el PI para estimar la totalidad de los parámetros que caracterizan cada muestra, es decir,  $\mathbf{p}=[Z \ \tau \ \alpha_0 \ \eta]$ . Obsérvese que se busca también determinar el modelo que representa la atenuación ya que se plantea la identificación no solo de  $\alpha_0$  sino también de  $\eta$ . Los valores iniciales de  $\tau$  se obtienen a partir de las señales temporales de acuerdo a la metodología detallada en la sección 5.3. Los valores de  $\alpha_0$  y  $\eta$  se inicializan en 0 y a  $Z$  se le dan distintos valores iniciales. En todos los casos el algoritmo converge al mínimo global y las estimaciones de los parámetros buscados resultan con muy bajo error. Los resultados que se muestran en la [Tabla 7.6](#) fueron hallados tomando los valores de  $Z_L$  de acuerdo a la [Tablas 7.5](#).

Tabla 7.6. Parámetros estimados por el PI en materiales homogéneos.

Material	$Z$ [Mrayls]	$\tau$ [ $\mu$ s]	$\alpha_0$	$\eta$	$c$ [m/s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$M$ [GPa]
Ace-10	46,68	1,6229	6,93e-7	0,9587	5958,5	7834,2	<b>278,14</b>
Lat-20	36,486	4,546	4,66e-7	1,1051	4528,9	8056,3	<b>165,24</b>
Alu-10a	17,61	1,5528	4,42e-4	0,5848	6394,9	2753,8	<b>112,62</b>
Acr-14	3,10	5,2800	3,33e-4	0,7200	2725,4	1137,5	<b>8,45</b>
Acr-3	3,11	0,9886	1,43e-3	0,6623	2640,1	1178,0	<b>8,21</b>
Acr-10	3,16	3,7225	6,37e-4	0,6800	2681,0	1178,5	<b>8,47</b>
Alu-3	17,37	0,6140	7,01e-5	0,8087	6172,6	2814,0	<b>107,22</b>
Alu-10b	17,10	1,5404	6,01e-4	0,6295	6426,9	2661,4	<b>109,93</b>

En la [Fig. 7.7](#) se muestran los espectros de amplitud de las formas de onda obtenidas resolviendo el PI en base al modelo equivalente usando los valores estimados en la [Tabla 7.6](#) correspondientes a la Configuración I. Se grafican en la [Fig. 7.8](#) los correspondientes a la Configuración II.

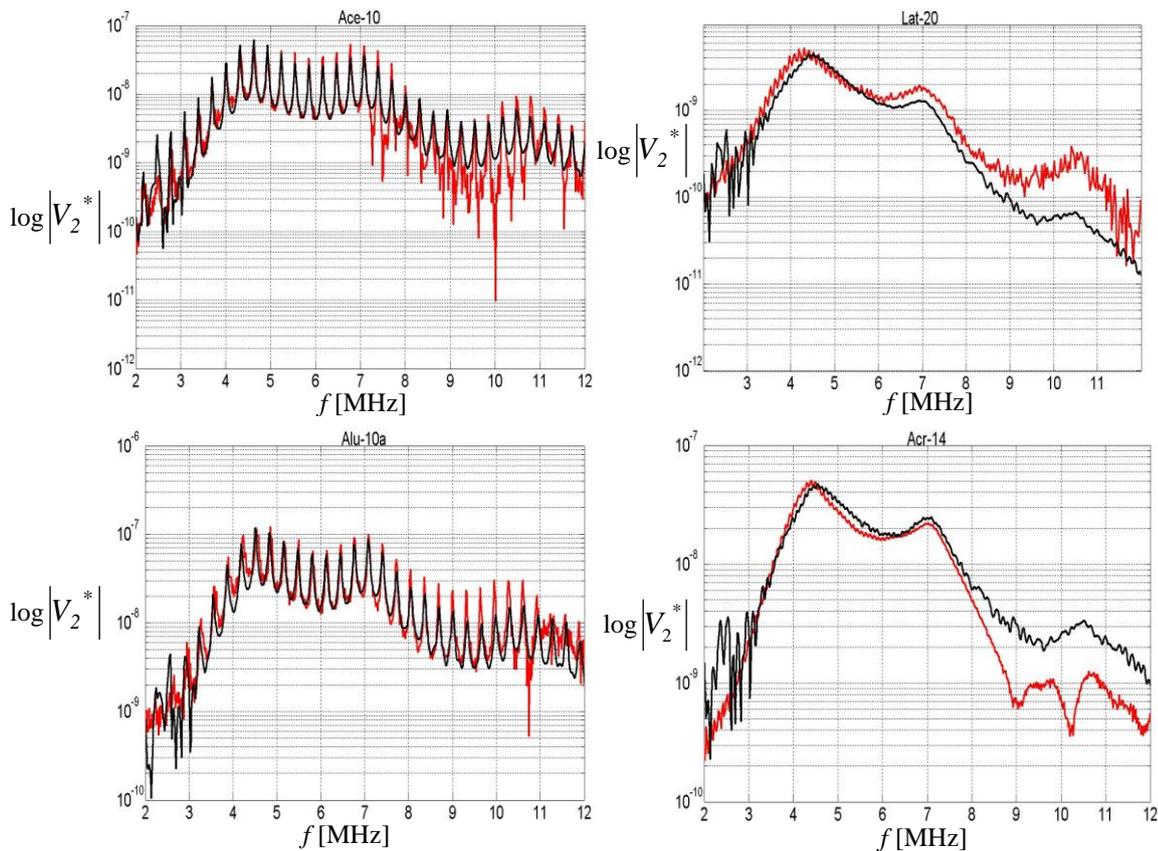


Figura 7.7. Espectros de amplitud de las señales experimentales (rojo) y de las obtenidas a partir del modelo (negro) con valores de parámetros estimados por PI utilizando la Configuración I.

En la mayoría de los metales la atenuación guarda con la frecuencia una relación cercana a la lineal, al menos en cierto rango del espectro. Puede verse al utilizar la Configuración I que, efectivamente, para el acero y el latón se estiman valores de  $\eta$  cercanos a 1. Además, los valores del resto de los parámetros son cercanos a los verdaderos. En cuanto al aluminio, tanto para la muestra Alu-10a como para Alu-10b el PI predice una atenuación potencial con  $\eta$  alrededor de 0,6.

Los valores de los parámetros obtenidos a partir de la resolución del PI con las mediciones tomadas con la Configuración II permiten ajustar muy bien las señales experimentales a las obtenidas con el modelo (Fig. 7.8), especialmente en el caso del acrílico. Aquí vale la pena recordar que las muestras Acr-3 y Acr-10 están fabricadas con diferentes acrílicos, por lo que es de esperar que los valores no coincidan.

En la muestra Alu-3, la presencia de reflexiones de ondas de corte originadas en la interacción de la onda con los bordes, que no está representada por el modelo

equivalente, justifica que el ajuste de las curvas no sea tan bueno como en el caso del acrílico.

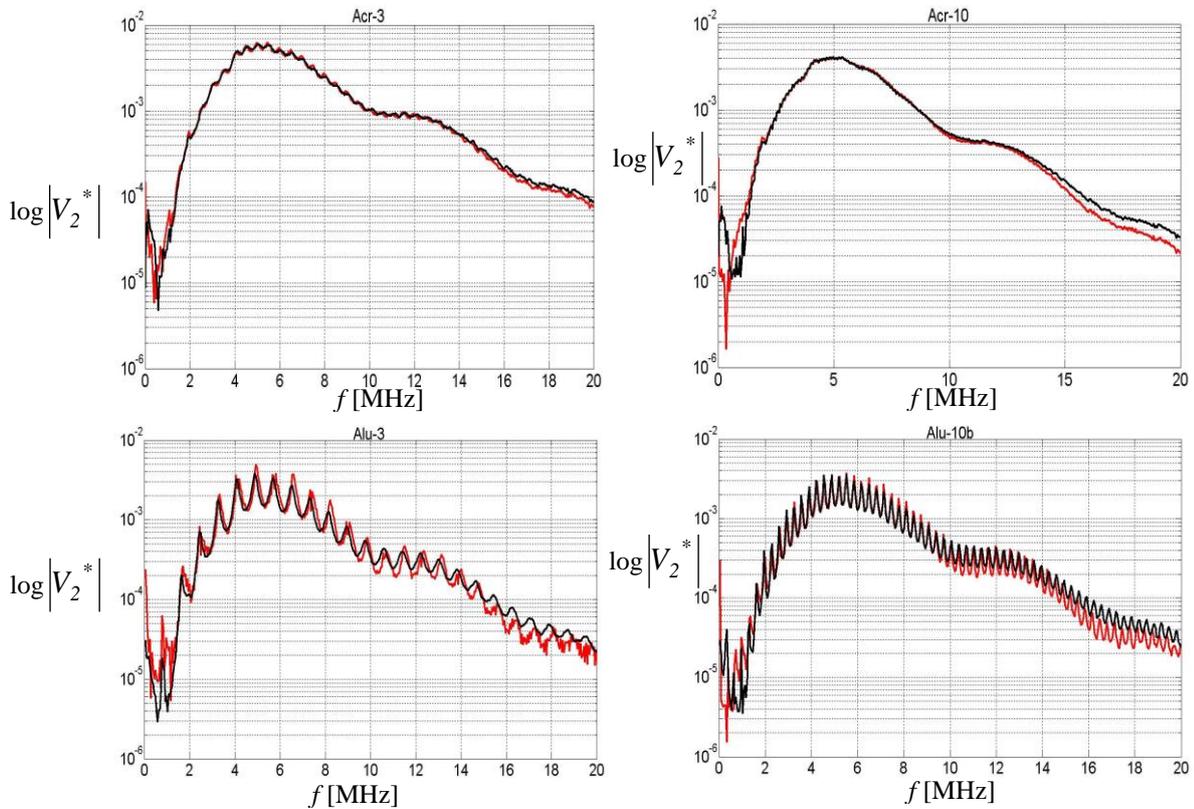


Figura 7.8. Espectros de amplitud de las señales experimentales (rojo) y de las obtenidas a partir del modelo (negro) con valores de parámetros estimados por PI utilizando la Configuración II.

## 7.4 Materiales de dos capas

Se utilizaron para esta etapa del trabajo las señales obtenidas con la Configuración II, que tienen errores de medición menores. Como se trata de materiales unidos entre sí por presión es factible que en las interfaces quede una pequeñísima cantidad de agua que, aunque tenga un espesor de micrones, puede influir mucho en los resultados de las mediciones. En los apilamientos de discos de metales, que son poco atenuadores, aparece además el error que provoca la conversión de modo en los bordes. La onda de corte se propaga sin atenuarse a las sucesivas capas, generando más ondas de corte. Este último factor se incluye dentro de los errores de modelado, ya que la representación equivalente del arreglo experimental utilizado en esta tesis no contempla

la propagación de este tipo de ondas. Por lo tanto, a medida que la cantidad de capas aumente se espera que los resultados tengan mayores errores.

En primer lugar se resolvió el PI formando materiales de dos capas, una de acrílico y otra de aluminio. La transmisión se hizo en uno y otro sentido para probar la repetibilidad de los resultados. En la [Tabla 7.7](#) se dan los valores de los parámetros obtenidos utilizando las mediciones hechas con el transductor con  $f_c=5,5$  MHz. Los subíndices de los parámetros indican el orden de la capa.

Tabla 7.7. Parámetros estimados por el PI en materiales de dos capas.

Material	Acr-3 Alu-10b	Alu-10b Acr-3	Acr-10 Alu-10b	Alu-10b Acr-10
$Z_1$ [MRayls]	3,1628	17,3299	3,1809	16,9720
$\tau_1$ [ $\mu$ s]	0,9974	1,5354	3,7283	1,5502
$c_1$ [m/s]	2643,3	6447,8	2655,4	6437,9
$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1196,5	2687,7	1197,9	2636,3
$M_1$ [Gpa]	<b>8,36</b>	<b>111,74</b>	<b>8,45</b>	<b>109,26</b>
$Z_2$ [MRayls]	16,5451	2,9562	17,6972	2,9113
$\tau_2$ [ $\mu$ s]	1,5355	0,9902	1,5497	3,7337
$c_2$ [m/s]	6447,4	2635,8	2748,0	2651,5
$\rho_2$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2566,2	1121,5	6440,0	1098,0
$M_2$ [Gpa]	<b>106,67</b>	<b>7,79</b>	<b>113,97</b>	<b>7,72</b>

Puede verse que los valores de los parámetros estimados están en concordancia con los valores verdaderos calculados para cada material ([Tabla 7.3](#)), siendo los errores en el módulo elástico de entre 1% y 5 %.

Los valores estimados son sensibles a la impedancia  $Z_L$  usada en el modelo, que como ya se explicó, no es la misma en todos los casos. Por lo tanto, la incorrecta determinación de ese valor puede ser otra fuente de error. Lo que se propone, para comprobar la bondad de las estimaciones es hacer una comparación de la relación entre los módulos elásticos reales y los estimados. Esta comparación se da en la [Tabla 7.8](#), donde se ve que la relación estimada es muy cercana a la real.

Tabla 7.8. Comparación de la relación de módulos elásticos.

Material	$M_2^v/M_1^v$	$M_2/M_1$
Acr-3 Alu-10b	13,62	12,75
Alu-10b Acr-3	0,07	0,07
Acr-10 Alu-10b	12,63	13,45
Alu-10b Acr-10	0,07	0,07

Si bien para los materiales homogéneos se estima un modelo de atenuación que ajusta bien a las curvas experimentales, los valores de los parámetros de atenuación,  $\alpha_0$  y  $\eta$ , estimados en los casos de materiales en capas no coinciden con aquellos estimados para los materiales homogéneos. Sin embargo, los valores de la impedancia acústica y de los tiempos de tránsito obtenidos al resolver el PI son cercanos a los verdaderos, aunque como se esperaba tienen un mayor error que los estimados para los materiales homogéneos. Por lo tanto, se toman las estimaciones de los parámetros de la atenuación como valores de ajuste que permiten obtener correctamente el resto de los parámetros buscados. Una posible justificación de la discrepancia entre los valores estimados en los diferentes casos se da en la sección 7.6, donde, a partir de mediciones simuladas se postula una hipótesis acerca de la causa de estos resultados.

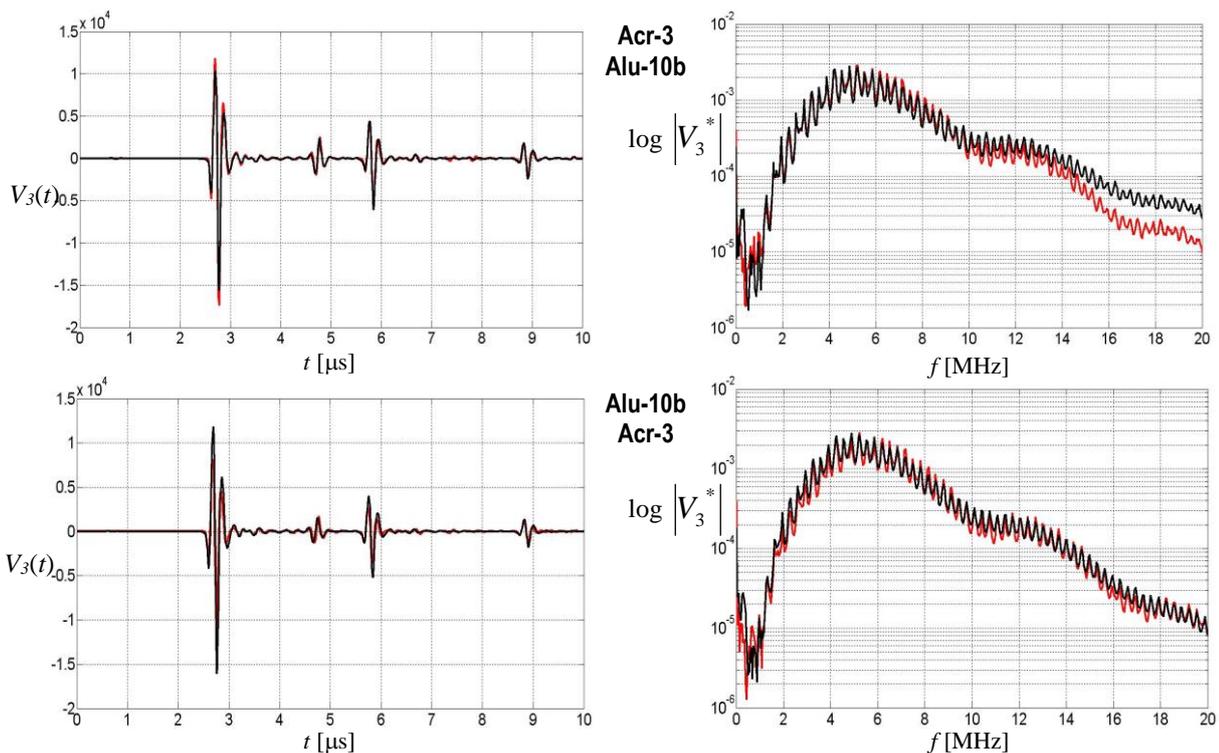


Fig. 7.9. Formas de onda experimentales (rojo) y calculadas por el modelo (negro) con parámetros estimados por el PI para capas de Acr-3 Alu-10b

Las curvas de las mediciones experimentales y sus espectros de amplitud se muestran en las [Fig. 7.9](#) y [7.10](#) junto a las obtenidas por el modelo a partir de la simulación con los parámetros de la [Tabla 7.7](#). Puede verse que el modelo, con los ajustes hechos por los parámetros de la atenuación, representa muy bien a la situación

física. Además, el ajuste del modelo, en especial en el rango de frecuencias con mayor contenido de potencia, es mejor para los materiales en los que hay más atenuación, es decir, los apilamientos con la capa de acrílico de mayor espesor.

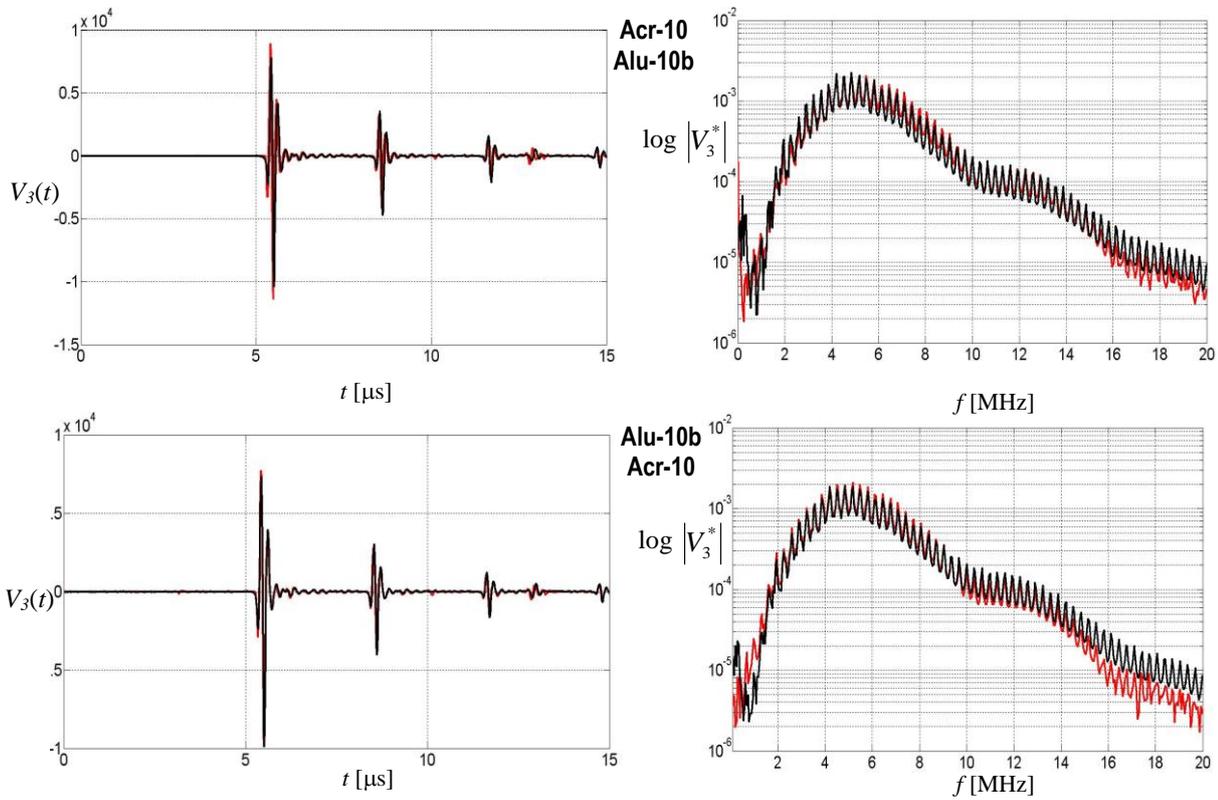


Fig. 7.10. Formas de onda experimentales (rojo) y calculadas por el modelo (negro) con parámetros estimados por el PI para capas de Acr-10 Alu-10b

### 7.5 Materiales de tres capas

La metodología se probó también en materiales formados por tres capas de acrílico y aluminio (Acr-3 Alu-10b Acr-10) registrando la onda transmitida en ambos sentidos. Los parámetros estimados en ambos casos,  $Z$  y  $\tau$ , se dan en la [Tabla 7.9](#) junto a las propiedades mecánicas calculadas a partir de ellos,  $c$ ,  $\rho$  y  $M$ . Nuevamente los subíndices de los parámetros indican el orden de las capas.

Puede verse en la tabla que el error en los valores estimados oscila entre un 1% y hasta un 14%, mayor que en los casos de 2 capas como ya se había adelantado.

Las formas de onda que se obtienen a partir del modelo muestran un buen ajuste a las mediciones experimentales, tal como se muestra en la [Fig. 7.11](#), en particular en el

caso Acr-3 Alu-10 Acr-10. Cuando las muestras se ensayan en sentido contrario aparece una mayor diferencia entre el espectro experimental y el simulado a partir de los valores de parámetros estimados, en especial en alta frecuencia.

Tabla 7.9. Parámetros estimados por el PI en materiales de tres capas.

	Acr-3 Alu-10 Acr-10	Acr-10 Alu-10 Acr-3
$Z_1$ [MRayls]	3,39	2,85
$\tau_1$ [ $\mu$ s]	1,00	3,72
$c_1$ [m/s]	2599,08	2685,39
$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1305,30	1060,62
$M_1$ [GPa]	<b>8,82</b>	<b>7,64</b>
$Z_2$ [MRayls]	16,87	18,69
$\tau_2$ [ $\mu$ s]	1,55	1,55
$c_2$ [m/s]	6388,33	6386,27
$\rho_2$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2640,18	2927,36
$M_2$ [GPa]	<b>107,75</b>	<b>119,39</b>
$Z_3$ [MRayls]	3,07	3,54
$\tau_3$ [ $\mu$ s]	3,72	1,02
$c_3$ [m/s]	2683,59	2569,91
$\rho_3$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1144,66	1378,18
$M_3$ [GPa]	<b>8,24</b>	<b>9,10</b>

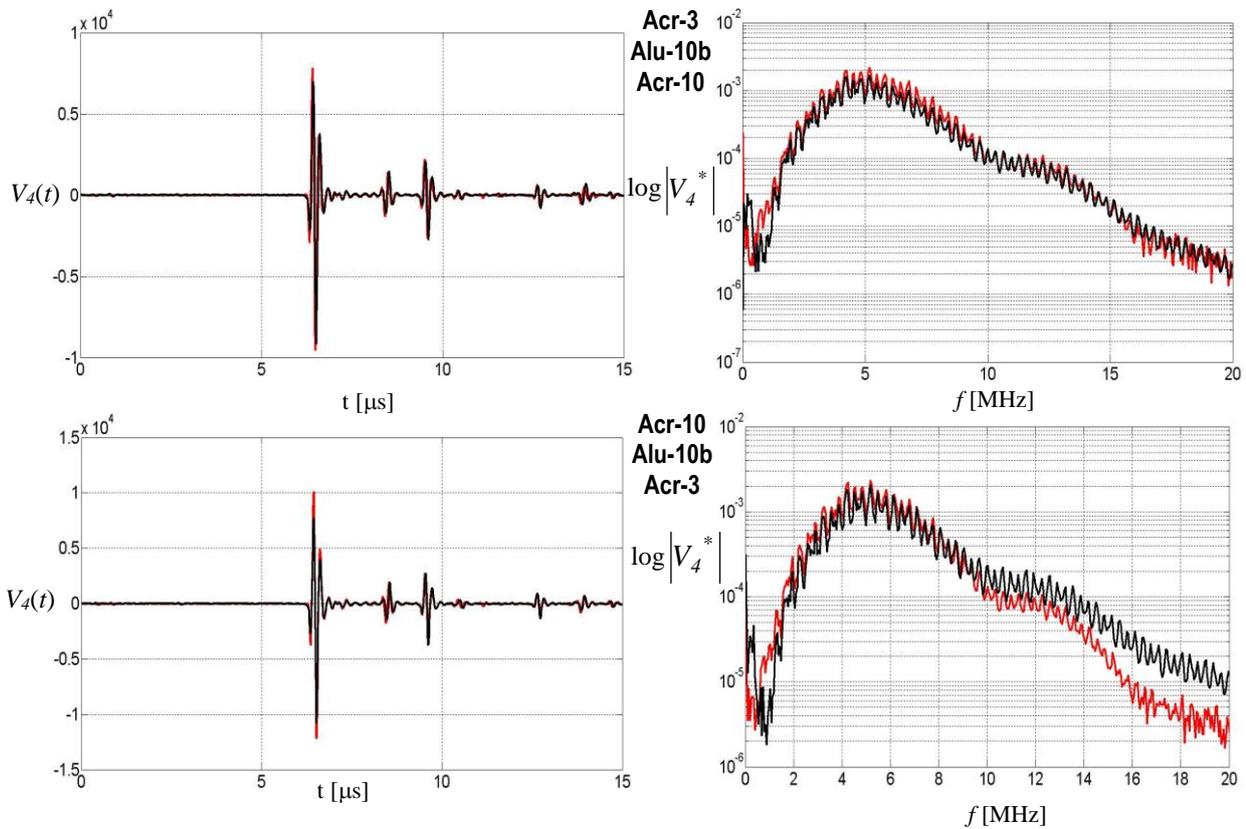


Figura 7.11. Formas de onda experimentales (rojo) y calculadas por el modelo (negro) con parámetros estimados por el PI para tres capas.

## 7.6 Posibles causas de los errores en la estimación de los parámetros de la atenuación en materiales en capas

Como se mencionó en la sección 7.5, los valores de  $\alpha_0$  y  $\eta$  obtenidos para cada capa cuando se estudiaron los materiales compuestos no coinciden con los obtenidos para los materiales homogéneos, que se toman como verdaderos. Se plantea la hipótesis de que la causa de dicha discrepancia sea el fluido (agua, aire, glicerina) que pueda haber quedado atrapado en las interfaces de las muestras. El modelo equivalente no contempla esta situación y por lo tanto, al utilizarlo, se está incurriendo en un error de modelado.

Para estudiar el efecto que esto tendría en las estimaciones se simuló la situación ilustrada en la [Fig. 7.12](#), donde se agregaron capas de agua en las interfaces. Los valores de las propiedades del agua considerados para las simulaciones son los que se muestran en la [Tabla 7.10](#). Además, los datos simulados se perturbaron con ruido aditivo gaussiano con desviaciones estándar del 1% y el 5% del máximo de la señal temporal. Luego, a partir de esas mediciones simuladas, se resolvió el PI suponiendo que las capas estaban en perfecto contacto, tal como se resolvió en los casos experimentales.

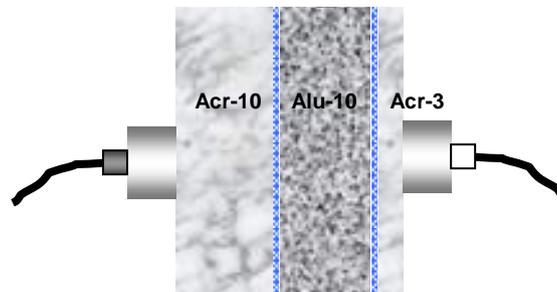


Figura 7.12. Esquema simulado con agua en las interfases.

Tabla 7.10. Propiedades físicas del agua.

$c$ [m/s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$d$ [μm]	$\alpha_0$	$\eta$
1650	1002	10	$5,4967e^{-15}$	2

Los valores estimados de los cuatro parámetros se dan, junto con los valores verdaderos, en la [Tabla 7.11](#). Allí se observa que, como podía esperarse, a medida que se incrementa el nivel de ruido los errores en las estimaciones también aumentan. Puede

observarse que los errores en  $Z$  están dentro de un 0,1 % y un 9 %, y los de  $\tau$  entre un 0,15 % y un 1 %; sin embargo, los errores en  $\alpha_0$  van del 16 % hasta un 800 % y los de  $\eta$  van del 1,4 % al 70 %. De esto puede deducirse que los parámetros de la atenuación son mucho más sensibles que las impedancias acústicas y los tiempos de tránsito al error de modelado que implica el no considerar el fluido atrapado en las interfaces.

Tabla 7.11. Valores de parámetros estimados con error de modelado y diferentes niveles de ruido

	Valor verdadero	std $_{\epsilon}$ =0%	std $_{\epsilon}$ =1%	std $_{\epsilon}$ =5%
$Z_1$ [MRayls]	3,195	3,192	3,192	2,990
$\tau_1$ [ $\mu$ s]	3,724	3,736	3,736	3,736
$\alpha_1$	$8,18e^{-4}$	$9,6e^{-4}$	$1,2e^{-2}$	$1,75e^{-3}$
$\eta_1$	0,6660	0,6568	0,6433	0,6231
$Z_2$ [MRayls]	17,009	17,383	17,428	17,183
$\tau_2$ [ $\mu$ s]	1,566	1,563	1,563	1,564
$\alpha_2$	$8,10e^{-3}$	$1,53e^{-2}$	$2,10e^{-2}$	$7,60e^{-2}$
$\eta_2$	0,4863	0,4474	0,4292	0,3553
$Z_3$ [MRayls]	3,052	3,026	3,001	2,773
$\tau_3$ [ $\mu$ s]	1,148	1,159	1,159	1,158
$\alpha_3$	$1,22e^{-2}$	$4,76e^{-4}$	$1,64e^{-4}$	$3,31e^{-5}$
$\eta_3$	0,5387	0,7341	0,7965	0,9077

Incluso en el caso en que no hay ruido agregado, los valores estimados para los parámetros de la atenuación hacen que las curvas de  $\alpha(\omega)$  sean diferentes de la considerada verdadera. En la [Fig. 7.13](#) se grafican las curvas obtenidas a partir de los parámetros estimados y las verdaderas para las tres capas.

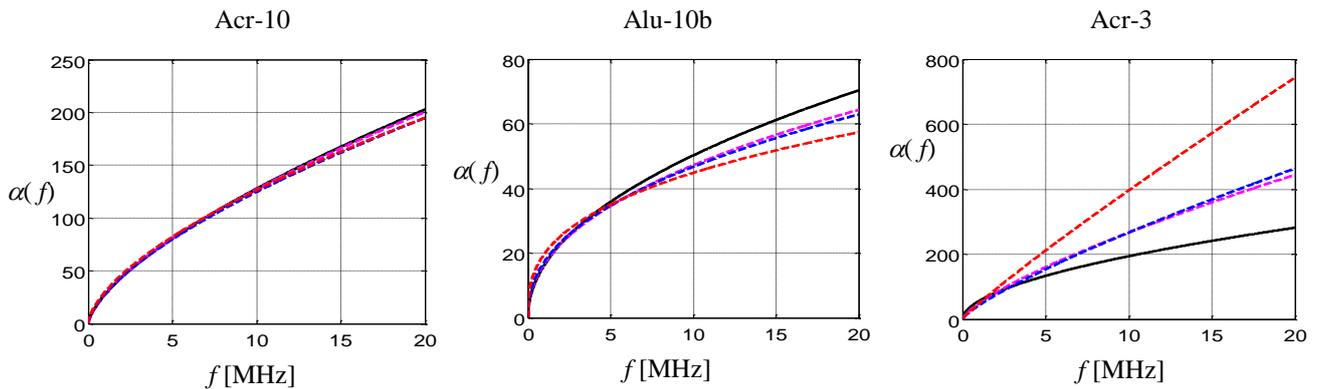


Fig. 7.13. Curvas de atenuación — verdadera, y estimadas con error de modelado:   
 ..... sin ruido aditivo; ---- std $_{\epsilon}$ =1 %; ---- std $_{\epsilon}$ =5 % (Acr-10 Alu-10b Acr-3)

En los gráficos puede verse que los errores en las estimaciones son mayores a medida que la capa correspondiente se halla más alejada del emisor. Para verificar que esta afirmación es general, se simuló el mismo caso pero con la onda propagándose en sentido contrario, es decir, de Acr-3 a Acr-10. Las curvas obtenidas con los parámetros así estimados se muestran en la [Fig. 7.14](#), donde se observa que, efectivamente, los errores en las estimaciones son mayores a medida que la capa está más alejada del emisor.

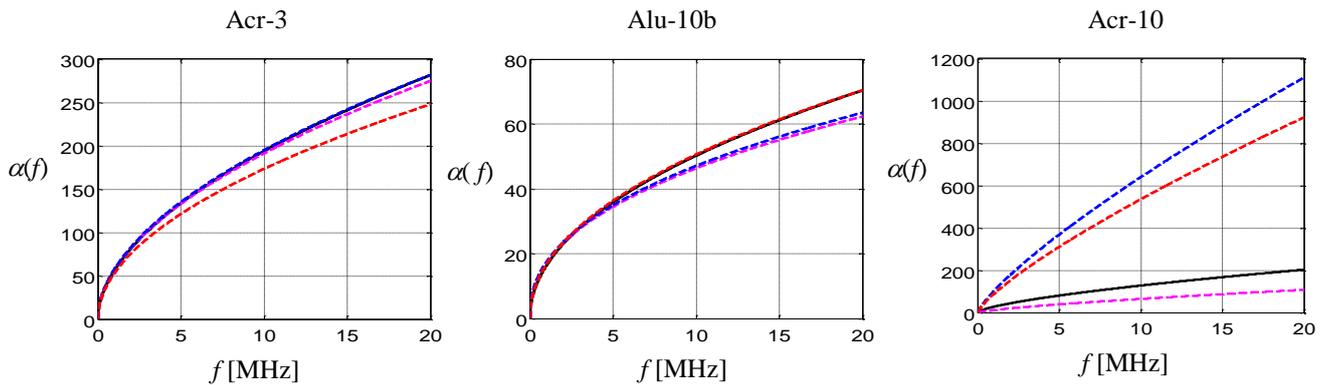


Fig. 7.14. Curvas de atenuación — verdadera, y estimadas con error de modelado:   
 ..... sin ruido aditivo; .....  $\text{std}_\epsilon=1\%$ ; .....  $\text{std}_\epsilon=5\%$  (Acr-3 Alu-10b Acr-10)

En base a lo analizado en este apartado se puede concluir que es correcta la suposición de que los errores en las estimaciones de los parámetros de la atenuación se debe a que éstos son más sensibles a los errores de modelado que las impedancias acústicas y los tiempo de tránsito.

Puede observarse que en la [Tabla 7.11](#) los valores verdaderos de  $\tau$  difieren levemente de los dados en la [Tabla 7.3](#). Esto se debe a que los espesores de las muestras consideradas para estas simulaciones son distintos de los espesores de las muestras ensayadas en los casos experimentales.

## Conclusiones

En esta tesis se desarrolla y analiza una metodología para caracterizar materiales compuestos por capas. La caracterización consiste, en este caso, en la identificación de una serie de parámetros que se relacionan con ciertas propiedades físicas del material estudiado. En particular, se obtiene la velocidad de propagación, la densidad y el módulo de onda longitudinal correspondientes a cada capa. En el caso de materiales homogéneos también se logra hacer una caracterización de la atenuación en función de la frecuencia.

La situación que se estudia puede enmarcarse dentro de los denominados Problemas Inversos, un tipo de problemas que aparece en diversos campos de aplicación en la ingeniería. Más específicamente, se trata de un problema de estimación de parámetros, cuya solución se encuentra minimizando un funcional de costo no lineal planteado como el valor cuadrático medio de la diferencia entre los datos experimentales y las formas de onda obtenidas a partir de un modelo equivalente. Las mediciones experimentales son las señales registradas en un extremo de la muestra, generadas a partir de ensayos de transmisión de ondas de ultrasonido y que representan la tensión mecánica en esa cara del material. Se utilizaron para este fin dos configuraciones experimentales diferentes.

El fenómeno de propagación de una onda por un medio elástico es representado por una ecuación en derivadas parciales, que tienen una solución exacta, dadas la excitación, las condiciones iniciales y las de contorno. En general, la solución se encontrará en forma numérica aplicando métodos ampliamente probados que utilizan elementos finitos o elementos de contorno. Todos estos métodos implican una

discretización geométrica de la pieza a estudiar así como una discretización temporal de las señales, por lo que se vuelven extremadamente costosos si se quiere obtener una buena resolución en la solución. La utilización de un modelo equivalente permite mejorar la eficiencia del cálculo, siempre y cuando la situación física cumpla con ciertos supuestos.

La propagación de una onda de ultrasonido a través de un medio elástico se representa en esta tesis utilizando el modelo equivalente de una línea de transmisión eléctrica tipo T. Este modelo se basa en la analogía electro-mecánica entre variables acústicas y eléctricas y queda planteado en el dominio de la frecuencia, por lo que no depende de la discretización geométrica de la muestra, permitiendo calcular las tensiones mecánicas y las velocidades de las partículas únicamente en las interfaces de las capas, lo que resulta información suficiente para resolver el PI planteado.

La idea que impulsó el desarrollo de este trabajo es la de contar con una herramienta eficiente desde el punto de vista numérico que permita extraer características de materiales en capas de forma metodológica, sin intervención del criterio de un operador. La economía de cálculo es crucial cuando se trata de aplicaciones en las que se requieren decisiones rápidas basadas en predicciones por modelos.

Tres etapas fundamentales componen este estudio:

#### ➤ **El Problema Directo**

Se simularon diferentes variantes de la propagación de una onda de ultrasonido por un material compuesto por capas utilizando el método de los elementos finitos y se compararon las tensiones mecánicas desarrolladas en las interfaces de la muestra con las obtenidas a partir del modelo equivalente.

El modelo equivalente se amplió para incluir el efecto de la atenuación, proponiéndose un modelo en el que la misma depende de la frecuencia según una ley potencial.

- Se comprobó que el modelo equivalente representa bien la situación física que se pretende analizar en las interfaces, siempre y cuando éstas sean perfectamente paralelas y la incidencia de la onda sea normal.
- Se comprobó también la robustez del modelo equivalente permitiendo su aplicación aún en casos donde el mismo es aproximado, como cuando la hipótesis de interfases paralelas no se cumple.
- También se verificó en esta instancia que el uso del modelo equivalente aporta un gran ahorro de tiempo de cómputo, siendo los cálculos entre 30 y 50 veces más rápidos que con el método de los elementos finitos. Esta ventaja se ve multiplicada cuando se enfrenta el PI, en el que el PD debe resolverse muchas veces.

#### ➤ **El Problema Inverso utilizando datos simulados**

Se simularon diferentes situaciones para estudiar las características de unicidad, existencia y estabilidad del PI. También se analizó la posibilidad de hallar una solución cuando existen errores en el modelo.

Los parámetros que se identificaron a partir de la resolución del PI con datos simulados son la impedancia de carga, el tiempo de tránsito y la atenuación de cada una de las capas.

- Para analizar la existencia y la unicidad de la solución se estudiaron las características del funcional de costo en materiales individuales y en materiales en capas dejando algunos parámetros fijos en sus valores reales. Se concluyó que el problema, a pesar de tener una solución única, tiene una importante cantidad de mínimos locales que pueden hacer que el algoritmo de minimización no converja a la solución óptima.
- La cantidad de mínimos locales depende del rango de frecuencias elegido para hacer los cálculos. Cuando se opera en la banda de mayor contenido de potencia del espectro aparecen más mínimos locales que al operar en la banda de bajas frecuencias. Sin embargo, en esta última situación la convergencia es mucho más lenta y empeora la relación señal/ruido.

- Se postula que la presencia de los mínimos locales se debe a que los tiempos de tránsito aparecen en las ecuaciones del modelo como argumentos de funciones trigonométricas, lo que genera relaciones cíclicas que se ven reflejadas en el espacio de soluciones.
- La estrategia que se decidió emplear consiste en hacer una selección previa del valor inicial de los parámetros que resultan críticos, en este caso los tiempos de tránsito. Éstos se eligen a partir de la observación de las señales temporales.
- Los valores iniciales de las impedancias acústicas pueden elegirse arbitrariamente, ya que se evaluó que los mismos no condicionan la convergencia a la solución óptima.
- El análisis realizado a partir de datos perturbados con ruido de diferente intensidad hizo posible evaluar la estabilidad del PI. Esos datos se generaron agregando ruido gaussiano de diferente desviación estándar a las mediciones simuladas con el modelo equivalente.
- La identificación de los parámetros a partir de mediciones simuladas con elementos finitos, con errores de modelado, contiene errores que están dentro del rango de lo aceptable.
- El valor de la impedancia de carga,  $Z_L$ , debe poder determinarse previamente a la resolución del PI, ya que del conocimiento de su valor depende la identificación del resto de las impedancias. No es posible identificarla como un parámetro más, debido a que la misma está relacionada con las impedancias del material mediante relaciones linealmente dependientes dadas por los coeficientes de transmisión y reflexión acústica.
- Los valores de los tiempos de tránsito y de la atenuación son independientes del valor de  $Z_L$ . Luego, las posibles imprecisiones en la determinación de los valores de la impedancia de carga no afectarán las estimaciones de dichos parámetros.
- Se estimaron correctamente los parámetros que caracterizan materiales atenuadores, considerando que la atenuación es función de la frecuencia

siguiendo una ley potencial. Para ello se resolvió el PI utilizando datos simulados para el caso de materiales compuestos hasta por cuatro capas.

### ➤ **El Problema Inverso utilizando datos experimentales**

Se resolvió el PI para caracterizar materiales de dos y tres capas y también para materiales homogéneos donde, además, se hizo un estudio detallado de la atenuación en función de la frecuencia.

Al trabajar con señales experimentales existirán, además de los errores de modelado antes mencionados, errores de medición aportados por:

- El acoplante entre transductor y muestra, que además influye en el valor de la impedancia de carga.
- El aire o el agua atrapados entre las capas.
- La falta de alineación de los transductores.

El primero de los errores mencionados es de importancia en la denominada Configuración I. Las señales obtenidas con la Configuración II son menos ruidosas y, por lo tanto, son las que se utilizaron para resolver el PI en materiales de dos y tres capas.

- En cuanto a los materiales homogéneos, el PI permitió arribar a valores de parámetros muy cercanos a los valores verdaderos medidos previamente en forma directa.
- El estudio de la atenuación permitió identificar la relación de este fenómeno con la frecuencia, obteniéndose curvas de atenuación que se ajustan bien a las experimentales. La ley potencial propuesta incluye también al modelo de atenuación constante y al de atenuación lineal. Se hizo una comparación del ajuste de cada uno de estos modelos a los datos experimentales y se concluyó que el modelo de ley potencial general es más adecuado, en el rango de frecuencias donde la función toma valores significativos, que el lineal o el de atenuación constante, que son dos modelos muy utilizados cuando se trata de representar materiales atenuadores.
- En cuanto al tipo de materiales que permite analizar esta metodología, se observa que se obtienen mejores resultados en el caso de los materiales más

atenuadores, como el acrílico. En las mediciones tomadas en metales aparecen ondas provenientes de la conversión de modo en los bordes de la muestra, situación que no está contemplada en el modelo y puede incluirse dentro de sus errores.

- También se observa que el modelo aproxima mejor a las señales experimentales en los materiales de mayor espesor. Este hecho se supone relacionado con lo anterior: en los materiales más delgados las ondas de corte no llegan a atenuarse (como en el caso de Aluminio 3). Sin embargo, esta característica queda determinada también por la frecuencia central del transductor y la duración temporal de la señal de excitación. Señales de menor duración temporal (mayor ancho de banda) permitirán evaluar muestras de menor espesor. Por otro lado, cuando el material es muy atenuador o muy largo el recorrido de la onda, puede ser que no se reciba onda en absoluto. Por lo tanto debe evaluarse en cada caso particular la potencia de la señal, la frecuencia adecuada del transductor piezoeléctrico y su factor de calidad, del cual depende la duración temporal del pulso transmitido.
- En cuanto a los materiales de dos y tres capas, se observa que conforme crece el número de capas los errores son más importantes. Esto era esperable dados los errores de medición mencionados más arriba. De hecho, no es posible determinar los parámetros relacionados con la atenuación,  $\alpha_0$  y  $\eta$ , en estos casos. Sin embargo, la estimación del módulo de onda longitudinal, que es la constante elástica que caracteriza a cada capa, se lleva a cabo en todos los casos con errores dentro del rango aceptable.
- A partir de las mediciones simuladas fue posible identificar correctamente los parámetros  $\alpha_0$  y  $\eta$ . Sin embargo, en los casos experimentales estudiados no se pudieron estimar dichos valores en los materiales en capas. Se plantea que la causa de esta imposibilidad es el error de modelado en que se incurre cuando no se consideran los fluidos que pueden quedar atrapados en las interfases.

## Conclusiones generales

- Se desarrolló una metodología que permite realizar la caracterización de propiedades acústicas de un material en capas.
- La metodología permite, además, identificar la relación de la atenuación con la frecuencia utilizando una única medición.
- Los parámetros que determinan la ley de atenuación son más sensibles que los otros parámetros a los errores de modelado. Esto se observa, en particular, en los resultados obtenidos a partir de las mediciones experimentales para materiales en capas.
- La resolución del PI utilizando el modelo equivalente es mucho más eficiente que la que pueda hacerse por otros métodos numéricos que impliquen discretización geométrica de la pieza. Esto es una ventaja importante cuando la aplicación de la metodología requiere una rápida toma de decisiones.
- Con esta herramienta podría, en principio, analizarse cualquier tipo de material y con variadas dimensiones, siempre y cuando no se aleje demasiado de la hipótesis de onda plana sostenida por la restricción geométrica de interfases paralelas. La única consideración adicional que debe hacerse es la selección adecuada del transductor ultrasónico.

## Apéndice

### Algoritmo de Levenberg-Marquardt

Es un algoritmo iterativo de minimización en el que el método de optimización presenta una ligera modificación respecto del de Gauss-Newton y es especialmente apropiado para modelos no lineales.

El objetivo es minimizar la suma de errores cuadráticos entre los datos,  $d_i$ , y la función que se obtiene del modelo,  $G(\mathbf{m}, x_i)$ :

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{G(\mathbf{p}, x_i) - d_i}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N (f_i(\mathbf{p}))^2$$

y

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{p}) \\ \dots \\ f_N(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

El gradiente de  $f(\mathbf{p})$  puede expresarse como la suma de los cuadrados de los términos individuales:

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \nabla (f_i(\mathbf{p})^2) = \sum_{i=1}^N 2f_i(\mathbf{p}) \mathbf{F}(\mathbf{p})$$

Esta última ecuación puede simplificarse haciendo uso de notación matricial:

$$\nabla f(\mathbf{p}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^T \mathbf{F}(\mathbf{p})$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{p})$  es la matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{p})}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial f_N(\mathbf{p})}{\partial p_n} \end{bmatrix}$$

De manera similar puede expresarse el Hessiano de una matriz en términos de las funciones individuales:

$$\nabla^2 f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \nabla^2 (f_i(\mathbf{p})^2) = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}^i(\mathbf{p})$$

con

$$H_{j,k}^i = \frac{\partial^2 (f_i(\mathbf{p})^2)}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left( 2f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} \right) = 2 \left( \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} + f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 (f_i(\mathbf{p}))}{\partial p_j \partial p_k} \right)$$

Entonces

$$\nabla^2 f(\mathbf{p}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^T \mathbf{J}(\mathbf{p}) + \mathbf{Q}(\mathbf{p})$$

Esta última ecuación es la que se utiliza en el algoritmo del método de Newton. En el método de Gauss-Newton se omite el término  $\mathbf{Q}(\mathbf{p})$  y se aproxima el Hessiano simplemente por:

$$\nabla^2 f(\mathbf{p}) \approx 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^T \mathbf{J}(\mathbf{p})$$

Las ecuaciones en el método de Gauss-Newton quedan:

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}^k)^T \mathbf{J}(\mathbf{p}^k) (\mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k) = -\mathbf{J}(\mathbf{p}^k)^T \mathbf{F}(\mathbf{p}^k)$$

En el método de Levenberg-Marquardt se modifica la ecuación anterior introduciendo un parámetro  $\gamma$  que se ajusta con las sucesivas iteraciones del algoritmo y tiene como objetivo asegurar la convergencia.

$$(\mathbf{J}(\mathbf{p}^k)^T \mathbf{J}(\mathbf{p}^k) + \gamma \mathbf{I}) (\mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k) = -\mathbf{J}(\mathbf{p}^k)^T \mathbf{F}(\mathbf{p}^k)$$

Para valores grandes de  $\gamma$  se obtiene un comportamiento como el del método del steepest descent, que asegura una convergencia muy lenta pero segura. En cambio, para valores pequeños de  $\gamma$  el comportamiento es como el de Gauss-Newton, que da una convergencia rápida aunque incierta.

## Notación

---

### *Símbolo Descripción*

$Z$	Impedancia acústica
$\rho$	Densidad del material
$c$	Velocidad de propagación de la onda
$P_i$	Presión incidente
$P_t$	Presión transmitida
$P_r$	Presión reflejada
$T$	Coefficiente de transmisión entre dos medios
$R$	Coefficiente de reflexión entre dos medios
$k$	Número de onda
$\omega$	Frecuencia angular
$\alpha(\omega)$	Atenuación dependiente de la frecuencia
$k$	Número de onda complejo
$\alpha_0$	Coefficiente de atenuación
$\eta$	Potencia de la atenuación de ley potencial
$\varepsilon_{ij}$	Componente ij del tensor de deformación
$\sigma_{ij}$	Componente ij del tensor de tensiones
$u_i$	Desplazamiento en la dirección i
$x_i$	Coordenada Euleriana
$C_{ijklm}$	Tensor de componentes elásticos
$\delta$	Delta de Kronecker

$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé
$f$	Frecuencia
$l$	Longitud de onda
$\text{std}_\varepsilon$	Desviación estándar
$\sigma$	Tensión mecánica en la dirección $x$
$\sigma^*$	Transformada de Fourier de la tensión mecánica
$v$	Velocidad de las partículas en la dirección $x$
$v^*$	Transformada de Fourier de la velocidad de las partículas
$Z_L$	Impedancia de carga de la línea de transmisión
$M$	Módulo de onda longitudinal
$d$	Espesor de la capa de material
$\tau$	Tiempo de tránsito de la onda ultrasónica
$E$	Módulo de Young
$G$	Función del modelo
$p$	Parámetros del modelo
$\mathbf{p}$	Vector discreto de parámetros
$\tilde{\mathbf{p}}$	Vector de parámetros estimados
$d$	Datos
$\mathbf{d}$	Vector discreto de datos
$J$	Función a minimizar
$H_E$	Función de transferencia del sistema emisor de la onda
$H_R$	Función de transferencia del sistema receptor de la onda
$H_A$	Función de transferencia del volumen de agua entre transductores y muestra
$H_E$	Función de transferencia del material
$V_I$	Tensión eléctrica de excitación de los transductores
$V_{N+1}$	Tensión eléctrica medida al final de la capa $N$
$V_t$	Tensión eléctrica medida con los transductores en contacto
$f_c$	Frecuencia central de los transductores

## Referencias

---

- 1- Achenbach, JD. *Quantitative nondestructive evaluation*. International Journal of Solids and Structures, 37 (1), 13-27 (2000).
- 2- Kino, GS. *Acoustic Waves: devices, imaging and analog signal processing*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ (1987).
- 3- Cheeke, JDN. *Fundamentals and applications of ultrasonic waves*. CRC Press, LLC (2002).
- 4- Singiresu, SR. *The Finite Element Method in Engineering. 4<sup>th</sup> Edition*. Elsevier Butterworth-Heinemann (2005).
- 5- Gupta, OP. *Finite and Boundary Element Methods in Engineering*. A. A. Balkema, a member of Swets & Zeitlinger Publishers (1999).
- 6- Smith, GD. *Numerical Solution of Partial Differential Equations. Finite Difference Method. 3<sup>rd</sup> Edition*. Clarendon Press, Oxford (1985).
- 7- Rosenbaum, JF. *Bulk Acoustic Wave. Theory and Devices*. Artech House, Boston (1988).
- 8- Ghorayeb, SR; Maione, E; La Magna, V. *Modeling of Ultrasonic Wave Propagation in Teeth using PSpice: a comparisson with Finite Element Models*. IEEE Trans Ultrason Ferroelec Freq Control 48(4), 1124-1131 (2001).
- 9- Castillo, M; Acevedo, P; Moreno, E. *KLM Model for Lossy Piezoelectric Transducer*. Ultrasonics 41, 679-679 (2003).
- 10- Maione, E; Tortoli, P; Lypacewicz, G; Nowicki, A; Resid, JM. *PSpice Modeling of Ultrasonic Transducers: comparisson of Software Models to Experiments*. IEEE Trans Ultrason. Ferroelec. Freq. Control 46, 339-406 (1999).

- 11- Mason, WP. *Electromechanical Transducer and Wave Filters. 2<sup>nd</sup> Edition*. D. Van Nostrand, NY (1948).
- 12- Zambrano, G; Riasco, H; Prieto, P. *Multicapas de metal-cerámico-carbono tipo diamante (DLC): un cambio para la obtención de recubrimientos superduros*. Rev Acad Colomb Cienc, Vol XXVII, n° 103 (2003).
- 13- Gulia, L; Hickman, FE; Forcier, B. *Multilayer material technology for improved signal integrity in the region above 5 GHz*. The Board Authority (2001).
- 14- Toribio, J; Vergara, D; Lorenzo, M; Martín, J.J. *Información del campo tensodeformacional generado por tratamientos térmicos en la fragilización por hidrógeno de la vasija de un reactor nuclear*. Anales de Mecánica de Fractura 28, Vol. 1 (2011).
- 15- Soo Kim, B et al. *Human collagen-based multilayer scaffolds for tendon-to-bone interface tissue engineering*. J. of Biomed. Mater. Res. A. 013 Dec. 2011. doi:10.1002/jbm.a.35057
- 16- Li, H; Vlassak, J.J. *Determining the elastic modulus and hardness of an ultrathin film on a substrate using nanoindentation*. Journal of Material Research 24 (3):1114-1126 (2009)
- 17- Josell, D; van Heerden, D; Shechtman, D; Read, D. *Mechanical properties of multilayer materials*. Nanostructured Materials, Vol. 12, pp 405-408 (1999).
- 18- Pedersen, P.C; Lifshitz, I. *Ultrasound system for acoustic impedance profile reconstruction*. IEEE Engineering in Medicine and Biological Society 10<sup>th</sup> Annual Conference (1988).
- 19- Bochud, N. *Procesado de señal para evaluación no destructiva ultrasónica*. Tesis de Maestría en Sistemas Multimedia, Univ. de Granada (2010).
- 20- Cretu, N; Nita, G. *Pulse propagation infinite elastic inhomogeneous media*. Computational Material Science, 31:326-336 (2004).
- 21- Häggglund, F; Carlson, J.E; Anderson, T. *Ultrasonic classification of thin layers within multi-layer materials*. Meas. Sci. and Tech. 21, 015701, 9 pp (2010).
- 22- Leite, J.B.C; San Emeterio, J.L; Pereira, W.C.A. *Reflection and transmission of plane ultrasonic pulses in a three layers biological structure*. International Congress of Acoustics, ICA, Madrid (2007).

- 23- Rus, G; García- Martínez, J. *Ultrasonic tissue characterization for monitoring nanostructured TiO<sub>2</sub>-induced none growth*. Phys. in Med. and Biol. 52: 3531:3547 (2007).
- 24- Mase, G.T; Mase, G.E. *Continuum Mechanics for Engineers. 2<sup>nd</sup> Ed.* CRC Press LLC (1999).
- 25- Malvern, L.E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, NJ (1969).
- 26- Szabo, T.L. *Time domain wave equation for lossy media obeying a frequency power law*. J. Acoust. Soc. Am. 96 (1) (Jul 1994).
- 27- Szabo, T.L. *Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law*. J. Acoust. Soc. Am. 97 (1) (Jan 1995).
- 28- Chen, W; Holm, S. *fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency*. J. Acoust. Soc. Am. 115 (4) (Apr 2004).
- 29- Treeby, B.E; Cox, B.T. *Modeling power law absorption and dispersion for acoustic propagation using the fractional Laplacian*. J. Acoust. Soc. Am. 127 (5) (May 2010).
- 30- Kennet, B.L.N; Kerry, N.J. *Seismic waves in stratified half space*. Geophys. J. R. Astr. Soc. 57, 557-583 (1979).
- 31- Crampin, S. *A review of the effects of anisotropic layering on the propagation of seismic waves*. Geophys. J. R. Astr. Soc. 49, 9-27 (1977).
- 32- Goldberg, R.L; Smith, S.W. *Multilayer piezoelectric ceramics for two-dimensional array transducer*. IEEE Transactions on Ultrason., Ferroelect. and Freq. Cont. 41 (5) 761.771 (1994).
- 33- Mittal, R; Rus, G; Gallego, R; Lee, S.Y; Park, T. *Mechanical constant characterization of thin layers by low frequency ultrasonics*. CMNE/CILAMSE, Porto, Portugal (2007).
- 34- Berke, M. (Manual Krautkrämer) *Nondestructive Material Testing with Ultrasonics*. [http://www.krautkramer.com.au/Nondestructive\\_Testing.pdf](http://www.krautkramer.com.au/Nondestructive_Testing.pdf)
- 35- Hueter, T.F; Bolt; R.H. *Sonics. Techniques for the use of sound and ultrasound in engineering and science*. John Wiley & Sons, Inc., NY (1955).

- 36- Krautkrämer, J; Krautkrämer, H; Grabendörfer, W; Niklas, L. *Ultrasonic Testing of Materials*. Springer-Verlag, Berlín (1969).
- 37- Rosenbaum, J. *Bulk acoustic waves. Theory and devices*. Artech House, Inc. Norwood, USA (1988).
- 38- Aster, R; Borchers, B; Thurber, C. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier Academic Press, USA (2003).
- 39- Marquardt, D. *An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters*. SIAM J. Appl. Math. 11:431-441 (1963).
- 40- Otero, F.A. *Caracterización de sistemas de partículas por dispersión de luz. Estimación de parámetros y problema inverso*. Tesis de Doctorado de Ingeniería con Orientación Electrónica, UNMDP (2012).
- 41- Hansen, P.C. *Rank-Deficient and discrete ill-posed problems*. SIAM (1998).
- 42- Pannell, D.J. *Sensitivity analysis of normative economic models: Theoretical framework and practical strategies*, Agricultural Economics 16: 139-152 (1997).
- 43- Martinsson, J; Häggglund, F; Carlson, J.E. *Complete post-separation of overlapping ultrasonic signals by combining hard and soft modeling*. Elsevier Ultrasonics (2008).
- 44- Schmerr, L.W. Jr; Song Sung-Jin. *Ultrasonic nondestructive evaluation system. Models and measurements*. Springer Science + Business Media, LLC (2007).
- 45- Umchid, S. *Frequency dependent ultrasonic attenuation coefficient measurement*. 3<sup>rd</sup> International Symposium on Biomedical Engineering, pp: 234-238 (2008).